УДК 512.626

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ И КЛАССИЧЕСКИЙ ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ

С.В. Востоков, М.А. Иванов

Аннотация

Построены явные формулы для символа норменного вычета и произведения степенных вычетов. Это позволяет установить аналогию между законом взаимности в поле алгебраических чисел и теоремой Коши о вычетах из комплексного анализа.

Ключевые слова: закон взаимности, символ норменного вычета, интеграл Шнирельмана.

Введение

Аналогия в математике играет чрезвычайно важную роль. С одной стороны, она двигает разные направления в математике вперед, а с другой – проявляет (выявляет) суть вещей. Например, в такой классической науке, как теория чисел, которая в первооснове своей представляет нечто дискретное, есть множество понятий и фактов, которые глубоко связаны, аналогичны понятиям и результатам из такой воплощающей непрерывность математической дисциплины, как теория функций (подробнее см. [1]). Идею об аналогии чисел и функций впервые высказал Леопольд Кронекер, который говорил, что простые идеалы в теории алгебраических чисел играют ту же роль, что и точки римановой поверхности в полях алгебраических функций, при этом простым делителям дискриминанта числового поля соответствуют точки ветвления римановой поверхности и т. д. Давид Гильберт был первым, кто начал реально исследовать аналог абелевых интегралов из теории алгебраических функций в полях алгебраических чисел.

В своей 9-й проблеме он формулирует закон взаимности для локальных символов степенных вычетов:

$$\prod_{\wp}\left(\frac{\alpha,\,\beta}{\wp}\right)=1 \tag{1}$$

и говорит, что он напоминает интегральную теорему Коши, согласно которой интеграл, охватывающий все особые точки, всегда равен нулю (см. [2, с. 367–368]). Позже И.Р. Шафаревич его поправляет и утверждает, что этот закон взаимности является аналогом следствия теоремы Коши о том, что сумма вычетов абелева дифференциала $\alpha\,d\beta$ во всех точках римановой поверхности всегда равна нулю, и с этой точки зрения локальный символ норменного вычета $\left(\frac{\alpha,\,\beta}{\wp}\right)$ является аналогом абелева дифференциала $\alpha\,d\beta$ в точке $\wp$ (см. [3, с. 114]).

Чтобы прояснить аналогию закона взаимности (1) с тем, что имеется в случае римановой поверхности, рассмотрим поле алгебраических функций $\mathbb{C}(t)$ и точку P на римановой поверхности над расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть t – локальный параметр в точке P. В поле $\mathbb{C}(t)$ есть два простых действия: взятие производной $d=\dfrac{d}{dt}$ и вычет $\mathrm{res}_t\left(\sum a_i t^i\right)=a_{-1}$. Тогда мероморфный дифференциал $\omega=f\,dt$,

определенный в окрестности точки P, имеет лишь конечное число полюсов и при этом имеет место равенство
$$\mathrm{res}(\omega) = 0. \tag{2}$$
С другой стороны, лишь конечное число простых идеалов ветвится в поле алгебраических чисел, значит, лишь конечное число локальных символов норменного вычета отлично от 1. Поэтому корректно определено произведение (1), которое и является аналогом равенства (2), так как каждый локальный символ – аналог абелева дифференциала $\alpha\, d\beta$ в точке $\wp$ (см. формулу (7) ниже).

После развития теории полей классов и доказательства закона взаимности (1) в полной общности (сам Гильберт доказал его в поле $\mathbb{Q}(i)$, дальнейшие результаты получили Ф. Фуртванглер (Ph. Furtwängler), Т. Такаги (T. Takagi), Э. Артин (E. Artin), Х. Хассе (H. Hasse)) был доказан также и классический закон взаимности, который связывает произведение символов степенных вычетов с конечным произведением локальных символов норменного вычета:
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1} = \prod_{\wp | n,\, \infty} \left(\frac{\alpha,\, \beta}{\wp}\right)_n$$
(см. [4]). Последнее равенство должно быть аналогом интегральной теоремы о том, что абелев интеграл дифференциальной формы на римановой поверхности равен сумме вычетов этой формы в особых точках.

В настоящей работе мы показываем в явном виде аналогию локального символа норменного вычета с абелевым дифференциалом $\alpha\, d\beta$ в точке римановой поверхности (см. формулу (7)), а также аналогию закона взаимности с интегральной теоремой Коши в круговом поле (см. формулу (8)).

Для этого мы определяем функцию $\Phi(\alpha,\beta)/s(\zeta)$ для элементов α, β и корня p^n-й степени ζ из кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ и доказываем, что корректно определен интеграл Шнирельмана от этой функции и что он равен вычету функции в особой точке ζ: $\int \Phi(\alpha,\beta)/s(\zeta) = \mathrm{res}\,\Phi(\alpha,\beta)/s$. Далее мы определяем локальный символ норменного вычета $\left(\frac{\alpha,\, \beta}{\zeta - 1}\right)_{p^n}$ (символ Гильберта) и проверяем, что вычет функции $\Phi(\alpha,\beta)/s(\zeta)$ равен этому символу. Тем самым мы получаем основную теорему в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$:
$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{p^n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{p^n}^{-1} & = & \zeta^{\int \Phi(\alpha,\beta)/s} \\ \Vert & & \Vert \\ \left(\frac{\alpha,\, \beta}{\zeta - 1}\right)_{p^n} & = & \zeta^{\mathrm{res}\,\Phi(\alpha,\beta)/s} \end{array}$$
(см. формулы (7) и (8)). Чтобы аналогия с теорией абелевых интегралов была более ясной, мы отдельно рассматриваем частный случай $n = 1$ (см. § 6).

1. Обозначения и определения

K – локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$);
e – абсолютный индекс ветвления поля K, $e_1 = e/(p-1)$;
π – простой элемент поля K;
$\wp$ – простой идеал кольца целых поля K;
ζ – первообразный корень степени p^n из 1, содержащийся в K;

T – подполе инерции в расширении $K/\mathbb{Q}_p$;
$\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля T;
$\triangle$ – автоморфизм Фробениуса в $T/\mathbb{Q}_p$;
$\mathfrak{R}$ – система представителей Тайхмюллера в поле K;
$\mathrm{Tr}: T \to \mathbb{Q}_p$ — оператор следа;
$d = d/dX$.

Пусть произвольный $\alpha \in K^*$ разложен в степенной ряд по простому элементу π с коэффициентами из $\mathfrak{o}$, причем первый коэффициент лежит в $\mathfrak{R}$, то есть

$$\alpha = \theta\pi^m + a_{m+1}\pi^{m+1} + a_{m+2}\pi^{m+2} + \cdots$$

Положим

$$\underline{\alpha}(X) = \theta X^m + a_{m+1}X^{m+1} + a_{m+2}X^{m+2} + \cdots$$

Заметим, что этот ряд лежит в $\mathfrak{o}((X))^*$. Для $\zeta = 1 + c_1\pi + c_2\pi^2 + \cdots$ положим $\underline{\zeta}(X) = 1 + c_1X + c_2X^2 + \cdots$, а $\underline{\zeta}_0(X) = \underline{\zeta}(X) - 1$.

Пусть $s_m(X) = \zeta(X)^{p^m} - 1$. Будем обозначать $s_n(X)$ просто через $s(X)$. Через $u(X)$ обозначим $\dfrac{s_n(X)}{s_{n-1}(X)}$.

Определим, наконец, действие оператора $\triangle$ на ряды из $\mathfrak{o}((X))$:

$$\triangle\Big(\sum_i a_iX^i\Big) = \Big(\sum_i a_iX^i\Big)^{\triangle} = \sum_i a_i^{\triangle}X^{pi}.$$

Построим логарифм Артина–Хассе следующим образом. Для любого $\varphi(X) \in \mathfrak{o}((X))^*$ положим

$$\ell(\varphi) = \frac{1}{p}\log\left(\frac{\varphi^p}{\varphi^{\triangle}}\right).$$

Обратная к нему функция для $\psi \in X\mathfrak{o}[[X]]$ такова:

$$E(\psi) = \exp\left(\left(1 - \frac{\triangle}{p}\right)^{-1}\psi\right) = \exp\left(1 + \frac{\triangle}{p} + \frac{\triangle^2}{p^2} + \cdots\right)(\psi) \qquad (3)$$

Замечание 1.

1. Если α представить в виде $\alpha = a\pi^m\varepsilon$, где $a \in \mathfrak{o}$, ε – главная единица поля K, то получим $\ell(\underline{\alpha}) = \ell(a) + \left(1 - \dfrac{\triangle}{p}\right)\log\underline{\varepsilon}$.

2. Функция ℓ корректно определена, так как если $a \in \mathfrak{o}^*$, то $a^p/a^{\triangle} \equiv 1 \bmod p$, и $\ell(a) \in \mathfrak{o}$.

Предложение 1 [6, Предложение 1].

1. *Функции ℓ и E индуцируют гомоморфизмы*

$$\ell : \mathfrak{o}((X))^* \to \mathfrak{o}[[X]],$$

$$E : X\mathfrak{o}[[X]] \to 1 + X\mathfrak{o}[[X]];$$

2. *Эти гомоморфизмы являются взаимно обратными изоморфизмами между $1 + X\mathfrak{o}[[X]]$ и $X\mathfrak{o}[[X]]$, то есть $E(\ell(\underline{\varepsilon})) = \underline{\varepsilon}$, $\ell(E(\underline{\alpha})) = \underline{\alpha}$, для $\underline{\varepsilon} \in 1 + X\mathfrak{o}[[X]]$ и $\underline{\alpha} \in X\mathfrak{o}[[X]]$.*

3. *Если $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}((X))^*$ и $\underline{\alpha}(X) = aX^r\underline{\varepsilon}(X)$, где $a = \theta a_1 \in \mathfrak{o}^*$, $\theta \in \mathfrak{R}$, $a_1 \equiv 1 \bmod p$, а $\underline{\varepsilon}(X) = 1 + X\mathfrak{o}[[X]]$, то*

$$E(\ell(\underline{\alpha})) = a_1\underline{\varepsilon}(X).$$

Определим важную для наших целей функцию $\Phi(A,B)$ следующим образом:

$$\Phi(A,\, B) = \ell(A) d\, \ell(B) - \ell(A) B^{-1}\, dB + \ell(B) A^{-1}\, dA.$$

Фигурирующее в дальнейших формулах обращение $s(X)$ происходит в двумерном локальном кольце $\mathfrak{o}\{\{X\}\}$, то есть

$$(z^{p^n} - 1)^{-1} = z_0^{-p^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{p^n - 1} C_{p^n}^i z_0^{-i}\right).$$

2. Интеграл Шнирельмана и его свойства

Определение 1. Последовательность многочленов $g_1(X)$, $g_2(X), \ldots$ из $\mathbb{Z}[X]$ будем называется **допустимой**, если для нее выполняются следующие условия:

1) $g_j(X)$ не имеют кратных корней;

2) Если $g_j(X) = X^{n_j} + c_{j,1} X^{n_{j,1}} + \cdots + c_{j,\mu} X^{n_{j,\mu}} + c_0$, то $|n_j|_p = 1$, $|c_0|_p = 1$ и $n_j - n_{j,1} \to \infty$, $n_{j,\mu} \to \infty$.

Обозначим корни g_j через α_1, α_2, $\ldots$, α_{n_j}.

Определение 2. Пусть U – некоторое подмножество $\overline{\mathbb{Q}_p^{alg}}$, $f(x) : U \to \overline{\mathbb{Q}_p^{alg}}$, g_j – допустимая последовательность. Интегралом Шнирельмана с центром x_0 и радиусом r называется следующее выражение:

$$\int\limits_{x_0, r, g} f(x) = \lim_{j \to \infty} \sum_{g_j(\alpha_i) = 0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i).$$

Предполагается, что значения $f(x)$ в точках $x_0 + r\alpha_i$ определены и предел существует. Интеграл Шнирельмана является дискретным аналогом контурного интеграла

$$\oint\limits_{g((z - z_0)/r) = 0} f(z)\, dz.$$

Поэтому естественно называть последовательность g_j «контуром», по которому происходит интегрирование.

В работе [5] были доказаны следующие утверждения:

Предложение 2. *Пусть $P(X) \in K[[X]]$ – степенной ряд, сходящийся в круге радиуса $|r|_p$, а $Q(X) \in K[X]$ – многочлен, не имеющий корней, равных по норме $|r|_p$. Тогда значение $\int\limits_{x_0, r, g} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ определено и не зависит от выбора последовательности многочленов g_j.*

Предложение 3. *Пусть $P(X) \in K[[X]]$ – степенной ряд, сходящийся в круге радиуса $|r|_p$, а $Q(X) \in K[x]$ – многочлен, не имеющий корней, равных по норме $|r|_p$. Тогда $\int\limits_{x_0, r, g} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ равен сумме вычетов функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ по всем полюсам внутри круга радиуса $|r|_p$.*

Эти результаты позволяют опускать индекс g в интеграле и считать последовательность многочленов («контур») такой: $g_j = X^{n_j} - 1$, $(n_j, p) = 1$.

Кроме того, из этих же результатов вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть* $\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ *и* $s(X)$ *– функции, определенные в предыдущем параграфе. Тогда* $\int\limits_{0,p} \Phi(\alpha,\beta)/s = \operatorname{res}_X \Phi(\alpha,\beta)/s$.

3. Символ Гильберта

Пусть поле K содержит все корни степени p^n из 1, μ_n – группа p^n-х корней из 1 в K, $\Psi_K : K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ – отображение взаимности. Тогда определен символ норменного вычета (символ Гильберта).

Определение 3. Символом Гильберта будем называть спаривание

$$(\cdot\,,\,\cdot) = (\cdot\,,\,\cdot)_{n,K} : K^* \times K^* \longrightarrow \mu_n,$$

$$(\alpha,\,\beta)_{n,K} = \widetilde{\beta}^{\Psi_K(\alpha)}/\widetilde{\beta},$$

где $\widetilde{\beta}^{p^n} = \beta$.

Пусть ω – некоторый p^n-примарный элемент в K (то есть $K(\sqrt[p^n]{\omega})/K$ неразветвлено), σ – автоморфизм Фробениуса в максимальном неразветвленном расширении K^{nr}/K. Тогда определен характер на группе всех p^n-примарных элементов Ω: $\chi(\omega) = \sqrt[p^n]{\omega}^{\,\sigma-1} \in \mu_n$, и по определению 3 имеем

$$(\pi,\,\omega) = \chi(\omega) \tag{4}$$

для любого простого элемента π поля K.

Определение 4. Под символом Гильберта будем понимать топологический гомоморфизм $(\cdot\,,\,\cdot)_{n,K} : \mathcal{K}_2(K)^{\mathrm{top}} \longrightarrow \mu_n$ с нормализующим соотношением:

$$(\pi,\omega) = \chi(\omega). \tag{5}$$

Таким образом, $(\cdot\,,\,\cdot)_{n,K}$ – бимультипликативное отображение, которое удовлетворяет соотношению Стейнберга $(\alpha, 1-\alpha) = 1$ для любых $\alpha \neq 0, 1$ и нормированное соотношением (5).

Предложение 5. *Два определения символа Гильберта эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $(\cdot\,,\,\cdot)^{(1)}$ – символ Гильберта из первого определения, а $(\cdot\,,\,\cdot)^{(2)}$ – из второго определения. Проверим сначала, что

$$(\pi,\beta)^{(1)} = (\pi,\beta)^{(2)} \tag{6}$$

для любого простого элемента π и $\beta \in K^*$.

Используя арифметику поля K, элемент β можно представить в виде:

$$\beta = \pi^a \theta \prod_{i\geqslant 1,\, p\nmid i} (1-\theta_i \pi^i)^{a_i} \cdot \omega_\beta,$$

где $a_i \in \mathbb{Z}_p$, θ, θ_i – элементы системы Тайхмюллера, а ω_β – p^n-примарный элемент, ассоциированный с β. Из соотношения Стейнберга, p-делимости группы $\mathfrak{R}$ и равенства (4) следует, что $(\pi,\beta)^{(1)} = (\pi,\omega_\beta)^{(1)} = \chi(\omega_\beta)$.

Аналогично $(\pi,\beta)^{(2)} = (\pi,\omega_\beta)^{(2)} = \chi(\omega_\beta)$, что дает нам (6). Общий случай следует из сказанного, так как мультипликативная группа K^* порождена простыми элементами. □

Теперь можно сформулировать основную теорему.

Теорема 1. *При $p \neq 2$ для символа Гильберта в поле K имеет место следующая формула*

$$(\alpha, \beta)_{n,K} = \zeta^{\overset{\int \Phi(\alpha,\beta)/s}{0,p}} = \zeta^{\mathrm{res}_X \Phi(\alpha,\beta)/s}. \tag{7}$$

Из этой теоремы будет сразу следовать

Теорема 2. *Пусть $\alpha,\, \beta \in \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$. Тогда*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{p^n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{p^n}^{-1} = \zeta^{\mathrm{res}_X \Phi(\alpha,\beta)/s}. \tag{8}$$

Доказательство Теоремы 1. Положим $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Тогда по классическому закону взаимности

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{p^n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{p^n}^{-1} = \prod_{\wp | p^n,\, \infty} \left(\frac{\alpha,\, \beta}{\wp}\right)_{p^n} = \left(\frac{\alpha,\, \beta}{\wp}\right)_{p^n} \left(\frac{\alpha,\, \beta}{\infty}\right)_{p^n}.$$

Второй символ тривиален, так как p нечетно, и остается

$$\left(\frac{\alpha,\, \beta}{\wp}\right)_{p^n} = (\alpha, \beta)_{n,K} = \zeta^{\mathrm{res}_X \Phi(\alpha,\beta)/s}.$$

□

4. Основное соотношение для символа Гильберта

Теорема 3. *Пусть $\alpha, \beta \in K^*$, тогда*

$$(\alpha,\, \beta) = (\pi, E(X\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}))|_{X=\pi}),$$

где $\Phi(\underline{\alpha},\, \underline{\beta}) = \ell(\underline{\alpha}) d\,\ell(\underline{\beta}) - \ell(\underline{\alpha})\underline{\beta}^{-1} d\underline{\beta} + \ell(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1} d\underline{\alpha}$.

Доказательство. 1. Для $\alpha \in \wp$ определим функцию Артина–Хассе

$$\mathcal{E}(\alpha) = \exp(\alpha + \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\alpha^{p^2}}{p^2} + \dots).$$

Тогда выполнено соотношение Кнезера [7]

$$(\mathcal{E}(\alpha),\, \mathcal{E}(\beta)) = \prod_{s \geqslant 0} (-\beta, \mathcal{E}(\alpha\beta^{p^s})) \cdot \prod_{r \geqslant 1} (-\alpha^{-1}, \mathcal{E}(\alpha^{p^r}\beta)) \tag{9}$$

Действительно, из соотношения Стейнберга $(A, 1-A) = 1$, используя в качестве A элемент $\dfrac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}$, получим равенство

$$(1-\alpha,\, 1-\beta) = (1-\alpha,\, 1-\alpha\beta)(-\beta,\, 1-\alpha\beta)(1-\alpha\beta,\, 1-\beta).$$

Покажем, что отсюда следует

$$(1-\alpha,\, 1-\beta) = \prod_{(i,k)=1} (-\alpha^\nu \beta^\tau,\, 1-\alpha^i\beta^k), \tag{10}$$

где $i, k \in \mathbb{N}$, а пара (ν, τ) берется из равенства $\begin{vmatrix} i & \nu \\ k & \tau \end{vmatrix} = 1$.

Равенство (10) тривиально, когда $\alpha\beta \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}^N$ при достаточно большом N. Затем проводится обратная индукция, то есть, предполагая равенство верным для $\alpha\beta \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}^{r+1}$, проверяем его для $\alpha\beta \equiv \bmod \mathfrak{M}^r$, взяв в равенстве (10) вместо пары α, β пары α, $\alpha\beta$ и $\alpha\beta$, β.

Далее, для функции Артина–Хассе справедливо соотношение

$$1-\alpha = \prod_{(m,p)=1} \mathcal{E}(\alpha^m)^{\frac{1}{m}}$$

(см. [4]). Из этого равенства и (10) получаем (9) (подробнее см. [7]).

2. Пусть теперь $E(\underline{\alpha})$ – функция, определенная в (3). Тогда для $\alpha = \theta\pi^m$, $\beta = \theta'\pi^k$, где $\theta, \theta' \in \mathfrak{R}$ справедливо равенство

$$(E(\theta\pi^m),\, E(\theta'\pi^k)) = \Big(\pi,\, E\Big(X\Big(\theta X^m d\Big(1+\frac{\triangle}{p}+\frac{\triangle^2}{p^2}+\cdots\Big)(\theta' X^k) - \\ - \theta' X^k d\Big(1+\frac{\triangle}{p}+\frac{\triangle^2}{p^2}+\cdots\Big)(\theta X^m)\Big)\Big)|_{X=\pi}\Big) \quad (11)$$

Это равенство следует из соотношения (9), бимультипликативности символа Гильберта и равенств $E(\alpha) = \mathcal{E}(\alpha)$, $E(\beta) = \mathcal{E}(\beta)$ для наших выбранных α и β.

3. Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varepsilon'$ – главные единицы. Тогда $\varepsilon = E(\ell(\underline{\varepsilon}))|_{X=\pi}$, $\varepsilon' = E(\ell(\underline{\varepsilon}'))|_{X=\pi}$, (см. Предложение 1). Разложим далее $\ell(\underline{\varepsilon})$ и $\ell(\underline{\varepsilon}')$ в степенные ряды: $\ell(\underline{\varepsilon}) = \sum_{i\geqslant 1} a_i X^i$, $\ell(\underline{\varepsilon}') = \sum_{j\geqslant 1} a'_j X^j$, $a_i, a'_j \in \mathfrak{o}$, и далее, представив каждый коэффициент a_i и a'_j в виде ряда с коэффициентами из $\mathfrak{R}$, получим разложение $\ell(\underline{\varepsilon}) = \sum_{i\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0} \theta_k^{(i)} p^k X^i$, $\ell(\underline{\varepsilon}') = \sum_{j\geqslant 1}\sum_{m\geqslant 0} \theta_m^{(j)} p^m X^j$. Поэтому, снова используя бимультипликативность символа Гильберта, получим

$$(\varepsilon,\, \varepsilon') = \prod_{i,j,k,m} \Big(E(\theta_k^{(i)} X^i)^{p^k},\, E(\theta_m^{(j)} X^j)^{p^m}\Big).$$

Чтобы получить равенство (9) для рассматриваемого случая, осталось применить формулу (11).

4. Общий случай вытекает из предыдущих рассуждений, если представить α и β в виде $\alpha = a\pi^m\varepsilon$, $\beta = b\pi^k\varepsilon'$, $a, b \in \mathfrak{o}^*$, $\varepsilon, \varepsilon'$ – главные единицы. □

5. Ряд $\mathbf{V(X)}$

Напомним следующий результат.

Лемма 1 [6, Лемма 12]. *Для каждого натурального m существует элемент v_m из кольца $\mathfrak{o}$, такой, что для всех β из $\mathfrak{o}$ верно равенство*

$$(\pi,\, E(\beta X^m)|_{X=\pi}) = \zeta^{\mathrm{Tr}(\beta v_m)}.$$

Элемент v_m определен однозначно по модулю p^n. Если $p \mid m$, то $v_m \equiv 0 \bmod p^n$. Если $m > pe_1 + (k-1)e$, $k \geqslant 1$, то $v_m \equiv 0 \bmod p^k$.

Используя элементы v_m, построим ряд $V(X) = \sum_{m>0} v_m X^m$.

Замечание 2.
1. Ряд $V(X)$ зависит от выбора простого элемента π.
2. Ряд $V(X)$ является многочленом от X^{-1} по модулю p^n.

Из Леммы 1 и мультипликативности функции E вытекает

Предложение 6. *Пусть* $\varphi(X)\in\mathfrak{o}[[X]]$. *Тогда*

$$(\pi,\ E(X\varphi(X))|_{X=\pi})=\zeta^{\operatorname{Tr}\operatorname{res}_X\varphi(X)V(X)}.$$

Из этого предложения и Теоремы 1 вытекает

Теорема 4. *Для любых* $\alpha,\beta\in K^*$ *символ Гильберта удовлетворяет соотношению:*

$$(\alpha,\beta)=\zeta^{\operatorname{Tr}\operatorname{res}\Phi(\underline{\alpha},\underline{\beta})V}.$$

В частности,

$$(\pi,\varepsilon)=\zeta^{\operatorname{Tr}\operatorname{res}X^{-1}\ell(\underline{\varepsilon})V},$$

где $\underline{\varepsilon}\in 1+X\mathfrak{o}[[X]]$, $\underline{\varepsilon}(\pi)=\varepsilon$.

Вычислим ряд $V(X)$. Сначала напомним следующий факт.

Предложение 7 [6, Предложение 6, Лемма 11]. *Для каждого ряда* $\varphi(X)\in\mathfrak{o}[[X]]$ *элемент*

$$\omega(\varphi)=E(\varphi s)|_{X=\pi} \tag{12}$$

является p^n*-примарным, и каждый* p^n*-примарный элемент можно представить в виде* (7) *по модулю* K^{*p^n}. *При этом*

$$(\pi,\omega(\varphi))=\zeta^{\operatorname{Tr}\varphi(0)}. \tag{13}$$

5.1. Первое сравнение для ряда $V(X)$.

Лемма 2. *Для ряда* $V(X)$ *верны сравнения:*

$$V(X)s(X)\equiv 1 \bmod p^n, \deg 1, \tag{14}$$

то есть $V(X)=\dfrac{1+g}{s}\bmod p^n$ *для некоторого ряда* $g\in X\mathfrak{o}[[X]]$. (*Сравнение* (14) *означает, что все коэффициенты ряда* $V(X)s(X)$ *при отрицательных степенях делятся на* p^n, *а свободный член сравним с* 1 *по модулю* p^n.)

Доказательство. Из теоремы 4 и предложения 7 получаем

$$(\pi,\omega(\varphi)|_{X=\pi})=\zeta^{\operatorname{Tr}\operatorname{res}X^{-1}\varphi sV}, \tag{15}$$

так как $\ell(\omega(\varphi))=\ell(E(\varphi s))=\varphi s$.

Используем тот факт, что $\varphi(X)$ – произвольный ряд. Пусть сперва $\varphi(X)= a\in\mathfrak{o}$. Тогда из (13) и (15) получаем $\operatorname{Tr}a=\operatorname{Tr}\operatorname{res}aX^{-1}sV\bmod p^n$, и таким образом,

$$\operatorname{res}X^{-1}s(X)V(X)\equiv 1\bmod p^n. \tag{16}$$

Положим теперь $\varphi(X)=\beta X^m$, $m\geqslant 1$, $\beta\in\mathfrak{o}$. Из (13) и (15) получаем $\operatorname{Tr}\beta a_m\equiv 0\bmod p^n$, где a_m – коэффициент ряда $s(X)V(X)$ при x^m. Из произвольности выбора β и невырожденности функции Tr получаем $a_m\equiv 0\bmod p^n$, то есть $s(X)V(X)\equiv 0\bmod p^n,\deg 0$. Соединяя последнее с (16), получаем (14). □

5.2. Второе сравнение для ряда $V(X)$.

Пусть $\underline{\varepsilon}(X)=E(u\varphi)$, где $\varphi(X)$ – произвольный ряд из кольца $\mathfrak{o}[[X]]$, E – функция Артина–Хассе. Так как $u(\pi)=0$, то $\underline{\varepsilon}(X)|_{X=\pi}=1$, значит, $(\pi,\underline{\varepsilon}(X)|_{X=\pi})=1$. С другой стороны, $(\pi,\underline{\varepsilon}(X)|_{X=\pi})=\zeta^{\operatorname{Tr}\operatorname{res}X^{-1}\ell(\underline{\varepsilon})V}$ (см. Теорему 4). Отсюда получаем второе сравнение для ряда V:

$$\operatorname{Tr}\operatorname{res}X^{-1}\ell(E(u\psi))V\equiv 0\bmod p^n \tag{17}$$

для любого $\psi(X)\in X\mathfrak{o}[[X]]$.

Из этих двух сравнений $V(X) \bmod p^n, \deg 0$ однозначно определяется, следовательно, выполнено $V(X) \equiv 1/s(X) \bmod p^n, \deg 0$ (см. [6, Теорема 2]).

6. Случай $n = 1$

Для прояснения аналогии закона взаимности (1) с абелевым дифференциалом и интегральной теоремой Коши мы рассмотрим круговое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta^p = 1$. В этом случае ряд $\Phi(\alpha, \beta)/s(\zeta) \bmod p$ будет иметь вид

$$\Phi(\alpha, \beta)/s(\zeta) = \frac{\log \underline{\beta} \dfrac{d}{dx} \log \underline{\alpha}}{\underline{\zeta}^p - 1}.$$

Локальный символ Гильберта $(\alpha,\, \beta)$ равен вычету этой функции:

$$(\alpha,\, \beta)_p = \mathrm{res}_X \frac{\log \underline{\beta} \dfrac{d}{dx} \log \underline{\alpha}}{\underline{\zeta}^p - 1},$$

и является аналогом абелева дифференциала $\log \underline{\beta} \dfrac{d}{dX} \log \underline{\alpha}$ в особой точке «римановой поверхности» $\underline{\zeta}^p - 1 = 0$. Поэтому закон взаимности

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_p \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_p^{-1} = (\alpha, \beta)_p$$

будет согласно теореме 1 непосредственным аналогом интегральной теоремы Коши

$$\int\limits_{0,p} \frac{\log \underline{\beta} \dfrac{d}{dx} \log \underline{\alpha}}{\underline{\zeta}^p - 1} = \mathrm{res}_X \frac{\log \underline{\beta} \dfrac{d}{dx} \log \underline{\alpha}}{\underline{\zeta}^p - 1}$$

ввиду того, что абелев интеграл дифференциальной формы равен сумме вычетов этой формы в особых точках.

Авторы благодарят Санкт-Петербургский государственный университет за финансовую поддержку в рамках НИР.

Summary

S.V. Vostokov, M.A. Ivanov. Cauchy's Integral Theorem and Classical Reciprocity Law.

The present paper gives explicit formulas for the local norm residue symbol and the product of power residue symbols. Using these formulas, a visible analogy can be made between the reciprocity law in the field of algebraic numbers and Cauchy's integral theorem from complex analysis.

Key words: reciprocity law, norm residue symbol, Schnirelman integral.

Литература

1. *Паршин А.Н.* Путь. Математика и другие миры. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.
2. *Hilbert D.* Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1. – Berlin: Springer, 1932. – 558 S.
3. *Шафаревич И.Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. – 1950. – Т. 26, № 1. – С. 113–146.

4. *Hasse H.* Die Normenresttheorie relativ-abelscher Zahlenkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen // J. Reine Angew. Math. – 1930. – Bd. 162. – S. 145–154.

5. *Иванов М.А.* Произведение символов p^n степенных вычетов как абелев интеграл // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 2. – С. 120–129.

6. *Востоков С.В.* Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1978. – Т. 42, № 6. – С. 1288–1321.

7. *Kneser M.* Zum expliziten Reziprozitätsgesetz von I.R. Šafarevič // Math. Nachr. – 1951. – Bd. 6. – S. 89–96.

Поступила в редакцию
10.02.12

Востоков Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета.

E-mail: *sergei.vostokov@gmail.com*

Иванов Михаил Анатольевич – аспирант кафедры высшей алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета.

E-mail: *micliva@gmail.com*