

УДК 517.984

К АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

A.M. Сидоров

Аннотация

В работе рассматриваются условия, при которых спектральные объекты возмущенных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве аналитически зависят от параметра возмущения.

Один из эффективных методов решения задач на собственные значения дает теория возмущений. В ее основе лежит предположение Э. Шредингера [1] о том, что разыскиваемые собственные значения и собственные элементы можно выбрать аналитически зависящими от параметра. Обоснование теории возмущений для самосопряженных операторов было дано Ф. Реллихом. Отказ от требования самосопряженности, как хорошо известно, может привести к тому, что нельзя выбрать собственные значения и собственные элементы возмущенного оператора аналитически зависящими от параметра и, кроме того, к отсутствию для них асимптотических формул. Поэтому как для теории, так и для приложений большое значение имеет нахождение условий, обеспечивающих возможность такого выбора для несамосопряженных операторов. Этой задаче и посвящена данная работа, являющаяся продолжением работ [2, 3].

Исследования будем вести при следующих предположениях:

I. $B_0 : D(B_0) \rightarrow \mathfrak{H}$ – линейный замкнутый, плотно заданный в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве \mathfrak{H} оператор;

II. $B : D(B) \rightarrow \mathfrak{H}$ – линейный оператор в \mathfrak{H} , подчиненный оператору B_0 . Это означает, что $D(B_0) \subset D(B)$, и при некоторых $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|Bx\| \leq a_1 \|x\| + a_2 \|B_0x\| \quad \forall x \in D(B_0).$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – символы, соответственно, нормы и скалярного произведения в \mathfrak{H} .

III. Все различные собственные значения μ_1, μ_2, \dots оператора B_0 и его спектральные пары $(\mu_\nu, y_{\nu,k})$, $\nu \in \mathbb{N}$, $k = n_{\nu-1} + 1, \dots, n_\nu$; $n_0 = 0$ удовлетворяют условиям:

а) для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ $\inf_{\tau \neq \nu} |\mu_\tau - \mu_\nu| > 0$;

б) последовательность $(y_{\nu,k})$ является базисом Рисса в \mathfrak{H} [4, с. 373].

Через $(y_{\nu,k}^*)$ будем обозначать биортогональный к $(y_{\nu,k})$ базис Рисса в \mathfrak{H} .

Рассмотрим спектральную задачу

$$A(\epsilon)y = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $A(\epsilon) = B_0 - \epsilon B$, $\epsilon \in \mathbb{C}$ – параметр.

Решение этой задачи, спектральная пара $(\lambda(\epsilon), y(\epsilon))$ оператора $A(\epsilon)$, называется аналитически зависящей от параметра ϵ , если

$$\text{при } |\epsilon| < \epsilon_0 \quad \lambda(\epsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_p \epsilon^p, \quad y(\epsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p \epsilon^p, \quad B_0 y(\epsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} (B_0 x_p) \epsilon^p,$$

где числа λ_p и элементы x_p не зависят от ϵ , ряд для $\lambda(\epsilon)$ сходится в \mathbb{C} , а ряды для $y(\epsilon)$ и $B_0 y(\epsilon)$ сходятся в \mathfrak{H} по норме. Упомянутые ряды называются рядами теории возмущений.

Если $(\lambda(0), y(0)) = (\lambda_0, x_0)$, где (λ_0, x_0) – фиксированная спектральная пара оператора B_0 , то спектральная пара $(\lambda(\epsilon), y(\epsilon))$ называется возмущением спектральной пары (λ_0, x_0) , а собственное значение $\lambda(\epsilon)$ – возмущением собственного значения λ_0 .

Зафиксируем какое-нибудь собственное значение $\lambda_0 = \mu_\nu$ оператора B_0 и поставим вопрос о существовании аналитически зависящих от параметра ϵ спектральных пар $(\lambda(\epsilon), y(\epsilon))$ оператора $A(\epsilon)$, в которых собственные значения являются возмущениями μ_ν . Решение задачи (1) будем искать в виде

$$\lambda(\epsilon) \sim \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_p \epsilon^p, \quad y(\epsilon) \sim \sum_{p=0}^{\infty} x_p \epsilon^p.$$

Хорошо известно, что числа $\lambda_p = \lambda_p(\nu)$ и элементы $x_p = x_p(\nu) \in D(B_0)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(B_0 - \lambda_0 I)x_0 = 0, \quad (B_0 - \lambda_0 I)x_p = Bx_{p-1} + \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{j+1} x_{p-1-j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Рассматривая первое из соотношений (2) как уравнение относительно x_0 , видим, что $x_0 = \vec{y} \cdot \overline{C(0)}$, где $\vec{y} = \text{col}(y_{\nu, n_{\nu-1}+1}, \dots, y_{\nu, n_\nu})$, а $C(0) = \text{col}(c_{n_{\nu-1}+1}(0), \dots, c_{n_\nu}(0))$ – произвольный ненулевой вектор, принадлежащий $\mathbb{C}^{n_\nu - n_{\nu-1}}$. Здесь и в дальнейшем « \cdot » – символ скалярного произведения векторов, либо элементов $\mathbb{C}^{n_\nu - n_{\nu-1}}$, либо вектора \vec{y} и элемента из $\mathbb{C}^{n_\nu - n_{\nu-1}}$, а $\overline{C(0)}$ обозначает вектор, координатами которого являются числа, комплексно сопряженные соответствующим координатам вектора $C(0)$.

Согласно (2) при $p = 1$ для нахождения числа λ_1 и элемента x_1 имеем уравнение

$$(B_0 - \lambda_0 I)x_1 = (B + \lambda_1 I)\vec{y} \cdot \overline{C(0)}. \quad (3)$$

Введя матрицу $S_1 = (\langle By_{\nu,k}, y_{\nu,j}^* \rangle)_{k,j=n_{\nu-1}+1, \dots, n_\nu}$ и заметив, что оператор $B_0 - \lambda_0 I$ – фредгольмов, легко убедиться в том, что условие разрешимости уравнения (3) можно записать в виде $(S_1 + \lambda_1 E)C(0) = 0$, где E – единичная матрица.

Пусть S_1 – нулевая матрица. Тогда $\lambda_1 = 0$, и из (3) находим, что

$$x_1 = TB\vec{y} \cdot \overline{C(0)} + \vec{y} \cdot \overline{C(1)},$$

где $C(0)$, $C(1)$ – произвольные векторы из $\mathbb{C}^{n_\nu - n_{\nu-1}}$, причем $C(0)$ – ненулевой вектор, T – оператор в \mathfrak{H} , заданный формулой

$$Tz = \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum'_{k=n_{\tau-1}+1}^{n_\tau} \langle z, y_{\tau,k}^* \rangle (\mu_\tau - \lambda_0)^{-1} y_{\tau,k},$$

в которой штрих указывает на то, что ряд не содержит членов с индексом $\tau = \nu$ (напомним, что этот индекс фиксирован).

Для нахождения λ_2 и x_2 рассматриваем уравнения (2) при $p = 2$. Условие разрешимости этого уравнения можно записать в виде $(S_2 + \lambda_2 E)C(0) = 0$, где $S_2 = (\langle BTBy_{\nu,k}, y_{\nu,j}^* \rangle)_{k,j=n_{\nu-1}+1, \dots, n_\nu}$ и т. д.

Описанный процесс имеет два исхода:

- 1) все матрицы $S_g = (\langle B(TB)^{g-1}y_{\nu,k}, y_{\nu,j}^* \rangle)_{k,j=n_{\nu-1}+1, \dots, n_\nu}$, $g \in \mathbb{N}$, – нулевые;
- 2) найдется $g \in \mathbb{N}$, для которого матрица S_g – ненулевая.

В случае первого исхода ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 1. *Если для всех $g \in \mathbb{N}$ матрицы S_g – нулевые, то существует аналитически зависящая от ϵ спектральная пара $(\lambda, y(\epsilon))$ оператора $A(\epsilon)$, являющаяся возмущением спектральной пары (μ_ν, x_0) , где $x_0 = \vec{y} \cdot C(0)$, $\vec{y} = \text{col}(y_{\nu,n_{\nu-1}+1}, \dots, y_{\nu,n_\nu})$, $C(0) \in \mathbb{C}^{n_\nu - n_{\nu-1}}$ – произвольный ненулевой вектор. Собственное значение λ не зависит от ϵ и его геометрическая кратность не меньше, чем $n_\nu - n_{\nu-1}$.*

Рассмотрим второй исход. Пусть g – индекс первой ненулевой матрицы в последовательности (S_g) , λ' – собственное значение матрицы $-S_g$, имеющее геометрическую кратность m . Через $\{h(j); j = 1, \dots, m\}$ и $\{h^*(j); j = 1, \dots, m\}$ обозначим базисы в $\text{Ker}(S_g + \lambda'E)$ и $\text{Ker}(S_g + \lambda'E)^*$ соответственно. Здесь и ниже через D^* обозначается матрица, сопряженная к некоторой матрице D . Координаты векторов $h(j)$ обозначим через $h_r(j)$, а векторов $h^*(j)$ – через $h_r^*(j)$, $r = 1, \dots, n_\nu - n_{\nu-1}$. Составим матрицы

$$H = \begin{pmatrix} h_1(1) & \cdots & h_1(m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n_\nu - n_{\nu-1}}(1) & \cdots & h_{n_\nu - n_{\nu-1}}(m) \end{pmatrix}$$

и

$$H_* = \begin{pmatrix} h_1^*(1) & \cdots & h_1^*(m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n_\nu - n_{\nu-1}}^*(1) & \cdots & h_{n_\nu - n_{\nu-1}}^*(m) \end{pmatrix}.$$

Определение. Собственное значение λ' матрицы $-S_g$ называется m -правильным, если оно имеет геометрическую кратность, равную m , и векторы $h(j)$ и $h^*(j)$, $j = 1, \dots, m$, можно выбрать так, чтобы уравнение относительно λ $\det B(\lambda) = 0$, где $B(\lambda) = (H_*)^*(S_{g+1} + \lambda E)H$, имело решение. Если такой выбор невозможен, то собственное значение λ' называется m -неправильным.

Пусть λ' – m -правильное собственное значение матрицы $-S_g$. Это собственное значение определяет, вообще говоря, не единственным образом матрицы H и H_* . Фиксируя пару таких матриц, дадим

Определение. Будем говорить, что число λ'' является нормальным числом матрицы $B(\lambda)$, если $\det B(\lambda'') = 0$ и решения:

$d(0)$ уравнения

$$B(\lambda'')d(0) = 0 \tag{4}$$

и $d^*(0)$ уравнения

$$B^*(\lambda'')d^*(0) = 0 \tag{5}$$

можно выбрать так, чтобы

$$(Hd(0)) \cdot (H_*d^*(0)) = 1. \tag{6}$$

Если же $\det B(\lambda'') = 0$ и $(Hd(0)) \cdot (H_* d^*(0)) = 0$ для любых $d(0)$ и $d^*(0)$, удовлетворяющих соответственно уравнениям (4) и (5), то будем говорить, что λ'' является аномальным числом матрицы $B(\lambda)$.

Через \tilde{m} обозначается размерность подпространства в \mathbb{C}^m , образованного векторами $d(0)$ и $d^*(0)$ – решениями уравнений (4) и (5), удовлетворяющими условию (6).

Теорема 2. *Пусть матрица $-S_g$ имеет m -правильное собственное значение, матрица $B(\lambda)$ имеет нормальное число и $\tilde{m} = 1$. Тогда существуют числа $\lambda_p = \lambda_p(\nu)$ и элементы $x_p = x_p(\nu) \in D(B_0)$, удовлетворяющие соотношениям (2).*

Из теоремы 2 следует, что m -правильное собственное значение λ' матрицы $-S_g$ и нормальное число λ'' матрицы $B(\lambda)$ порождают последовательности (λ_p) и (x_p) , удовлетворяющие соотношениям (2), причем $\lambda_p = 0$ при $p \leq g - 1$, $\lambda_g = \lambda'$ и $\lambda_{g+1} = \lambda''$.

Теорема 3. *Пусть λ_g , собственное значение матрицы $-S_g$, является m -неправильным. Тогда не существуют порожденных λ_g последовательностей (x_p) и (λ_p) , удовлетворяющие соотношениям (2). Кроме того, одновременно не могут выполняться асимптотические равенства*

$$\lambda(\epsilon) = \mu_\nu + \lambda_g \cdot \epsilon^g + \lambda_{g+1} \epsilon^{g+1} + o(\epsilon^{g+1}) \quad \text{и} \quad \|B_0 y(\epsilon) - \sum_{p=0}^{g+1} (B_0 x_p) \epsilon^p\| = o(\epsilon^{g+1}) \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Для $x \in \mathfrak{H}$ положим

$$\langle\langle x, \vec{y}^* \rangle\rangle = \text{col} \left(\langle x, y_{\nu, n_{\nu-1}+1}^* \rangle, \dots, \langle x, y_{\nu, n_\nu}^* \rangle \right),$$

где $\vec{y}^* = \text{col}(y_{\nu, n_{\nu-1}+1}^*, \dots, y_{\nu, n_\nu}^*)$.

Теорема 4. *Пусть λ_g – m -правильное значение матрицы $-S_g$, λ_{g+1} – аномальное число матрицы $B(\lambda)$, и выполнено условие*

$$(S_{g+2} H d(0)) \cdot (H_* d^*(0)) + \lambda_g \langle\langle (BT^2 B)(\vec{y} \cdot \overline{H d(0)}), \vec{y}^* \rangle\rangle \cdot (H_* d^*(0)) \neq 0,$$

где $d(0)$ и $d^*(0)$ – векторы, удовлетворяющие условиям $B(\lambda_{g+1})d(0) = 0$ и $(B(\lambda_{g+1}))^* d^*(0) = 0$. Тогда не существует порожденных λ_g и λ_{g+1} последовательностей (x_p) и (λ_p) , удовлетворяющих соотношениям (2).

Пусть

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=n_{\nu-1}+1}^{n_\nu} \alpha_{\nu,k} y_{\nu,k}$$

есть разложение произвольного элемента $x \in \mathfrak{H}$ по базису $(y_{\nu,k})$. Для фиксированного $\nu \in \mathbb{N}$ положим

$$\hat{x} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{k=n_{\nu-1}+1}^{n_\nu} \alpha_{\nu,k} y_{\nu,k}.$$

Как и выше, штрих означает, что ряд не содержит членов с индексом $\tau = \nu$.

В ходе доказательства теоремы 2 устанавливается, что элементы x_p вычисляются неоднозначно. Для обоснования сходимости рядов теории возмущений будет удобным выбрать эти элементы специальным образом, который описывается в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть λ_g – m -правильное собственное значение матрицы $-S_g$, λ_{g+1} – нормальное число матрицы $B(\lambda)$ и $\tilde{m} = 1$. Тогда элементы x_p и числа λ_p , удовлетворяющие соотношениям (2), можно выбрать так, что для $k \geq g \geq 2$

$$\lambda_{k+1} = -\langle B(TB)^{g-1}\hat{x}_{k-g+1}, x_0^* \rangle - \sum_{j=g+1}^{k-1} \lambda_{j+1} \sum_{s=0}^{g-2} \langle (BT)^{s+1}\hat{x}_{k-1-j-s}, x_0^* \rangle,$$

для $g = 1$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= -\langle Bx_k, x_0^* \rangle; \\ x_0^* &= \overrightarrow{y} \cdot \overline{C^*(o)}, \end{aligned}$$

где $C^*(0)$ – собственный элемент матрицы $(S_g + \lambda_g E)^*$;
для $p \geq g - 1$

$$\begin{aligned} (S_g + \lambda_g E) C(p+1-g) &= - \sum_{r=g}^p (S_{r+1} + \lambda_{r+1} E) C(p-r) - \\ &\quad - \sum_{j=g-1}^{p-1} \lambda_{j+1} \sum_{s=0}^{p-j-1} \langle \langle (BT)^{s+1}\hat{x}_{p-j-1}, \overrightarrow{y}^* \rangle \rangle; \end{aligned}$$

для $p \in \mathbb{N}$

$$\hat{x}_p = (TB)x_{p-1} + \sum_{j=g-1}^{p-1} \lambda_{j+1} T\hat{x}_{p-j-1}.$$

Используя теорему 5, получаем основной результат данной работы – признак существования спектральных пар возмущенного оператора $A(\epsilon)$, аналитически зависящих от параметра ϵ .

Теорема 6. Пусть μ_ν – собственное значение оператора B_0 , которому соответствуют собственные элементы $y_{\nu,j}$, $j = n_{\nu-1} + 1, \dots, n_\nu$, и $S_g = S_g(\nu)$ – первая ненулевая матрица, порожденная этим собственным значением. Пусть $\lambda_g^{(l)}$, $l = 1, \dots, s$ – различные собственные значения матрицы $-S_g$, являющиеся m_l -правильными, $m_1 + \dots + m_s = n_\nu - n_{\nu-1}$, и пусть каждая матрица $B_l(\lambda, \nu)$ имеет нормальное число, $\tilde{m}_l = 1$. Тогда оператор $A(\epsilon)$ имеет s спектральных пар, аналитически зависящих от ϵ : в некоторой окрестности на комплексной плоскости точки μ_ν существуют s собственных значений $\lambda^{(l)}(\nu, \epsilon)$ оператора $A(\epsilon)$, которым соответствуют собственные элементы $y^{(l)}(\nu, \epsilon)$, причем

$$\lambda^{(l)}(\nu, \epsilon) = \mu_\nu + \sum_{p=g}^{\infty} \lambda_p^{(l)}(\nu) \epsilon^p, \quad y^{(l)}(\nu, \epsilon) = x_0^{(l)}(\nu) + \sum_{p=1}^{\infty} x_p^{(l)}(\nu) \epsilon^p,$$

где $x_0^{(l)}(\nu) = \text{col}(y_{\nu, n_{\nu-1}+1}, \dots, y_{\nu, n_\nu}) \cdot \overline{C^{(l)}(0, \nu)}$, $C^{(l)}(0, \nu)$ – однозначно вычисляемый вектор из пространства $\text{Ker}(S_g + \lambda_g^{(l)} E)$.

В качестве иллюстрации теорем рассмотрим периодическую задачу

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t) - \epsilon \left(a_1(t)u^{(1)}(t) + (a_2(t)u(t) \right) &= \lambda u(t), \quad t \in (0; 2\pi), \quad u(t) \in W_2^2(2\pi), \\ a_r(t) &\in L^2(2\pi), \quad r = 1, 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Для задачи (7)

$$B_0 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad B = a_1(t) \frac{d}{dt} + a_2(t), \quad A(\epsilon) = B_0 - \epsilon B, \quad D(B_0) = D(B) = W_2^2(2\pi),$$

$$\mu_\nu = -\nu^2, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots;$$

$$n_0 = 1, \quad n_\nu = 2 \text{ при } \nu \geq 1;$$

$$y_{n_\nu-1+1}(t) = \exp(i\nu t), \quad y_{n_\nu}(t) = \exp(-i\nu t) \text{ при } \nu \geq 1.$$

Фиксируем собственное значение μ_ν для $\nu \geq 1$. Обозначив через $[a_r]_k$ коэффициенты Фурье функции $a_r(t)$, $r = 1, 2$, относительно системы $\{\exp(ikt); k \in \mathbb{Z}\}$, легко видеть, что матрица S_1 имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2\pi (i\nu[a_1]_0 + [a_2]_0), \\ b_{12} &= 2\pi (-i\nu[a_1]_{2\nu} + [a_2]_{2\nu}), \\ b_{21} &= 2\pi (i\nu[a_1]_{-2\nu} + [a_2]_{-2\nu}), \\ b_{22} &= 2\pi (-i\nu[a_1]_0 + [a_2]_0). \end{aligned}$$

Пусть $\Delta = 4\pi^2 ((b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21})$ – детерминант характеристического многочлена матрицы $-S_1$.

1) Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда матрица $-S_1$ имеет два различных собственных значения, которые являются 1-правильными, а порожденные ими матрицы $B(\lambda)$ имеют нормальные числа. Применяя теорему 6, получаем, что оператор $A(\epsilon)$, порожденный задачей (7), имеет две спектральные пары, аналитически зависящие от ϵ , в которых собственные значения являются возмущениями собственного значения μ_ν .

2) Пусть $\Delta = b_{12} = b_{21} = 0$. Тогда матрица $-S_1$ имеет одно собственное значение λ_1 , геометрическая кратность которого равна двум. Для него имеем

$$H = H_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B(\lambda) = S_2 + \lambda E$. Ясно, что λ_1 является 2-правильным собственным значением матрицы $-S_1$ и что $B(\lambda)$ имеет нормальное число. Поэтому оператор $A(\epsilon)$ имеет одну спектральную пару, аналитически зависящую от ϵ , в которой собственное значение – возмущение μ_ν .

3) Пусть $\Delta = 0$, $b_{12} \cdot b_{21} = 0$, $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$ и элемент $b_{22}^{(2)}$ матрицы S_2 не равен нулю.

Отметим, что

$$b_{22}^{(2)} = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(a_1(t) \frac{d}{dt} + a_2(t) \right) \left(\sum_{|k| \neq \nu} \left(\frac{i\nu[a_1]_{k-\nu} + [a_2]_{k-\nu}}{k^2 - \nu^2} \right) \exp(ikt) \right) \exp(-i\nu t) dt.$$

В данном случае у матрицы $-S_1$ – одно собственное значение λ_1 , геометрическая кратность которого равна единице. Для него имеем: $H = \text{col}(0 \ 1)$, $H_* = \text{col}(1 \ 0)$ и $B(\lambda) = (H_*)^*(S_2 + \lambda E)H = b_{22}^{(2)} + \lambda \cdot 0$. Поскольку $b_{22}^{(2)} \neq 0$, то уравнение $\det B(\lambda) = 0$ не имеет решения. Значит, собственное значение λ_1

является 1-неправильным. Из теоремы 3 следует, что не существует аналитически зависящих от ϵ спектральных пар $(\lambda(\epsilon), y(t, \epsilon))$ оператора $A(\epsilon)$, в которых собственные значения являются возмущениями μ_ν . Более того, не могут одновременно выполняться асимптотические равенства

$$\lambda(\epsilon) = -\nu^2 + \lambda_1\epsilon + \lambda_2\epsilon^2 + o(\epsilon^2) \quad \text{и} \quad \|B_0y(t, \epsilon) - \sum_{p=0}^2 (B_0x_p)(t)\epsilon^p\| = o(\epsilon^2), \epsilon \rightarrow 0.$$

Summary

A.M. Sidorov. On an analytic perturbation theory for nonselfadjoint operators.

In this paper we consider the conditions which imply an analytic dependence of the spectral objects of the perturbed nonselfadjoint operators in a Hilbert space on a perturbation parameter.

Литература

1. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem, III. Störungstheorie mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien // Ann. Phys. – 1926. – V. 80. – P. 437–490.
2. *Sidorov A.M.* On the analyticity of spectral pairs of nonself-adjoint operators // J. Math. Scien. – 1995. – V. 74, No 5. – P. 1283–1289.
3. *Сидоров А.М.* Об одном классе возмущенных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 7. – С. 61–66.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

Поступила в редакцию
09.06.06

Сидоров Анатолий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского государственного университета

E-mail: *Anatoly.Sidorov@ksu.ru*