Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский фонд фундаментальных исследований
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Международный научный семинар
«Нелинейные модели в механике,
статистике, теории поля и космологии»
GRACOS-18

Сборник материалов

(*28 октября – 3 ноября 2018 г., Казань*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2018

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
М43

Печатается по решению организационного комитета международного семинара

GRACOS-18

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г. Игнатьева

М43 **VIII-й международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» - GRACOS-18** // Лекции и материалы семинара / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Академия наук РТ, 2018. - 176 с.

ISBN 978-5-9690-0467-2

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики, механики, прикладной математики и математического моделирования

VIII-th international scientific seminar "Nonlinear models in mechanics, statistics, field theory and cosmology" GRACOS-18 // Lectures and Proceedings of the seminar. Under the general edition of Yu.G. Ignat'ev. – Kazan: Academy of science of the Republic of Tatarstan Press, 2018. – 176 p.

The book of conference proceedings are intended for researchers, graduate students, undergraduates and senior students specializing in theoretical physics, mechanics, applied mathematics and mathematical modeling

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ – № 18-02-20129\18.

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632

ISBN 978-5-00019-308-2

© Коллектив авторов, 2018
© Лаборатория информационных технологий в математическом образовании Института математики и механики КФУ, 2018
© Изд-во Академии наук РТ, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

К.А. Бронников, С.В. Болохов. О стабилизации дополнительных измерений в многомерных моделях гравитации с произведением фактор-пространств 7
Ю.С. Владимиров. Ричард Фейнман и реляционная концепция Лейбница–Маха 10
Д.В. Гальцов. Фотонные и поперечные улавливающие поверхности в стационарных пространствах. 29
В.М. Журавлев. Интегрируемые модели теоретической физики. Метод функциональных подстановок. 38
Ю.Г. Игнатьев. Предельные евклидовы циклы в космологических моделях, основанных на нелинейных скалярных полях с самодействием 85
А.А. Попов. Поляризация вакуума квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-временах 87
С.В. Червон. Тензорно-мульти-скалярная гравитация и киральные космологические модели . 101

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

Т.Р. Абдульмянов. Применение методов усреднения в решении гамильтоновых систем с условиями резонанса: физические, геометрические и статистические основы их применения . . 103
Р.А. Абзалов, С.В. Сушков. Космологические возмущения в теории гравитации с неминимальной кинетической связью 109
A.V. Aminova, D.R. Khakimov. On integration of the Eisenhart equation and h-spaces of the type {32}. 110
А.М. Баранов. Внутреннее решение Шварцшильда в Пенлеве-подобных координатах 110
S.V. Bolokhov, V.D. Ivashchuk. On generalized Melvin solutions for Lie algebras of rank 3. 113
К.А. Бронников, С.В. Болохов. О стабилизации дополнительных измерений в многомерных моделях гравитации с произведением фактор-пространств 114
Ю.С. Владимиров. Алгебраическая классификация А.З. Петрова и структура элементарных частиц. 115
С.О. Гладков, С.Б. Богданова. К вопросу о синхронизации маятников 116
А.Н. Голубятников, Д.Б. Любошиц. Одно точное космологическое решение с ударной волной аннигиляции 122
K.K. Ernazarov, V.D. Ivashchuk. Stable exponential cosmological solutions with zero variation of G and three different Hubble-like parameters in EGB model with a Λ-term 128
V.D. Ivashchuk, A.A. Kobtsev. Stable exponential cosmological solutions with two factor spaces in the Einstein-Gauss-Bonnet model with a Λ-term 128
Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov. The Peculiarities of the Cosmological Models Based on Scalar Singlet with Minimal Interaction 129
Ю.Г. Игнатьев, И.А. Кох. Особенности космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете 138
Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple: расширение визуальных возможностей пакета «DifEqTools», тестирование на точность и скорость вычислений 145
В.М. Журавлев. Принцип материальности пространства и фундаментальные поля 147
В.М. Журавлев. Точные решения многомерных нелинейных уравнений Клейна-Гордона и ривертоны 152
Ф.Ш. Зарипов. Осциллирующие космологические решения в теории индуцированной гравитации 153
В.В. Карбановский, М.В. Богатырева, О.В. Мелёхина, Н.С. Ступаченко. СТО в неинерциальных системах отсчета. 158
В.В. Карбановский, С.В. Акиньшина, Н.С. Ступаченко. Гравитация как скалярное поле 159

В.В. Карбановский, О.В. Мелёхина, Н.С. Ступаченко. Уравнения электродинамики в средах из вариационного принципа 160
В.В. Карбановский, О.В. Мелёхина, Т.В. Каиров, Н.С. Ступаченко. О метрике Шварцшильда и теореме Биркгофа 161
В.М. Морозов, В.М. Журавлев. Нелинейные функциональные подстановки и автоволны в среде с быстрой диффузией 162
И.С. Нургалиев . Космологические представления – как поле соперничества за интеллектуальное лидерство 163
I.S. Nurgaliev. New Model of Material point and Inertial Character of Accelerated Cosmological Expansion of Nonsingular Universe 168
A.A. Popov, O. Aslan. Simulation of the behavior of a scalar charge in an extreme charged anti-dilatonic wormhole 174

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

К.А. Бронников, С.В. Болохов

О стабилизации дополнительных измерений в многомерных моделях гравитации с произведением фактор-пространств

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК 530.12+531.51

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИИ С ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВ

К.А. Бронников[1], С.В. Болохов[2]

1 *kb20@yandex.ru*; Российский университет дружбы народов
2 *boloh@rambler.ru*; Российский университет дружбы народов

В рамках многомерной теории типа Калуцы—Клейна с нелинейными членами по кривизне и двумя сферическими дополнительными фактор-пространствами изучены свойства эффективного действия для масштабных факторов дополнительных измерений. С учетом качественных оценок казимировского вклада для безмассовых скалярных мод на физически приемлемых масштабах длин продемонстрировано существование таких наборов исходных параметров, которые обеспечивают минимум эффективного потенциала в соответствии с реалистичным значением эффективной 4-мерной космологической постоянной и тем самым приводят к стабилизации дополнительных измерений.

Ключевые слова: нелинейная многомерная гравитация, космология, дополнительные измерения

Теории с дополнительными измерениями в последние десятилетия получили большое распространение в связи с развитием теории суперструн, моделей миров на бране и теорий объединения взаимодействий (модели Калуцы—Клейна). Физически приемлемая многомерная теории должна содержать механизм, объясняющий ненаблюдаемость дополнительных измерений на доступных в эксперименте масштабах длин и энергий, что в случае компактности дополнительных пространств влечет проблему устойчивости их малых размеров в течение достаточно длительного времени существования Вселенной. При этом определенный вклад в картину устойчивости может вносить вакуумный эффект Казимира, обусловленный компактной топологией фактор-пространств.

В данной работе исследуется обобщенная модель нелинейной многомерной гравитации в $D > 4$ измерениях на фоне многообразия $M_4 \times \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ ($\mathbb{S}^n$ – n-мерная сфера) с действием

$$S = \frac{1}{2} m_D^{D-2} \int \sqrt{g_D}\, d^D x\, [F(R) + c_1 R^{AB} R_{AB} + c_2 R^{ABCD} R_{ABCD} + L_m],$$

где $m_D \equiv 1/r_0$ – D-мерная планковская масса, (r_0 – фундаментальная длина), g_D – детерминант D-мерной метрики, $F(R)$ – функция многомерной скалярной кривизны, c_1 и c_2 суть феноменологические коэффициенты, L_m – возможный вклад материальных полей и энергии Казимира.

Метрика в пренебрежении неабелевыми калибровочными модами имеет вид

$$ds_D^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \sum_{i=1}^{2} \mathrm{e}^{2\beta_i(x)} g^{(i)}, \tag{1}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика 4-мерного пространства, $g^{(i)}$ – метрики дополнительных фактор-пространств единичных радиусов, а β_i – мультиплет скалярных полей, определяющих размер дополнительных измерений.

Исследование включает в себя следующие этапы: 1) Расщепление многомерной кривизны и квадратичных инвариантов (для реалистичного сценария можно ограничиться приближением медленных изменений, пренебрегая высшими степенями по производным); 2) интегрирование по объему дополнительных измерений с получением эффективного 4-мерного действия; 3) переход от исходной йордановской конформной картины к эйнштейновской, более удобной для исследования динамики скалярных полей; 4) оценка казимировского вклада; 5) переход к безразмерному представлению эффективного потенциала $W(\beta_i(x))$ и поиск его локальных минимумов в полуклассической области $r_0 \ll r_0 \mathrm{e}^{\beta_i} \lesssim l_{\mathrm{TeV}}$ с учетом условия положительности кинетических членов скалярных полей и наблюдательного ограничения $\Lambda_{\mathrm{eff}}/m_{\mathrm{pl}}^2 \sim 10^{-120}$.

Итогом работы является демонстрация существования такого множества начальных параметров теории (в случае $m = n \neq 3$), которые обеспечивают минимум эффективного потенциала на рассматриваемом полуклассическом масштабе длин. Реалистичное значение эффективной 4D-космологической постоянной и компенсация относительно большого казимировского вклада достигается тонкой подстройкой. Размер дополнительных измерений зависит от того, какая конформная

калибровка теории (эйнштейновская или йордановская) принимается за наблюдаемую, что в йордановском случае приводят к ограничениям на полную размерность многообразия [1].

Литература

1. Bolokhov S. V. On Cosmology in Nonlinear Multidimensional Gravity with Multiple Factor Spaces / S. V. Bolokhov, K. A. Bronikov // Gravitation and Cosmology – 2018. – Vol.24, №2. – P. 154–160.

ON STABILIZATION OF EXTRA DIMENSIONS IN MODELS OF MULTIDIMENSIONAL GRAVITY WITH PRODUCT OF FACTOR SPACES

K.A. Bronnikov, S.V. Bolokhov

Within the scope of multidimensional Kaluza–Klein gravity with non-linear curvature terms and two spherical extra spaces, we study the properties of an effective action for the scale factors of extra dimensions. Taking into account qualitative estimates of the Casimir energy contribution for massless scalar modes at the physically acceptable length scales, we demonstrate the existence of such sets of initial parameters that provide a minimum of the effective potential in accordance with the realistic value of the effective 4D cosmological constant and thus lead to the stabilization of extra dimensions.

Keywords: Nonlinear multidimensional gravity, cosmology, extra dimensions.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

Ю.С. Владимиров

Ричард Фейнман и реляционная концепция Лейбница–Маха

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК 514.822

РИЧАРД ФЕЙНМАН И РЕЛЯЦИОННАЯ КОНЦЕПЦИЯ ЛЕЙБНИЦА–МАХА

Ю.С. Владимиров[1]

1 *yusvlad@rambler.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Институт гравитации и космологии РУДН

В данной статье, приуроченной к 100-летней годовщине со дня рождения Р. Фейнмана, охарактеризованы его реляционные взгляды, соответствующие идеям Г. Лейбница и Э. Маха. Показано, что причиной разочарований Фейнмана явилось игнорирование первой составляющей реляционного подхода – производного характера пространственно-временных отношений. Указано, что важнейшей задачей современной фундаментальной физики является вывод пространственно-временных представлений из более элементарных понятий физики микромира. Утверждается, что решение этой проблемы возможно лишь в рамках реляционно-статистического подхода. Показаны первые шаги в этом направлении.

Ключевые слова: реляционная парадигма, концепция дальнодействия, принцип Маха, метафизика света, пространственно-временные отношения, квантовая механика.

СОДЕРЖАНИЕ:

1 Введение 10
2 Привеженность Фейнмана идеям реляционной концепции 12
3 Принцип Маха 17
4 Проблема вывода классических пространственно-временных представлений 19
5 Электромагнитная природа принципа Маха 20
6 “Метафизика электромагнитного излучения” 23
7 Заключительные замечания 25
Литература 26

1. Введение

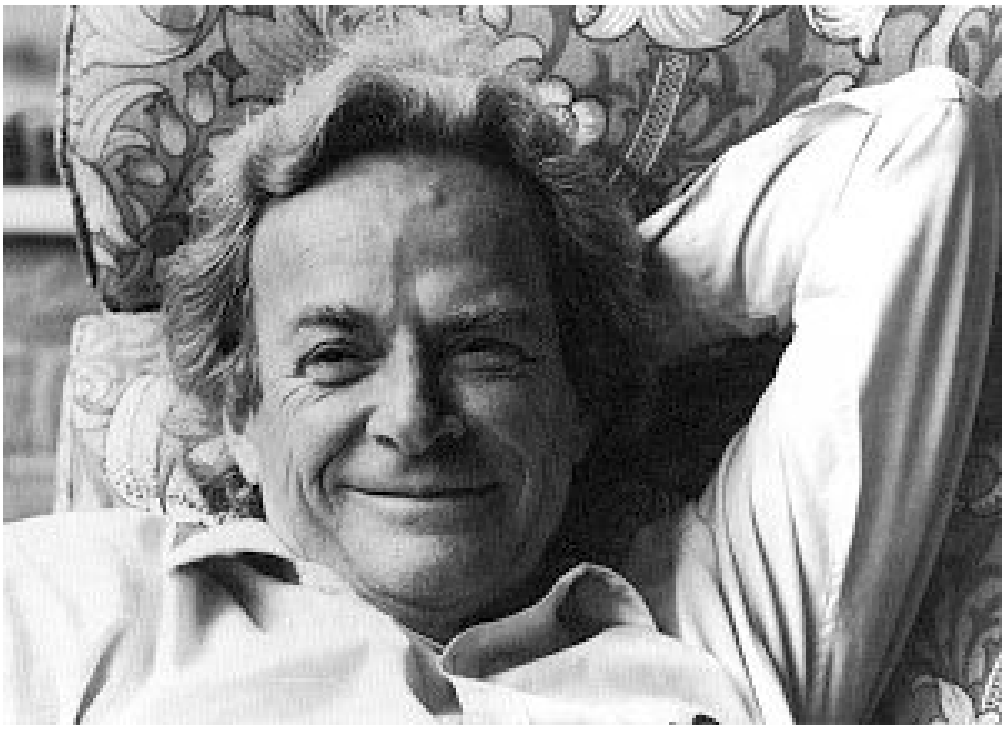
Данная статья написана в связи со 100-летием со дня рождения американского физика-теоретика Нобелевского лауреата Ричарда Фейнмана, которого автору посчастливилось послушать и сфотографировать во время проведения 3-й Международной гравитационной конференции в Варшаве (точнее в Яблонах, пригороде Варшавы) в 1962 году. Начну с воспоминаний о Фейнмане [1].

Это была самая представительная гравитационная конференция, в работе которой участвовали Р. Фейнман, П. Дирак, Л. Инфельд, Дж. Уилер, Дж. Вебер и ряд других физиков с мировым именем. От нашей страны в этой конференции, участвовал академик В.А. Фок, профессора А.З. Петров и Д.Д. Иваненко и ряд молодых участников, в частности Н.В. Мицкевич, Б. Вавилов и автор этих строк..

У меня к Фейнману в тот момент был особый интерес, поскольку тогда я активно занимался проблемой квантования гравитации, чему был посвящен и его пленарный доклад. Фейнман произвел на меня тогда большое впечатление. Это была очень яркая личность. Его доклад о квантовании гравитационного поля с иллюстрациями процессов в виде диаграмм фейнмановского типа был сделан артистично, хорошо поставленным голосом и с эффектной жестикуляцией. Недаром незадолго перед этим он был признан “первым интеллектом Америки”.

Помню как профессор Д.Д. Иваненко в кулуарах конференции остановил Фейнмана и стал ему рассказывать о своей “суперобъединительной программе” и попытался ему вручить сборник со своей вступительной статьей. Фейнман, взглянув, замахал руками и заявил, что он не знает русский язык. На это Иваненко тут же выхватил из портфеля самоучитель русского языка и протянул ему. Все вокруг, в том числе и Фейнман, громко рассмеялись.

Важным обстоятельством оказался тот факт, что у Фейнмана тогда сложилось резко отрицательное отношение к работе Варшавской гравитационной конференции. Уже позже стало известно, что в

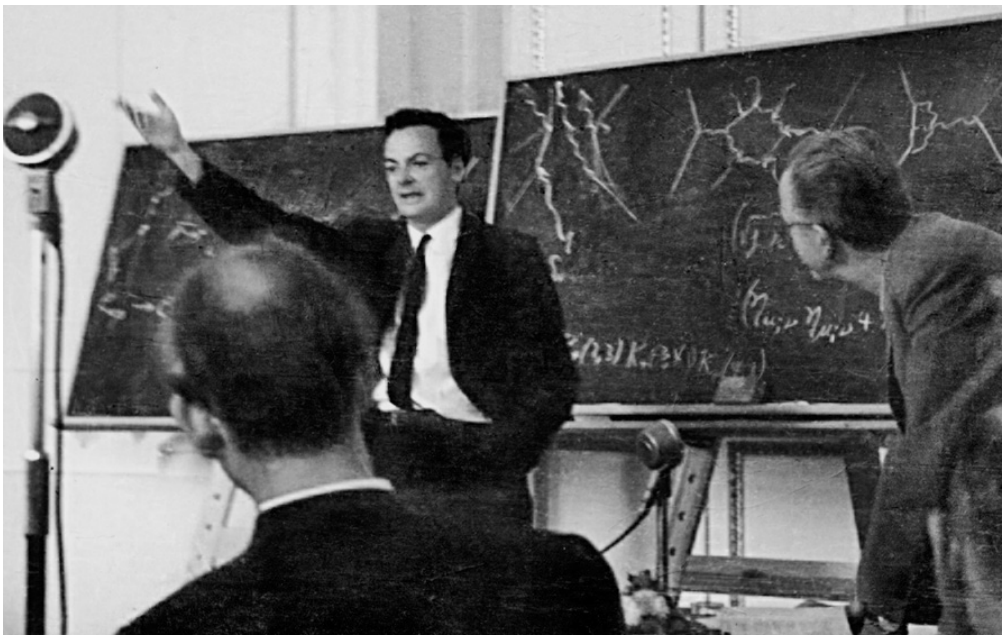


письме к своей жене он писал: “Я ничего не получил на этой конференции. Я не узнал ничего нового. Поскольку в этой области нет экспериментов, эта область науки находится в неактивном состоянии, так что только очень немногие из лучших людей работают в ней. Результат состоит в том, что здесь имеется огромное количество дурмана и это сказывается неблагоприятным образом на моем артериальном давлении: такие бессмысленные вещи говорятся и серьезным образом обсуждаются, что я спорю с участниками вне формальных сессий (скажем, на ланче) всякий раз, когда кто-либо задает мне вопрос или начинает рассказывать о своей “работе”” (Цитируется по Предисловию Дж. Прескилл и К. Торна к книге Р.Фейнмана [2, с. 37]). Далее он перечисляет 6 претензий к работам в этой области и заканчивает письмо словами: “В эти дни проводится огромная “деятельность в этой области”, но эта деятельность главным образом состоит в демонстрации того, что предыдущая “деятельность” кого-то еще приводит к ошибке или не приводит ни к чему полезному или приводит к чему-то, что подает надежды. Это выглядит как множество червяков, пытающихся вылезти из бутылки, переползающих один через другого. Это не потому, что задача трудна, это потому, что лучшие люди занимаются другими вещами. Напомни мне о том, чтобы не ездить больше ни на какие конференции по гравитации!”

Отмечу, что, действительно, на последующих международных гравитационных конференциях мы больше Фейнмана не видели. В предисловии к лекциям Фейнмана по гравитации приводится комментарий Б. ДеВитта к этому письму: “Я могу определенным образом симпатизировать реакции Фейнмана на конференцию в Варшаве, потому что у меня были подобные ощущения. (У меня жив в памяти выход там его эмоций, которые выплеснулись в сторону Иваненко через самую изощренную брань, какую я только слышал). Но те, кто опубликовал его частное письмо без описания полной картины, наносят ущерб исторической правде…” (Там же, с. 37-38.).

У советских участников конференции столь отрицательных мнений об услышанных докладах не сложилось.

Следует отметить, что сразу же после Варшавской гравитационной конференции Фейнман предпринял попытку “навести порядок в теории гравитации” и даже окончательно решить проблему квантования гравитации, о которой он говорил в своем докладе на конференции. С этой целью он в течение 1962-63 академического года прочитал курс гравитации в Калифорнийском Технологическом Институте в городе Пасадина (США). Сохранились записи этих лекций, однако последние 11 лекций из 27, прочитанных Фейнманом, как раз посвященных квантованию гравитации, он не разрешил публиковать по причине своего разочарования в их обоснованности.



Судя по опубликованным 16 лекциям, Фейнман попытался развить теорию гравитации, исходя из квантовой теории гравитационного поля как безмассового поля спина 2 в плоском пространстве-времени. В первой же лекции он сказал: “Наш педагогический подход является наиболее близким для теоретиков, специалистов в физике элементарных частиц, которые довольно часто используют различные поля, так что для них довольно просто понять, что вселенная образована двадцатью девятью или тридцатью одним полями, объединенными в одном уравнении; феномен гравитации добавляет еще одно поле в общий “котел”, это такое же поле, которое было пропущено при предыдущих рассмотрениях; гравитационное поле является только одним из тридцати других, поэтому объяснение гравитации состоит в объяснении трех процентов всех известных полей” [2, с. 57].

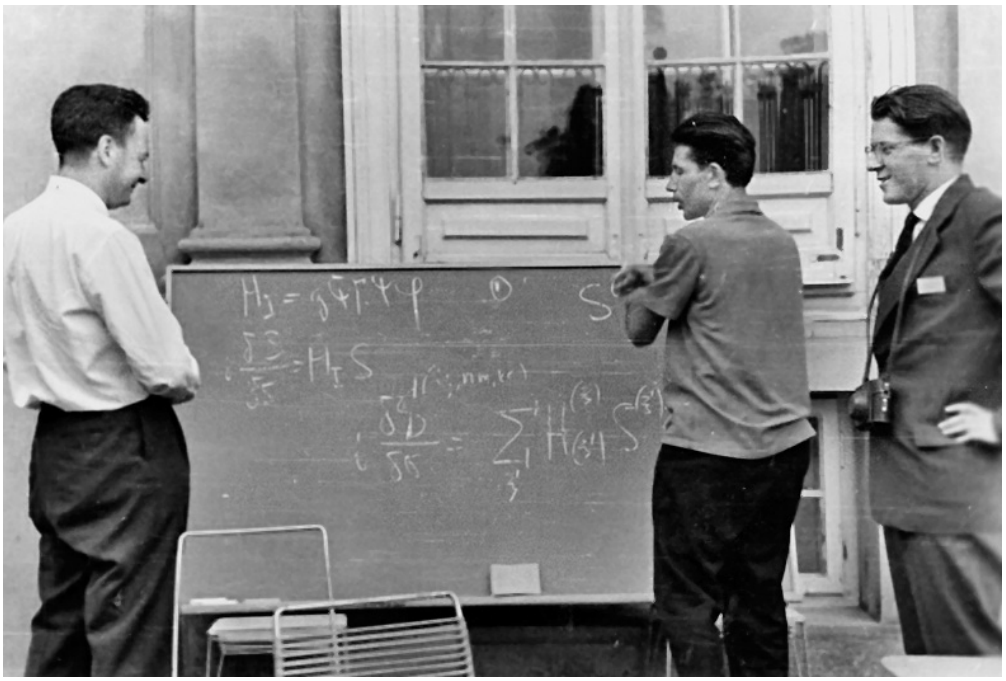
Главным результатом этой деятельности явилось то, что при учете ряда естественных для теории поля условий и предположений Фейнман пришел к нелинейным уравнениям тензорного поля спина 2, формально совпадающим с уравнениями Эйнштейна. Как он говорил, “истина состоит в том, что поле спина 2 имеет геометрическую интерпретацию; это не является чем-то легко объяснимым, это удивительный факт. Геометрическая интерпретация не является действительно необходимой или существенной для физики” (Там же, с. 177.). Там же можно найти такие слова: “Одна из особенностей теории гравитации состоит в том, что она имеет и полевую интерпретацию, и геометрическую интерпретацию”, т. е. эти интерпретации “являются двумя аспектами одной и той же теории”.

Здесь следует отметить, что в этом открытии Фейнман был далеко не первым и не последним. Ранее к подобным результатам пришел С. Гупта, а еще раньше, в 1949-1950 годах, к подобному выводу пришел Крайчман из Института Перспективных исследований в Принстроне (США). Как писали Дж. Прескилл и К. Торн, Эйнштейн, узнав об этом “пришел в ужас от такого подхода к гравитации, отвергавшего его собственное геометрическое понимание, полученное им в результате огромной проделанной работы” (Там же, с. 20.). Позднее, уже в 80-х годах, близкую позицию занял А.А. Логунов, развивая релятивистскую теорию гравитации (без массовых слагаемых для гравитонов).

2. Привеженность Фейнмана идеям реляционной концепции

Только спустя много лет мне стало понятно, почему у Фейнмана сложилось отрицательное отношение к выступлениям участников на Варшавской гравитационной конференции. Дело оказалось в том, что его подход к физическому мирозданию оказался не совпадающим с идеологией геометрического подхода, обсуждавшегося на конференции.

Уже сейчас, в XXI веке, отчетливо стало ясно, что в XX веке развитие фундаментальной физики осуществлялось в рамках трех принципиально разных направлений (парадигм):



1) доминирующего и ныне теоретико-полевого подхода, основанного на принципах классической и квантовой теории поля,

2) геометрического подхода, основу которого составляет общая теория относительности и

3) менее распространенного реляционного подхода, развивающего идеи Г. Лейбница, Э. Маха и ряда других мыслителей.

Значительная часть творчества Фейнмана была в русле именно реляционного подхода.

В связи с этим отметим, что этот подход имеет три составляющие [3]:

1. Реляционный взгляд на природу пространства-времени, т. е. понимание природы классического пространства-времени не как самостоятельной физической категории, как это часто принято считать, а как абстракцию от отношений между телами и событиями.

2. Описание физических взаимодействий в рамках концепции дальнодействия, а не на основе господствующей ныне концепции близкодействия.

3. Принцип Маха, понимаемый как обусловленность локальных характеристик и свойств систем (масс, проявлений взаимодействий, метрики и т. д.) от глобальных свойств всего окружающего мира.

Следует подчеркнуть, что в работах Фейнмана значительное внимание уделялось именно второй и третьей составляющим реляциооного подхода к физической реальности.

Концепция дальнодействия в творчестве Фейнмана

Концепция дальнодействия самым существенным образом использовалась Фейнманом в 40-х годах. В статьях, написанных совместно с Дж. Уилером, его учителем, электромагнитное взаимодействие заряженных частиц описывалось посредством действия Фоккера, где под знаком двойного интеграла по траекториям двух взаимодействующих частиц писалось скалярное произведение 4-токов двух частиц и дираковская дельта-функция, аргументом которой являлся квадрат интервала между частицами.

Таким образом, взаимодействие двух частиц описывалось исключительно через их характеристики без привлечения понятия электромагнитного поля. Как говорил Фейнман в своей Нобелевской лекции: “Ведь поля нет совсем или, если вы непременно хотите пользоваться понятием поля, оно теперь всегда полностью определяется взаимодействием частиц, его создающих. Вы качнули эту частицу, а она в свою очередь качнула ту; но раз уж вы хотите говорить о каком-то поле, то это поле , если оно вообще существует, должно полностью определяться теми материальными частицами, которые его порождают, а поэтому у него нет никаких независимых степеней свободы” [4, с. 196].

Это относится к описанию без понятия поля классической электродинамики, однако следует особо подчеркнуть, что для Фейнмана характерен аналогичный подход и к квантовой электродинамики. Напомним, что Фейнман пришел к своим главным результатам – к квантованию на основе континуального интегрирования, – за которые ему была присуждена Нобелевская премия, – исходя именно из концепции дальнодействия. Это он подчеркивал неоднократно, в частности об этом говорил и в своей Нобелевской лекции: "Для себя я решил, что электрон не может взаимодействовать с самим собой, а может взаимодействовать только с другими электронами. Но это значит, что никакого поля нет". Приведу также другое его высказывание: "Именно попытка проквантовать эту теорию, не обращаясь к представлению о поле, и привела к изложенной здесь формулировке квантовой механики".

Принцип Маха в творчестве Р. Фейнмана

В своей деятельности Фейнман уделял особое внимание вопросам проявления принципа Маха. Так, в работах Дж. Уилера и Р. Фейнмана во второй половине 40-х годов фактически на основе принципа Маха было предложено обоснование отсутствия опережающих взаимодействий.

Поясним постановку задачи. В теории прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа, по определению, взаимодействие между любыми двумя электрическими зарядами (или массами) является наполовину запаздывающим и наполовину опережающим, причем исключить ненаблюдаемые на опыте опережающие взаимодействия волевым образом, как это фактически делается в теории поля, не представлялось возможным. В итоге получилось так, что фоккеровская теория была эквивалентна теории поля Максвелла–Лоренца лишь при описании статических и стационарных электромагнитных явлений. Естественно возникал вопрос (проблема): как согласовать теорию прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия с общепринятой теорией поля, в которой имеет место принцип причинности?

В 1945 году Р. Фейнман и Дж. Уилер показали [5], что эту трудность в теории прямого электромагнитного взаимодействия можно преодолеть, если сделать следующий шаг к целостному восприятию мира, т. е. если учесть вклады во взаимодействия между любыми двумя зарядами со стороны всех других зарядов Вселенной – своеобразный "отклик Вселенной" на процесс "излучения" (на акт взаимодействия). Методика корректного учета отклика Вселенной составила важную часть всей теории прямого межчастичного взаимодействия, названной Фейнманом и Уилером *теорией поглотителя*. Она основана на трех постулатах[2]:

1) ускоренный заряд в пустом пространстве "не излучает";

2) силы, действующие на любую частицу, слагаются из вкладов взаимодействий со всеми другими частицами Вселенной;

3) эти взаимодействия являются наполовину опережающими и наполовину запаздывающими, эквивалентными соответствующим половинам решений Лиенара–Вихерта уравнений Максвелла.

В упомянутой работе 1945 года было показано, что если во Вселенной имеется достаточно большое число заряженных частиц, то суммарное воздействие их на частицу-приемник излучения полностью компенсирует опережающее взаимодействие от источника. Кроме того, опережающая часть того же суммарного воздействия, суммируясь с запаздывающим воздействием источника на приемник, приводит к наблюдаемому на опыте запаздывающему взаимодействию.

Этот результат можно понимать так: на источник i "падает" совокупность практически плоских опережающих "волн" (в терминах теории поля) от всех зарядов поглотителя (опережающее воздействие). В момент ускорения частицы-источника сходящаяся "волна" коллапсирует, и в следующий момент времени она "расходится" от источника вместе с его собственным излучением (их амплитуды одинаковы). Произвольный заряд-приемник j не может различить эти две "волны" (воздействия) разного происхождения и реагирует на них как на единое целое, т. е. как на удвоенное запаздывающее воздействие.

Заметим, что приведенные рассуждения Фейнмана и Уилера не однозначны. Неявно был использован существенный постулат, что любое воздействие (излучение) от источника будет поглощено окружающей материей Вселенной, а воздействие на заряд j со стороны источников из прошлого практически равно нулю. Всю изложенную схему рассуждений формально можно перевернуть. Для

2 Формально они относятся и к гравитационному, и к иным взаимодействиям.

этого достаточно постулировать, что в будущем отсутствуют возможные поглотители, тогда как в прошлом имеется достаточно много источников (постулат “абсолютного излучателя”). В этом случае суммарное запаздывающее воздействие от заряда i на заряд j (с учетом отклика Вселенной) обращается в нуль, а опережающее воздействие удваивается. Следовательно, для выбора одной из указанных схем рассуждений необходимы дополнительные соображения.

Фактически здесь встает проблема обоснования “стрелы времени” (по образному выражению А. Эддингтона), – направленности всей эволюции физического мира в будущее. В работах Фейнмана и Уилера в качестве таковых были названы термодинамические соображения, однако рядом авторов для этой цели стали привлекаться свойства космологических моделей в общей теории относительности. Полагалось, что стрела времени определяется фактом расширения Вселенной. Это означает, что на гипотетических этапах сжатия Вселенной все будет обстоять наоборот.

Другой принципиально важный результат, следующий из теории поглотителя Фейнмана–Уилера, состоит в том, что сам “излучающий” источник i получает дополнительное воздействие в виде силы

$$f = \frac{2e_i^2}{3c^3}\frac{da_i}{dt}. \tag{1}$$

В итоге уравнение движения “излучающей” частицы i имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}, \tag{2}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – внешние напряженности электрического и магнитного воздействий. Таким образом, *в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия автоматически возникает сила радиационного трения, которая оказывается обусловленной воздействием на “излучающую” частицу со стороны всех частиц окружающей Вселенной.*

Следует вспомнить, сколько усилий было затрачено на объяснение силы радиационного трения в рамках традиционной теории поля (в физическом видении мира), причем там до сих пор не устранены все трудности.

Данные результаты теории поглотителя Фейнмана–Уилера признаны классическими. Они часто цитируются в литературе по теории мрямого межчастичного взаимодействия. В частности, они рассматривались под несколько иным углом зрения в работах Г.В. Рязанова [6].

Отсутствие первой составляющей реляционного подхода как причина разочарований Фейнмана

Однако, когда результаты были уже получены, Фейнман обнаружил, что концепция дальнодействия была не обязательной. "Ведь самое удивительное, что почти все идеи, возникшие в процессе исследования (идеи дальнодействия - Ю.В.), в конце концов оказались ненужными для конечного результата" [4, с. 228]. Завершая свою Нобелевскую речь, Фейнман по этому поводу образно сказал: "А что же стало со старой теорией, в которую я влюбился еще юношей? Она теперь стала почтенной дамой, почти совсем потерявшей былую привлекательность. Сердце юноши уж не забьется учащенно при виде ее. Но о ней можно сказать самое лучшее, что можно сказать о пожилой женщине: что она очень хорошая мать и у нее очень хорошие дети. И я благодарен Шведской Академии наук за высокую оценку одного из них" [Там же, с. 231].

В развитии научных взглядов Фейнмана можно усмотреть аналогию с эволюцией взглядов А. Эйнштейна. Известно, что Эйнштейн, создавая общую теорию относительности, опирался на идеи Э. Маха в рамках реляционной парадигмы. Однако, когда теория была построена, он отказался от них, полностью встав на путь развития геометрической парадигмы.

Затем похожая история случилась со взглядами уже советского физика члена-корреспондента АН СССР Я.И. Френкеля, который в начале 30-х годов яростно отстаивал концепцию дальнодействия на диспутах в Ленингродском политехническом институте, организованных его директором Иоффе. А затем, уже в 40-х годах стал сдавать свои позиции. Кстати, в своей Нобелевской лекции Фейнман ссылался на работы Френкеля.

Отличие в эволюции взглядов Эйнштейна и Фейнмана состояло в том, что один от реляционной парадигмы перешел к геометрической, а другой – от той же исходной парадигмы – к теоретико-полевой (однако, не так категорично).

Однако и Р.Фейнман, и А. Эйнштейн напрасно поспешили отказаться от реляционной парадигмы. В 60-х годах в работах Я.И. Грановского и А.А. Пантюшина [7] было показано, как строится теория прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, совпадающая с эйнштейновской ОТО в линейном приближении. А в начале 80-х годов в наших работах с А.Ю. Турыгиным [8] была построена теория прямого межчастичного гравитационного взаимодействия в виде бесконечного ряда разложения по гравитационной константе, в любом приближении совпадающая с общей теорией относительности.

Таким образом, на теорию гравитационных взаимодействий можно взглянуть с позиций не двух, а трех различных дуалистических парадигм: геометрической, теоретико-полевой и реляционной.

С позиций сегодняшнего дня уже можно понять причины сомнений и разочарований как Р. Фейнмана, так и Я.И. Френкеля. Дело в том, что, как уже отмечалось, реляционная парадигма опирается на три фактора, а в работах этих авторов использовались лишь два последних (концепция дальнодействия и принцип Маха), тогда как первый из них – реляционный взгляд на природу классического пространства-времени – игнорировался. Они развивали теорию прямого межчастичного взаимодействия на фоне априорно заданного классического пространства-времени. А без первого фактора концепция дальнодействия выглядит недостаточно обоснованной.

Ситуация коренным образом меняется, если считать классическое пространство-время не самостоятельной физической категорией, а абстракцией от системы отношений между материальными объектами и событиями. Напомним, что в качестве отношений в геометрии выступают расстояния, а в теории относительности – интервалы между событиями. Если встать на точку зрения отсутствия пространства-времени как самостоятельной категории, то теряется смысл само понятие поля – ему не по чему распространяться, – и концепция дальнодействия становится неизбежной. Напомним, что реляционный взгляд на пространство и время отстаивали Г. Лейбниц, представители немецкой физической школы середины XIX века, затем Э. Мах и другие мыслители.

Однако, для развития теории в рамках реляционного подхода к природе пространства-времени необходим был адекватный этому подходу математический аппарат, которого долгое время не было. Его основы были заложены лишь в конце 60-х годов в работах Ю.И. Кулакова и его группы в Новосибирском университете. Этот аппарат был развит в рамках так называемой теории физических структур, в свое время одобренной академиком И.Е. Таммом [9].

Оказалось, что Р. Фейнман мог бы ознакомиться с идеями данного математического аппара-

та. Дело в том, что Фейнман в последние годы интересовался музыкальным творчеством различных народов мира и хотел ознакомиться с искусством горлового пения в Туве, для чего собирался посетить Советский Союз. Узнав об этом, Ю.И. Кулаков выехал в Кызыл и в течение месяца там поджидал Фейнмана, чтобы его ознакомить со своими работами. Однако, Фейнман не приехал. Как мне рассказывали, наши власти заподозрили интерес физика Фейнмана к урановым рудникам и все было сделано для того, чтобы он не смог туда приехать. А если бы он пообщался тогда с Кулаковым, ситуация в области реляционного подхода к физике могла бы измениться.

3. Принцип Маха

Следует обратить особое внимание на тот факт, что в работах Р. Фейнмана отсутствовали ссылки на работы Г. Лейбница, Э. Маха и других предшественников, которые уже задолго до него размышляли о всех трех составляющих реляционного подхода (парадигмы). Судя по публикациям Фейнмана, он пришел к идеям реляционной парадигмы путем собственных размышлений, не опираясь на высказывания своих предшественников.

Истоки принципа Маха

Согласно взглядам Э. Маха и немецкой физической школы середины XIX века, в которой воспитывался Мах, физический мир представляет собой неразрывное целое, так что свойства его отдельных частей, обычно понимаемые как локальные (присущие отдельно взятым системам), на самом деле обусловлены распределением всей материи мира, или глобальными свойствами Вселенной. Так, Э. Мах писал: “Дело именно в том, что природа не начинает с элементов, как мы вынуждены начинать. Для нас во всяком случае счастье то, что мы в состоянии временами отвлечь наш взор от огромного целого и сосредоточиться на отдельных частях его. Но мы не должны упускать из виду, что необходимо впоследствии дополнить и исправить дальнейшими исследованиями то, что мы временно оставили без внимания” [10, с. 199].

Идеи Маха (немецкой физической школы XIX века) были возведены в ранг принципа А. Эйнштейном в 1919 году: “Принцип Маха: G-поле (метрическое поле - Ю.В.) полностью определено массами тел. Масса и энергия, согласно следствиям специальной теории относительности, представляют собой одно и то же; формально энергия описывается симметричным тензором энергии: это означает, что G-поле обуславливается и определяется тензором энергии материи” [11, с. 613]. В примечании Эйнштейн разъясняет: “Название “принцип Маха” выбрано потому, что этот принцип является обобщением требования Маха, что инерция должна сводиться к взаимодействию тел”.

Исходя из своего понимания идей Маха, Эйнштейн ожидал, что в создаваемой им теории должен проявляться ряд существенных следствий. Ожидалось, что одним из них должна быть зависимость пробных масс объектов от расположения вблизи них других массивных объектов. В частности, в статье “Существует ли гравитационное воздействие, аналогичное электродинамической индукции?” (1912 г.) [12, с. 225] он приводил ожидаемую им формулу для зависимости значений масс от расположенных вблизи массивных источников.

Другое ожидание сказалось на построении Эйнштейном статического космологического решения. Построенная им первая космологическая модель была основана на моделе замкнутого пространственного мира, описываемого сферической геометрией Римана (постоянной положительной кривизны). В случае такой космологической модели вполне законно говорить о выполнимости принципа Маха в том смысле, что масса всех тел генерируется конечным значением полной массы всего окружающего мира.

Однако вскоре после создания общей теории относительности стало ясно, что в ней принцип Маха выполняется в значительно более узком смысле. При большом желании его выполнимость можно усмотреть лишь в том, что метрика становится функцией координат и зависит от распределения окружающей материи. Она находится из уравнений Эйнштейна, содержащих справа тензор энергии-импульса материи. Однако уравнения Эйнштейна допускают и вакуумные решения, т. е. в отсутствие материи.

Эйнштейн ожидал большего. Под влиянием этих и ряда других факторов он изменил свое отношение к идеям Маха, написав: “По мнению Маха в действительно рациональной теории инертность должна, подобно другим ньютоновским силам, происходить от взаимодействия масс. Это мнение я в

принципе считал правильным. Оно неявным образом предполагает, однако, что теория, на которой все основано, должна принадлежать тому же общему типу, как и ньютонова механика: основными понятиями в ней должны служить массы и взаимодействия между ними. Между тем не трудно видеть, что такая попытка не вяжется с духом теории поля" [13, с. 268]. Именно в этом состояло главное: эйнштейновская общая теория относительности оказалась построенной в духе традиционной теории поля (в рамках концепции близкодействия), тогда как Э. Мах мыслил в духе концепции дальнодействия.

Дальнейшее развитие представлений о принципе Маха

Однако, разочарование Эйнштейном в идеях Маха не устранили интереса физиков к идеям реляционной парадигмы и, в частности, к принципу Маха. Вопросам проявления принципа Маха много внимания в своих работах уделял Дж. Уилер, учитель Фейнмана. Так, во время приезда в нашу страну в 1971 году в беседе с Д.Д. Иваненко и другими теоретиками физфака МГУ Уилер поднял вопрос: почему все электроны мира обладают одинаковыми электрическими зарядами независимо от места и способа наблюдения? Он сам же и дал ответ на этот вопрос, написав на стене кафедры теоретической физики над фразой Нильса Бора слова: "Не может быть физики элементарных частиц, имеющей дело лишь с частицами". И расписался: "Ученик Н.Бора". Из этой фразы и из содержания беседы следовало, что Уилер тем самым хотел подчеркнуть мысль, что не удастся построить теорию элементарных частиц, не учитывая свойств всего окружающего мира.

Уже в середине XX века Ф. Хойл (1915-2001) и Дж.В. Нарликар (р. в 1938 г.), развивая взгляды Маха, писали аналогичное: "Во многих проблемах возможно "отделить" эффект Вселенной в том смысле, что влияние Вселенной остается эффективно постоянным внутри рассматриваемого пространственно-временного объема, к которому относятся эти проблемы. (…) Если читатель допустит на мгновение, что такая точка зрения верна, то ему станет ясно, что, вероятно, более легки именно те проблемы, в которых Вселенная проявляется в виде постоянного влияния окружающей среды, нежели те, в которых это влияние переменно. Самыми эффективными преимуществами обладают такие проблемы, где постоянное влияние Вселенной может быть заменено эмпирически найденными значениями, как, например, значения масс. Обычно практика благоразумного физика концентрируется на тех проблемах, где может быть достигнут прогресс, поэтому возникает положение, при котором все решенные проблемы представляют случаи такой развязки от влияния Вселенной" [14, с. 2].

Эйнштейн и Хойл с Нарликаром надеялись увидеть проявления принципа Маха в значениях масс и инерции, Фейнман и Уилер в своих работах использовали принцип Маха для устранения опережающих воздействий, но с принципом Маха связывались и иные надежды.

Об удивительных корреляциях характеристик микрочастиц и свойств Вселенной писал и Р. Фейнман: "Имеются некоторые числовые совпадения, которые мы можем упомянуть здесь для того, чтобы навести на мысль о том, как "естественные" масштабы длины могут быть в некотором смысле извлечены из космологии. Такое совпадение не содержит в себе "теорию", как таковую, оно просто используется для того, чтобы проиллюстрировать связь, которая могла бы быть в конце концов предсказана подробной теорией" [2, с. 134].

О многоликости принципа Маха писал известный американский физик-теоретик Р. Дикке: "Итак, мы видели, что у принципа Маха много лиц – почти столько же, сколько было исследователей, рассматривающих принцип Маха. Будучи основан на глубоких философских идеях, этот принцип является интуитивным, и его трудно возвысить (или, если угодно, низвести) до уровня количественной теории. Но то, что самого Эйнштейна к его чрезвычайно изящной теории гравитации привели соображения, вытекающие из этого принципа, говорит о многом. Принцип Маха еще может быть очень полезным для физиков будущего" [15].

Мах был убежден во влиянии окружающего мира на множество наблюдаемых нами свойств и закономерностей физики. Видимо, отсюда и возникло множество пониманий принципа Маха. Нам представляется, что *в самом широком смысле под принципом Маха следует понимать идею об обусловленности локальных свойств частиц и отношений между ними закономерностями и распределением всей материи мира, т. е. глобальными свойствами Вселенной.* Приведенные выше результаты Фейнмана и Уилера свидетельствуют об этом.

4. Проблема вывода классических пространственно-временных представлений

В настоящее время в фундаментальной физике поставлена проблема вывода классических пространственно-временных представлений из неких более первичных понятий и закономерностей физики микромира вместо того, чтобы продолжать подкладывать готовое пространство-время под все наши физические теории. Как нам представляется, данная фундаментальная проблема может быть решена лишь на базе реляционного подхода, поскольку как доминирующий ныне теоретико-полевой подход, так и геометрический, нуждаются в априорном задании пространственно-временного фона.

Для решения данной проблемы оказался чрезвычайно важным принцип Маха, причем понадобилось осознать, что принцип Маха является лишь одной из трех составляющих реляционной концепции Лейбница–Маха, включающей в себя, во-первых, реляционное понимание природы пространства-времени, во-вторых, описание взаимодействий в рамках концепции дальнодействия и только, в-третьих, принцип Маха. Без первых двух составляющих реализовать принцип Маха вряд ли удастся, о чем свидетельствуют перечисленные выше гипотезы и обсуждения проявлений этого принципа.

Макроскопическая природа пространства-времени

Сегодня трудно сказать, кому принадлежит приоритет выдвижения идеи о статистической (макроскопической) природе классических пространственно-временных понятий, т. е. идеи об их происхождении в результате суммирования огромного количества неких микрофакторов. Можно привести ряд высказываний по этому вопросу, начиная с гениального предвидения Б. Римана, высказанного в середине XIX века, и более четких предположений физиков и математиков XX века.

Особо подчеркнем, что к этой идее неоднократно обращался отечественный математик П.К Рашевский. Так, свой капитальный труд “Риманова геометрия и тензорный анализ” он завершает словами: “Возможно, что и сам четырехмерный пространственно-временной континуум с его геометрическими свойствами окажется в конечном счете образованием, имеющим статистический характер и возникающим на основе большого числа простейших физических взаимодействий элементарных частиц. Но, конечно, подходы к этому вопросу должны носить совсем иной характер, поскольку они должны базироваться на квантовой механике – теории совершенно иного стиля, чем теория относительности” [16, с. 658].

Добавим к этому более определенные высказывания физиков- теоретиков второй половины XX века. Так, американский физик- теоретик Е. Циммерман в своей работе с характерным названием “Макроскопическая природа пространства-времени” писал: “… микроскопические системы взаимодействуют способами, которые также должны описываться абстрактно, т. е. без ссылок на пространство и время. Когда огромное число таких микроскопических систем взаимодействует, простейший и самый фундаментальный результат состоит в создании пространственно-временного каркаса, который придает законность классическим представлениям о пространстве и времени, но лишь на макроскопическом уровне” [17].

Можно существенно продолжить приведение высказываний такого рода, в разное время сделанных и другими известными авторами. Особенно следует отметить работы Р. Пенроуза, который в последней трети XX века предпринял реальную попытку вывести модель классического пространства-времени из физики микромира на основе специально развитой для этой цели твисторной программы. В одной из статей Р. Пенроуза с сотрудниками писалось: “В предшествующих работах (Р. Пенроуза – Ю.В.) было показано, что можно ввести понятие евклидова пространства, исходя из предела вероятности взаимодействия большой сети частиц, квазистатически обменивающихся спинами. При таком подходе евклидова структура возникает из комбинаторных правил, которым удовлетворяет полный угловой момент в релятивистской квантовой механике. (…) Мы надеемся, что развитие твисторной теории приведет в конечном счете к построению лоренцевых многообразий, которые будут служить моделями пространства-времени” [18, с. 132]. Однако, как признался Пенроуз в беседе с автором, ему пока так и не удалось решить поставленную задачу на основе его теории твисторов.

К концу XX века и на рубеже XX и XXI веков высказывания о необходимости реализации идеи о макроскопической природе пространства-времени звучали более настойчиво. Все это показывает,

что здесь речь идет о решении давно назревшей проблемы.

Однако следует заметить, что подавляющее большинство авторов, писавших о макроскопической природе понятий пространства и времени, не указывали микрофакторы, влияния которых подлежат суммированию.

Какова природа квантовых ансамблей?

Если уже остро поставлен вопрос о статистической (макроскопической) природе классических понятий пространства и времени, то аналогичный вопрос о природе статистического характера понятий квантовой механики встал сразу же после ее создания. Так, А. Эйнштейн полагал, что в квантовой механике волновая "функция φ ни в коем случае не описывает состояние, свойственное одной единственной системе; она относится скорее к нескольким системам, т. е. к "ансамблю систем", в смысле статистической механики. (…) Тот факт, что квантовая механика позволяет столь просто получить выводы, касающиеся прерывных переходов (кажущихся) из одного общего состояния в другое, не давая физически представления об отдельных процессах, связан с другим фактом, а именно, что теория в действительности оперирует не с отдельной системой, а с ансамблем систем" [19, с. 221].

Позже об этом писали другие авторы. Так, академик Л.И. Мандельштам писал: "В обоих случаях, и в классической теории, и в квантовой механике мы имеем дело с большой совокупностью элементов и некоторым признаком. Назовем эту совокупность, над которой проделывается статистическая обработка, коллективом. Коллектив должен быть как-то выделен, иначе теряет смысл постановка любого вопроса о нем. Так вот, говорят, что $|\Psi|^2$ – вероятность. Но в каком коллективе? Если это не указать, то возможны всякие неясности и парадоксы" [20, с. 332].

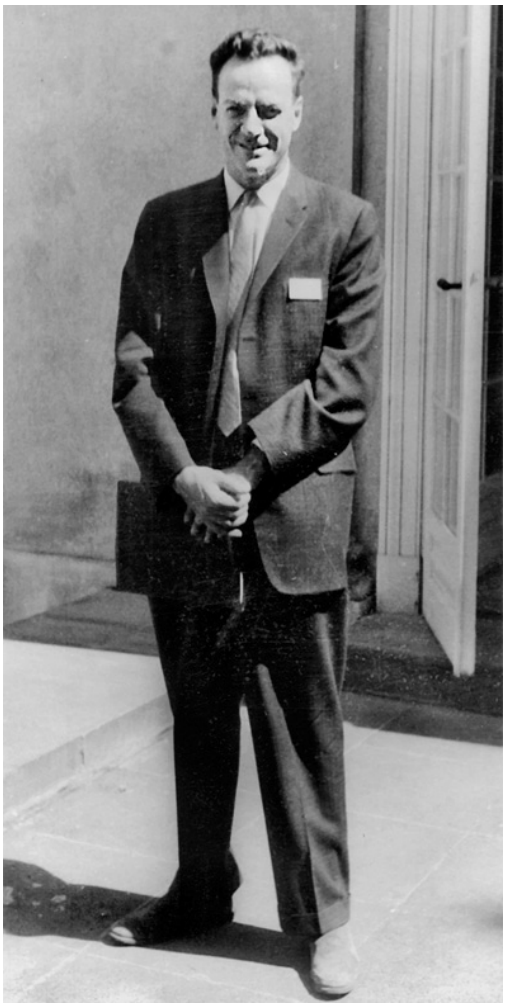
Далее можно процитировать аналогичные высказывания Д.И. Блохинцева [7] и ряда других авторов. Конечно, при этом имеются в виду не те авторы, которые выступают за неоклассическую теорию "скрытых параметров". Возврата к классическим представлениям в физике микромира не будет. Однако авторы, выступающие за раскрытие сущности квантовомеханических ансамблей, либо оставляют этот вопрос неясным, либо с их доводами трудно согласиться полностью.

5. Электромагнитная природа принципа Маха

Для ответа на вопрос о природе носителей вкладов в отношения между объектами и истоков квантовых ансамблей представляются существенными высказывания нидерландского математика Д. Ван Данцига (1900-1959) в его статье "О соотношении геометрии и физики и концепция пространства-времени", где он писал: "С давних пор считается, что понятия и теоремы геометрии являются предпосылками для использования в математических моделях физики. Причины преобладания такого отношения кажутся скорее порождениями истории и традиций, чем логики. Это остается верным для евклидовой и римановой геометрии, предложенной Эйнштейном в качестве модели гравитации, так же как и пятимерности и проективного обобщения, и более свежих общих линейных связностей, использовавшихся Эйнштейном и Шредингером. Недостаточно ясно, какие логические или эпистомологические преимущества у интерпретации части геометрического объекта, как, скажем, электромагнитного поля, а не наоборот" [21].

Другими словами, Ван Данциг ставит вопрос: почему физики нацелены на описание электромагнетизма через геометрические понятия, а не наоборот, – почему не стремятся вывести геометрию, исходя из понятий электромагнетизма? Фактически он писал, что нет каких-либо логических или эпистологических запретов на постановку обратной задачи – вывода понятий классического пространства-времени из более элементарных понятий и закономерностей физики, которыми, в частности, являются электромагнитные взаимодействия.

Ван Данциг призывал "к построению более реалистичной модели физики, так называемой "модели вспышек", где материя представляется в виде конечного числа конечных групп элементарных событий, называемых вспышками, где конечные группы представляют импульс энергии, а также пространственно-временные отношения. Программа устранения из фундамента математической физики идеи пространственно-временного континуума и замены его на конечный набор дискретных событий с пространственно-временными отношениями между ними может быть поддержана теми аргументами, которые первоначально привели Эйнштейна к специальной и общей



теории относительности” [21].

Это несомненный призыв к развитию реляционной парадигмы физического мироздания, в которой пространство-время не имеет статуса первичной категории, а представляет собой абстракцию от системы отношений между событиями (“вспышками”).

На протяжении большей части XX столетия происходил напряженный поиск более тесной связи гравитационных взаимодействий и всей геометрической парадигмы с электромагнетизмом. Как уже отмечалось, в геометрической парадигме ее усмотрели в рамках 5-мерной теории Т. Калуцы.

Вклад Фейнмана в реляционно-статистические представления о пространстве-времени

Оказалось, для вывода пространственно-временных представлений немаловажную роль играет объяснение дифракционной картины, возникающей при прохождении света через отверстия в непрозрачном экране. Обычно это делается на основе принципа Гюйгенса, т. е. посредством процедуры сложения фазовых вкладов в произвольной точке от фиктивных источников света, распределенных в дырках решетки.

Однако Р. Фейнман в своих “Фейнмановских лекциях по физике” дал иное, реляционное толкование явления дифракционной картины. Он писал: “Дифрагированная волна выглядит так, как будто источником служит дырка в экране. Мы должны выяснить причину этого явления, ведь на самом деле именно в дырке *нет* источников, *нет* никаких зарядов, движущихся с ускорением” [22, с. 98].

Фейнман дал достаточно четкое разъяснение этого обстоятельства с позиций концепции дальнодействия. Он предложил характеризовать электромагнитное воздействие источника S на возможный поглотитель P, как это принято, используя термин “поле”, но только заключать его в кавычки

[1], которые должны напоминать, что о “поле” можно говорить только в тех местах, где имеется возможный приемник, и его нет в точках пустого пространства (см. рис.1).

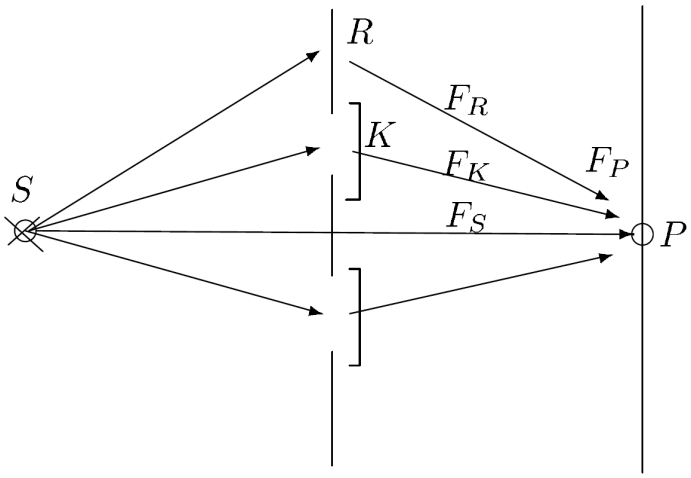


Рис. 1. Дифракция света, проходящего через щели в экране

Он предложил сравнить “поле” в точке P в двух ситуациях: а) когда отверстия в экране закрыты крышками, так что экран непрозрачен для света, и б) когда крышки убраны.

а) **Отверстия в экране закрыты крышками.** Согласно теории прямого межчастичного взаимодействия, “поле” в точке P слагается, во-первых, из “поля” F_S, создаваемого источником S, с некоторым запаздыванием по фазе, и, во-вторых, из переизлученных “полей” F_R и F_K от всех зарядов в экране R и в крышках K. Поскольку экран с крышками непрозрачен для света, то, очевидно, “поле” F_P равно нулю: $F_P = F_S + F_R + F_K = 0$, т. е. “поле” источника *в точности компенсируется* переизлученными “полями” от всех атомов, составляющих экран и крышки.

б) **Крышки убраны**, т. е. имеет место обычное явление дифракции света на экране с отверстиями. В этом случае “поле” F'_P в точке P отлично от нуля и, согласно общим принципам теории прямого межчастичного взаимодействия, слагается из “поля” F_S источника и переизлученных “полей” F'_R атомами экрана (макроприбора), т. е. имеем $F'_P = F_S + F'_R$.

Если отверстия достаточно велики, то можно положить, что переизлученные “поля” от экрана в обоих случаях одинаковы: $F_R = F'_R$. Вычитая из одного соотношения другое, имеем

$$F'_P = (F'_R - F_R) - F_K = -F_K. \tag{3}$$

Фейнман следующим образом интерпретирует это соотношение: “Мы приходим к выводу, что “поле” в точке P *при открытых отверстиях* (случай б) равно (с точностью до знака) “полю”, создаваемому *той частью* сплошного экрана, которая *находится на месте отверстий!* (Знак нас не интересует, поскольку обычно имеют дело с и нтенсивностью, пропорциональной квадрату поля.) Этот результат не только справедлив (в приближении не очень малых отверстий), но и важен; кроме всего прочего, он подтверждает справедливость обычной теории дифракции” [22, с. 100].

Таким образом, общепринятое объяснение дифракции света на основе принципа Гюйгенса в теории поля оказывается согласованным с описанием этого явления в рамках реляционной теории (концепции дальнодействия).

Из рассуждений Фейнмана можно сделать еще два других более существенных вывода.

Во-первых, рассуждения Фейнмана явно демонстрируют, что явления дифракции и интерференции можно трактовать как тот факт, что **испущенное электромагнитное излучение устанавливает некие отношения не только между излучателем и приемником, но и между всеми возможными поглотителями.**

Во-вторых, вскрывается тот факт, что **взаимодействие (отношение) между источником излучения и его приемником существенно зависит от распределения окружающих материаль-**

1 Р.Фейнман в своей Нобелевской лекции называл это “поле” полем Френкеля.

ных объектов. Но это как раз в какой-то степени и соответствует содержанию принципа Маха, – локальные свойства систем (в данном случае значение амплитуды вероятности) зависят от свойств окружающего мира!

Концепция дальнодействия и
электромагнитное излучение

Для дальнейших рассуждений важно напомнить о серии диспутов, происходивших на рубеже 20-х – 30-х годов в Ленинградском Политехническом институте по вопросу, какая из двух концепций – близкодействия или дальнодействия – является истинной, и остановимся на одном принципиально важном вопросе, который был задан Я.И. Френкелю его оппонентом (В.Ф. Миткевичем): "Допустим, что радиостанция "А" в некоторый момент времени начинает генерировать очень мощное излучение, распространяющееся на колоссальное расстояние. Возьмем расстояние столь большое, что оно проходится электромагнитным излучением в десять лет, пока оно не дойдет до некоторого удаленного радиоприемника "В". Предположим, что после того, как радиостанция "А" уже поработала, мы ее совершенно уничтожим. Допустим, что радиоприемник "В" в момент излучения может даже не существовать и лишь потом, в конце десятого года, мы можем успеть построить приемную систему. Через десять лет излученная электромагнитная энергия будет принята системой "В". А в промежутке, в течение десяти лет, где находилась излученная энергия, где находился физический агент, который должен в конце концов воздействовать на приемник "В"? С точки зрения Я.И. Френкеля, **нигде**. Такое объяснение физически не допустимо" [23, с. 54-55]. Другими словами, вопрос сводился к следующему: Если принять концепцию дальнодействия, то где локализована энергия испущенного, но еще не поглощенного электромагнитного излучения?

Ответ Я.И. Френкеля был весьма своеобразным: "С точки зрения непосредственного действия элементов заряда друг на друга, без торгового посредника, которым является поле, – с этой точки зрения энергия нигде не находится, представляя собой нелокализуемую физическую величину. С точки зрения непосредственного действия электронов друг на друга, энергия их нигде не сосредоточена. (…) При этом, можно сказать, что энергия находится всюду, во всем пространстве. Аналогичным образом, и в таком же самом смысле можно сказать, что энергия электрического тока находится либо нигде, либо во всем пространстве, в зависимости от того, рассматриваем ли мы взаимодействие между движущимися зарядами, как непосредственное действие, пропорциональное величине зарядов и их скоростям, или же рассматривается это взаимодействие при помощи промежуточного понятия поля" [23, с. 27-28].

С точки зрения последовательного реляционного подхода оба варианта утверждений Френкеля не выдерживают критики[2].

Относительно первого, что "нигде", следует согласиться с Миткевичем, а относительно второго, что "энергия излучения находится во всем пространстве", следует сделать разъяснения с учетом первой составляющей реляционного подхода. Как уже отмечалось, в этом подходе пространство-время не является априорно заданной сущностью (фоном), а заменяется на совокупность отношений между объектами, в данном случае между зарядами. Следовательно, утверждение, что "электромагнитная энергия находится во всем пространстве" следует трактовать так, что она **распределена в отношениях между всеми зарядами – возможными поглотителями. Ничего другого в данном подходе не остается**. Напомним, что в более поздних работах Р. Фейнмана и Дж. Уилера утверждалось, что не может быть излучения, если нет его возможных поглотителей.

6. "Метафизика электромагнитного излучения"

Если учесть, что в мире находится "море" испущенного, но еще не поглощенного излучения, создающего отношения между возможными поглотителями, то возникают достаточно веские основания полагать, что привычные классические понятия возникают именно из наложения огромного числа вкладов от электромагнитного излучения.

Можно назвать и другие факторы, свидетельствующие об определяющем характере электромагнитных взаимодействий в создании метрических отношений в окружающем нас мире.

2 Заметим, что в дальнейшем под давлением сторонников близкодействия и господствовавшей тогда в нашей стране идеологии Я.И. Френкель был вынужден в значительной степени изменить свои реляционные взгляды (см. [24]).

Исходя из совокупности изложенных идей, в рамках последовательного реляционного подхода можно сделать следующий вывод: поскольку в реляционной парадигме нет самостоятельной категории пространства-времени, а вместо него выступает совокупность отношений между материальными объектами (зарядами), а кроме того имеется "море" испущенного, но еще не поглощенного электромагнитного излучения, то возникают веские основания выдвинуть идею, что **испущенное, но не поглощенное электромагнитное излучение участвует в формировании самой идеи пространственно-временных отношений**. Более того, можно высказать даже более сильное утверждение, что именно **испущенное, но не поглощенное электромагнитное излучение, ответственно за формирование классического пространства-времени**.

Все это в совокупности позволяет сформировать реляционно-статистическую парадигму физического мироздания, в рамках которой строятся как классические пространственно-временные представления, так и предлагается реляционно-статистическая интерпретация квантовой механики.

В рамках реализации данной программы уже получен ряд принципиально важных результатов [25]. На базе теории бинарных систем комплексных отношений ранга (3,3) построена бинарная предгеометрия, элементы которой (составляющие элементарных частиц) описываются 2-компонентными спинорами. Показано, что от этой бинарной предгеометрии осуществляется переход к реляционному представлению 4-мерной геометрии Минковского (или к геометрии Лобачевского) с сигнатурой (+ – – –). Показано, как в рамках бинарной предгеометрии и идей реляционно-статистического подхода строится теория атома. Кроме того, показано, что реляционно- статистический подход приводит к иному взгляду на ряд проблем космологии.

Важную роль при реализации данной программы играют волновые свойства света (электромагнитного излучения). Издавна они вызывали оживленные дискуссии. Следствием волновых свойств является вероятностный характер его поведения, – испущенное излучение может поглотиться разными объектами. Даже если излучение сфокусировано и нацелено на попадание в определенные объекты, то это связано с фазовыми влияниями (вкладами) на его поглощение теми или иными объектами со стороны фокусирующего устройства. Это свойство излучения обычно воспринималось как некое досадное свойство природы, которое объективно есть и его необходимо учитывать и только. Однако, **с точки зрения реляционного подхода вероятностный характер поведения излучения является чрезвычайно важным обстоятельством, ответственным за возникновение классических пространственно-временных понятий. Если бы волновых свойств излучения не было, то и не было бы понятий длин и общепринятых распределений объектов в пространстве.**

Все изложенное заставляет вспомнить давно забытые идеи, развивавшиеся в средневековой арабской философии, а также некоторыми представителями европейской науки. В какой-то степени изложенные представления о роли электромагнитного излучения в формировании реляционно-статистической картины мира являются возрождением и развитием древних идей.

Довольно четкое выражение реляционной составляющей в метафизике света можно найти в учении, развивавшимся английским теологом и естествоиспытателем Робертом Гроссетестом (1175–1253). Процитируем наиболее характерное его высказывание. "Итак свет, который есть первая форма в первой материи сотворенная, себя самого посредством себя же самого со всех сторон беспредельно умножающий и во все стороны равномерно простирающийся, распространял в начале времени материю, которую не смог оставить, растягивая вместе с собой до размеров мироздания. И распространение материи не могло происходить посредством конечного умножения света, ибо как показал Аристотель в "О Небе и Мире" нечто простое, воспроизведенное конечное число раз, не порождает величины. (…) Необходимо, следовательно, чтобы свет, который прост по природе своей, будучи бесконечно умноженным, распространял материю, точно так же простую, до размеров конечной величины" [26].

Здесь особо выделим слова о том, что свет "распространял в начале времени материю, которую не смог оставить, растягивая вместе с собой до размеров мироздания". Это высказывание могло бы послужить ответом на упоминавшийся выше вопрос Миткевича на дискуссии в Ленинградском политехе: где находится испущенное, но еще не поглощенное электромагнитное излучение? – Оно вносит вклад в растягивание материи до размеров мироздания, т. е. находится в отношениях между материальными объектами.

7. Заключительные замечания

В XX веке ряд мыслителей высказывал соображения, в какой-то степени возрождающие идеи метафизики света, только на более совершенном уровне, имея в виду не только свет, а электромагнетизм в полном объеме.

Так, значительное внимание связи гравитации и электромагнетизма уделял в своих исследованиях Г. Вейль. Для решения этой проблемы он разработал обобщение геометрии Римана – открыл так называемую геометрию с неметричностью, ныне именуемую геометрией Вейля. Ее характерным свойством является изменение длин векторов при параллельном переносе, что Вейль предложил считать обусловленным электромагнитизмом. Однако, на наш взгляд, Вейлю следовало "капнуть" глубже – объявить, что и само понятие длины обусловлено электромагнетизмом.

Отметим также, что Вейль был сторонником гипотезы эфира. Так он писал: "Неспроста великий немецкий поэт-романтик Гельдерин еще в начале XIX века посвятил "Отцу Эфиру" прекрасные "космические" песни. И для сегодняшней натурфилософии он остается великой загадкой; и для моего понимания, в том числе, грандиозное превосходство эфира над материей остается *глубочайшей* тайной" [27].

Заметим, что ничто не мешает называть "океан" излученного, но еще не поглощенного электромагнитного излучения, "электромагнитным эфиром" в реляционно-статистической парадигме[1]. Дело только в том, что сущность этого "эфира" принципиально отличается от представлений об эфире конца XIX века. Более того, данный подход значительно усиливает идею Вейля о роли электромагнетизма в "базовой мировой структуре".

Близкую точку зрения на понимание эфира можно усмотреть и в высказываниях Николы Теслы. Он настаивал на существовании электромагнитного эфира. Он писал: "Экспериментируя с импульсами высоких напряжений, я сразу же стал глубоко размышлять над проблемой природы электрической материи и энергии. Вскоре мысли об океане волн электрической материи, заполняющей Вселенную, привели меня к новому физическому образу мирового электрического эфира. Уже в новом веке я смог развить эфирный принцип до такой степени, что получил новую динамическую теорию гравитации" (цит. по [28, с. 240].

Наконец, опять вернемся к размышлениям Р. Фейнмана о природе и проявлениях принципа Маха. К этому вопросу он неоднократно возвращался в своих "Фейнмановских лекциях по гравитации", причем это он пытался связать с проблемами квантовой механики: "Утверждение принципа Маха для квантовой теории включает в себя новые эффекты, так как мы не можем говорить о прямолинейных траекториях; мы увидим, что надлежащее утверждение включает в себя до некоторой степени развитие понятия <время>. У Маха была проблема, связанная с тем, как частица "знает", что она ускоряется. Мах думал, что это обусловлено влиянием распределения удаленных масс, таким влиянием, что ускорение относительно них требует сил. С появлением квантовой механики новый "абсолют" стал определим; абсолютный масштаб длины и времени" [2, с. 132-133].

Фейнман сосредотачивает внимание на происхождении понятия длин. Обсуждая процесс столкновения двух фотонов, он ставит вопрос: "Как фотоны знают, каковы их длины волн в абсолютных единицах с тем, чтобы решить, образовывать ли им пары?" Другими словами можно сказать, что Фейнман фактически ставил вопрос о происхождении понятия метрики – той проблемы, над которой размышлял еще Б. Риман, написав "или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним – силами связи, действующими на это реальное" [30].

Обсуждая этот вопрос, Фейнман дает на него следующий ответ: "Каждый объем пространства должен содержать естественную меру размера (или времени). Принимая философию Маха, мы могли бы сказать, что вышесказанное есть нонсенс, что размер не есть абсолют, если нет ничего, с чем можно было бы его сравнить. Это могло бы быть влияние "туманностей", которое определяет масштаб времени в каждой точке пространства. Скажем, комптоновская длина волны относительно размера Вселенной зависит от того, как много "туманностей" находится в ней. Если они частично удалены, то масштаб длины должен был бы предположительно меняться" [2, с. 133].

К сожалению, эти рассуждения Фейнмана не были окончательно увязаны с его интерпретаци-

1 Заметим, что даже А. Эйнштейн не возражал против именования пространственно-временного многообразия общей теории относительности своеобразным эфиром [29].

ей квантовой механики методом континуального интегрирования. Виной этому явились не преодоленные им представления об априорно заданном классическом пространстве-времени. Ведь только при наличии фонового пространства приобретают смысл введенные Фейнманом траектории частиц и суммирования их фазовых вкладов.

Только созревшая к настоящему времени проблема вывода классических пространственно-временных представлений, причем в рамках реляционно-статистического подхода, позволяет перейти к конкретной реализации замыслов как Р. Фейнмана, так и его предшественников, начиная с Г. Лейбница и Э. Маха (см. [3]).

Литература

1. Владимиров Ю.С. Между физикой и метафизикой. Книга 2. По пути Клиффорда–Эйнштейна./Ю.С. Владимиров. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 248 с.

2. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по гравитации /Р.Фейнман, Ф.Б. Мориниго, У.Г. Вагнер. – М.: Изд-во «Янус-К», 2000. – 296 с.

3. Владимиров Ю.С. Реляционная концепция Лейбница–Маха /Ю.С. Владимиров. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 232 с.

4. Фейнман Р. Резработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте. (Нобелевская лекция). //Р. Фейнман. Характер физических законов. – М.: Мир,1968. – с. 228.

5. Wheeler J.A. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation / J.A. Wheeler, R.P. Feynman // Rev.Mod.Phys. – 1945. – Vol.17. – P. 157-181.

6. Рязанов Г.В. Путь к новым смыслам / Г.В. Рязанов. – М.: Гнозис, 1993. – 368 с.

7. Грановский Я.И. К релятивистской теории тяготения / Я.И. Грановский, А.А. Пантюшин // Изв. АН Каз.ССР, сер. физ.-мат. – 1965. – № 2. – с. 65-69.

8. Владимиров Ю.С. Теория прямого межчастичного взаимодействия / Ю.С. Владимиров, А.Ю. Турыгин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 136 с.

9. Кулаков Ю.И. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику // Ю.И. Кулаков, Ю.С. Владимиров, А.В. Карнаухов. М.: Изд-во Архимед, 1992. – 182 с.

10. Мах Э. Механика. Историко-критический очерк ее развития / Э. Мах. – Ижевск.: Ижевская республиканская типография, 2000. – 456 с.

11. Эйнштейн А. Принципиальное содержание общей теории относительности / А. Эйнштейн //Собр. научн. трудов. Т.1. – М.: Наука, 1965. – С. 613-615.

12. Эйнштейн А. Существует ли гравитационное воздействие, аналогичное электродинамической индукции? / А. Эйнштейн //Собр. научн. трудов. – М.: Наука, 1965. – Т.1. – с. 223-226.

13. Эйнштейн А. Автобиографические заметки / А. Эйнштейн // Собр. научн. трудов. – М.: Наука, 1967. – Т. IV. – С. 259-293.

14. Hoyle F. Action at a distance in physics and cosmology / F. Hoyle, J.V. Narlikar. – San Francisco: W.N. Freeman and Comp., 1974. – P. 85.

15. Дикке Р. Многоликий Мах / Р. Дикке // Сб. «Гравитация и теория относительности». – М.: Мир, 1962. – 249 с.

16. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М.: Наука, 1967. – 664 с.

17. Zimmerman E.J. The macroscopic nature of space-time / E.J. Zimmerman // Amer. J. Phylos. – 1962. – Vol. 30. – P. 97-105.

18. Пенроуз Р. Структура пространства-времени / Р. Пенроуз. – М.: Мир, 1972. – 184 с.

19. Эйнштейн А. Физика и реальность / А. Эйнштейн // Собр. научн. трудов. – М.: Наука, 196. – Т. IV. – С. 200-227.

20. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 440 с.

21. Van Dantzig D. On the relation between geometry and physics and concept of space-time / D. Van Dantzig // Funfzig Jahre Relativitats theory. – Konferenz Bern: Basel, 1955. – Bd.1. – 569 p.

22. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 3. Излучение, волны, кванты. / Р. Фейнман , Р. Лейтон , М. Сэндс. – М.: Мир, 1965. – 234 с.

23. Природа электрического тока (Беседы-диспут в Ленинградском политехническом институте). – М.-Л.: Изд-во Всесоюзного электротехнического общества, 1930. – 152 с.

24. Френкель Я.И. Принцип причинности и полевая теория материи / Я.И. Френкель // Сб. «Вопросы теоретической физики». – Спб.: ПИЯФ, 1994. – С. 132-154.

25. Владимиров Ю.С. Метафизика и фундаментальная физика. Книга 3. Реляционные основания искомой парадигмы. / Ю.С. Владимиров. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 256 с.

26. Гроссетест Р. О свете и о начале форм / Р. Гроссетест // Вопросы философии. – 1995. – № 6. – 125с.

27. Вейль Г. Бог и Вселенная / Г. Вейль // Альманах «Метафизика». Век XXI. – М.: БИНОМ, 2011. – с. 209-210.

28. Арсенов О.О. Никола Тесла. Открытия реальные или мифические. / О.О. Арсенов .– М.: Эксмо, 2010. – 335 с.

29. Эйнштейн А. Эфир и теория относительности / А. Эйнштейн // Собр. научн трудов. – М.: Наука, 1965. – Т.1. – С. 682-689.

30. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии / Б. Риман // Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». – М.: Мир, 1979. – С. 18-33.

RICHARD FEYNMAN AND THE LEIBNIZ-MACH RELATIONAL CONCEPT

Yu.S. Vladimirov

In this article, dedicated to the 100th anniversary Of R. Feynman's birth, his relational views corresponding to the ideas of G. Leibniz and E. Mach are characterized. It is shown that the cause of Feynman's disappointments was the ignoring of the first component of the relational approach-the derivative character of space-time relations. It is stated that the most important task of modern fundamental physics is to derive space-time representations from the more elementary concepts of the physics of the microcosm. It is argued that the solution to this problem is possible only within the framework of the relational-statistical approach. The first steps in this direction are shown.

Keywords: relational paradigm, concept of long-range, Mach's principle, metaphysics of light, space-time relationship, quantum mechanics.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

Д.В. Гальцов

Фотонные и поперечные улавливающие поверхности в стационарных пространствах

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК

ФОТОННЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ УЛАВЛИВАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ В СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д.В. Гальцов[1]

1 *galtsov@phys.msu.ru*; Московский государственный университет,Казанский федеральный университет

Фотонная поверхность (ФП) определяется как замкнутая времениподобная гиперповерхность, такая, что любая изотропная геодезическая, первоначально касающаяся ее пространственного сечения, остается на ней навсегда. Касательная улавливающая поверхность (КУП) определяется так, что изотропные геодезические могут покидать её пространственное сечение, но только в одном направлении - внутрь. Обе поверхности являются важной характеристикой сильного гравитационного поля черных дыр, червоточин и голых сингулярностей, связанных с ними свойстами визуализации. Мы анализируем ФП и КУП на ряде примеров с упором на их существование в статических пространствах, не обладающих сферической симметрией, а также в стационарых пространствах. Исследуются решения, в которых классические фотонные поверхности исчезают, но существуют КУП и их обобщения. Рассматриваются аксиально-симметричные метрики с вращением и с голыми сингулярностями, такими как решение Зипоя-Вурхиса.

Ключевые слова: фотонная поверхность, касательная улавливающая поверхность, аксиально-симметричные метрики.

СОДЕРЖАНИЕ:

1 Введение 29
2 КУП и ФП 30
3 Стационарные аксиально-симметричные пространства 31
4 Статические пространства: решение Зипоя-Вурхиса 31
5 Стационарные пространства: метрика Керра-Ньюмана 33
6 Обсуждение 35
Литература 35

1. Введение

Фотонные сферы являются важной характеристикой ультракомпактных объектов, таких как черные дыры (ЧД), сверхкомпактные звезды, кротовые норы и голые сингулярности. Они тесно связаны с гравитационным линзированием [1] и гравитационной тенью [2]. В случае Шварцшильда, изученом в оригинальной работе Вирбхадры и Эллиса [1], замкнутые круговые фотонные орбиты расположены на расстоянии $r = 3M$ и образуют сферу в силу сферической симметрии. Понятие фотонной сферы было далее обобщено на *фотонные поверхности* (ФП), которые не обязательно являются сферически-симметричными. В [3] фотонные поверхности определяются как замкнутые времениподобные гиперповерхность S такие, что любая изотропная геодезическая, первоначально касательная к S, будет оставаться на S. Основная теорема гласит, что фотонные поверхности являются конформно-инвариантными и полностью омбилическими [4] (то есть такими, что вторая фундаментальная форма пропорциональна индуцированной метрике). Фотонные поверхности были найдены во множестве *статических* пространств, где они подчиняются нескольким теоремам единственности [5, 6, 7].

В общем случае стационарных аксиальносимметричных пространств фотонные поверхности обычно разрушаются вращением. Световые лучи, распространяющиеся с постоянным значением радиальной координаты Бойера-Линдквиста, заполняют некоторый объем в пространстве, известный как *фотонный регион* [8]. Другим обобщением фотонной сферы является *свободно захватывающая поверхность*, для которой был получен аналог неравенства Пенроуза [9]. Другое полезное понятие, предложенное в [10], - это касательная улавливающая поверхность (КУП), которое обобщает

ФП. Аналогично ФП, КУП можно определить в геометрических терминах, используя неравенства, определяющие вторую квадратичную форму гиперповерхностей. Такой подход применим и в тех случаях, когда переменные в уравнениях геодезических не разделяются, как в пространствах Вейля.

2. КУП и ФП

Напомним основные понятия геометрии гиперповерхностей. Пусть $\hat{M}$ - 4 - мерное пространство. Рассмотрим трехмерную времениподобную гиперповерхность M, представленную параметрически $F(M) : M \to \hat{M}$ как

$$x^\mu = f^\mu(\sigma^A), \qquad \mu = 0,...,3, \qquad A = 0,...,2, \tag{1}$$

где σ^A - локальные координаты на M. Обозначим через $f^\mu_A = \partial f^\mu / \partial \sigma^A$ линейно независимые касательные векторы в каждой точке $F(M)$. Индуцированная метрика g_{AB} и единичное пространственноподобное нормальное векторное поле n^μ на $F(M)$ определяются формулой

$$g_{AB} = \hat{g}_{\mu\nu} f^\mu_A f^\nu_B, \quad \hat{g}_{\mu\nu} f^\mu_A n^\nu = 0, \quad \hat{g}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1. \tag{2}$$

Компоненты второй фундаментальной формы H_{AB} получаются из разложения Гаусса [4]:

$$H_{AB} = \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{\nabla}_{f_A} f^\mu_B) n^\nu, \tag{3}$$

где $\hat{\nabla}$ - ковариантная производная в $\hat{M}$.

Рассмотрим изотропную геодезическую $\hat{\gamma}$ с касательным вектором $\dot{\hat{\gamma}}^\mu(s)$, направленным тангенциально к M в некоторой точке $F(p)$ на $F(M)$,

$$\ddot{\hat{\gamma}}^\mu(s) + \hat{\Gamma}^\mu_{\lambda\rho} \dot{\hat{\gamma}}^\lambda(s) \dot{\hat{\gamma}}^\rho(s) = 0. \tag{4}$$

Введем другую кривую γ из точки p с касательным вектором $\dot{\gamma}^A(s)$, который предполагается изотропной геодезической на гиперповерхности M,

$$\ddot{\gamma}^A(s) + \Gamma^A_{BC} \dot{\gamma}^B(s) \dot{\gamma}^C(s) = 0, \tag{5}$$

Предположим, что в начальный момент касательные векторы к геодезическим совпадают. Таким образом, в точке p мы можем выбрать $\dot{\hat{\gamma}}^\mu(0) = f^\mu_A \dot{\gamma}^A(0)$. Переписывая уравнения (5) для изотропной геодезической γ в терминах четырехмерных величин, имеем

$$\ddot{\gamma}^\mu(s) + \hat{\Gamma}^\mu_{\lambda\rho} \dot{\gamma}^\lambda(s) \dot{\gamma}^\rho(s) = (H_{AB} \dot{\gamma}^A(s) \dot{\gamma}^B(s)) n^\mu. \tag{6}$$

Существуют следующие основные возможности: • Две траектории $\hat{\gamma}$ и γ согласуются локально, когда $H_{AB} \dot{\gamma}^A(s) \dot{\gamma}^B(s) = 0$. Если для некоторой времениподобной поверхности это условие выполняется для любого изотропного касательного вектора $\dot{\sigma}^A$ в M:

$$H_{AB} \dot{\sigma}^A \dot{\sigma}^B = 0, \tag{7}$$

мы получаем *фотонную поверхность*(ФП) [3]. Эквивалентно (7) можно переписать как утверждение о том, что поверхность полностью омбилическая [4]:

$$H_{AB} = H g_{AB}. \tag{8}$$

• Траектории $\hat{\gamma}$ и γ не совпадают. Геодезические $\hat{\gamma}$ распространяются внутрь области, ограниченной поверхностью $F(M)$ тогда и только тогда, когда $H_{AB} \dot{\gamma}^A(s) \dot{\gamma}^B(S) > 0$. Следовательно, необходимым и достаточным условием для того, чтобы M являлась *касательной улавливающей поверхностью* (КУП) [10], является то, что она времениподобна и для каждой точки на M выполняется условие

$$H_{AB} \dot{\sigma}^A \dot{\sigma}^B \geq 0, \tag{9}$$

для любого изотропного касательного вектора $\dot{\sigma}^A$ в M.

3. Стационарные аксиально-симметричные пространства

Пусть $\hat{M}$ - 4-мерное аксиально-симметричное стационарное пространство, снабженное координатами типа Бойера-Линдквиста $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, и определяемое следующим образом:

$$ds^2 = -e^\lambda (dt - \omega d\phi)^2 + e^{-\lambda}(e^\alpha dr^2 + e^\beta d\theta^2 + e^\gamma d\phi^2), \tag{10}$$

где $\omega = \omega(r,\theta)$, $\lambda = \lambda(r,\theta)$ и т. д. Рассмотрим гиперповерхность $r = r_T = const$. Она времениподобна, и её нормаль определяется как

$$n^\mu = (0, e^{\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)}, 0, 0). \tag{11}$$

Из (9) получаем следующее условие КУП:

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\lambda)} \left((\partial_r \lambda - \partial_r \beta) e^\beta \dot{\theta}^2 + (\partial_r \lambda - \partial_r \gamma) e^\gamma \dot{\phi}^2 + e^{2\lambda} \partial_r \lambda (\dot{t} - \dot{\phi}\omega)^2 - 2e^{2\lambda} (\dot{t} - \dot{\phi}\omega) \dot{\phi} \partial_r \omega \right) \geq 0. \tag{12}$$

Ясно, что не все компоненты во второй квадратичной форме независимы. Из условия, что вектор $\dot{\sigma}^A$ равен нулю, получаем:

$$- e^{2\lambda} (\dot{t} - \dot{\phi}\omega)^2 + (e^\beta \dot{\theta}^2 + e^\gamma \dot{\phi}^2) = 0. \tag{13}$$

В частности, отсюда получаем ограничение на азимутальное движение:

$$\dot{\phi}^2 \leq e^{2\lambda - \gamma} (\dot{t} - \dot{\phi}\omega)^2. \tag{14}$$

• Предположим теперь, что $\partial_r \omega = 0$, тогда легко показать, что должно выполняться условие

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\lambda)} \left((2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) e^\beta \dot{\theta}^2 + (2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma) e^\gamma \dot{\phi}^2 \right) \geq 0, \tag{15}$$

для любых $\dot{\phi}$ и $\dot{\theta}$. Необходимые и достаточные условия для КУП, таким образом, следующие:

$$2\partial_r \lambda \geq \partial_r \beta, \quad 2\partial_r \lambda \geq \sigma \partial_r \gamma. \tag{16}$$

• Если $\partial_r \omega \neq 0$, введём новую переменную ξ:

$$\xi^2 = \frac{e^{\gamma - 2\lambda} \dot{\phi}^2}{(\dot{t} - \dot{\phi}\omega)^2} \leq 1, \quad \varpi = e^{\lambda - \gamma/2} \partial_r \omega \tag{17}$$

и исключим $\dot{\theta}$:

$$(\partial_r \beta - \partial_r \gamma) \xi^2 - 2\varpi\xi + (2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) \geq 0. \tag{18}$$

Как показанно в [10] это эквивалентно выполнению любого из трех условий:

$$(i) \quad 2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma \geq |2\varpi| > 2(\partial_r \beta - \partial_r \gamma) > 0, \tag{19}$$

$$(ii) \quad (\partial_r \beta - \partial_r \gamma)(2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) \geq \varpi^2, \quad \partial_r \beta > \partial_r \gamma, \tag{20}$$

$$(iii) \quad 2\partial_r \lambda - |2\varpi| \geq \partial_r \gamma \geq \partial_r \beta. \tag{21}$$

Иногда удобнее использовать эквивалентный набор условий КУП:

$$(i^*) \quad (2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma)^2 \geq 4\varpi^2 > 4(\partial_r \beta - \partial_r \gamma)^2, \quad \partial_r \beta > \partial_r \gamma, \quad 2\partial_r \lambda > \partial_r \gamma, \tag{22}$$

$$(ii^*) \quad (\partial_r \beta - \partial_r \gamma)(2\partial_r \lambda - \partial_r \beta) \geq \varpi^2, \quad \partial_r \beta > \partial_r \gamma \tag{23}$$

$$(iii^*) \quad (2\partial_r \lambda - \partial_r \gamma)^2 \geq 4\varpi^2, \quad \partial_r \beta \leq \partial_r \gamma, \quad 2\partial_r \lambda > \partial_r \gamma. \tag{24}$$

4. Статические пространства: решение Зипоя-Вурхиса

Метрика Зипоя-Вурхиса в координатах типа Бойера-Линдквиста (10) имеет вид[11]:

$$\lambda = \delta \log\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad \gamma = \log\left((r^2 - 2mr)\sin^2\theta\right), \quad \omega = 0, \tag{25}$$

$$\alpha = (\delta^2 - 1)\log\left(r^2 - 2mr\right) + (1 - \delta^2)\log\left(r^2 - 2mr + m^2 \sin^2\theta\right), \tag{26}$$

$$\beta = \delta^2 \log\left(r^2 - 2mr\right) + (1 - \delta^2)\log\left(r^2 - 2mr + m^2 \sin^2\theta\right), \tag{27}$$

где δ - параметр деформации. Для $\delta = 1$ это сферически-симметричная черная дыра Шварцшильда, для нецелого $0 < \delta < 2$ это голая сингулярность, для $\delta = 2$ это решение с двумя центрами (невращающееся версия решения Томимацу-Сато-2) [12]. Сначала определим горизонт и/или положения сингулярности:

$$r_s^1 = 0, \quad r_s^2 = 2m, \quad r_s^3 = m(1-\cos\theta), \quad r_s^4 = m(1+\cos\theta), \tag{28}$$

где r_s^2 представляет сингулярность, если $\delta \neq 1$ и горизонт, если $\delta = 1$. Нам будет интересен регион вне горизонта(сингулярности) $r > 2m$, где вектор ∂_r пространственноподобен и, соответственно, сечение $r = r_T = const$ является времениподобной поверхностью. Условия КУП (16) гласят:

$$2m < r_T \leq m + 2m\delta, \quad \delta > \frac{1}{2}, \tag{29}$$

$$r_T(r_T - 2m)(m + 2m\delta - r_T) + m^2\delta(2m + (m - r_T)\delta))(1-\xi) \geq 0, \tag{30}$$

где $0 \leq \xi = \cos^2\theta \leq 1$ и должно выполняться для любого θ на сфере или, по крайней мере, для сферического пояса. В последнем случае поверхность не замкнута.

Ясно, что на полюсах $\xi = 1$ второе соотношение выполняется автоматически, если первое выполнено. Поэтому мы можем рассматривать только экваториальную плоскость с $\xi = 0$. При $\xi = 0$ второе соотношение (30) будет следующим

$$(r_T - m)(r_T - m\delta)(2m + m\delta - r_T) \geq 0. \tag{31}$$

Таблица 1. ФП и КУП в пространстве Зипоя-Вурхиса

δ	$\frac{1}{2} < \delta < 1$	$\delta = 1$	$1 < \delta \leq 2$	$\delta > 2$
r_T	$2m < r_T \leq m + 2m\delta$	$r_P = 3m$	$2m < r_T \leq 2m + m\delta$	$m\delta \leq r_T \leq 2m + m\delta$
Тип	КУП	ФП	КУП	КУП

Существует несколько типов решений, приведенных в таблице (3). Интересно, что в случае $\delta > 2$ область с КУП отделена от особенности (рис. 3). В этих условиях кажется, что нулевые геодезические, первоначально касательные к КУП, не обязаны падать на сингулярность, что противоположно случаю Шварцшильда. Так как решение Зипоя-Вурхиса является геодезически неинтегрируемой системой [13], то явный анализ этого свойства не прост, поэтому стоит сравнить это с решениями, обеспечивающими аналогичные свойства ФУП, но интегрируемыми. В случае $\delta \leq 1/2$ область КУП исчезает, а сингулярность сильно оголена [14].

Можно рассмотреть также участок сферической поверхности $\xi_c < \xi < 1$ являющийся КУП для:

$$r_T < r_{T'} = \frac{m}{3}\left(3 + 2\delta + 2\sqrt{3 + \delta^2(1 + 3\xi_c)}\cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right), \tag{32}$$

$$\vartheta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\delta(\delta^2 - 9 - 9(\delta^2 - 3)\xi_c)}{(3 + \delta^2(1 + 3\xi_c))^{3/2}}\right), \quad \delta > 1. \tag{33}$$

Набор таких поверхностей формирует некоторую область (рис. 3). Общая огибающая для этой области определяется (33) и изображается пунктирной линией. Точный физический смысл такой коллекции поверхностей пока не совсем ясен. С одной стороны, это может указывать на наличие несферической замкнутой КУП. Однако, согласно общей теореме [10], существуют некоторые ограничения на топологию таких поверхностей, приводящие к тому, что они имеют сферическую топологию в пространственном сечении. С другой стороны, такие незамкнутые КУП могут быть интересны как еще одна аналитическая характеристика сильного гравитационного поля. В частности, свет, первоначально касающийся их, может оставлять область $r < r_T$, но только в определенном диапазоне углов и, соответственно, незамкнутые КУП могут использоваться в теории гравитационного линзирования [1, 14].

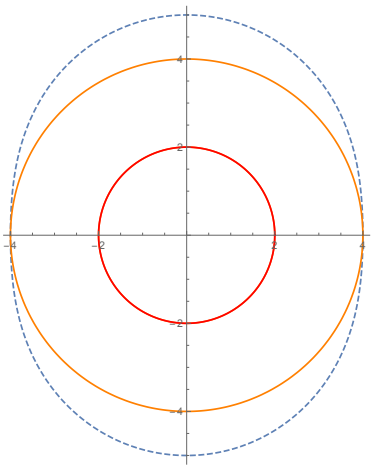


Рис. 1. $\delta = 2$

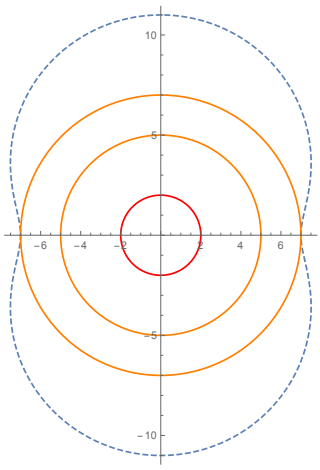


Рис. 2. $\delta = 5$

Рис. 3. КУП регион в решении Зипоя-Вурхиса. Красная линия - сингулярность, оранжевая линия - граница для региона КУП, пунктирная линия - граница для региона с незамкнутыми КУП

5. Стационарные пространства: метрика Керра-Ньюмана

Решение Керра-Ньюмана в координатах типа Бойера-Линдквиста имеет вид[15]:

$$\lambda = \log\left(\frac{r^2 - 2mr + \beta + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right), \quad \omega = -\frac{a(2mr - \beta)\sin^2\theta}{r^2 - 2mr + \beta + a^2\cos^2\theta}, \tag{34}$$

$$\alpha = \log\left(\frac{r^2 - 2mr + \beta + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2mr + \beta + a^2}\right), \quad \beta = \log\left(r^2 - 2mr + \beta + a^2\cos^2\theta\right), \tag{35}$$

$$\gamma = \log\left((r^2 - 2mr + \beta + a^2)\sin^2\theta\right). \tag{36}$$

Координаты t и r могут изменяться на всем $\mathbb{R}$, а θ и ϕ - стандартные координаты на единичной двумерной сфере. a - параметр вращения, $\beta = e^2 + g^2$ содержит электрический и магнитный заряды.

Рассмотрим субэкстремальное решение Керра-Ньюмана с $\beta < m^2$ и $a^2 < m^2 - \beta$. Как и ранее, определим горизонт, эргосферу и расположение сингулярности:

$$r_s = 0, \quad r_{h\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - \beta - a^2}, \quad r_{e\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - \beta - a^2\cos^2\theta}. \tag{37}$$

По техническим соображениям, нас будет интересовать область вне эргосферы черной дыры $r > r_{e+}$, где поле ∂_r пространственноподобно и, соответственно, сечение $r = r_T = const$ является времениподобной поверхностью. Мы можем рассматривать и случай внутри эргосферы. Можно показать, что это приводит к изменению знаков всех не возведённых в квадрат неравенств в (i^*).

Прежде всего, мы находим, что условие (ii^*) имеет вид

$$(2\partial_r\lambda - \partial_r\beta)(\partial_r\beta - \partial_r\gamma) - \omega^2 = -\frac{4a^2r^2\sin\theta}{(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \geq 0, \tag{38}$$

и, следовательно, не может быть истинным за пределами горизонта событий $r > r_{h+}$. Также легко показать, что

$$(\partial_r\beta - \partial_r\gamma) = \frac{2a^2(r - m)\sin^2\theta}{(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)(r^2 - 2mr + \beta + a^2\cos^2\theta)}. \tag{39}$$

Отсюда, $\partial_r\beta > \partial_r\gamma$ во внешней области $r > r_{e+}$ и нам нужно исследовать условие (i^*). Неравенство $(2\partial_r\lambda - \partial_r\gamma)^2 \geq 4\omega^2$ приводит к следующему:

$$(r - m)^2 + \frac{4mr(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)}{r^2 + a^2\xi} - \frac{4r^2(2mr - \beta)(r^2 - 2mr + a^2 + \beta)}{(r^2 + a^2\xi)^2} \geq 0, \tag{40}$$

где $\xi = \cos^2\theta$. Вычисляя производную, можно показать, что левая часть монотонно возрастает во внешней области ($r > r_{h+}$) субэкстремального пространства-времени ($\beta < m^2$, $a^2 < m^2 - \beta$). Неравенство (40) выполняется автоматически при $\xi = 1$. Поэтому необходимое и достаточное условие для всех ξ сводится к случаю $\xi = 0$, который дает:

$$\left(r^2 - 3mr + 2\beta\right)^2 \geq 4a^2(mr - \beta). \tag{41}$$

Если это нарушено, то (40) будет выполняться для некоторого критического ξ_c. Мы должны добавить так же условие, что левая часть неравенства (i) положительна:

$$2\partial_r\lambda - \partial_r\gamma = \frac{4(r-m)}{r^2 - 2mr + \beta + a^2\xi} - \frac{2(r-m)}{r^2 - 2mr + a^2 + \beta} - \frac{4r}{r^2 + a^2\xi} > 0. \tag{42}$$

Неравенство для $\xi = 1$ и $\xi = 0$ дает:

$$a^2(r+m) + r(r^2 - 3mr + 2\beta) < 0, \quad (r^2 - 3mr + 2\beta) - \frac{2a^2(mr-\beta)}{(r^2 - 2mr + \beta)} < 0 \tag{43}$$

По крайней мере, в этом случае следующее неравенство должно выполняться $r^2 - 3mr + 2\beta < 0$. В этом случае второе автоматически верно, если $r > r_{\beta+} = m + \sqrt{m^2 - \beta}$. На эргосфере $a^2\xi' = 2mr - \beta - r^2$ (42) выполнено. Таким образом, требуется только одно условие:

$$r^3 - 3mr^2 + (2\beta + a^2)r + a^2 m < 0. \tag{44}$$

Второе условие (i^*) дает:

$$\frac{(-mr^2 + \beta r + ma^2\xi)^2}{(r^2 + a^2\xi)^2} > \frac{a^2(r-m)^2(1-\xi)}{r^2 - 2mr + a^2 + \beta}. \tag{45}$$

Для $\xi = 1$, очевидно, оно выполняется. При $\xi = 0$ неравенство сводится к следующему:

$$(r^2 - 2mr + \beta)((mr - \beta)^2 - a^2(r^2 - \beta)) > 0. \tag{46}$$

Это выполняется, если первый множитель положителен, $r > r_{\beta+}$. Второй множитель положителен в субэкстремальном случае, так как определитель соответствующего квадратного уравнения имеет вид $D = a^2\beta(a^2 - m^2 + \beta) < 0$. Ясно, что при $r < r_{\beta+}$ часть КУП входит в эргосферу, и вместо $\xi = 0$ следует рассмотреть $a^2\xi' = 2mr - \beta - r^2$. Расчет показывает, что (45) выполняется и в этом случае. Таким образом, это верно для всех $r > r_{e+}$.

В результате условия существования КУП были сведены к (41) и (44). Второе условие вырезает конечную часть первого решения:

$$r_{h+} < r_T < r_T^{max}, \tag{47}$$

где

$$2r_T^{max} = 3m + \sqrt{F} - \sqrt{v - F - \frac{8a^2 m}{\sqrt{F}}}, \quad 3F = v + \frac{v^2 - 24a^2 u}{Q^{1/3}} + Q^{1/3}, \tag{48}$$

$$Q = 216a^4 m^2 + v^3 - 36a^2 vu + 24\sqrt{3}a^2\sqrt{(m^2 - a^2 - \beta)(v^2\beta - 27a^2 m^4)}, \tag{49}$$

$$v = 9m^2 - 8\beta, \quad u = 3m^2 - 2\beta \tag{50}$$

Заметим, что внутри эргосферы $r < r_{e+}$ неравенства (42) и (45) меняют знак, но продолжают выполняться.

Регионы КУП в субэкстремальной метрике Керра-Ньюмана показаны на рисунках (7). Первый (4) идентичен случаю $\beta = 0$, указанному в [10]. Во втором случае (5) заметное появление обширной области КУП в окрестности экстремального значения. Сверхэкстремальная метрика Керра-Ньюмана требует дополнительного изучения. Рассмотрим необходимые условия (41) и (44), которые приводят к ситуации, изображенной на рисунке (6). Кажется, что в сверхэкстремальном режиме КУП должны существовать. Заметим, что мы имеем дело с ситуацией, подобной метрике Зипой-Вурхиса, где КУП отслаивается от сингулярности.

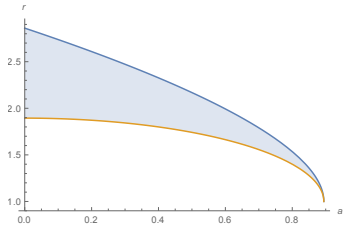


Рис. 4. $\beta = 0.2$

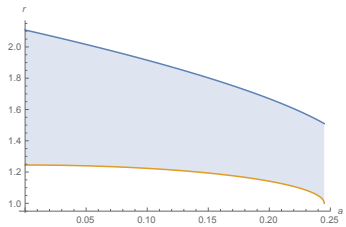


Рис. 5. $\beta = 0.94$.

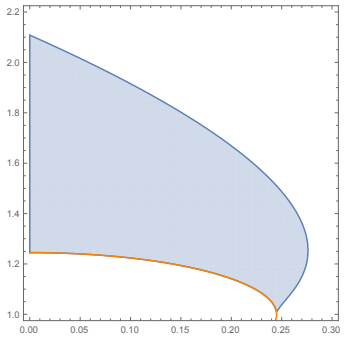


Рис. 6. $\beta = 0.94$.

Рис. 7. КУП в метрике Керра-Ньюмана как функция параметра вращения a. Синяя линия - r_T^{max}, оранжевая линия - горизонт r_{h+}.

6. Обсуждение

Мы проанализировали ФП и КУП с упором на их существование в статических пространствах без сферической симметрии, а также в стационарных пространствах. Мы исследовали решения, в которых классические фотонные поверхности исчезают, включая аксиально-симметричные метрики Керра-Ньюмана и решение Зипоя-Вурхиса.

Для решения Зипоя-Вурхиса было обнаружено, что в случае значения параметра деформации $\delta > 2$ область с КУП отделена от сингулярности. В этих условиях кажется, что изотропные геодезические, первоначально касательные к КУП, не обязаны падать на сингулярность, что противоположно случаю Шварцшильда. Так как решение Зипоя-Вурхиса представляет собой неинтегрируемую систему [13], то явный анализ этого свойства не прост, поэтому мы сравнили ситуацию с метриками, имеющими сходные свойства КУП, но которые являются интегрируемыми. Мы обнаружили, что метрики с вращением, такие как решение Керра-Ньюмена, не обладают такими свойствами в субэкстремальном режиме, но, по-видимому, имеют их в сверхэкстремальном случае, как показывают численные расчеты. Возможно, имеет смысл рассмотреть сверхэкстремальный случай подробнее. В случае $\delta \leq 1/2$ область TTS исчезает, а сингулярность сильно голая [14].

Эта работа была поддержана российскими Фондом фундаментальных исследований по проекту 17-02-01299а и Программой Правительства Российской Федерации по развитию Казанского федерального университета.

Литература

1. Virbhadra K.S. Schwarzschild black hole lensing / K.S.Virbhadra, G.F.R.Ellis // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol.62. – P.084003. – Access mode: DOI 10.1103/PhysRevD.62.084003 [astro-ph/9904193].

2. J. L. Synge. The escape of photons from gravitationally intense stars / Mon. Not. R. astro. Soc. – 1966. – Vol.131. – P.463.

3. Claudel C.M. The Geometry of photon surfaces / C.M.Claudel, K.S.Virbhadra, G.F.R.Ellis// J. Math. Phys. – 2001. – Vol.42. – P.818. – Access mode: DOI 10.1063/1.1308507 [gr-qc/0005050].

4. M. Okumura. Totally umbilical hypersurfaces of a locally product Riemannian manifold / Kodai Math. Sem. Rep. – 1967. – Vol.19. – P.35.

5. Cederbaum C. Uniqueness of photon spheres in electro-vacuum spacetimes / C.Cederbaum, G.J.Galloway // Class. Quant. Grav. – 2016. – Vol.33. – P.075006. – Access mode: DOI 10.1088/0264-9381/33/7/075006 [arXiv:1508.00355 [math.DG]].

6. Cederbaum C. Uniqueness of photon spheres in static vacuum asymptotically flat spacetimes. – Access mode: arXiv:1406.5475 [math.DG].

7. Rogatko M. Uniqueness of photon sphere for Einstein-Maxwell-dilaton black holes with arbitrary coupling constant / Phys. Rev. D. – 2016. – Vol.93, №6. – P.064003. – Access mode: DOI 10.1103/PhysRevD.93.064003 [arXiv:1602.03270 [hep-th]].

8. Grenzebach A. Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant / A.Grenzebach, V.Perlick, C.Lammerzahl // Phys. Rev. D. – 2014. – Vol.89, 12. – P.124004. – Access mode: DOI 10.1103/PhysRevD.89.124004 [arXiv:1403.5234 [gr-qc]].

9. Yoshino H. Extension of photon surfaces and their area: Static and stationary spacetimes / H.Yoshino, K.Izumi, T.Shiromizu, Y.Tomikawa // Vol. PTEP 2017, №6. – P.063E01. – Access mode: DOI 10.1093/ptep/ptx072 [arXiv:1704.04637 [gr-qc]].

10. Yoshino H. Uniqueness of static photon surfaces: Perturbative approach / H.Yoshino // Phys. Rev. D. – Vol. 95. – P. 044047. – Access mode: DOI 10.1103/PhysRevD.95.044047 [arXiv:1607.07133 [gr-qc]].

11. J.B.Griffiths. Exact Space-Times in Einstein's General Relativity / Cambridge University Press, 2009. – P.538.

12. Kodama H. Global structure of the Zipoy-Voorhees-Weyl spacetime and the delta=2 Tomimatsu-Sato spacetime / H.Kodama and W.Hikida // Class. Quant. Grav. – 2003. – Vol.20, P.5121. – Access mode: DOI 10.1088/0264-9381/20/23/011 [gr-qc/0304064].

13. Lukes-Gerakopoulos G. The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric / Phys. Rev. D. – 2012. – Vol.86.Lukes-Gerakopoulos G. The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric / Phys. Rev. D. – 2012. – Vol.86. – P.10. – Access mode: [arXiv:1206.0660].

14. Virbhadra K.S. Gravitational lensing by naked singularities / K.S.Virbhadra, G.F.R.Ellis // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol.65. P.103004. Access mode: DOI 10.1103/PhysRevD.65.103004.

15. Griffiths J.B. A new look at the Plebanski-Demianski family of solutions / J.B. Griffiths, J. Podolsky // Int. J. Mod. Phys. D. – 2006. – Vol.15. – P.335. – Access mode: DOI 10.1142/S0218271806007742 [gr-qc/0511091v1].

THE PHOTON AND THE TRANSVERSE TRAPPING SURFACE IN A STATIONARY SPACES

D.V. Galtsov

A photonic surface (FP) is defined as a closed time-like hypersurface, such that any isotropic geodesic initially touching its spatial section remains on it forever. A tangent trapping surface (PMC) is defined so that isotropic geodesics can leave its spatial cross - section, but only in one direction-inward. Both surfaces are an important characteristic of the strong gravitational field of black holes, wormholes, and naked singularities associated with them by imaging properties. We analyze the FP and PMC on a number of examples with emphasis on their existence in static spaces that do not have spherical symmetry, as well as in stationary spaces. Investigated solutions in which the classical photon of the surface disappear, but there are COOP and their generalizations. Considered axially symmetric metric with rotation and with naked singularities, such as the decision of IPoA-Voorhis.

Keywords: photonic surface, tangent trapping surface, axially symmetric metrics.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

В.М. Журавлев

Интегрируемые модели теоретической физики. Метод функциональных подстановок.

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК 531.01:517.9

**ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВОК.**

В.М. Журавлев[1]

1 *zhvictorm@gmail.com*; Ульяновский государственный университет, НИТИ им. С.П. Капицы

В работе рассмотрен метод функциональных подстановок и интегрируемые модели теоретической физики, а также гидродинамические подстановки для самосогласованных моделей гидродинамики.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, интегрируемые модели теоретической физики, гидродинамические подстановки, самосогласованные модели.

Лекция 1.
Метод функциональных подстановок и интегрируемые модели теоретической физики

СОДЕРЖАНИЕ:

1 Введение . . . 39
2 О пользе дифференцирования . . . 41
3 Простейшая схема МФП . . . 44
4 Примеры нелинейных интегрируемых моделей . . . 46
5 Дополнительные соотношения . . . 51
6 Общая формулировка матричной версии МФП . . . 52
7 Формализм с матрицами размерности 2×2 . . . 53
8 Вспомогательные уравнения первого порядка по координате . . . 54
9 Уравнение типа уравнения Ландау-Лифшица . . . 55
10 Волны в среде с квадратичной нелинейностью . . . 55
11 Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка . . . 56
12 Уравнения второго порядка по координате . . . 57
13 Интегрируемые уравнения для матриц размерности $n = 2$ . . . 57
14 Дополнительные интегрируемые соотношения . . . 58
15 Приведение к форме уравнения НУШ . . . 58
16 Подстановки для многомерных уравнений . . . 60
17 Общая формулировка метода в многомерном варианте . . . 60
18 Простые примеры интегрируемых скалярных моделей . . . 61
19 Матричные подстановки для многомерных уравнений . . . 62
20 Интегрируесмые модели автоволн в размерности 1+2 . . . 63
21 Нелинейное уравнение Дирака . . . 64
22 Переход к спинорной форме записи . . . 64
23 Интерпретация . . . 66
24 Построение решений для нелинейного уравнения Дирака . . . 67
25 Приложение . . . 68
Литература . . . 69

- Я предпочитаю найти одну истину,
хотя бы и в незначительных вещах,
нежели долго спорить о величайших вопросах,
не достигая никакой истины.
Г. Галилей

1. Введение

Успешность той или иной теоретической модели, основанной на дифференциальных уравнениях, зависит от того, насколько точным и полным может быть проведен анализ их решений. На современном этапе наиболее полный анализ может быть проведен для моделей, построенных на основе линейных дифференциальных уравнений. Основным свойством, определяющим успешное применение линейных моделей на практике, является принцип линейной суперпозиции, позволяющий собирать сложные решения из простейших. Это напоминает игру в кубики, когда из почти одинаковых по форме элементов собирают очень сложные конструкции. Поскольку методы построения решений, основанные на принципе линейной суперпозиции, очень эффективны при решении множества прикладных задач, то одним из основных направлений построения аналитических решений нелинейных уравнений является приведение их к совокупности линейных. Такой переход может осуществляться различными способами. Наиболее универсальный метод такого рода - это применение теории возмущений в той или иной форме. Однако использование теории возмущений лишает получаемые решения особых свойств, которые присущи именно решениям нелинейных моделей. Это связано с тем, что решение в теории возмущений имеет вид бесконечных рядов, сходимость которых чаще всего не может быть проверена в полной мере. Это означает, что приближенные решения, построенные на основе первых нескольких порядков, чаще всего не отражают существенных свойств нелинейного процесса. Для выявления специфического поведения сложных систем необходимо иметь в распоряжении методы преобразования нелинейного уравнения в линейное или другое нелинейное уравнение, но допускающее полную интегрируемость. Одним из таких общих методов, позволяющих свести нелинейную задачу к линейной или полностью интегрируемой, является метод функциональных подстановок, развитие которого связано в первую очередь с подстановкой Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса [1, 25, 24].

Современная физика и сопряженные с ней области науки оперируют множеством моделей процессов и явлений различного уровня сложности. Наиболее существенным свойством современных моделей является их нелинейность. Это свойство означает, что изначально изучаемое явление или процесс имеют или наделяются такими свойствами, которые нельзя представить в виде простой совокупности более простых процессов, протекающих независимо друг от друга. В нелинейных моделях все элементы систем взаимодействуют друг с другом так, что их невозможно простым образом разделить на отдельные составляющие. Очень часто именно нелинейность определяет характерные черты реальных явлений или процессов, которые не удается описать с помощью простых линейных моделей. Этот факт был осознан в полной мере лишь во второй половине XX века и стал одним из главных идеологических основ общего подхода к выбору моделей для описания реальных систем и их поведения.

Основной сложностью на пути использования нелинейных моделей для описания реальных явлений и процессов является отсутствие общих математических методов построения решений нелинейных уравнений, на которых строится модель. Поэтому одной из важных тенденций в математической и теоретической физике XX века стал пристальный интерес к различным математическим методам, которые позволяли бы строить точные решения определенных типов нелинейных уравнений, а более сложные уравнения упрощать так, чтобы их можно было бы привести к одному из видов интегрируемых нелинейных уравнений.

Методы редукции сложных уравнений к более простым появились с момента создания аппарата дифференциальных уравнений для описания физических явлений. Эти методы опирались на возможность представить решения сложных уравнений с помощью бесконечных рядов функций, которые являлись решениями более простых уравнений. Такой подход в целом называется теорией возмущений. Этот метод предполагает, что в исходном уравнении можно выделить некоторое про-

стое точное решение сложной системы, которое отражает некоторое "невозмущенное" ее состояние, которое "не сильно" отличается от нужного решения. Далее с помощью решения совокупности, как правило, однотипных линейных уравнений невозмущенное решение аддитивно дополняется их решениями. Основная проблема такого подхода состоит в том, что множество невозмущенных, простых решений очень ограничено, а несколько дополнительных слагаемых в теории возмущений не отражают сути нелинейного явления, что можно получить лишь суммируя весь бесконечный ряд дополнительных решений. Последнее, однако, чаще всего на практике невозможно сделать.

Более развитый метод теории возмущений, часто называемый методом многомасштабных разложений [2, 3], дает возможность построить процедуру вычисления возмущенных решений так, что она может учитывать именно нелинейные свойства процесса. При этом на каждом шаге построения возмущенных решений приходится иметь дело с нелинейными уравнениями, но более простого вида. Этот подход и реализует концепцию приведения сложных уравнений к более простым, для которых уже имеются методы построения точных решений. Таким образом, на первый план в развитии методологии исследования нелинейных моделей выдвигаются методы отыскания или перечисления всех возможных интегрируемых нелинейных уравнений, которые могут быть использованы в схемах метода теории возмущений в форме многомасштабных разложений.

Первым полезным для широкого круга задач способом отыскания точноинтегрируемых уравнений математической физики стал метод обратной задачи (МОЗ), который первоначально опирался на методологическую базу квантовой теории. Основой МОЗ стала процедура приведения нелинейного уравнения к специальной форме записи, эквивалентной условию коммутативности пары линейных дифференциальных операторов, так называемой пары Лакса [29]. Первым и типичным примером применения МОЗ является уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

которое можно представить в виде условия коммутативности двух операторов:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t), \quad \hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 6u_x.$$

Действительно:

$$[\hat{L}, \hat{A}]\Psi = (u_t + 6uu_x + u_{xxx})\Psi.$$

Поэтому, если функция $u(x,t)$ такова, что коммутатор операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$ равен нулю для любой функции Ψ из подходящего функционального пространства, то эта функция является решением уравнения КдВ (1).

Линейные операторы и условия их коммутативности стали играть важную роль в задачах теоретической и математической физики благодаря квантовой теории. Однако те задачи, к которым применим МОЗ, относятся к гораздо более широкому кругу систем и явлений в них, чем квантовые системы, что и сделало МОЗ эффективным средством исследований волновых процессов во многих разделах современной физики - гидродинамике, нелинейной оптике, теории плазмы и т.д. [22, 3, 45]. Тем не менее, к настоящему времени установлено, что круг нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗ, оказался слишком узким и не отвечает требованиям множества постановок реальных физических задач. В первую очередь это относится к задачам, связанным с диссипативными процессами, которые не обладают достаточным числом дифференциальных законов сохранения, что составляет одно из основных свойств нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗ.

Другой подход к отысканию интегрируемых уравнений связан с отысканием преобразований неизвестных функций к специальному виду, в котором преобразованная функция удовлетворяет другому уравнению, которое уже допускает полную интегрируемость. Такой подход был назван методом функциональных подстановок (МФП), по названию одного из первых примеров его реализации для конкретной физической задачи об одномерном течении вязкой однородной жидкости, которое описывается уравнением Бюргерса [1]:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \tag{2}$$

Здесь $u(x,t)$ - скорость течения среды, а ν - коэффициент ее кинематической вязкости. В работах [25, 24] было показано, что это уравнение сводится с помощью подстановки:

$$u = \frac{\partial \ln \phi}{\partial x}, \tag{3}$$

к линейному уравнению теплопроводности:

$$\phi_t - \nu\phi_{xx} = 0,$$

относительно вспомогательной функции $\phi(x,t)$. Подстановка (3) называется подстановкой Коула-Хопфа и долгое время оставалась почти единственным примером удачного применения МФП к реальным задачам теоретической физики. Другой более ранний пример подобного рода, связанный с построением точных решений двумерного уравнения Лиувилля:

$$\Delta\theta = e^{-2\theta}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

играющий важную роль в теории двумерных поверхностей [3], был найден в работе [32] (см. также [34, 33]). В общей форме записи функция:

$$\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2}{\Phi^2}\right),$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля при условии, что функция $\Phi(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0.$$

Однако до недавнего времени [18] подстановки Коула-Хопфа и Лиувилля, сводящие соответствующие уравнения к линейным, не рассматривались как принадлежащие к одному подходу, основанному на МФП. В конце 80-х годов прошлого века в целом ряде работ [26, 27, 37, 36] было установлено определенное подобие между уравнениями, интегрируемыми с помощью МОЗ и уравнениями, интегрируемыми с помощью МФП. Последние получили название уравнений типа Бюргерса. Более систематический подход к построению уравнений типа Бюргерса, интегрируемых с помощью МФП в различных его формах, был предложен в работах [10, 15] и развит в дальнейшем в цикле работ [11, 12, 14, 41, 18].

2. О пользе дифференцирования

Поле переноса температуры

Долгое время существование подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса связывалось исключительно со специальной структурой самого уравнения, что не позволяло особенно надеяться на то, что аналогичный подход можно использовать еще где-то. Однако в 2006 году появилась работа [21], в которой связь между уравнением Бюргерса и теплопроводности получила совершенно новое обоснование.

В работе [21] рассматривалась задача о перемещении в пространстве точек с заданной температурой, если сама температура описывается простым уравнением теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности ν. Скорость перемещения таких точек может вычислена, исходя из следующих рассуждений. Предположим, что распределение температуры в пространстве и времени задается с помощью функции $T(x,t)$. Тогда закон движения $x = x(t)$ точки с температурой T_0 можно вычислить с помощью решения алгебраического уравнения:

$$T(x(t),t) = T_0. \tag{4}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, находим:

$$\frac{dT(x(t),t)}{dt} = \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{T=T_0} + \frac{dx}{dt}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{T=T_0} = 0.$$

Скорость перемещения точки $V = dx/dt$ образует поле, если значение T_0 пробегает все допустимые значения. Эти допустимые значения функции $T(x,t)$ часто называют **маркерами**, а само уравнение (5) называют **уравнением переноса маркеров**. При этом форма уравнения для скорости перемещения остается неизменной. В этом случае поле $V(x,t)$ можно рассчитать, исходя из уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V(x,t)\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Предположим, что функция $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$T_t - \nu T_{xx} = 0. \tag{6}$$

Возникает вопрос - существует ли универсальная форма уравнения для скорости $V(x,t)$, не зависящая от выбора функции $T(x,t)$, как решение уравнения теплопроводности. Решение этой задачи и было найдено в работе [21]. Суть подхода, предложенного Урюковым, состояла в следующем. Рассмотрим вместе с уравнениями (6) и (5) их дифференциальные следствия. Именно рассмотрим следующую общую систему соотношений:

$$\begin{aligned}
&T_t - \nu T_{xx} = 0, \quad T_t + V T_x = 0,\\
&T_{xt} - \nu T_{xxx} = 0, \quad T_{tt} - \nu T_{xxt} = 0,\\
&T_{xt} + V_x T_x + V T_{xx} = 0, \quad T_{tt} + V_t T_x + V T_{xt} = 0,\\
&T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + V T_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Эта система соотношений содержит семь линейных уравнений относительно семи производных функции $T(x,t)$. Эта система замкнута относительно производных: $T_x, T_t, T_{xx}, T_{xt}, T_{tt}, T_{xxx}, T_{xxt}$ и является однородной. Следовательно, если функция $T(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности, то по построению она является совместной, а ее определитель равен нулю. Вычисляя определитель этой системы, получаем следующее соотношение:

$$V_t + 2V V_x - \nu V_{xx} = 0, \tag{8}$$

что в точности совпадает с уравнением Бюргерса (2), если положить $u = 2V$.

Этот результат можно было бы получить из более простых соображений, замечая, что уравнение (5) преобразуется в подстановку Коула-Хопфа:

$$V = -\frac{T_t}{T_x} = -\frac{\nu T_{xx}}{T_x} = -\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln T_x,$$

если воспользоваться уравнением теплопроводности (6). Однако, если факт наличия подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса выглядит как "случайная" особенность, то способ вывода уравнения Бюргерса, как условия совместности системы дифференциальных соотношений, связанных с уравнением теплопроводности, выглядит как результат более общей идеологии, которую можно распространить и на другие уравнения.

Поле скоростей переноса потенциалов электромагнитного поля в вакууме

Для демонстрации того, что идеология предложенная в работе [21] может быть распространена на более широкий класс уравнений, рассмотрим вывод общего уравнения для скоростей переноса значений функции, удовлетворяющей уравнению Д'Аламбера, которое описывает динамику распространения электромагнитных волн в вакууме [10]. Задача о вычислении такого уравнения ставится совершенно аналогично тому, как это было сделано для уравнения теплопроводности. Пусть функция $T(x,t)$ теперь (потенциал электрического поля, например) удовлетворяет уравнению Д'Аламбера:

$$T_{tt} - c^2 T_{xx} = 0. \tag{9}$$

Уравнение переноса значений функции $T(x,t)$ имеет тот же вид, что и уравнение (5). Производя формальное дифференцирование уравнений (9) и (5) по x и t, легко убедиться, что система производных функции T вновь замыкается, но уже для совокупности из девяти производных: $T_x, T_t, T_{xx}, T_{xt}, T_{tt}, T_{xxx}, T_{xxt}, T_{xtt}, T_{ttt}$:

$$\begin{aligned}
&T_{tt} - c^2 T_{xx} = 0, \quad T_t + V T_x = 0,\\
&T_{xtt} - c^2 T_{xxx} = 0, \quad T_{ttt} - c^2 T_{xxt} = 0,\\
&T_{xt} + V_x T_x + V T_{xx} = 0, \quad T_{tt} + V_t T_x + V T_{xt} = 0,\\
&T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + V T_{xxx} = 0, \quad T_{ttt} + V_{tt} T_x + 2V_t T_{xt} + V T_{xtt} = 0,\\
&T_{xtt} + V_{xt} T_x + V_x T_{xt} + V_t T_{xx} + V T_{xxt} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Если функция $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению Д'Аламбера, то последняя однородная система совместна по построению, а определитель ее равен нулю. Это приводит к следующему, на вид достаточно сложному уравнению для функции $V(x,t)$:

$$(V^2-c^2)\left(\left(V_{tt}-c^2V_{xx}\right)\left(V^2-c^2\right)-2V\left[(V_t)^2-c^2(V_x)^2\right]\right)=0$$

Из этого уравнения следует, что есть три независимых ветви решений. Два решения $V=\pm c$ соответствуют двум бегущим в одну сторону решением Д'Аламбера: $T_+(x,t)=g(x-ct)$ и $T_-(x,t)=h(x+ct)$, а третье уравнение:

$$\left(V_{tt}-c^2V_{xx}\right)\left(V^2-c^2\right)-2V\left[(V_t)^2-c^2(V_x)^2\right]=0, \tag{11}$$

соответствует их линейной суперпозиции. Это последнее уравнение можно привести в более компактный вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\ln\left|\frac{c-V}{c+V}\right|=0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что функция $F(V)=\ln|c-V|-\ln|c+V|$ вновь удовлетворяет уравнению Д'Аламбера. Уравнение (12) представляет собой вновь уравнение Д'Аламбера. Отсюда следует, что локальное преобразование:

$$T(x,t)\to T'(x,t)=\ln\left(\frac{c-V(x,t)}{c+V(x,t)}\right)=\ln\left(\frac{cT_x+T_t}{cT_x-T_t}\right). \tag{13}$$

преобразует любое решение уравнения Д'Аламбера вновь в решение уравнения Д'Аламбера. Смысл этого результата можно понять, если решение для $T(x,t)$ представить в виде:

$$T(x,t)=f(x-ct)+h(x+ct), \tag{14}$$

где $f(\xi)$ и $h(\eta)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции относительно конусных переменных $\xi=x-ct$ и $\eta=x+ct$. Подставляя (14) в выражение для функции $T'(x,t)$, находим:

$$T'(x,t)=\ln f'(x-ct)-\ln h'(x+ct).$$

Поскольку в представлении (14) функции $f(\xi)$ и $h(\eta)$ произвольны, то из последнего соотношения следует, что отображение (13) преобразует $T(x,t)$ к тому же общему представлению (14) с заменой функции $f(x-ct)$ на функцию $\ln f'(x-ct)$ и $h(x+ct)$ на функцию $-\ln h'(x+ct)$ того же типа.

Обобщенные подстановки типа Коула-Хопфа

Примеры с уравнениями теплопроводности и Д'Аламбера показывают, что существует некоторая общая схема, которая позволяет строить нелинейные уравнения с заранее известным свойством интегрируемости, причем эта процедура построения интегрируемых уравнений является конструктивной, поскольку сразу предлагает и способ построения решений этих уравнений. Реализация этой общей схемы может иметь несколько вариантов. Часть из этих схем была описана в работах [10, 15, 11, 12]. Все эти схемы опираются на различные совокупности исходных базовых соотношений, из которых с помощью дополнительного интегрируемого уравнения получается новое нелинейное интегрируемое уравнение. Рассмотрим некоторые из этих схем, а затем опишем самую общую схему, из которой можно получить все остальные.

Идея обобщения подстановок типа Коула-Хопфа заключается в следующем. При рассмотрении вопроса о том, как перемещаются в пространстве маркеры, выделенные значением некоторой функции $T(x,t)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности, это уравнение можно обобщить, вводя в него одну произвольную вспомогательную функцию. Именно, рассмотрим вопрос о скорости перемещения маркера $T(x,t)$, удовлетворяющего уравнению распространения тепла в среде с адвекцией со скоростью $W(x,t)$ [11]:

$$T_t-\nu T_{xx}+W(x,t)T_x=0. \tag{15}$$

Нетрудно понять, что система базовых дифференциальных соотношений, которые теперь можно извлечь из уравнения (15) и уравнения переноса маркера (5) будет по сути не сильно отличаться от системы (7). Поскольку дополнительное слагаемое в уравнении (15) имеет меньший порядок производной функции T, чем его главная часть, то и число самих уравнений в (7) и число производных,

относительно которых эта система будет замкнута, останется неизменным. Существенно изменится лишь определитель этой системы, который будет теперь содержать не только производные функции $V(x,t)$, но и функции $W(x,t)$. Действительно, вычисляя определитель системы:

$$\begin{aligned}
&T_t - \nu T_{xx} + W T_x = 0, \quad T_t + V T_x = 0,\\
&T_{xt} - \nu T_{xxx} + W_x T_x + W T_{xx} = 0, \quad T_{tt} - \nu T_{xxt} + + W_t T_x + W T_{xt} = 0,\\
&T_{xt} + V_x T_x + V T_{xx} = 0, \quad T_{tt} + V_t T_x + V T_{xt} = 0,\\
&T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2 V_x T_{xx} + V T_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Приходим к следующему уравнению:

$$U_t + U V_x + V U_x - \nu V_{xx} = 0, \tag{17}$$

где $U = (V - W)/\nu$. Это уравнение содержит две неизвестные функции $V(x,t)$ и $U(x,t)$. Поэтому это уравнение представляет собой связь между этими функциями, в предположении, что эти функции связаны с $T(x,t)$ базовыми уравнениями (7) и (5), которые можно переписать в следующем виде:

$$V = -\frac{T_t}{T_x}, \quad U = -\frac{T_{xx}}{T_x}. \tag{18}$$

Из этих двух соотношений следует, что все производные функции T любого порядка могут выражены исключительно через одну из них, например, T_x, причем соответствующие коэффициенты пропорциональности будут некоторыми дифференциальными полиномами от V и U. В частности:

$$\begin{aligned}
&T_{xt} = -Q(x,t) T_x, \quad Q = V_x - UV,\\
&T_{tt} = -R(x,t) T_x, \quad R = V_t - V V_x + V^2 U,\\
&T_{xxx} = -(U_x - U^2) T_x, \ldots
\end{aligned} \tag{19}$$

Используя эти обозначения, соотношение (17) можно записать более компактно:

$$U_t = Q_x. \tag{20}$$

Смысл рассмотрения расширенного варианта уравнения теплопроводности с адвекцией состоит в том, что универсальное соотношение (20) связывает две функции, каждая из которых вычисляется через произвольную функцию $T(x,t)$. Это означает, что выбирая функции $T(x,t)$, как решение определенного интегрируемого дифференциального уравнения мы получаем некоторую дополнительную связь между функциями U и Q, которая с учетом (20) будет приводить к некоторым нелинейным дифференциальным соотношениям для этих функций, которые можно рассматривать как интегрируемые по построению нелинейные уравнения.

3. Простейшая схема МФП

Обратим внимание на то, что вместо того, чтобы в качестве исходных базовых уравнений для функции $T(x,t)$ рассматривать пару уравнений (5) И (15) или (18), можно рассмотреть пару простейших дифференциальных соотношений вида:

$$T_x = A(x,t) T, \quad T_t = B(x,t) T, \tag{21}$$

которые дают самую простую схему МФП. В дальнейшем функцию $T(x,t)$ будем называть основной, а функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$ - базовыми функциями.

При любой заданной основной функции $T(x,t)$ из базовых соотношений (21) можно вычислить функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$, пользуясь формулами:

$$A = T_x / T, \quad B = T_t / T, \tag{22}$$

что соответствует подстановкам типа Коула-Хопфа в схемах, которые были рассмотрены ранее. Функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$, которые удовлетворяют (22), в силу дифференцируемости основной функции $T(x,t)$, связаны между собой уравнением:

$$A_t = B_x, \tag{23}$$

аналогичным (20). Собственно, соотношение (20) переходит в (23), если в (19) производную функции $T_x(x,t)$ заменить на саму функцию, что не меняет сути этих соотношений до тех пор, пока на $T(x,t)$ не накладывается никаких ограничений.

Предполагая гладкость или даже аналитичность функции T, используя (21) можно получить линейную связь всех производных функции $T(x,t)$ с самой этой функцией. Доказательство этого факта строится по индукции. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^{k+m}T(x,t)}{\partial x^k \partial t^m} \equiv T^{[k,m]}(x,t). \tag{24}$$

Предположим, что для смешанных производных порядка k по x и m по t связь найдена:

$$\frac{\partial^{k+m}T}{\partial x^k \partial t^m} \equiv T^{[k,m]} = A^{(k,m)}(A,B)T. \tag{25}$$

Здесь $A^{(k,m)}(A,B)$ - некоторый дифференциальный полином от A и B. Тогда, дифференцируя это соотношение по отдельности по x и t, находим:

$$T^{[k+1,m]} = \frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)}T + A^{(k,m)}T_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}A\right)T,$$
$$T^{[k,m+1]} = \frac{\partial}{\partial t}A^{(k,m)}T + A^{(k,m)}T_t = \left(\frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}B\right)T.$$

Отсюда следует, что если $A^{(k,m)}(A,B)$ - дифференциальный полином от A И B, то и $A^{(k+1,m)}(A,B)$ и $A^{(k,m+1)}(A,B)$ также будут дифференциальными полиномами от A И B. В результате получаем рекуррентные соотношения для вычисления функций $A^{(k,m)}(A,B)$:

$$A^{(k+1,m)} = \frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}A, \quad k,m = 1,\ldots \tag{26}$$
$$A^{(k,m+1)} = \frac{\partial}{\partial t}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}B, \quad k,m = 1,\ldots$$
$$A^{[1,0]} = A, \quad A^{[0,1]} = B.$$

В частности:

$$A^{[1,1]} = A_t + AB = B_x + BA, \quad A^{[2,0]} = A_x + A^2, \quad A^{[0,2]} = B_t + B^2, \ldots$$

Как уже отмечалось, соотношения (21) и, следовательно (23), выполняются для любой дифференцируемой основной функции $T(x,t)$. Поэтому можно ожидать, что между функциями $A(x,t)$ и $B(x,t)$ появится дополнительная связь, если функции $T(x,t)$ выбирать из некоторого множества решений определенного вида дифференциальных уравнений. Предположим, что функция $T(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению составного порядка (N,M):

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} C_{(k,m)}(x,t)T^{[k,m]} = 0. \tag{27}$$

Здесь использовались обозначения (24). Тогда, заменяя производные $T^{[k,m]}$ в соответствии с соотношениями (25), уравнение (27) приводится к форме, в которой функция $T(x,t)$ отсутствует:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} C_{(k,m)}(x,t)A^{(k,m)}(A,B) + C_{(10)}(x,t)A + C_{(01)}(x,t)B + C_{00}(x,t) = 0. \tag{28}$$

Это соотношение, совместно с условием (23), можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно пары функций A и B. В результате пара нелинейных уравнений (28) и (23), относительно функций $A(x,t)$ и $B(x,t)$, имеет в качестве решения функции, вычисляемые из любого решения уравнения (27) с помощью подстановок (21). Содержательность этого подхода состоит в том, что таким образом можно получить решения ряда нелинейных прикладных задач.

Сравнивая первоначальный подход, основанный на дифференциальных следствиях из уравнения переноса маркера (5) и некотором другом уравнении, например, уравнении теплопроводности

или Д'Аламбера, со схемой, основанной на (21), можно заключить, что в последней воспроизводятся все элементы первоначального подхода. Действительно, вспомогательное уравнение, из которого возникает дополнительная связь между A и B, фактически, является обобщением уравнений теплопроводности и Д'Аламбера, но без необходимости проверки замыкания системы производных основной функции T. Уравнение же переноса маркера, т.е. фиксированных значений $T_0 = T(x(t), t)$, воспроизводится из базовых соотношений (21) с помощью исключения из этой пары уравнений самой функции $T(x, t)$. В результате такой процедуры находим:

$$T_t - \frac{B}{A} T_x = 0,$$

откуда получаем явный вид скорости $V(x, t)$ переноса маркера:

$$V(x, t) = -\frac{B(x, t)}{A(x, t)}. \tag{29}$$

Таким образом, базовая схема, основанная на (21), позволяет решать и задачу переноса маркеров исследуемого процесса.

4. Примеры нелинейных интегрируемых моделей

В качестве примеров полезности приведенной схемы рассмотрим несколько моделей, которые интегрируются с помощью подстановок рассмотренного выше типа. Поскольку важным является именно интегрируемость рассматриваемых моделей, то полезно их строить, отталкиваясь от того или иного типа интегрируемого уравнения.

Нелинейное телеграфное уравнение

Рассмотрим в качестве интегрируемого уравнения телеграфное уравнение в конусных переменных:

$$T_{xt} + aT_x + bT_t + cT = 0. \tag{30}$$

Здесь предполагается, что $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ и $c(x, t)$ - некоторые заданные функции. Очевидно, что максимальную пользу можно извлечь для тех случаев, когда уравнение (30) интегрируется в элементарных функциях. Это ограничивает выбор функций a, b, c такими случаями, когда уравнение (30) интегрируется простым образом, например, в элементарных функциях.

Процедура вывода нелинейного уравнения, связанного с ним на основе развитой схемы, состоит в замене производных функции T в этом уравнении на соответствующие функции $A^{(k,m)}$ из совокупности рекуррентных соотношений (26). В результате получается следующая система уравнений для пары функций A и B:

$$A_t + AB + aA + bB + c = 0, \quad A_t = B_x. \tag{31}$$

Исключая из этой системы функцию B, приходим к уравнению относительно функции A:

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_t + aA + c}{A + b}\right) \tag{32}$$

Сделаем замену переменных, полагая $u = A(x, t) + b(x, t)$. В этом случае уравнение приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \ln u}{\partial x \partial t} + u_t + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c - b_t - ab}{u}\right) + a_x - b_t = 0. \tag{33}$$

Другая запись данного уравнения получается после формальной замены $u = e^{\phi}$. В результате для ϕ уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial t} e^{\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left((c - b_t - ab)e^{-\phi}\right) + a_x - b_t = 0.$$

Уравнение этого типа встречается в теории струн и, как показано выше, полностью интегрируется, если интегрируется исходное уравнение для T. В частности, в случае $a = \text{const},\ b = const,\ c = const$ уравнение (30) интегрируется в виде рядов и интегралов Фурье-Лапласа:

$$T = \int\limits_C g(k) e^{ikx+\omega(k)t}\, dk,\ \ \omega(k) = -\frac{c+ika}{b+ik}, \tag{34}$$

где $g(k)$ - произвольная комплексная функция параметра k, допускающая существование интеграла в правой части для заданного контура C на комплексной плоскости. Соответственно, при этих же условиях, уравнение:

$$\frac{\partial^2 \ln u}{\partial x \partial t} + u_t + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c-ab}{u}\right) = 0$$

также полностью интегрируется и имеет решение:

$$u = b + \frac{T_x}{T} = b + \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\int\limits_C g(k) e^{ikx+\omega(k)t}\, dk\right).$$

Заметим также, что для уравнений (30) теперь можно указать формулу для скорости $V(x,t)$ переноса маркеров поля $T(x,t)$. В соответствии с общей формулой (29) имеем:

$$V(x,t) = -\frac{B}{A} = \frac{A_t + aA + c}{A(A+b)}.$$

Отсюда, в частности, видно, что скорость переноса маркеров может обращаться в бесконечность в точках (x_0, t_0), в которых, либо $A(x_0, t_0) = 0$, либо $A(x_0, t_0) = b(x_0, t_0)$, что эквивалентно $u(x_0, t_0) = 0$. Исходя из самого уравнения переноса маркеров (5), можно констатировать, что скорость V обращается в бесконечность только в точках экстремума гладкой основной функции $T(x,t)$. Экстремумам функции $T(x,t)$ в силу базовых соотношений (21) соответствуют точки (x_0, t_0), в которых $A(x_0, t_0) = 0$. Отсюда следует, что условие $A(x_0, t_0) = b(x_0, t_0)$ при $b(x_0, t_0) \neq 0$ не может выполняться, либо одновременно при этом выполняется условие:

$$\left(A_t + aA + c\right)\Big|_{x=x_0,\, t=t_0} = 0.$$

Таким образом, из анализа скорости переноса маркеров можно получать дополнительную информацию о характере процессов, описание которых соответствует как исходному уравнению (30), так и уравнению (33).

Уравнение Лиувилля

Особый пример работоспособности общей схемы представляет известное из геометрии поверхностей, гидродинамики и некоторых других разделов прикладных задач уравнение Лиувилля:

$$\Delta\Theta = e^{2\theta},\ \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{35}$$

Данный подход дает полный набор решений этого уравнения. Общий класс решений этого уравнения был построен Лиувиллем [32]. Решение в виде квадратичных форм было построено в [7, 6]. Поэтому строящиеся далее решения этого уравнения не обладают достаточной новизной, но дают новое полезное представление о возможных нестандартных вариантах использования самого метода функциональных подстановок в некоторых ситуациях.

В качестве вспомогательного интегрируемого уравнения рассмотрим уравнение Лапласа:

$$\Delta T = 0. \tag{36}$$

Заменяя производные функции T на функции A и B из системы дифференциальных соотношений:

$$T_x = AT,\ \ T_y = BT,$$

приходим к следующей системе связей функций A и B:

$$A_x + A^2 + B_y + B^2 = 0, \quad A_y = B_x. \tag{37}$$

Чтобы получить из этой системы полезные следствия, произведем формальную замену функций A и B по следующему правилу:

$$A(x,y) = R(x,y)\cos\Phi(x,y), \quad B = R(x,t)\sin\Phi(x,t).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (37), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений для R и Φ:

$$(R_x + R\Phi_y)\cos\Phi + (R_y - R\Phi_x)\sin\Phi + R^2 = 0,$$
$$(R_x - R\Phi_y)\sin\Phi - (R_y - R\Phi_x)\cos\Phi = 0.$$

Эта система уравнений эквивалентна следующей системе уравнений:

$$R_x + R\Phi_y = -R^2\cos\Phi, \quad R_y - R\Phi_x = -R^2\sin\Phi.$$

или

$$R^{-1}R_x + \Phi_y = -A, \quad R^{-1}R_y - \Phi_x = -B. \tag{38}$$

Дифференцируя первое уравнение по x, а второе по y, а затем результат складывая, приходим к уравнению Лиувилля:

$$\Delta \ln R = R^2, \tag{39}$$

которое эквивалентно (35) и переходит в него при замене переменных $R = e^{\Theta}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (38) по y, а второе - по x, и, затем, вычитая результаты, приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0. \tag{40}$$

В результате находим, что решение уравнения Лиувилля для R можно представить в виде:

$$R = \sqrt{\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2}, \tag{41}$$

где $T(x,y)$ - любое решение уравнения Лапласа (36). Решение уравнения (35) будет иметь вид:

$$\Theta = \ln R = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2\right).$$

Аналогично, новым решением уравнения Лапласа (40) являются функции:

$$\Phi = \arctan\left(\frac{T_y}{T_x}\right). \tag{42}$$

Таким образом, последнее соотношение является отображением пространства решений уравнения Лапласа в себя, это отображение представляет собой аналог отображения (13).

Еще одним полезным соотношением, которое можно извлечь из предыдущих выкладок по построению решения уравнения Лиувилля, является свойство вспомогательной функции Ψ:

$$\Psi = \Theta + \ln T = \frac{1}{2}\ln\left(\left(T_x\right)^2 + \left(T_y\right)^2\right). \tag{43}$$

Используя тождество:

$$\Delta \ln T = \frac{\Delta T}{T} - \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 - \left(\frac{T_y}{T}\right)^2 = -e^{2\Theta},$$

находим:

$$\Delta\Theta - e^{2\Theta} = \Delta\Psi - \Delta\ln T - e^{2\theta} = \Delta\Psi + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y}\right)^2 - e^{2\Theta} = \Delta\Psi = 0.$$

Свойство функции Ψ состоит в том, что эта функция также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Psi = 0. \tag{44}$$

Уравнения, подобные КдВ

Рассмотрим и уравнения, подобные уравнению КдВ (1). Как известно, это уравнение интегрируется с помощью МОЗ. Покажем, что среди интегрируемых уравнений типа Бюргерса есть уравнения, подобные этому. Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение для функции $T(x,t)$ следующего вида:

$$T_t + T_{xxx} + a(x,t)T_{xx} + b(x,t)T_x + c(x,t)T = 0. \tag{45}$$

Заменяя в этом уравнении производные функции $T(x,t)$ на дифференциальные полиномы от $A(x,t)$ И $B(x,t)$ приходим к следующему уравнению:

$$B = -A_{xx} - 3AA_x + A^3 - a(A_x + A^2) - bA - c. \tag{46}$$

Подставляя его в уравнение связи A И B, приходим к следующем уравнению:

$$A_t + A_{xxx} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(aA_x + A^3 + aA^2 + bA\right) + c_x = 0. \tag{47}$$

По типу дисперсии линейной части уравнения и степени нелинейности это уравнение подобно модифицированному уравнению КдВ. Интересно отметить, что коэффициент $c(x,t)$ при самой функции T в уравнении (45) описывает внешний источник в уравнении для A. Это уравнение полностью интегрируется так, что каждое решение уравнения (45) дает решение уравнения для A с помощью подстановки типа Коула-Хопфа:

$$A = T_x / T.$$

Этот пример легко обобщить на эволюционные уравнения вида:

$$T_t = \sum_{k=0}^{N} C_k(x,t)T^{[k,0]}. \tag{48}$$

Соответствующие им уравнения получаются заменой производных функции T на A и B и после использования уравнения связи этих функций приводятся к виду:

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{N} C_k(x,t)A^{[k,0]}(A)\right), \tag{49}$$

содержащем справа только дифференциальные полиномы $A^{(k,0)}$ от $A(x,t)$, вычисляемые с помощью рекуррентных соотношений (26).

Примерами уравнений типа Бюргерса, подобных уравнениям типа КдВ более высокого порядка, являются уравнения, соответствующие следующим вспомогательным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + C_0 T, \\ T_t &= \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + C_0 T, \\ &\dots \end{aligned} \tag{50}$$

Эти уравнения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + A\right)\left(A_{xx} + 3AA_x + A^3\right), \\ A_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + A\right)\left(A_{xxx} + 4A_{xx}A + 3(A_x)^2 + 6A^2A_x + A^4\right), \\ &\dots \end{aligned} \tag{51}$$

Одномерное течение идеального сжимаемого газа

Примеры использования МФП, в соответствии со схемами (19) и (21), не ограничиваются линейными вспомогательными уравнениями для основной функции $T(x,t)$. В развитых схемах в качестве вспомогательного уравнения можно использовать любое интегрируемое уравнение для $T(x,t)$, из которого в результате подстановок базовых соотношений и дифференциальных следствий из них можно исключить все производные основной функции. В качестве примера рассмотрим уравнение следующего вида:

$$T_{xx}T_{tt} - T_{xt}T_{xt} = 0. \tag{52}$$

Это уравнение имеет интеграл, который можно записать в виде:

$$T_t = H(T_x), \tag{53}$$

где $H(\theta)$ - произвольная дифференцируемая функция своего аргумента $\theta = T_x$. Нетрудно видеть, что это уравнение эквивалентно уравнению Хопфа. Именно, дифференцируя последнее уравнение по x и делая замену переменных $\theta = T_x$, получаем для функции $\theta(x,t)$ уравнение:

$$\theta_t = H'(\theta)\theta_x. \tag{54}$$

Это уравнение имеет в свою очередь следующий интеграл:

$$\theta = F\Big(x + H'(\theta)t\Big). \tag{55}$$

Здесь $F(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция своего аргумента. Этот интеграл является алгебраическим уравнением, из которого при заданной функции $H(\theta)$ вычисляется решение для функции $T(x,t)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том - к какому уравнению преобразуется (52) в результате подстановки типа (18) [11, 12, 15]. Подставляя в (52) соотношения из (19), приходим к следующему уравнению:

$$U(V_t - VV_x + V^2U) - (V_x - UV)^2 = 0. \tag{56}$$

Раскрывая скобки и включая в систему уравнение связи (20), получаем:

$$U(V_t + VV_x) = (V_x)^2, \tag{57}$$

$$U_t\frac{\partial}{\partial x}(UV) - V_{xx} = 0. \tag{58}$$

Сделаем теперь формальную замену переменных, вводя функции:

$$\rho(x,t) = U(x,t), \quad u(x,t) = V - V_x/U = -Q/U. \tag{59}$$

В результате такой замены эта система уравнений принимает узнаваемый вид уравнения Эйлера одномерного инерциального течения идеального сжимаемого газа с плотностью $\rho(x,t)$ и скоростью потока $u(x,t)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0.\end{aligned} \tag{60}$$

Сами значения скорости и плотности инерциального течения вычисляются из базовых соотношений (18) и (19):

$$\rho = -\frac{T_{xx}}{T_x}, \quad u = -\frac{T_{xt}}{T_{xx}} \tag{61}$$

Учитывая, что решение (55) исходного уравнения (52) записывается для функции $\theta = T_x$, то удобно и решения для ρ и u записать через θ. В результате получаем:

$$\rho = -\frac{\theta_x}{\theta}, \quad u = -\frac{\theta_t}{\theta_x}. \tag{62}$$

Последнее соотношение можно записать в виде:

$$\theta_t + u\theta_x = 0. \tag{63}$$

Последнее уравнение есть не что иное как уравнение переноса гидродинамического маркера θ в среде со скоростью $u(x,t)$. Поскольку решение (55) содержит две произвольные функции, то оно позволяет построить общее решение задачи об инерциальном течении с заданными начальными распределениями и массы и скорости. Начальное распределение маркеров определяется функцией $F(\xi)$:

$$\theta_0(x,0) = F(x),$$

Поэтому начальное распределение плотности задается формулой:

$$\rho(x,0) = -\frac{F'(x)}{F(x)},$$

или

$$F(x) = \exp\Big(-\rho(x,0)\Big).$$

Начальное распределение скорости задается функцией $H(\theta)$:

$$u_0(x) = u(x,0) = -H'(F(x)).$$

Рассматривая этот вариант применения схемы подстановок, можно прийти к некоторому более приемлемому для гидродинамики способу построения моделей. Можно заметить, что исходным элементом данной схемы является уравнение переноса маркеров, которое является естественным для гидродинамики. В рассмотренной схеме уравнение переноса маркеров дополняется еще одним уравнением, которое и определяет тип моделей. Это наблюдение можно превратить в более общую схему построения гидродинамических моделей. Этот подход будет рассмотрен далее в отдельной главе.

5. Дополнительные соотношения

Еще одним важным аспектом применения МФП является возможность использовать его для построения отдельных частных решений неинтегрируемых полностью уравнений, дополняя базовую схему не одним вспомогательным уравнением для T, а совместной системой уравнений для этой функции. Для примера рассмотрим схему (21) совместно с двумя вспомогательными уравнениями:

$$T_t + T_{xxx} + a(x,t)T_{xx} + b(x,t)T_x + c(x,t)T, \quad T_{xx} + kT_x + u(x,t)T = 0, \tag{64}$$

первое из которых совпадает с (45). Эти два уравнения для $T(x,t)$ совместны, в частности, если коэффициенты этого уравнения имеют вид:

$$k = \text{const}, \quad a = \text{const}, \quad b = \frac{3}{2}u, \quad c = \frac{3}{4}u_x + \Big(a - \frac{3}{4}k\Big)u,$$

а функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдВ, записанному в таком виде:

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + \mu u_x = 0, \tag{65}$$

где $\mu = -k\Big(a - \frac{3}{4}k\Big)$. Наиболее простым вариантом решения последнего уравнения является всюду постоянная функция: $u = u_0 = \text{const}$. Для этого случая совместные решения системы (64) имеют такой вид:

$$T = Ae^{\lambda_+ x + \mu_+ t} + Be^{\lambda_- x + \mu_- t}, \tag{66}$$

где A и B - произвольные постоянные и введены обозначения:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\Big(-k \pm \sqrt{k^2 - 4u_0}\Big), \quad \mu_\pm = -\lambda_\pm^3 - a\lambda_\pm^2 - 3u_0\lambda_\pm/2 - (a - 3k/2)u_0.$$

Используя теперь подстановки (21), находим, что функция $A(x,t)$ будет одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$A_t + A_{xxx} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(aA_x + A^3 + aA^2 + bA\right) + c_x = 0, \tag{67}$$

$$A_x + A^2 + kA + u = 0, \tag{68}$$

первое из которых совпадает с (47). Таким образом, каждому частному решению $T(x,t)$ системы (64) будет соответствовать решение каждого из уравнений системы (67). В частности, отсюда следует, что соответствующие частные решения

$$A = T_x/T = \frac{A\lambda_+ e^{\lambda_+ x+\mu_+ t} + B\lambda_- e^{\lambda_- x+\mu_- t}}{Ae^{\lambda_+ x+\mu_+ t} + Be^{\lambda_- x+\mu_- t}} \tag{69}$$

будут также решением множества нелинейных уравнений, которые могут быть получены из первого уравнения системы (67), его редукцией с помощью второго уравнения системы. В частности, при $u = u_0 = \text{const}$ среди уравнений имеющих решения (69) есть и модифицированное уравнение КдВ и само уравнение КдВ. Действительно, используя второе уравнение (67), первое уравнение приводится к следующему виду:

$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x - \gamma A A_x - \delta A_x = 0, \tag{70}$$

где:

$$\beta = 6(\alpha+1),\quad \gamma = 6k\alpha,\quad \delta = (2u_0 + k^2)(\alpha - 1) + ka + \frac{3}{2}u_0.$$

Уравнение (70) представляет собой модифицированное уравнение КдВ (мКдВ), которое переходит в обычное уравнение КдВ в случае $\beta = 0$, что соответствует выбору: $\alpha = -1$. Однако, используя второе соотношение (67), можно получить множество других типов уравнений, для которых решениями будут те же функции $A = T_x/T$. Примером могут служить следующие уравнения:

$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x - \gamma A A_x + \delta A^2 + k\delta A + \delta u_0 = 0,$$
$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x + \gamma A^3 + (\delta + \gamma k)A^2 + (k\delta + \gamma u_0)A + \delta u_0 = 0,$$
$$A_t + \alpha A_{xxx} + \beta A^4 + (\gamma + k\beta)A^3 + (\delta + \gamma k + \beta u_0)A^2 + (k\delta + \gamma u_0)A + \delta u_0 = 0.$$

Среди всей совокупности таких уравнений есть и уравнения второго и первого порядков по x, а также и нулевого. Очевидно, что решения $A = T_x/T$ всей совокупности этих уравнений являются лишь некоторыми частными решениями. Важным в этом подходе является то, что таким образом можно строить серии частных решений многих типов уравнений одновременно, для которых другим способом найти точные решения может оказаться затруднительным. Множество таких решений определяется множеством совместных решений совокупности вспомогательных уравнений для T.

6. Общая формулировка матричной версии МФП

Дальнейшее развитие метода функциональных подстановок опирается на возможность перенести основные идеи на случай матричных дифференциальных соотношений и даже на более общие типы дифференцирования, о которых речь пойдет в последующих лекциях. Матричное расширение метода строится на основе матричных базовых соотношений вида:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T},\quad \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \tag{71}$$

где $\hat{T}, \hat{A}$ и $\hat{B}$ - квадратные матрицы размера $N \times N$, например:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11}(x,t) & T_{12}(x,t) & \cdots & T_{1N}(x,t) \\ T_{21}(x,t) & T_{22}(x,t) & \cdots & T_{2N}(x,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{N1}(x,t) & T_{N2}(x,t) & \cdots & T_{NN}(x,t) \end{pmatrix}.$$

В силу предполагаемой непрерывности элементов матрицы $\hat{T}(x,t)$ от x и t, матрицы $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ связаны дифференциальным соотношением:

$$\hat{A}_t - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0. \tag{72}$$

Здесь и далее $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ - коммутатор матриц $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$. Как и в скалярном случае, для старших производных матрицы $\hat{T}(x,t)$ выполняются соотношения:

$$\hat{T}^{[k,m]} = \hat{A}^{(k,m)}\hat{T}, \quad k,m = 1,2,\ldots,$$

где матрицы $\hat{A}^{(k,m)}$ являются дифференциальными полиномами от матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Как и в одномерном случае, для их вычисления можно использовать рекуррентные соотношения:

$$\hat{A}^{(k+1,m)} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{A}^{(k,m)} + \hat{A}^{(k,m)}\hat{A}, \quad \hat{A}^{(k,m+1)} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}^{(k,m)} + \hat{A}^{(k,m)}\hat{B}, k,m = 0,2,\ldots, \tag{73}$$

с начальными условиями:

$$\hat{A}^{(1,0)} = \hat{A}, \quad \hat{A}^{(0,1)} = \hat{B}, \quad \hat{A}^{(0,0)} = \hat{1}.$$

Именно наличие в уравнении связи (72) коммутатора, что отличает его от аналогичного соотношения (23) в скалярном случае, приводит к существенному расширению типов уравнений, которые интегрируются с помощью матричного МФП. Сама идеология МФП в матричном случае по сути не отличается от скалярного и состоит в рассмотрении дифференциальных следствий из базовых соотношений и из дополнительного уравнения для матричной функции $\hat{T}$, которая ограничивает ее функциональный вид. Это приводит к дополнительной связи между матрицами $\hat{A}$ и $\hat{B}$. В частности, если уравнение для $\hat{T}$ является интегрируемым, например, линейным с коэффициентами $C_{km}(x,t)$:

$$\sum_{k=0}^{P}\sum_{m=0}^{Q} C_{km}(x,t)T^{[km]} = 0, \tag{74}$$

то соответствующее дополнительное уравнение для матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{P}\sum_{m=0}^{Q} C_{km}(x,t)A^{(km)} = 0. \tag{75}$$

Решение совместной системы (75) и (72) теперь может быть найдено из базовых соотношений (71), в которых используются все возможные решения уравнения (74). Полезность такого подхода определяется наличием примеров его применения в прикладных задачах.

7. Формализм с матрицами размерности 2×2

Для анализа моделей, связанных с трехмерными векторами, полезно рассмотреть общие соотношения с матрицами размерности 2×2. Введем следующие обозначения для матриц Паули $\hat{\sigma}_\alpha$ и единичной матрицы:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Матрицы $\hat{\sigma}_i,\ i = 0,1,2,3$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}_0\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_i, \quad [\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_i] = 0, \quad i = 0,1,2,3; \\ &\hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta = -\hat{\sigma}_\beta\hat{\sigma}_\alpha = i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma; \\ &[\hat{\sigma}_\alpha,\hat{\sigma}_\beta] = 2i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3, \end{aligned} \tag{77}$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - полностью антисимметричный символ Леви-Чевита: $\varepsilon_{123} = 1,\ \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$.

Таким образом, любая матричная функция $\hat{T}(x,t)$, заданная на $\mathscr{GL}_2$, имеет следующий общий вид:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^{3}\tau_i(x,t)\sigma_i, \tag{78}$$

где $\tau_i(x,t)$ - вспомогательные функции, связанные с компонентами матрицы $\hat{T}$ соотношениями:

$$T_{11} = \tau_0 + \tau_3, \quad T_{11} = \tau_0 - \tau_3, \quad T_{12} = \tau_1 - i\tau_2, \quad T_{21} = \tau_1 + i\tau_2.$$

Для удобства интерпретации полезно ввести трехмерный вектор матриц Паули:

$$\hat{\mathbf{s}} = \left(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\right) \tag{79}$$

и трехмерный вектор $\mathbf{t} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Тогда любая матрица 2×2 может быть записана в виде:

$$\hat{T} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) + \tau_0 \hat{\sigma}_0, \tag{80}$$

где:

$$(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) = \tau_1 \hat{\sigma}_1 + \tau_2 \hat{\sigma}_2 + \tau_3 \hat{\sigma}_3$$

- евклидово скалярное произведение векторов. Обратные формулы для вычисления коэффициентов τ_i матриц $\hat{T}$ размерности 2×2 имеют следующий общий вид:

$$\tau_i = \mathrm{Sp}(\hat{\sigma}_i \hat{T})/2, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{81}$$

где Sp - операция вычисления следа матрицы.

Пусть теперь имеются две матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, которые могут быть представлены в виде:

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{3} a_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^{3} b_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \tag{82}$$

Вводя вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, эти матрицы можно записать так:

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{a}) + a_0 \hat{\sigma}_0, \quad \hat{B} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b}) + b_0 \hat{\sigma}_0.$$

Исходя из свойств матриц Паули (77), имеем теперь следующие общие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= i\left([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}\right) + a_0\left(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{s}}\right) + b_0\left(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{s}}\right) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\hat{\sigma}_0, \\ [\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 2i\left([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}\right). \end{aligned} \tag{83}$$

Здесь $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ - векторное произведение векторов **a** и **b**.

8. Вспомогательные уравнения первого порядка по координате

Рассмотрим вспомогательное уравнение для $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{H}(x,t)\hat{T}_x + \hat{Q}(x,t)\hat{T}, \tag{84}$$

где $\hat{H}(x,t)$ и $\hat{Q}(x,t)$ - некоторые заданные матрицы координат и времени. Используя базовые соотношения (71), получаем из этого уравнения следствие в виде уравнения связи:

$$\hat{B} = \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}. \tag{85}$$

Подставляя это соотношение в уравнение связи (72), находим:

$$A_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{H}\hat{A} + \hat{Q}\right) - \left[\hat{A}, \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}\right]. \tag{86}$$

Это уравнение полезно преобразовать к следующему виду:

$$A_t = \hat{H}\hat{A}_x - \left[\hat{A}, \hat{H}\right]\hat{A} - \left[\hat{A}, \hat{Q}\right] + \hat{H}_x\hat{A} - \hat{Q}_x.$$

Это уравнение является нелинейным уравнением первого порядка относительно матрицы $\hat{A}$ с квадратичной нелинейностью и произвольными матрицами $\hat{H}$ и $\hat{Q}$ как функциями x и t. В частном случае:

$$\hat{H} = \hat{H}(t), \quad \hat{Q} = \hat{Q}(t)$$

уравнение (86) упрощается и принимает такой вид:

$$A_t = \hat{H}\hat{A}_x - \left[\hat{A}, \hat{H}\right]\hat{A} - \left[\hat{A}, \hat{Q}\right]. \tag{87}$$

Это уравнение имеет квадратичную нелинейность и может иметь несколько интерпретаций в зависимости от выбора его коэффициентов $\hat{H}$ и $\hat{Q}$, а так же матричной размерности.

9. Уравнение типа уравнения Ландау-Лифшица

В качестве первого примера рассмотрим уравнение (87) в матричной размерности 2×2 для выбора его матричных коэффициентов в следующем виде:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^{3} H_\alpha(t)\hat{\sigma}_\alpha = (\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \quad \hat{Q} = \sum_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha(t)\hat{\sigma}_\alpha = (\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{s}}). \tag{88}$$

Здесь введены трехмерные векторы:

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3), \quad , \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

Используя соотношения (83), можно записать:

$$\hat{H}\hat{A}_x = \hat{\sigma}_0(\mathbf{H}, \mathbf{a}_x) + i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x]) + a_{0,x}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \quad [\hat{H}, \hat{A}] = 2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}]),$$

$$[\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} = -2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}])a_0 + 2(\hat{\mathbf{s}}, [[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}]), \tag{89}$$

$$[\hat{A}, \hat{Q}] = a_0(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{s}}) + 2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{a} \times \mathbf{Q}]). \tag{90}$$

В результате (87) приводим к следующей системе уравнений для компонент матрицы $\hat{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}a_0 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}, \mathbf{a}), \tag{91}$$

$$\mathbf{a}_t = i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x] - 2[[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}] + 2i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}]a_0 + \mathbf{H}a_{0,x} - a_0\mathbf{Q} - 2i[\mathbf{a} \times \mathbf{Q}].$$

Эту систему уравнений можно преобразовать, вводя функцию ϕ:

$$a_0 = \frac{\partial}{\partial x}\phi.$$

В результате находим:

$$\phi_t = (\mathbf{H}, \mathbf{a}), \tag{92}$$

$$\mathbf{a}_t = i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x] - 2[[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}] + \Big(2i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] - \mathbf{Q}\Big)\phi_x + \mathbf{H}\phi_{xx} + 2i[\mathbf{Q} \times \mathbf{a}].$$

Эта система уравнений представляет собой уравнение типа Ландау-Лифшица [1, 2] для неоднородного магнетика, находящегося в однородном переменном магнитном поле с напряженностью **H** и с некоторыми дополнительными полями **Q** и ϕ. Хотя это уравнение и отличается от уравнения Ландау-Лифшица для нелинейного магнетика Гейзенберга, тем не менее оно может быть использовано для анализа других типов магнетиков.

10. Волны в среде с квадратичной нелинейностью

При дополнительных условиях система уравнений (92) может иметь и другую интерпретацию. Рассмотрим частный случай, соответствующий выбору:

$$\mathbf{H} = (0, 0, c), \ \hat{Q} = 0, \tag{93}$$

где c = const - вещественная постоянная. Тогда в покомпонентной форме система уравнений (92) примет такой вид:

$$\begin{aligned} &\phi_t = a_3 c, \\ &a_{3,t} = 2c(\mathbf{a})^2 - 2a_3\phi_t + c\phi_{xx}, \\ &a_{1,t} = -ica_{2,x} - 2\phi_t a_1 - 2ica_2\phi_x, \\ &a_{2,t} = ica_{2,x} - 2\phi_t a_2 + 2ica_1\phi_x. \end{aligned} \tag{94}$$

Исключая из первых двух уравнений функцию $a_3 = \phi_t c^{-1}$, и вводя комплексную функцию $A = a_1 + ia_2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\phi_{tt} + 2(\phi_t)^2 - c^2\phi_{xx} = c^2|A|^2, \\ &A_t + cA_x + 2A(\phi_t + c\phi_x) = 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Эта система уравнений может рассматриваться в качестве модели описывающей волны в среде с квадратичной нелинейностью без дисперсии. Из этой системы формально можно исключить функцию A. Второе уравнение имеет явное общее решение следующего вида:

$$\ln A + 2\phi = \psi(x - ct),$$

где $\psi(x-ct)$ - произвольная комплекснозначная функция одного вещественного аргумента. В результате, первое уравнение системы (95) примет такой вид:

$$\phi_{tt} + 2(\phi_t)^2 - c^2\phi_{xx} = c^2 e^{-2\Re\{\phi\}} e^{2\Re\{\psi(x-ct)\}}. \tag{96}$$

Это уравнение в случае вещественных решений ϕ подобно неавтономному уравнению Лиувилля [38], но содержит в отличие от него квадратичное слагаемое по первой производной ϕ_t. В случае вещественности ϕ это уравнение можно преобразовать с помощью замены $\phi = -(1/2)\ln\theta$ к несколько иному виду:

$$\theta_{tt} - c^2\theta_{xx} + c^2(\theta_x)^2 = c^2\theta e^{2\Re\{\psi(x-ct)\}}. \tag{97}$$

Уравнения (96) и (97) имеют вид, аналогичный уравнениям, частные решения которых рассматривались в справочниках [4, 3] в разделах, соответствующих нелинейным гиперболическим уравнениям. Полученные решения этих уравнений констатируют их полную интегрируемость.

11. Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка

Решения системы (92), также как и системы (95), строятся на основе решений уравнения (84). Для простоты рассмотрим случай, соответствующий редукции (93). В этом случае система уравнений для компонент функции $\hat{T}$ примет такой вид:

$$\tau_{0,t} = c\tau_{3,x}, \quad \tau_{3,t} = c\tau_{0,x},$$
$$\tau_{1,t} = ic\tau_{2,x}, \quad \tau_{2,t} = -ic\tau_{1,x}.$$

Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\chi_{tt} = c^2\chi_{xx}, \quad \tau_3 = \chi_t, \quad \tau_0 = c\chi_x,$$
$$\theta_t - c\theta_x = 0,$$

где $\theta = \tau_1 + i\tau_2$. Из (71) и (81) находим выражение для $a_i,\ i = 0,1,2,3$. Имеем

$$a_i = \mathrm{Sp}\left(\hat{\sigma}_i \hat{T}_x \hat{T}^{-1}\right). \tag{98}$$

Матрицу $\hat{T}^{-1}$ можно представить таким образом:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2}\left(\tau_0\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_\alpha\hat{\sigma}_\alpha\right). \tag{99}$$

Соответственно, имеем:

$$\hat{T}_x\hat{T}^{-1} = \frac{1}{D}\left(\tau_{0,x}\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_{\alpha,x}\hat{\sigma}_\alpha\right)\left(\tau_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\beta=1}^{3}\tau_\beta\hat{\sigma}_\beta\right) =$$
$$= \frac{1}{2D}\left(D_x\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}R_\alpha\hat{\sigma}_\alpha\right)$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \tau_0^2 - \mathbf{t}^2, \quad R_\alpha = \tau_{0,x}\tau_\alpha - \tau_{\alpha,x}\tau_0, \quad \alpha = 1,2,3.$$

Отсюда окончательно находим решение для ϕ и $a_{1,2}$:

$$\phi = \ln D = \ln|\tau_0^2 - \mathbf{t}^2|, \quad A = \frac{1}{D}\left(\tau_{0,x}\theta - \theta_{,x}\tau_0\right). \tag{100}$$

12. Уравнения второго порядка по координате

В качестве следующего примера рассмотрим построение интегрируемых уравнений для вспомогательных уравнений второго порядка по координате:

$$\hat{T}_t = \hat{J}\hat{T}_{xx} + \hat{Q}(t)\hat{T}. \tag{101}$$

в которых матрицы $\hat{J} = \hat{J}(t)$ и $\hat{Q} = \hat{Q}(t)$ являются функциями только t. В соответствии с общим изложением МФП, приводим данное уравнение к уравнению для матричных коэффициентов базовых соотношений. Имеем:

$$\hat{B} = \hat{J}\left(\hat{A}_x + \hat{A}^2\right) + \hat{Q}.$$

Подставляя это соотношение в (72), приходим к уравнению:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + \left(2\hat{J}\hat{A}_x\hat{A} + [\hat{J},\hat{A}]\hat{A}_x\right) - [\hat{A},\hat{J}]\hat{A}^2 - [\hat{A},\hat{Q}] - \hat{Q}_x. \tag{102}$$

Это уравнение, вообще говоря, с комплексными коэффициентами встречается в том же контексте, что и нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), например, в нелинейной оптике.

13. Интегрируемые уравнения для матриц размерности $n = 2$

Рассмотрим случай алгебры матриц размерности 2×2. В этом случае матричные функции $\hat{T}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{G}$ можно представить в виде линейных комбинаций матриц Паули (76), для которых выполняются соотношения (77). Матричную функцию $\hat{T}(t)$ представим в таком виде:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^{3} \psi_i(x,t)\sigma_i, \tag{103}$$

где $\psi_i(x,t)$ - вспомогательные функции. Соответственно:

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{3} a_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^{3} b_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \tag{104}$$

Выберем матрицу $\hat{J}$ в такой форме;

$$\hat{J} = iK(t)\hat{\sigma}_3, \tag{105}$$

где $K = K(t)$ - некоторая комплексная функция переменной t. Подставляя матрицы в уравнение (102) после простых, но несколько громоздких вычислений, приходим к следующей системе уравнений относительно функций $a_i(x,t), i = 0,1,2,3$:

$$\begin{aligned}
&a_{0,t} - iK(t)a_{3,xx} - 2iK(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_3) = 0,\\
&a_{3,t} - iKa_{0,xx} - iK\frac{\partial}{\partial x}(R^2 + a_1^2 + a_2^2) - 4iK(a_1^2 + a_2^2)a_0 = 0,\\
&a_{1,t} - Ka_{2,xx} - 2K\left(a_{2,x}a_0 + 2a_{0,x}a_2\right) - 2KR^2 a_2 + 4iKa_0 a_3 a_1 = 0,\\
&a_{2,t} + Ka_{1,xx} + 2K\left(a_{1,x}a_0 + 2a_{0,x}a_1\right) + 2KR^2 a_1 + 4iKa_0 a_3 a_2 = 0.
\end{aligned} \tag{106}$$

Здесь $R^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_0^2 + a_3^2$. Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\overline{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0$ и $w = -ia_3$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&u_t + iKu_{xx} + 4iKv_x u + 2iKvu_x + 2Ki(|u|^2 + v^2 - w^2)u + 4Kwvu = 0,\\
&v_t + Kw_{xx} + 2K\frac{\partial}{\partial x}(vw) = 0,\\
&w_t - Kv_{xx} - K\frac{\partial}{\partial x}\left(2|u|^2 + v^2 - w^2\right) - 4K|u|^2 v = 0.
\end{aligned} \tag{107}$$

Функции v, w - вещественные. Уравнение для комплексной функции u является уравнением типа НУШ. В качестве его приложения можно рассматривать нелинейную среду с накачкой. Система (107) является полностью интегрируемой и представляет собой уравнение типа Бюргерса.

14. Дополнительные интегрируемые соотношения

Для того, чтобы привести уравнение (102) к виду, аналогичному (117), необходимы дополнительные условия. Эти условия можно сформулировать в том же виде как в случае с уравнением КдВ, т.е. в форме дополнительного уравнения для основной функции $\hat{T}(x,t)$/. В работе [19] было показано, что уравнение типа (102) можно превратить в уравнение типа НУШ, если к вспомогательному уравнению (101) добавить еще одно линейное матричное соотношение на функцию $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_x = \hat{G}\hat{T}\hat{L}, \tag{108}$$

где $\hat{G}(t)$ - некоторая матрица, вообще говоря, зависящая от t, а $\hat{L}$ - невырожденная постоянная матрица. Для тех матричных функций, которые удовлетворяют одновременно и (101) и (108), выполняются следующие дополнительные уравнения для $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{A}_x + \hat{A}^2 = \hat{G}\hat{A}\hat{G}^{-1}\hat{A}, \quad \hat{B}_x + \hat{B}\hat{A} = \hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{A}. \tag{109}$$

Первое из этих соотношений преобразуем к более удобной форме:

$$\hat{A}_x = [\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}. \tag{110}$$

Тогда, используя это соотношение, преобразуем уравнение (102) к виду, который аналогичен уравнению НУШ:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + \left(2\hat{J}[\hat{A},\hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J},\hat{A}][\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J},\hat{A}]\hat{A}^2\right) - [\hat{A},\hat{Q}] + \hat{Q}_x. \tag{111}$$

Нелинейное слагаемое в этом уравнении на самом деле может быть представлено в более общей форме. Именно, слагаемое со второй производной $\hat{A}_{xx}$ можно дополнительно разделить на две части, одну из которых с помощью соотношения (110) можно превратить также в нелинейное слагаемое. Следуя такому рецепту, уравнение (111) можно представить в следующем виде:

$$\hat{A}_t = \hat{J}(\hat{1} - \hat{D})\hat{A}_{xx} + \hat{N} - [\hat{A},\hat{Q}] + \hat{Q}_x, \tag{112}$$

где

$$\hat{N} = \hat{J}\hat{D}\Big([\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} + [\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}\Big) +$$
$$+2\hat{J}[\hat{A},\hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J},\hat{A}][\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J},\hat{A}]\hat{A}^2$$

Здесь матрица $\hat{D}$ может быть любой, зависящей только от t, матрицей. При этом уравнение (112) имеет кубическую нелинейность, как и уравнение НУШ. Покажем далее, что подбирая определенным образом вид матриц $\hat{J}, \hat{G}$ и $\hat{D}$, это уравнение действительно можно привести в точности к уравнению НУШ (117).

Очевидно, что в отличие от классического НУШ это уравнение в покомпонентной записи относительно элементов матрицы $\hat{A}$ будет иметь различный вид в зависимости от алгебраической структуры матриц $\hat{J}$, $\hat{A}$ и $\hat{G}$. Имеется ввиду то, что если матрицы $\hat{T}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{J}$, $\hat{D}$, $\hat{Q}$ и $\hat{G}$ определены на некоторой подалгебре линейной матричной алгебры GL_n матриц размерности $n\times n$, то структура уравнений будет целиком определяться этой подалгеброй и конкретным выбором элементов матриц $\hat{J}$, $\hat{D}$, $\hat{Q}$ и $\hat{G}$. Поскольку классическое НУШ (117) содержит только одну комплексную функцию $u(x,t)$, то имеет смысл в начале рассматривать уравнения (112) в матричной размерности 2×2, т.е. на алгебре GL_2.

15. Приведение к форме уравнения НУШ

Рассмотрим теперь уравнения, соответствующие редукции, связанной с дополнительным уравнением (108). Выберем матрицу $\hat{G}$ в следующей форме:

$$\hat{G} = \beta\hat{\sigma}_3,$$

где β - некоторая вещественная постоянная. При этом выбор матриц $\hat{J}, \hat{D}$ оставим прежним (105).

Соотношения (110), которые редуцируют уравнения (106) к уравнениям типа НУШ, в покомпонентной записи имеют такой вид:

$$a_{0,x} + 2(a_1^2 + a_2^2) = 0, \quad a_{3,x} = 0, \qquad (113)$$
$$a_{1,x} + 2a_0 a_1 + 2ia_3 a_2 = 0, \quad a_{2,x} + 2a_0 a_2 - 2ia_3 a_1 = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что функция a_3 не зависит от x: $a_3 = c_3(t)$, а функцию a_0 можно представить в виде:

$$a_0 = -\int (a_1^2 + a_2^2)\,dx + c_0(t),$$

где функции $c_0(t)$ и $c_3(t)$ будут определяться формой решений для элементов матрицы $\hat{T}$.

Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\overline{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0 + a_3$ и $\overline{v} = a_0 - a_3$, уравнения (112) приводятся к паре комплексных уравнений:

$$\begin{aligned} &u_t + iK(1-\beta)u_{xx} + 2i(3-2\beta)Ku^2\overline{u} + 2iK(1-2\beta)v^2 u + \\ &+2q_3 u - 2qa_3 = 0, \\ &\overline{u}_t - iK(1-\beta)\overline{u}_{xx} - 2i(3-2\beta)Ku\overline{u}^2 - 2iK(1-2\beta)\overline{v}^2 u \\ &+2q_3 u - 2\overline{q}a_3 = 0, \end{aligned} \qquad (114)$$

Здесь $q = q_1 + iq_2$, $\overline{q} = q_1 - iq_2$. В случае, если a_i, $i = 0,\ldots,2$ - вещественные функции, а $a_3 = ia$ - чисто мнимая, то уравнения (114) комплексно сопряжены друг другу и являются некоторым аналогом НУШ. Используя (113), получаем следующее соотношение:

$$v = a_0 + a_3 = \int |u|^2 dx + c_0 + c_3,$$

которое позволяет уравнение (114) записать в следующем виде:

$$u_t + iK(1-\beta)u_{xx} + 2i(3-2\beta)K|u|^2 u + 2i(1-2\beta)K\left(\int |u|^2 dx + c_0 + c_3\right)^2 u + 2q_3 u = 0. \qquad (115)$$

При этом функция v удовлетворяет уравнению:

$$v_t - iK(1-\beta)v_{xx} - 2iK(3-2\beta)|u|^2 v - 2iK(1-2\beta)|u|^2\overline{v} = 0. \qquad (116)$$

Заметим, что параметр β - произволен, но сами решения для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ от него не зависят. Это означает, что предлагаемый способ получения нелинейных уравнений и их решений, на самом деле, позволяет строить пучки уравнений с инвариантным классом решений, который определяется функциональными подстановками, определенными выше. В частности, полагая $\beta = 1/2$, преобразуем уравнение (115) к классическому НУШ с линейным коэффициентом преломления среды $\gamma(t) = -2iq_3(t)$, который задается произвольной функцией $q_3(t)$. Функции u и v при таком выборе β являются решениями уравнений:

$$u_t + \tfrac{i}{2}Ku_{xx} + 4iK|u|^2 u + 2q_3 u = 0, \quad v_t - \tfrac{i}{2}Kv_{xx} - 4iK|u|^2 v = 0. \qquad (117)$$

Первое уравнение не зависит от функции v и является классическим НУШ, а второе уравнение описывает распространение возмущений в среде с показателем преломления $4K|u|^2$.

В случае $\beta = 3/2$ уравнения (115) и (116) принимают такой вид:

$$u_t - i\frac{K}{2}u_{xx} - i\left(Kv^2 + 2iq_3\right)u = 0,$$
$$v_t + i\frac{K}{2}v_{xx} + 4iK|u|^2\overline{v} = 0,$$

А в случае $\beta = 1$ уравнения (115) и (116) переходят в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u и v:

$$u_t + 2iK|u|^2 u - i2Kv^2 u + 2q_3 u = 0,$$
$$v_t - 2iK|u|^2\left(v - \overline{v}\right) = 0,$$

в которых зависимость функций от x является параметрической.

16. Подстановки для многомерных уравнений

Следующим важным шагом в развитии метода функциональных подстановок является перенос его на случай многомерных уравнений. Хорошо известно, что расширение МОЗ на многомерные уравнения сопряжено с трудностями. Изложение методов построения интегрируемых уравнений в рамках МОЗ будет обсуждаться далее. Здесь же мы покажем, что с формальной точки зрения методология МФП без труда распространяется на многомерный случай. Это позволяет надеяться на то, что многомерный вариант этого метода даст более широкий круг интегрируемых моделей, полезных на практике. Поскольку в предыдущей главе были введены матричные подстановки, то, естественно, многомерный случай рассматривать сразу в матричной форме. Случай скалярных функций будет являться частным вариантом общего подхода.

17. Общая формулировка метода в многомерном варианте

Рассмотрим в качестве базовых дифференциальных соотношений следующую совокупность уравнений для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{T} = \hat{A}_\alpha(\mathbf{x})\hat{T}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \tag{118}$$

Из условия непрерывности функции $\hat{T}(\mathbf{x})$ следует, что функции $\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})$, определенные базовыми соотношениями (118), связаны между собой соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha + \left[\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \tag{119}$$

Кроме этих очевидных следствий непрерывности функции $T(\mathbf{x})$ из совокупности базовых соотношений следуют и рекуррентные соотношения для производных базовых функций A_α любого порядка. Именно по индукции доказывается, что функции $A^{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(\mathbf{x})$, определенные соотношениями:

$$\frac{\partial^{|\mathbf{a}|}\hat{T}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_1^{a_n}} = \hat{A}^{(\mathbf{a})}(\mathbf{x})\hat{T}, \tag{120}$$

являются дифференциальными полиномами только функций $A_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$. Здесь и далее вводится мультииндекс $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, с целочисленными компонентами a_i и обозначение: $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Действительно, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T}^{[\mathbf{a}]} = \hat{A}^{(\mathbf{a}+\mathbf{1}_\alpha)}\hat{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})}\hat{A}_\alpha\right)\hat{T}, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathbf{1}_\alpha = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha}).$$

Отсюда следует набор рекуррентных соотношений:

$$\hat{A}^{(\mathbf{a}+\mathbf{1}_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})}\hat{A}_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \tag{121}$$

Как и в размерности $1+1$ (или 2), рассмотренной в предыдущих разделах, можно рассмотреть дифференциальные следствия для функций $\hat{A}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, которые порождены требованием, что функция $\hat{T}(\mathbf{x})$ удовлетворяет одному или нескольким дополнительным уравнениям. Действительно, если рассматривать такие функции $\hat{A}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, которые соответствуют функции $\hat{T}$, являющейся решением линейного уравнения общего вида:

$$\sum_{|\mathbf{a}|=0}^{N} \hat{C}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\frac{\partial^{|\mathbf{a}|}\hat{T}}{\partial x^{a_1} \cdots \partial x^{a_n}} = 0, \tag{122}$$

то после подстановки в него базовых соотношений для функций $\hat{A}_\alpha$ получается дополнительное нелинейное уравнение вида:

$$\sum_{|\mathbf{a}|=0}^{N} \hat{C}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\hat{A}^{(\mathbf{a})} = 0. \tag{123}$$

Поскольку $\hat{A}^{(\mathbf{a})}$ являются дифференциальными полиномами функций $\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})$, последнее уравнение в совокупности с (119) позволяет рассматривать как систему нелинейных уравнений относительно $\hat{A}_\alpha$.

18. Простые примеры интегрируемых скалярных моделей

В данном разделе рассмотрим примеры конструирования многомерных интегрируемых уравнений на основе линейных моделей для скалярной функции $T(\mathbf{x})$. В скалярном случае трудно ожидать получения существенно новых полезных для практики интегрируемых моделей, поскольку свойства совокупности функций $A_\alpha(\mathbf{x})$ в этом случае определяются очень простыми соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n \tag{124}$$

Тем не менее мы рассмотрим некоторые варианты построения интегрируемых моделей, поскольку они систематизируют свойства целого набора моделей, в частности, гидродинамических, что достаточно трудно сделать с точки зрения других подходов.

Простейшими примерами использования схемы МФП для многомерных систем уравнений является построение точных решений уравнений Навье-Стокса для потенциальных течений вязкой сжимаемой жидкости. Хорошо известно из гидродинамики [42], что в случае потенциальных течений несжимаемой жидкости вязкие напряжения не дают вклада в уравнения. Однако в случае сжимаемой жидкости (газа) такой вклад остается и его учет как раз и дает следующий пример применения МФП.

Для удобства выделим переменную времени, полагая $t = x^0$, оставляя число координат равным n. Тогда базовая система уравнений примет следующий вид:

$$T_t = WT, \quad T_{,\alpha} = A_\alpha T, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{125}$$

Отсюда уравнения связи можно записать так:

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}, \quad W_{,\alpha} = A_{\alpha,t}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n. \tag{126}$$

В качестве дополнительного уравнения рассмотрим уравнение теплопроводности в пространстве размерности n:

$$T_t = \nu \Delta T. \tag{127}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}.$$

Это уравнение эквивалентно следующему замыкающему соотношению:

$$\frac{1}{\nu} W = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(A_{\alpha,\alpha} + A_\alpha^2 \right). \tag{128}$$

Из последнего соотношения простым дифференцированием находим:

$$W_{,\alpha} = A_{\alpha,t} = \nu \sum_{\beta=1}^{n} \left(A_{\beta,\beta\alpha} + 2 A_\alpha A_{\alpha,\beta} \right).$$

Используя условия совместности, из этого соотношения для каждого значения индекса β получаем:

$$\frac{1}{\nu} A_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^{n} \left(A_{\alpha,\beta\beta} + 2 A_\alpha A_{\beta,\alpha} \right). \tag{129}$$

Если ввести обозначения: $v_\alpha = -2\nu A_\alpha$, то последнее уравнение приводится к уравнению Навье-Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и нулевой силой Архимеда:

$$v_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^{n} v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta v_\alpha.$$

Это уравнение можно назвать многомерным уравнением Бюргерса.

Вводя обозначения: $u_\alpha = -\nu A_\alpha$, уравнение (129) приводится к следующему виду:

$$u_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^{n} u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta u_\alpha - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \tag{130}$$

где

$$p = \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha^2 + p_0. \tag{131}$$

Здесь p_0 - произвольная постоянная. Уравнение (130) интерпретируется как уравнения Навье-Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v}/2$ и давлением p. Однако для полноты такой интерпретации необходимо указать уравнение сохранения массы, которое должно иметь вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rho u^\alpha = 0. \tag{132}$$

К такому виду приводится исходное уравнение (127). Действительно:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nu \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[T \frac{\partial \ln T}{\partial x_\alpha} \right] = 0.$$

Используя обозначения для скорости, и полагая $\rho = T$, приходим к уравнению (132). Таким образом, любое решение уравнения (127) дает решение уравнений Навье-Стокса с давлением p и плотностью ρ. Однако требуется определённое уточнение этих уравнений.

19. Матричные подстановки для многомерных уравнений

Матричные подстановки в многомерном случае существенно расширяют класс интегрируемых и частично интегрируемых уравнений. В многомерном случае дополнительные вспомогательные уравнения оставляют более широкий произвол в выборе решений для основной матричной функции $\hat{T}$. Поэтому существенно расширяется класс частично интегрируемых нелинейных уравнений именно в многомерном случае. Изложение примеров применения общей схемы матричных подстановок для многомерных уравнений начнем со вспомогательных уравнений первого порядка.

Задача М-волн в размерности 1+2

Простым примером использования описанной схемы являются нелинейные уравнения, которые можно получить, отталкиваясь от системы вспомогательных уравнений в координатной размерности 1+2 следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{P}\hat{T}_x, \quad \hat{T}_t = \hat{Q}\hat{T}_y. \tag{133}$$

Будем предполагать, что матрицы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ невырождены и коммутируют между собой: $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$, а также имеют элементы, независящие от x, y, t. Условие коммутативности необходимо для совместности системы (133). Базовые соотношения переобозначим. Именно, будем полагать:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T}, \quad \hat{T}_y = \hat{B}\hat{T}, \quad \hat{T}_t = \hat{C}\hat{T}. \tag{134}$$

Здесь матрицы $\hat{A}, \hat{B}$ и $\hat{C}$ размерности N представляют собой базовые функции схемы. Связь между этими матрицами в силу выполнения базовых соотношений имеет такой вид:

$$\hat{A}_t - \hat{C}_x + [\hat{A}, \hat{C}] = 0, \quad \hat{B}_t - \hat{C}_x + [\hat{B}, \hat{C}] = 0, \quad \hat{A}_y - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

Используя базовые соотношения, приводим уравнения (133) к следующему виду:

$$\hat{C} = \hat{P}\hat{A}, \quad \hat{C} = \hat{Q}\hat{B}. \tag{135}$$

Из этих соотношений сразу следует, что базовые функции $\hat{A}, \hat{B}$ и $\hat{C}$ удовлетворяют по отдельности следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\hat{A}_t - \hat{P}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{P}]\hat{A} = 0, \quad \hat{C}_t - \hat{P}\hat{C}_x + \hat{C}^2 - \hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} = 0,\\
&\hat{B}_t - \hat{Q}\hat{B}_y + [\hat{B}, \hat{Q}]\hat{B} = 0, \quad \hat{C}_t - \hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - \hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0,\\
&\hat{P}^{-1}\hat{C}_y - \hat{Q}^{-1}\hat{C}_x + [\hat{P}^{-1}\hat{C}, \hat{Q}^{-1}\hat{C}] = 0.
\end{aligned} \tag{136}$$

Объединяя часть уравнений этой совокупности, в частности, получаем многомерное уравнение:

$$\hat{C}_t - p\hat{P}\hat{C}_x - q\hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - p\hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} - q\hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0, \tag{137}$$

где p и q - два любых вещественных числа, связанных между собой условием: $p+q=1$. Эта система может рассматриваться как известная система N^2-волн с квадратичной нелинейностью в размерности 1+2. Решения этой системы могут быть получены с помощью подстановки:

$$\hat{C} = \hat{T}_t \hat{T}^{-1},$$

где $\hat{T}$ - любое решение системы (133).

20. Интегрируесмые модели автоволн в размерности 1+2

Рассмотрим теперь в качестве вспомогательного уравнения матричное уравнение следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{g}\hat{T}_{xy}, \tag{138}$$

где $\hat{g}$ - некоторая постоянная матрица. Базовые соотношения будем использовать в форме (134). Тогда уравнение (138) приводит к следующим двум соотношениям:

$$\hat{C} = \hat{g}\left(\hat{A}_y + \hat{A}\hat{B}\right), \quad \hat{C} = \hat{g}\left(\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A}\right).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения совместности, приходим к двум матричным уравнениям для матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\begin{aligned} &\hat{A}_t - \hat{g}\hat{A}_{xy} - \hat{g}\hat{A}_x\hat{B} - \hat{g}\hat{A}_y\hat{A} + [\hat{A},\hat{g}](\hat{A}_y + \hat{A}\hat{B}) = 0, \\ &\hat{B}_t - \hat{g}\hat{B}_{xy} - \hat{g}\hat{B}_x\hat{B} - \hat{g}\hat{B}_y\hat{A} + [\hat{B},\hat{g}](\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A}) = 0. \end{aligned} \tag{139}$$

Сделаем в уравнениях формальную замену:

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \to \frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

где $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$. В этом случае вспомогательное уравнение примет такой вид:

$$\hat{T}_t = \frac{\hat{g}}{4}\Delta\hat{T}, \tag{140}$$

где

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$$

- двумерный Лапласа оператор. Кроме этого, имеем:

$$\hat{A} = \hat{T}_z\hat{T}^{-1}, \quad \hat{B} = \hat{T}_{\overline{z}}\hat{T}^{-1}.$$

Отсюда следует, что в случае, если матрица $\hat{T}$, как решение уравнения (140), выбрана вещественной, то матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будут комплексно сопряжены друг другу:

$$\hat{B} = \hat{A}^*.$$

Для этого необходимо, чтобы матрица $\hat{g}$ также была вещественной. Последнее означает, что уравнения (139) для $\hat{A}$ и $\hat{B}$ также комплексно сопряжены друг другу:

$$\begin{aligned} &\hat{A}_t - \frac{1}{4}\hat{g}\Delta\hat{A} - \hat{g}\hat{A}_z\hat{A}^* - \hat{g}\hat{A}_{\overline{z}}\hat{A} + [\hat{A},\hat{g}](\hat{A}_{\overline{z}} + \hat{A}\hat{A}^*) = 0, \\ &\hat{A}^*_t - \frac{1}{4}\hat{g}\Delta\hat{A}^* - \hat{g}\hat{A}^*_z\hat{A}^* - \hat{g}\hat{A}^*_{\overline{z}}\hat{A} + [\hat{A}^*,\hat{g}](\hat{A}^*_z + \hat{A}^*\hat{A}) = 0. \end{aligned} \tag{141}$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения переходят друг в друга при комплексном сопряжении в случае вещественной матрицы $\hat{g}$.

21. Нелинейное уравнение Дирака

Важным примером использования предложенной общей схемы является возможность сконструировать интегрируемое с помощью подстановок нелинейное уравнение Дирака в размерности 1+3, имеющее также квадратичную нелинейность. Исследование этого уравнения и его решений и будет основной задачей данной статьи. Для вывода уравнения типа Дирака рассмотрим вспомогательное уравнение первого порядка в размерности 1+3 следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{\sigma}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} + \hat{\mu}\hat{T}. \tag{142}$$

Здесь $\hat{T}$ - матрицы 2×2, а $\hat{\sigma}_\mu$ - матрицы Паули (76). Используя базовые соотношения:

$$\hat{T}_t = \hat{A}_0\hat{T}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} = \hat{A}_\alpha\hat{T}, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{143}$$

приходим к следующему матричному уравнению:

$$\hat{C} = \hat{A}_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{\sigma}_\alpha \hat{A}_\alpha + \hat{\mu}. \tag{144}$$

Условия совместности схемы в данном случае можно записать так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha + \left[\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,3, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{C} + \left[\hat{A}_\beta, \hat{C}\right] = 0, \quad \beta = 1,\ldots,3, \end{aligned} \tag{145}$$

Сворачивая обе системы (145) по индексу β, предварительно умножив их, соответственно, на $\hat{\sigma}_\beta$, и используя (144), приходим к следующей системе для матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\beta$, $\beta = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha + \hat{A}_\alpha\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\hat{A}_\alpha\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{\mu} - \hat{\mu}\hat{A}_\alpha = 0, \quad \beta = 1,\ldots,3, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{C} + \hat{C}^2 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\hat{C}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mu} - \hat{\mu}\hat{C} = 0. \end{aligned} \tag{146}$$

Для простоты далее будем рассматривать ситуации, когда $\hat{\mu} = \text{const}$. Покажем теперь, что при таком условии уравнения (146) можно рассматривать как нелинейные уравнения Дирака.

22. Переход к спинорной форме записи

Матричные уравнения (146) можно представить в векторном виде (см. Приложение), если каждую из матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\alpha$ представить в виде одного вектора, составленного из их столбцов по правилу. Запишем матрицу $\hat{C}$ в виде двух столбцов:

$$\hat{C} = \left(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\right), \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}. \tag{147}$$

Введем следующий би-спинор Ψ_0, имеющий вид:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{1,2} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{148}$$

где $\psi_1 = \mathbf{c}_1$ и $\psi_2 = \mathbf{c}_2$ - спиноры. Тогда, согласно правилам тензорного произведения (см. Приложение), первое уравнение системы (146) можно записать в следующем виде:

$$\hat{S}_0\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}\hat{S}_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Psi_0 + \hat{E}\Psi_0 = 0, \tag{149}$$

где:

$$\hat{S}_0 = \left(\hat{I} \bigotimes \hat{I}\right), \;\; \hat{S}_\alpha = -\left(\hat{\sigma}_\alpha \bigotimes \hat{I}\right) = -\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\alpha & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\sigma}_\alpha \end{pmatrix}, \;\; \alpha = 1,2,3.$$

а матрица $\hat{E}$ вычисляется по следующему правилу тензорного произведения (см. Приложение) матриц:

$$\hat{E} = \hat{I} \bigotimes \hat{A}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\hat{\sigma}_\alpha \bigotimes \hat{I}\right)\left(\hat{I} \bigotimes \hat{A}_\alpha\right) - \hat{\mu}_0 = \sum_{j=0}^{3} \hat{S}_j \widehat{\mathscr{A}_j} - \hat{\mu}_0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\widehat{\mathscr{A}_\alpha} = \left(\hat{I} \bigotimes \hat{A}_\alpha\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \hat{I} & a_{21}^\alpha \hat{I} \\ a_{12}^\alpha \hat{I} & a_{22}^\alpha \hat{I} \end{pmatrix}, \;\; \widehat{\mathscr{A}_0} = \left(\hat{I} \bigotimes \hat{C}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} \hat{I} & c_{21} \hat{I} \\ c_{12} \hat{I} & c_{22} \hat{I} \end{pmatrix}, \;\; \hat{\mu}_0 = (\hat{\mu} \bigoplus \hat{I}).$$

По виду матрицы $\hat{E}$ ее можно интерпретировать (с точностью до размерного множителя) как энергию взаимодействия заряженной частицы с векторным потенциалом обобщенного электромагнитного поля с векторным потенциалом, представленным 4-вектором с компонентами в виде матриц $\hat{A}_j, \;\; j = 0,1,2,3.$

Умножая уравнение (149) на четырехрядную матрицу $\hat{\gamma}_0$:

$$\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ -\hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix},$$

приходим к уравнению, совпадающему с уравнением Дирака с точностью до размерных множителей функций, входящих в запись этого уравнения:

$$\sum_{j=0}^{3} \hat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \widehat{\mathscr{A}_j}\right) \Psi_0 = \hat{m} \Psi_0, \tag{150}$$

где введены обозначения:

$$\hat{m} = \hat{\gamma}_0 \hat{\mu}_0, \;\; \hat{\gamma}_\alpha = \hat{\gamma}_0 \hat{S}_\alpha, \; \alpha = 1,2,3. \tag{151}$$

Определенным отличием данного уравнения от классического является то, что матрица $\hat{\gamma}_0$ совпадает с классической матрицей Дирака $\hat{\gamma}_5$, а не с классической матрицей Дирака:

$$\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}$$

.

По аналогии с матрицей $\hat{C} = \hat{A}_0$ введем спинорное представление и матриц $\hat{A}_\alpha$. Именно, полагая:

$$\hat{A}_\alpha = \left(\mathbf{a}_1^\alpha, \mathbf{a}_2^\alpha\right), \;\; \mathbf{a}_1^\mu = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{a}_2^\alpha = \begin{pmatrix} a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix}, \tag{152}$$

введем следующие би-спиноры Ψ_α:

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \\ a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^\alpha \\ \psi_2^\alpha \end{pmatrix}. \tag{153}$$

Опять с помощью правил тензорного произведения находим, что уравнения, которым удовлетворяют спиноры Ψ_α, имеют уравнения Дирака следующего вида:

$$\sum_{j=0}^{3} \hat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \widehat{\mathscr{A}_j}\right) \Psi_\alpha = \hat{m} \Psi_\alpha, \;\; \alpha = 1,2,3, \tag{154}$$

где матрицы $\widehat{\mathscr{A}_j}$ имеют тот же вид (151), что и в уравнении для би-спинора Ψ_0.

К этим соотношениям, записанным в спинорном виде, необходимо добавить и соотношение (144), также представленное в спинорном виде:

$$\Psi_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{S}_\alpha \Psi_\alpha + \mathbf{M}, \tag{155}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что би-спиноры $\Psi_j,\ j = 01,2,3$ - линейно зависимы.

Аналогично, в спинорном виде можно представить и уравнение (142). Полагаем:

$$\hat{T} = \left(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\right),\ \ \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix},\ \ \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}, \tag{156}$$

вводим би-спинор:

$$\Phi = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix},$$

который теперь удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \hat{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi + \hat{m}\Phi = 0, \tag{157}$$

что соответствует линейному уравнению Дирака для заряженной частицы с массой, определяемой матрицей $\hat{m}$.

Также можно преобразовать в спинорную форму и базовые соотношения (143). Они будут выглядеть таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi = \widehat{\mathscr{B}}_j \Phi,\ \ j = 0,1,2,3, \tag{158}$$

где $\widehat{\mathscr{B}}_j = \left(\hat{A}_j \otimes \hat{I}\right)$ - матрицы 4×4, отличные от матриц $\widehat{\mathscr{A}_j}$. В силу выполнения базовых соотношений в спинорной форме (158), выполняются соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\widehat{\mathscr{B}}_j - \frac{\partial}{\partial x^j}\widehat{\mathscr{B}}_k + [\widehat{\mathscr{B}}_j, \widehat{\mathscr{B}}_k] = 0,\ \ j,k = 0,1,2,3. \tag{159}$$

23. Интерпретация

Уравнения Дирака (149) и (150) описывают динамику трех заряженных частиц (в силу линейной зависимости би-спиноров частиц) со спином 1/2 (фермионов) в совокупном поле, созданном самими частицами, потенциал которого описывается матрицами $\widehat{\mathscr{A}_j}$. Компоненты векторного 4-потенциала $\widehat{\mathbf{A}} = \left(\widehat{\mathscr{A}_0}, \widehat{\mathscr{A}_1}, \widehat{\mathscr{A}_2}, \widehat{\mathscr{A}_3}\right)$, в свою очередь, определяются би-спинорами Ψ_j в соответствии с формулами (153) и (148). То, что компоненты векторного потенциала, созданного частицами поля, выражаются через матрицы, говорит о том, что данное поле следует рассматривать как калибровочное поле типа Янга-Миллса со значениями в алгебре матриц второго порядка $SL[2]$. Тензор напряженности этого поля со значениями в той же подалгебре матриц 4×4 имеет вид:

$$\mathscr{F}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k}\widehat{\mathscr{A}_j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\widehat{\mathscr{A}_k} + [\widehat{\mathscr{A}_j}, \widehat{\mathscr{A}_k}].$$

Для проверки того, является ли такое поле в точности полем Янга-Миллса, необходимо еще установить то, каким уравнениям удовлетворяет напряженность этого поля в силу выполнения вспомогательного уравнения (142). Решение этого вопроса выходит за рамки данной лекции. Заметим только,

что напряженность этого поля, вообще говоря, отлична от нуля, хотя напряженность поля с компонентами $\widehat{\mathscr{B}}_j$ равна нулю в силу соотношений (159). Таким образом, полученная модель представляет собой специфический случай самосогласованной модели взаимодействия четырех фермионов с собственным полем, подобным полю Янга-Миллса.

Полученную систему можно также использовать в качестве основного состояния системы четырех фермионов, а квантовые состояния в ней можно описывать с помощью теории возмущений вблизи этого основного состояния. В этом случае кроме самой нелинейной модели следует рассмотреть и уравнения для ее возмущений первого порядка.

Уравнения для возмущений удобно строить, исходя из их первичной матричной формы, а затем перейти уже к спинорной записи этих уравнений. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta\hat{A}_\alpha + \delta\hat{A}_\alpha\hat{C} + \hat{A}_\alpha\delta\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(\delta\hat{A}_\alpha\hat{A}_\beta + \hat{A}_\alpha\delta\hat{A}_\beta\right) = \hat{m}\delta\hat{A}_\alpha,\quad \alpha = 1,\ldots,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta\hat{C} + \delta\hat{C}\hat{C} + \hat{C}\delta\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(\delta\hat{C}\hat{A}_\beta + \hat{C}\delta\hat{A}_\beta\right) = \hat{m}\delta\hat{C}. \tag{160}$$

Переходя к спинорной записи, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xi_\alpha + \widehat{\mathscr{A}_0}\xi_\alpha + \widehat{\mathscr{B}}_\alpha\xi_0 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(\widehat{\mathscr{A}_\beta}\xi_\alpha + \widehat{\mathscr{B}}_\alpha\xi_\beta\right) = \hat{m}\xi_\alpha,\quad \beta = 1,\ldots,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_0 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xi_0 + (\widehat{\mathscr{A}_0} + \widehat{\mathscr{B}}_0)\xi_0 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\left(\widehat{\mathscr{A}_\beta}\xi_0 + \widehat{\mathscr{B}}_0\xi_\beta\right) = \hat{m}\xi_0. \tag{161}$$

Здесь:

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \delta a_{11}^j \\ \delta a_{21}^j \\ \delta a_{12}^j \\ \delta a_{22}^j \end{pmatrix},\quad j = 0,1,2,3.$$

24. Построение решений для нелинейного уравнения Дирака

Вычислим решения вспомогательного уравнения в форме (157). Будем искать решение в следующей форме:

$$\Phi = \mathbf{u}\exp\left(i\sum_{j=0}^{3}p_j x_j\right),$$

где $\mathbf{u}$ - постоянный спинор, а $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ - параметры решения, представляющие по сути компоненты вектора энергии-импульса частицы, описывающейся уравнением Дирака (157). В этом случае (157) переходит в задачу на собственные числа и вектора:

$$\sum_{j=0}^{3}\hat{\gamma}_j\mathbf{u} - i\hat{m}\mathbf{u} = 0.$$

Эту систему можно представить в следующей форме:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha\hat{S}_\alpha + i\hat{\mu}_0\right)\mathbf{u} = p_0\mathbf{u}.$$

Последняя система представляет собой задачу на собственные числа и вектора матрицы:

$$\hat{W} = \left(\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha\hat{S}_\alpha + i\hat{\mu}_0\right).$$

Обозначим через $E_a = E_a(p_1, p_2, p_3|\hat{\mu}_0),\ a = 1,2,3,4$ собственные числа матрицы $\hat{W}$, которым соответствуют собственные вектора $\mathbf{u}_a(\hat{\mu})$:

$$\hat{W}\mathbf{u}_a = E_a(p_1, p_2, p_3|\hat{\mu}_0)\mathbf{u}_a, a = 1,2,3,4.$$

Тогда общее решение для функции $\hat{T}$ можно представить в таком виде:

$$\hat{T} = \int \sum_{a=1}^{4} U_a(p_1, p_2, p_3)\mathbf{u}_a(\hat{\mu}_0) \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha x_\alpha + iE_a\left(p_1, p_2, p_3|\hat{\mu}_0\right)t \right) dp_1 dp_2 dp_3. \tag{162}$$

Здесь $U_a(p_1, p_2, p_3)$, $a = 1,2,3,4$ - произвольные функции $p = (p_1, p_2, p_3)$. Решения для спиноров Ψ_j, $j = 0,1,2,3$ при этом вычисляются с помощью подстановок (143) и преобразования компонент матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\alpha$ в спинорную форму (147) и (152).

Полученные решения позволяют построить теперь и точные решения для возмущений. Для этого достаточно воспользоваться базовыми соотношениями (118), связывающими функции $\hat{A}_j$, $j = 0,1,2,3$ с матрицей $\hat{T}$. Возмущения первого порядка вблизи решения нелинейного уравнения Дирака, соответствующего матрицам $\hat{T}^{(0)}$ и $\hat{A}_j^{(0)}$ для этих соотношений, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\delta\hat{T}^{(0)} = \delta\hat{A}_j\hat{T}^{(0)} + \hat{A}_j^{(0)}\delta\hat{T}.$$

Отсюда находим, что возмущения матриц $\delta\hat{A}_j$ выражаются через возмущения матрицы $\hat{T}^{(0)}$, ее саму и $\hat{A}_j^{(0)}$ следующим образом:

$$\delta\hat{A}_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\delta\hat{T} - \hat{A}_j^{(0)}\delta\hat{T}\right)\left(\hat{T}^{(0)}\right)^{-1}. \tag{163}$$

Используя преобразование к спинорному виду можем получить возмущения для би-спиноров ξ_j, $j = 0,1,2,3$, которые удовлетворяют уравнениям (161). Возмущения матрицы $\hat{T}$ находятся непосредственно из общего решения (162), в котором возмущения могут быть связаны с произвольными функциями $U_a(p_1, p_2, p_3)$ и матрицей $\hat{\mu}$, входящей во вспомогательное уравнение для $\hat{T}$, от которого не зависит явный вид уравнений (154) и (150). Таким образом, решение (163) полностью решает задачу о возмущениях вблизи того или иного точного решения уравнений Дирака и может быть использовано для задач квантовой динамики.

25. Приложение

Матричное уравнение:

$$\hat{A}\hat{X}\hat{B} + \hat{C}\hat{X}\hat{D} = \hat{F}. \tag{164}$$

относительно матрицы $\hat{X} = \left(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_N\right)$ размерности $N \times N$, где $\mathbf{x}_i$ - столбцы матрицы $\hat{X}$ с номером $i = 1, \ldots, N$, может быть представлено в виде векторного уравнения относительно вектора размерности $d = N^2$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}.$$

В этом уравнении $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ и $\hat{F}$ известные матрицы той же размерности $n \times n$. Введем обозначения:

$$\left(\hat{I}\bigoplus\hat{B}\right) = \begin{pmatrix} B_{11}\hat{I} & B_{21}\hat{I} & \cdots & B_{N1}\hat{I} \\ B_{12}\hat{I} & B_{22}\hat{I} & \cdots & B_{N2}\hat{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{1N}\hat{I} & B_{2N}\hat{I} & \cdots & B_{NN}\hat{I} \end{pmatrix}, \quad \left(\hat{I}\bigoplus\hat{D}\right) = \begin{pmatrix} D_{11}\hat{I} & D_{21}\hat{I} & \cdots & D_{N1}\hat{I} \\ D_{12}\hat{I} & D_{22}\hat{I} & \cdots & D_{N2}\hat{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{1N}\hat{I} & D_{2N}\hat{I} & \cdots & D_{NN}\hat{I} \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{A}\bigoplus\hat{I}\right) = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{A} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{A} \end{pmatrix}, \quad \left(\hat{C}\bigoplus\hat{I}\right) = \begin{pmatrix} \hat{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{C} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{C} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{I}$ - единичная матрица размерности $N \times N$. Тогда уравнение (164) эквивалентно системе уравнений:

$$\left(\left(\hat{A}\bigoplus\hat{I}\right)\left(\hat{I}\bigoplus\hat{B}\right) + \left(\hat{C}\bigoplus\hat{I}\right)\left(\hat{I}\bigoplus\hat{D}\right)\right)\mathbf{X} = \mathbf{F},$$

где:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \dots \\ \mathbf{f}_N \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N$ - столбцы матрицы $\hat{F}$.

Литература

1. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках, М:Наука, 1973, 592 с.

2. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. . Магнитные колебания и волны, М:Физматлит, 1984, 464 с.

3. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011

4. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, Справочник по нелинейным уравнениям математической физики, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

5. Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F., Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004

Лекция 2. Гидродинамические подстановки для самосогласованных моделей гидродинамики

СОДЕРЖАНИЕ:

1 Общая схема гидродинамических подстановок 70
2 Течения самогравитирующей пыли. Общая формулировка задачи 71
3 Задача с плоской симметрией 72
4 Космологические модели 75
5 Зарядовые волны в вакууме 78
Литература 82

1. Общая схема гидродинамических подстановок

Следуя общей идеологии работ [40, 17], будем рассматривать такие течения жидкости и газа, которые сводятся к одномерным уравнениям гидродинамики за счет, например, цилиндрической или сферической начальной симметрий. В соответствии с [17], воспользуемся методом функциональных подстановок в форме, приспособленной к задачам гидродинамики. Течения жидкости или газа, сводящиеся к одномерным уравнениям гидродинамики, целиком описываются с помощью задания поля скорости среды $u(x,t)$ как функции координаты и времени. Состояние среды при этом описывается ее плотностью ρ.

С каждой точкой среды можно формально связать маркерную функцию $\theta = \theta(x,t)$, значения которой привязаны к точкам среды. Это означает, что уравнение переноса маркеров, связанных с θ, можно записать в следующем виде:

$$\theta_t + u(x,t)\theta_x = 0. \tag{165}$$

Дифференциальным следствием этого соотношения является уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\Big(u\rho\Big) = 0, \tag{166}$$

с плотностью среды

$$\rho = \theta_x, \tag{167}$$

которое получается простым дифференцированием (165) по x.

Это общее наблюдение позволяет рассмотреть специальный подход для конструирования моделей динамики среды, опирающийся на свойства функции маркера θ. Суть метода состоит в том, чтобы используя свойства маркеров, найти подходящий вид поля скорости $v(x,t)$, как функции от θ и ее производных, такой, что объемные силы, действующие на среду, приобретают нужную форму. Именно тип действующих сил и определяет характер модели. Такой подход меняет общий взгляд на возможности анализа, нелинейных по своей сути, уравнений гидродинамики. Как подсказывает интуиция, попытка построить решение гидродинамической задачи с помощью какой-либо суперпозиции поля, заранее обречена на провал, поскольку уравнения гидродинамики нелинейны. Однако рассматриваемый подход демонстрирует существование особого типа суперпозиции в гидродинамике, а именно возможность разложить поле скорости на отдельные аддитивные составляющие, отвечающие за различающиеся по физической сущности объемные силы, которые, как правило, обладают свойством суперпозиции в соответствии с теорией тяготения Ньютона.

В качестве простого примера рассмотрим еще одно формальное тождество (кроме (166)), которое получается из уравнения переноса маркера. Дифференцируя уравнение неразрывности (166), находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_x + u\frac{\partial}{\partial x}\theta_x = -u_x\theta_x, \tag{168}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\theta_x + u\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x = -u_x. \tag{169}$$

Важным является то, что эти тождества выглядят как результат действия оператора переноса:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \tag{170}$$

на некоторые функции, связанные с маркером.

Продифференцируем теперь тождество (169) еще раз по x. Следствием является следующее тождество:

$$\hat{L}\frac{\partial \ln\theta_x}{\partial x} = -u_{xx} - u_x \ln\theta_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x), \tag{171}$$

где $\rho = \theta_x$. Рассмотрим теперь в качестве поля скорости следующую функцию:

$$u = U(\theta) - \nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x. \tag{172}$$

В этом случае уравнение для поля скорости с учетом имеющихся тождеств принимает вид уравнения Навье-Стокса для инерциального течения вязкого неоднородного газа с коэффициентом кинематической вязкости ν и динамической вязкости $\mu = \nu\rho$:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\rho u_x\right). \tag{173}$$

Решение этого уравнения строится на основе решений уравнения теплопроводности следующего вида:

$$\theta_t + U(\theta)\theta_x = \nu\theta_{xx}. \tag{174}$$

В этом уравнении $U(\theta)$ - произвольная дифференцируемая функция маркера. Начальное условие для θ и выбор функции $U(\theta)$ определяют решение начальной задачи с заданным начальным распределением и скорости, и плотности среды. Однако уравнение (174) интегрируется полностью только в случае, если:

$$U(\theta) = U_0 + U_1\theta, \tag{175}$$

где U_0 и U_1 - произвольные вещественные постоянные. Выбор (175) сводит задачу в случае $F_1 \neq 0$ к уравнению Бюргерса [1], решение которого строится с помощью подстановки Коула-Хопфа:

$$\theta = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi,$$

как это было описано в [24, 25, 35]. Здесь $\phi(x,t)$ - вспомогательная функция, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\phi_t + U_0\phi + U_1\phi_x = \nu\phi_{xx}. \tag{176}$$

При этом:

$$u(x,t) = U_0 - 2\nu U_1\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi - \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi\right|\right), \quad \rho(x,t) = -2\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi. \tag{177}$$

Уравнение (173) по форме не очень сильно отличается от уравнения Бюргерса, но оно включено в более приемлемую, с точки зрения гидродинамики, систему, содержащую уравнение неразрывности (166). Поэтому подстановка (177) оказывается более сложной, чем подстановка Коула-Хопфа, сводящая уравнение Бюргерса к тому же уравнению теплопроводности.

2. Течения самогравитирующей пыли. Общая формулировка задачи

Развитый метод можно использовать для решения более широкого круга задач, в частности, для решения задач динамики самогравитирующей пыли. Метод был предложен в работах [40, 17]. В этом случае к уравнениям гидродинамики необходимо добавить уравнение Пуассона для потенциала поля тяготения, созданного самой пылью. Самосогласованная система уравнений имеет следующий вид:

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad \rho_t + \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n u\rho\right) = 0, \tag{178}$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\phi_x\right) = 4\pi G\rho. \tag{179}$$

Уравнения (178) - уравнения Эйлера, уравнение (179) - уравнение Пуассона. Уравнение состояния пыли эквивалентно требованию равенства давления нулю, поэтому силы Архимеда в данной системе нет. Здесь $\phi(x,t)$ - потенциал гравитационного поля, G - постоянная тяготения Ньютона, а целое число $n=0,1,2$ - соответствует координатной размерности задачи $d=n+1$. В случае $n=0$ - это задача с плоской симметрией, $n=1$ - задача с цилиндрической симметрией, а в случае с $n=2$ - сферической.

Физическая постановка задач, связанных с системой (178)-(179), состоит в описании процесса формирования плотных компактных объектов из рассеянных скоплений пыли под действием собственного поля тяготения. Поскольку процесс формирования плотных объектов из пыли происходит без силы Архимеда, то он практически всегда [30] заканчивается образованием сингулярности в распределении плотности. Одним из важных параметров этого процесса является время образования сингулярности из начального состояния. Также образование различного типа волн, в том числе ударных, в процессе формирования плотного объекта, которые могут возникать при ненулевых начальных распределениях поля скорости. Для решения этих задач мы и воспользуемся методом гидродинамических подстановок.

3. Задача с плоской симметрией

Построение решения начнем со случая $n=0$. Подставляя (167) в (179) и затем интегрируя по x, получаем уравнение следующего вида:

$$\phi_x = g_0(t) + 4\pi G\theta. \tag{180}$$

Здесь $g_0(t)$ - постоянная интегрирования по x, характеризующая фактически ускорение системы отсчета. Теперь подставляя это соотношение в первое уравнение (178), преобразуем его к следующему виду:

$$u_t + uu_x = -4\pi G\theta - g_0(t). \tag{181}$$

Суть этого соотношения состоит в том, что гидродинамическим маркером одномерного самогравитирующего течения пыли является ускорение свободного падения $g=\phi_x$ (при $g_0(t)=0$). Это означает, что все точки пыли сохраняют при своем движении ту величину ускорения свободного падения, которая существовала в начальный момент времени. Этот результат, кажущийся достаточно случайным, является, на самом деле, общим свойством самогравитирующих структур без давления. Обобщение этого вывода мы рассмотрим далее.

Решение для поля скорости будем искать в следующем общем виде:

$$u(x,t) = U(\theta) + h(t)\theta + v_0(t). \tag{182}$$

Действуя на эту функцию оператором переноса $\hat{L}$, находим:

$$\hat{L}u = \theta\dot{h} + \dot{v}_0(t).$$

Сравнивая это соотношение с (181), получаем:

$$h(t) = -4\pi Gt + h_0, \quad \dot{v}_0 = -g_0(t). \tag{183}$$

Таким образом, решения исходной системы уравнений строятся, исходя из решений уравнения для маркера:

$$\theta_t + \Big(U(\theta) + (-4\pi Gt + h_0)\theta + v_0(t)\Big)\theta_x = 0. \tag{184}$$

Это уравнение имеет неявное решение:

$$\theta = H\Big(x - U(\theta)t + (2\pi Gt^2 - h_0 t)\theta - x_0(t)\Big). \tag{185}$$

Здесь $H(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция аргумента:

$$\xi = x - U(\theta)t + (2\pi Gt^2 - h_0 t)\theta - x_0(t), \quad x_0(t) = \int v_0(t)\,dt.$$

Функция $H(\xi)$ определяется начальным распределением маркера в пространстве:

$$\theta(x,0) = H\Big(x - x_0(0)\Big).$$

которое связано с начальным распределением массы:

$$\rho(x,0) = \theta_x|_{t=0} = H'\Big(x - x_0(0)\Big).$$

Начальное распределение скорости задается функцией $U(\theta)$:

$$u(x,0) = U\Big(\theta(x,0)\Big) + h_0\theta(x,0) + v_0(0).$$

Заметим, что масса среды, сосредоточенная в интервале координат $[x_1, x_2]$, определяется разностью значений маркера:

$$M_{[x_1,x_2]}(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \theta_x dx = \theta(x_2,t) - \theta(x_1,t) \tag{186}$$

Важной характеристикой распределения масс является полная масса среды:

$$M_0 = \theta(\infty,t) - \theta(-\infty,t).$$

Для астрофизических приложений необходимо рассматривать такие распределения массы в пространстве, для которых полная масса пыли должна оставаться конечной и постоянной во времени в случае бесконечного интервала $[x_1, x_2]$. Последнее условие означает, что нет самопроизвольного притока или оттока массы в систему, что обеспечивается в силу выполнения уравнения неразрывности нулевыми значениями скорости потока на бесконечности: $u(\infty,t) = u(-\infty,t) = 0$. Отсутствие среднего перемещения центра масс всей системы в пространстве должно соответствовать условию:

$$V_0 = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho_t dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\rho dx = 0. \tag{187}$$

Решение для θ (185) допускает возникновение сингулярностей в распределении массы за конечное время. Момент образования сингулярности определяется, как и в случае определения момента опрокидывания простой волны, первым моментом появления точки (x_*, t_*), в которой плотность обращается в бесконечность: $\rho(x_*, t_*) = \infty$. Этот момент определяется с помощью вычисления производной θ_x из общего решения (185). Имеем:

$$\theta_x = H'(\xi)\Big(1 - U'(\theta)\theta_x + (2\pi G t^2 - h_0 t)\theta_x\Big),$$

Отсюда находим:

$$\rho = \theta_x = \frac{H'(\xi)}{1 + H'(\xi)[U'(\theta) - (2\pi G t^2 - h_0 t)]}. \tag{188}$$

Первый момент образования сингулярности определяется из условия обращения знаменателя этого соотношения в ноль. Для иллюстрации выводов общего анализа приведем несколько примеров (частично приведенных в [17]).

Наиболее простой случай соответствует классической задаче Джинса, когда начальные распределения плотности и скорости однородны: $\rho(x,0) = \rho_0 = \text{const}$, $u(x,0) = 0$. Выбор однородного значения скорости, равного нулю, лишь фиксирует выбор определенной системы отсчета. Однородное же распределение массы соответствует бесконечной суммарной массе на бесконечном пространственном интервале. При таких начальных условиях имеем:

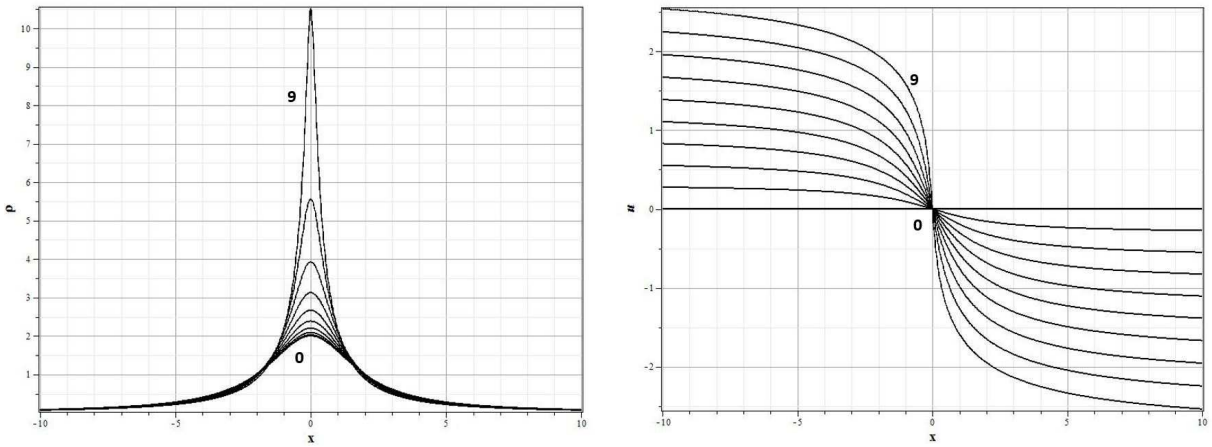
$$U(\theta) \equiv 0, \quad \theta(x,0) = \alpha x + \theta_0, \quad H(\xi) = \alpha\xi + \theta_0 + x_0(0),$$

где α и θ_0 - вещественные постоянные. В этом случае решение имеет следующий вид:

$$\theta = \alpha\Big(x + (2\pi G t^2 - h_0 t)\theta - x_0(t)\Big) + \theta_0 + x_0(0).$$

Отсюда находим:

$$\theta = \frac{\alpha(x - x_0(t)) + x_0(0) + \theta_0}{1 - 2\pi G t^2 + h_0 t}.$$



a b

Рис. 1. Эволюция плотности (a) и скорости потока (b) для начальных распределений (189), 0 - $t = 0$, 9 - $t = 0.9$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

Это решение демонстрирует конечный результат эволюции однородного распределения плотности. Оставаясь со временем однородным распределением, плотность за конечное время $t_* = 1/\sqrt{2\pi G}$ в каждой точке пространства одновременно обращается в бесконечность. Этот результат можно рассматривать как вариант парадокса Неймана-Зелигера [44] для плоско-симметричного распределения материи.

Более физически значимый пример можно получить, рассматривая следующее начальное распределение плотности типа распределения Лоренца:

$$\rho(x,0) = \frac{\rho_0}{1 + x^2/a^2}, \tag{189}$$

где $a = \text{const}$ - параметр, характеризующий ширину начального распределения Лоренца. Масса такого распределения конечна:

$$M_0 = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2/a^2} = \pi \rho_0 a.$$

Функция $H(\xi)$ при таком начальном распределении имеет такой вид:

$$\theta(x,0) = H(x - x_0(0)) = \int_0^x \rho(y,0)\,dy = \rho_0 a \,\text{arctg}(x/a).$$

Начальное распределение скорости выберем, как и в простейшем случае, однородным с нулевым значением во всем пространстве. В силу этого $U(\theta) = 0$. Решение для θ теперь находится из решения уравнения:

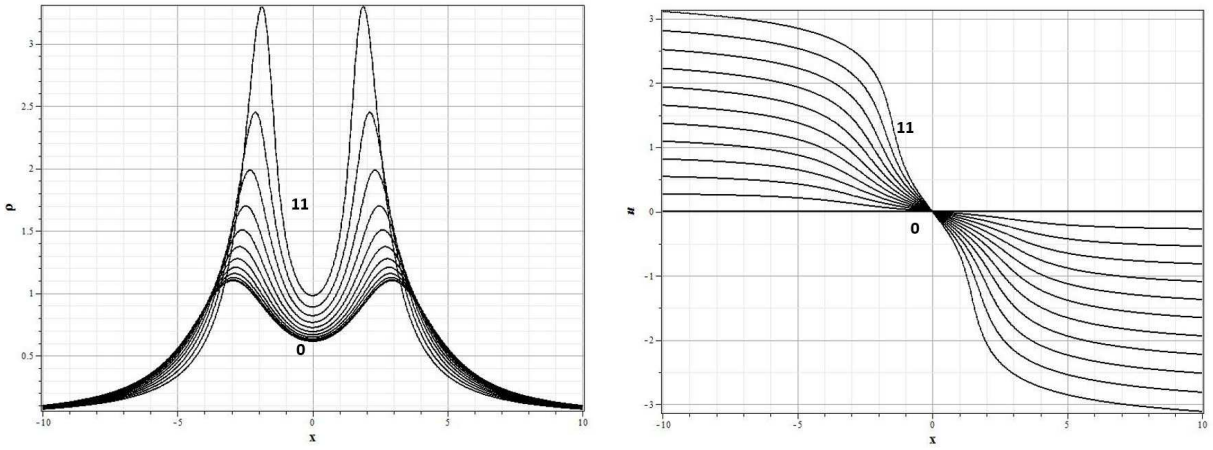
$$\theta = \rho_0 a \,\text{arctg}\left(x/a + 2\pi G t^2 \theta/a\right).$$

Здесь полагалось $x_0(t) = 0$ и $h_0 = 0$. После отыскания решения для θ, решения для $rho(x,t)$ и $u(x,t)$ вычисляются с помощью соотношений:

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{1 + \left(x + 2\pi G t^2 \theta\right)/a^2 - \rho_0 2\pi G t^2},$$

$$u(x,t) = -t\theta(x,t) = -t\rho_0 a \cdot \text{arctg}\left(x/a + 2\pi G t^2 \theta/a\right).$$

Графики эволюции плотности и скорости для случая нулевого начального распределения скорости: $u(x,0) = 0$, приведены на рис. 1(a,b).



a b

Рис. 2. Эволюция плотности (a) и скорости потока (b) для начальных распределений (190), 0 - $t = 0$, 11 - $t = 1.1$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

Еще один пример построения решения для системы с плоской симметрией для $u(x,0) = 0$ приведены на рис. (2)(a,b). Этот пример соответствует начальному распределению плотности в виде двух локальных флуктуаций:

$$\rho(x,0) = \frac{\rho_0}{1+(x-b)^2/a^2} + \frac{\rho_0}{1+(x+b)^2/a^2}, \quad u(x,0) = 0 \tag{190}$$

для следующих значений параметров: $a = 1,\ b = 3, \rho_0\pi = 1$. Соответствующее выражение для начального распределения маркера имеет следующий вид:

$$\theta(x,0) = H(x - x_0(0)) = \rho_0 a\Big(\operatorname{arctg}((x-b)/a) + \operatorname{arctg}((x+b)/a)\Big).$$

Графики демонстрируют сближение на изображенном начальном отрезке времени двух флуктуаций за счет их гравитационного притяжения. При этом в максимуме каждой из флуктуаций формируются сингулярности (в конце изображенного отрезка времени), возникающие до момента их слияния.

Вариант начальной эволюции распределения для начального распределения скорости:

$$u(x,0) = -8\theta_0(x)(\theta_0^2(x) - \pi/2) \tag{191}$$

и начального распределения плотности (189). Такой выбор начального распределения скорости соответствует выбору функции $U(\theta) = -\theta(\theta^2 - \pi/2)$. На рис. 3(a,b) приведены графики эволюции распределения плотности, а на 3(c) скорости для указанных начальных распределений скорости и плотности. Рисунок 3(b) представляет увеличенное изображении графиков на 3(a) для более детального представления о формировании ударной волны плотности. В начальный момент времени вблизи начала координат, где находится максимум плотности, имеются максимумы поля скорости с направлением от начала координат. На изображенном начальном отрезке времени масса уносится потоком от максимума плотности, так что значение плотности в начале координат убывает. При этом на некотором расстоянии от начала координат формируются две ударных волны. При дальнейшей эволюции (за пределами изображенного отрезка времени) ударные волны останавливаются, а затем начинают двигаться симметрично к началу координат, так что через конечный отрезок времени в центре формируется единственная сингулярность.

4. Космологические модели

Однородный поток Хаббла

Среди интегрируемых с помощью развитого метода моделей, интерес представляет задача о космологическом расширении в случае пространственно-плоской Вселенной в рамках классической

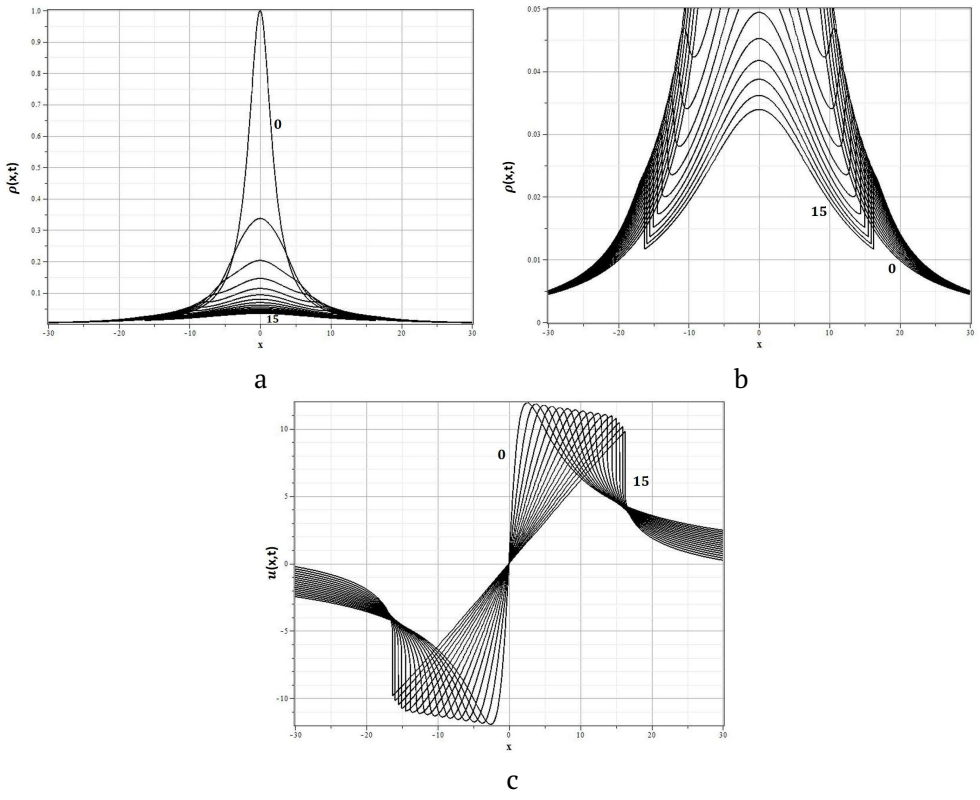


Рис. 3. Эволюция плотности (a,b) и скорости потока (c) для начальных распределений (191), 0 - $t = 0$, 15 - $t = 1.5$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

механики [46, 47]. Для построения соответствующего решения рассмотрим в сферическом случае подстановку для поля скорости следующего вида:

$$u(x,t) = H(t)x, \tag{192}$$

где $H(t)$ - некоторая функция времени. Соотношение (192) представляет собой закон Хаббла космологического расширения [44, 31, 47], в котором функция $H(t)$ называется параметром Хаббла. Вычисляя действие оператора $\hat{L}$ на $u(x,t)$, находим:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t)u = (\dot{H} + H^2)x. \tag{193}$$

Используя (192), для функции маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t)x\theta_x = 0. \tag{194}$$

Решение этого уравнения имеет следующий общий вид:

$$\theta = T\Big(x/a(t)\Big), \tag{195}$$

где $T(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция, $a(t)$ - функция, называемая в космологии масштабным фактором:

$$H(t) = \dot{a}/a.$$

Отсюда находим распределение плотности среды в пространстве:

$$\rho = \frac{1}{x^2}\theta_x = \frac{1}{x^2 a(t)}T'(x/a). \tag{196}$$

С другой стороны, ускорение свободного падения имеет следующий вид:

$$\phi_x = 4\pi G\frac{1}{x^2}T(x/a) \tag{197}$$

Для того, чтобы это выражение совпадало с правой частью уравнения Эйлера (193), достаточно выбрать функцию $T(x/a)$ в следующем виде:

$$T(\xi) = \alpha\xi^3.$$

В результате:

$$u_t + uu_x = (\dot{H} + H^2)x = -4\pi G\frac{x}{a^3}\alpha.$$

Из этого соотношения находим уравнение для масштабного фактора:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\alpha}{a^3}. \tag{198}$$

Распределение плотности в пространстве в этом случае однородно и имеет вид:

$$\rho = \frac{3\alpha}{a^3(t)}. \tag{199}$$

Отсюда видно, что постоянная $4\pi\alpha$ представляет собой массу материи внутри сферы радиуса $a(t)$, которая остается постоянной в процессе расширения ($H > 0$) или сжатия $H < 0$ пыли.

Уравнение (198) можно переписать в стандартной форме относительно масштабного фактора:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\alpha}{a^2}, \tag{200}$$

что соответствует классической модели космологического расширения [31]. Это уравнение интегрируется в квадратурах. Именно, первый интеграл движения для (200) имеет такой вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = E + \frac{4\pi G\alpha}{a}, \tag{201}$$

Здесь E - постоянная интегрирования. В результате, решение можно записать в виде неявной функции:

$$4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea+\mu)} + \ln(4\sqrt{E}) - \sqrt{2}\mu\ln\left(4\sqrt{2}Ea + \sqrt{2}\mu + 4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea+\mu)}\right) =$$
$$= 8E^{3/2}(t-T), \tag{202}$$

где T - вторая постоянная интегрирования, а $\mu = 8\pi G\alpha$. Построенное решение, по своей сути, эквивалентно классическим решениям, рассмотренным в [46, 47], но с тем отличием, что оно сформулировано в терминах гидродинамики, а не в терминах динамики сферы конечного радиуса. Это дает преимущества по отношению к возможности сформулировать и решить данную задачу в более общем виде.

Неоднородный поток Хаббла

Рассмотрим теперь обобщение задачи Хаббла, предполагая, что параметр Хаббла может зависеть от точки среды, т.е для каждой отдельной галактики он может иметь в текущий момент времени свое собственное значение. Это означает, что в момент начального космологического “взрыва” каждая из материальных точек (по сути - галактик) могла получить свой собственный импульс в зависимости, например, от ее массы. Такое предположение представляется более правдоподобным, чем предположение для случая однородного потока Хаббла, в котором начальные скорости определяются исключительно расстоянием от центра “взрыва” сразу после выхода Вселенной из космологической сингулярности.

Для реализации такой идеи вместо (192) рассмотрим поток следующего вида:

$$u(x,t) = H(t,\theta)x, \tag{203}$$

где $H(t,\theta)$ - параметр Хаббла, зависящий от значения маркера θ неопределенным пока способом. Вычисляя действие оператора $\hat{L}$ на $u(x,t)$, находим:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t,\theta)u = \left(\dot{H} + H^2\right)x, \tag{204}$$

здесь и далее $\dot{H}$ - частная производная по t. Используя (203), для маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t,\theta)x\theta_x = 0. \tag{205}$$

Это уравнение, как и раньше, преобразуется к уравнению Хопфа и, следовательно, его общее решение можно записать в виде:

$$\theta = \Theta(\chi), \quad \chi = \frac{x}{A(t,\theta)}, \tag{206}$$

с произвольной функцией $\Theta(\chi)$

$$A(t,\theta) = A_0(\theta)\exp\left(\int\limits_C H(t,\theta)dt\right), \tag{207}$$

где интеграл берется по времени t вдоль характеристик C, на которых θ постоянно, а $A_0(\theta)$ - постоянная интегрирования по t.

Для того, чтобы неоднородный поток Хаббла соответствовал потенциалу поля тяготения, должно выполняться соотношение:

$$\phi_x = \frac{4\pi G}{x^2}\theta(x,t) = -\left(\dot{H} + H^2\right)x. \tag{208}$$

Как и в случае однородного потока Хаббла для того, чтобы это уравнение разрешалось, достаточно произвольную пока функцию $\Theta(\chi)$ выбрать следующим образом:

$$\Theta = \alpha\chi^3.$$

В результате, для функции $H(t,\theta)$ получаем следующее уравнение:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\alpha}{A^3}. \tag{209}$$

Поскольку в это уравнение функция θ не входит явно, то это уравнение можно решать также, как и в случае однородного потока, но постоянные интегрирования по времени при этом могут быть произвольными функциями θ. Следовательно, решение для $A(t,\theta)$ будет иметь тот же вид, что и (202), но с тем отличием, что в нем следует считать постоянные E и T произвольными функциями θ: $E = E(\theta)$ и $T = T(\theta)$.

В отличие от однородного потока, теперь распределение плотности материи (галактик) в пространстве и времени будет неоднородным и его следует вычислять, исходя из уравнения:

$$\rho = \frac{\theta_x}{x^2} = \frac{3\alpha A}{A^4 + 3\alpha x^3 A_\theta}, \quad A_\theta = \frac{\partial A(t,\theta)}{\partial\theta}. \tag{210}$$

Это распределение зависит от выбранной зависимости решения $A(t,\theta)$ уравнения (209) от θ. В это соотношение следует подставлять решение из (202) с заданными из начальных условий значениями функций $E(\theta)$ и $T(\theta)$. Смысл полученного решения состоит в том, что в случае неоднородного закона Хаббла в некоторый момент времени можно каждой отдельной галактике приписать определенную скорость космологического “разбегания” относительно наблюдателя. После этого можно построить модель того, как Вселенная будет расширяться далее.

Полный анализ возможных космологических решений, соответствующих (210), выходит за рамки данной лекции. Сделаем лишь некоторые общие замечания, вытекающие из общих свойств функции ρ. Если $A(t,\theta)$, как функция x, ограничена при $x \to \infty$, то в этом пределе плотность стремится к нулю. Отсюда следует, что плотность на больших масштабах может быть нулевой, т.е. распределение материи в такой модели носит островной характер. Плотность же на малых расстояниях от наблюдателя, когда $x \simeq 0$, будет, примерно, такой же, что и в случае однородного потока Хаббла.

5. Зарядовые волны в вакууме

Задача о токе в диоде, возникающем под действием разности потенциалов на электродах (между анодом и катодом), является классической задачей теории волн зарядовой плотности и электронных пучков [48, 20]. Эта задача возникла при описании тока в вакуумных электронно-лучевых приборах, например, лампах, но имеет гораздо большую область применения. Основной проблемой,

связанной с описанием тока в диоде, является учет влияния распределенного заряда, движущегося между электродами. Наличие областей с максимумом концентрации распределенного заряда в области движения заряженных частиц называют часто виртуальным катодом. Появление виртуального катода ограничивает ток в диоде (предел Чайлда-Ленгмюра), что приводит к специфическому изменению вольт-амперной характеристики диода. Одним из способов описания явлений, происходящих в таких приборах, является подход, основанный на гидродинамической модели движения заряженной жидкости, находящейся во внешнем и собственном электрическом поле [4, 28]. Для анализа всех особенностей явлений образования виртуального катода желательно иметь точные решения самосогласованной задачи, которая проанализирована в настоящее время лишь в стационарном случае [4, 28]. В данном исследовании для решения системы уравнений динамики волн зарядовой плотности в диоде используется метод гидродинамических подстановок, изложенный в работе [40] и использованный для решения задачи о динамике самогравитирующей пылевой среды [16]. Этот метод восходит к теории обобщенных подстановок Коула-Хопфа [10, 15, 16] и модифицирован специально для решения гидродинамических задач с переменной плотностью. В настоящей работе строятся точные решения общего вида в задаче о волнах зарядовой плотности в вакуумном диоде и на некоторых простых примерах анализируются основные выводы из этой теории.

Поток заряженных частиц в вакууме

Рассмотрим одномерную модель диода, в котором под действием разности потенциалов ϕ_1 на двух ограничивающих электродах существует ток с плотностью $j = qnv$, где $n(x,t)$ – концентрация частиц, имеющих заряд q и массу m, так что $\rho_e = qn(x,t)$ - плотность заряда, а $\rho_m = mn(x,t)$ - плотность массы. Величина $v(x,t)$ - скорость частиц. Потенциал $\phi = \phi(x,t)$ меняется непрерывно между электродами от значения $\phi(0,t) = 0$ на одном электроде до значения $\phi(d,t) = \phi_1(t)$ на другом. Величина d - расстояние между электродами. Систему уравнений, которая описывает динамику возникающего токопереноса, можно представить в виде трех уравнений (см. [4]):

$$n_t + \left(nv\right)_x = 0, \tag{211}$$

$$v_t + vv_x = -\frac{q}{m}\phi_x, \tag{212}$$

$$\phi_{xx} = -4\pi qn. \tag{213}$$

Первое уравнение представляет собой закон сохранения заряда, второе – уравнение Эйлера течения идеальной заряженной жидкости, третье – уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, созданного распределенным в пространстве зарядом. Граничные условия для тока в области переноса имеют следующий вид:

$$\phi(0,t) = 0, \quad \phi(d,t) = \phi_1(t),$$
$$v(0,t) = v_0(t), \quad n(0,t) = n_0(t).$$

В качестве начальных условий следует задавать начальные распределения в пространстве плотности заряда $n(x,0) = N_0(x)$ и скорости $v(x,0) = U_0(x)$.

Для построения решений (211)-(213) вновь воспользуемся методом гидродинамических подстановок, опираясь на уравнение переноса маркера (165), а также на следствия из него. Как и в случае самогравитирующей пыли, следующий шаг построения решения состоит в интегрировании уравнения Пуассона (213). Используя подстановку $n = \theta_x$ и интегрируя (213), находим:

$$\phi_x = -4\pi q\theta - e_0(t), \tag{214}$$

где $e_0(t)$ – функция t, связанная с начальными условиями. Используя последнее соотношение, для скорости потока v получаем уравнение:

$$v_t + vv_x = \gamma\theta + g_0(t). \tag{215}$$

Здесь $\gamma = 4\pi q^2/m$ и $g_0(t) = (q/m)e_0(t)$. Будем искать решение для v в виде:

$$v(x,t) = V(\theta) + \gamma t\theta + u_0(t). \tag{216}$$

Подставляя это соотношение в левую часть (215) и учитывая то, что функция θ по определению связана с v соотношением (165), получаем:

$$v_t + v v_x = (V'(\theta) + \gamma t)\Big(\theta_t + v\theta_x\Big) + \gamma\theta + \dot{u}_0 = \gamma\theta + \dot{u}_0.$$

В результате уравнение (215) обращается в тождество при условии $g_0(t) = \dot{u}_0$. Используя теперь связь (165), приходим к уравнению для функции θ:

$$\theta_t + \Big(V(\theta) + \gamma t\theta + u_0(t)\Big)\theta_x = 0. \tag{217}$$

Анализ решений

Уравнение (217) представляет собой вариант гиперболического уравнения Хопфа, общий интеграл которого задается с помощью следующего алгебраического уравнения:

$$h\Big(\theta, x - V(\theta)t - \gamma t^2\theta/2 - x_0(t)\Big) = 0, \tag{218}$$

где $h(\xi,\eta)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов $\xi = \theta(x,t)$ и $\eta = x - V(\theta)t - \gamma t^2\theta/2 - x_0(t)$, $\dot{x}_0(t) = u_0(t)$. Дифференцируя (218) по x и t, приходим к двум уравнениям:

$$h_\xi\theta_x + h_\eta\Big(1 - V'(\theta)\theta_x - \gamma t^2\theta_x/2\Big) = 0,$$
$$h_\xi\theta_t + h_\eta\Big(-V'(\theta)\theta_t - \gamma t^2\theta_t/2 - V(\theta) - \gamma t\theta - \dot{x}_0\Big) = 0.$$

Исключая из этих уравнений необращающиеся тождественно в ноль производные h_ξ и h_η, приходим к уравнению (217) и условию $\dot{x}_0(t) = u_0(t)$. Функцию $x_0(t)$ будем называть смещением потока заряженных частиц.

Уравнение (218) без ограничения общности удобно представить в следующем виде:

$$\theta = H\Big(x - V(\theta)t - \gamma t^2\theta/2 - x_0(t)\Big). \tag{219}$$

Вид функции $H(\eta)$ задается начальным распределением функции θ:

$$\theta(x,0) = H(x - x_0(0)),$$

что, в свою очередь, определяется начальным распределением концентрации частиц:

$$n(x,0) = \theta_x|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}H(x - x_0(0)).$$

При этом начальное распределение скорости определяет вид функции $V(\theta)$, исходя из соотношения:

$$v(x,0) = V\Big(\theta(x,0)\Big) + \dot{x}_0(0).$$

Распределение потенциала в начальный момент времени определяется распределением плотности заряда:

$$\phi(x,0) = -4\pi q\int_0^x \theta(x,0)\,dx - \frac{m}{q}\ddot{x}_0(0)x + \phi_0(0). \tag{220}$$

Таким образом, мы получаем полное решение задачи с начальными условиями (задача Коши).

Решение начальной задачи

Вычислим теперь значение потенциала на границах области, т.е. в точках $x = 0$ и $x = d$. Имеем:

$$\phi(0,t) = 0 = \phi_0(t),$$
$$\phi(d,t) = -4\pi q\int_0^d \theta(x,t)\,dx - \frac{m}{q}\ddot{x}_0(t)d = \phi_1(t).$$

Из последнего соотношения находим:

$$\ddot{x}_0(t) = -\frac{q}{md}\phi_1(t) - \frac{\gamma}{d}\int_0^d \theta(x,t)\,dx. \tag{221}$$

и, в конечном итоге, это уравнение определяет ток в точке $x = d$:

$$j_1(t) = qn(d,t)v(d,t) =$$
$$= q\theta_x(d,t)\Big(V(\theta(d,t)) + \gamma t\theta(d,t) + \dot{x}_0(t)\Big).$$

Зависимость $j_1 = j_1(\phi_1)$ определяет вид вольт-амперной характеристики диода, что является наиболее важным приложением модели, описываемой уравнениями (211)-(213).

Для анализа уравнения (221) необходимо иметь общее представление для интеграла в его правой части. Его можно получить, предполагая выполнение некоторых упрощающих условий. В качестве такого условия рассмотрим требование, что в начальный момент все заряженные частицы обладают во всем пространстве одинаковой скоростью, т.е.

$$v_0(x,0) = W_0 = \text{const}.$$

Из этого условия следует: $V(\theta) = 0$. Тогда начальное распределение функции θ, определяемое плотностью заряда, задается одной функцией $\theta(x,0) = H(x - x_0(0))$. В этом случае удобно интеграл движения (219) переписать в следующем виде:

$$x - x_0(t) - \gamma t^2\theta/2 = F(\theta),$$

где $F(\theta)$ – функция обратная $H(\eta)$. Дифференцируя это соотношение по x, после несложных преобразований находим:

$$n = \theta_x = \frac{1}{F'(\theta) + \gamma t^2/2}. \tag{222}$$

Из этого соотношения сразу следует, что для начальных распределений параметров в рассматриваемой системе не происходит опрокидывания фронта волны зарядовой плотности. Момент опрокидывания t_* и координата x_* возникновения разрыва фронта определяются как первый момент времени и координата, в которых происходит обращение в ноль знаменателя соотношения (222). Если $F'(\theta) > 0$ при всех допустимых θ, то опрокидывания фронта не возникает. Учитывая, что концентрация частиц является всюду неотрицательной функцией, находим, что знаменатель в (222) также является неотрицательным и, следовательно: $F'(\theta(x,t)) \geq -\gamma t_*^2/2$. Возникновение же многозначности решения обязательно связано с изменением знака знаменателя в (222), что не имеет в рамках данной задачи физического смысла.

Используя теперь решение (222), получаем представление для интересующего нас интеграла:

$$\int_0^d \theta(x,t)\,dx = \int_0^d (F'(\theta) + \gamma t^2/2)\theta(x,t)\theta_x\,dx =$$
$$= \int_{\theta(0,t)}^{\theta(d,t)} (F'(\theta) + \gamma t^2/2)\theta(x,t)\,d\theta =$$
$$= Q(\theta(d,t)) - Q(\theta(0,t)) + \gamma t^2\Big(\theta^2(d,0) - \theta^2(0,t)\Big)/4.$$

Здесь $Q(\theta) = \int F'(\theta)\theta\,d\theta = F(\theta)\theta - \int F(\theta)\,d\theta$. Таким образом, уравнение для $x_0(t)$ теперь можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{x}_0(t) = -\frac{q}{md}\phi_1(t) - \tag{223}$$
$$-\frac{\gamma}{d}\Big[Q(\theta(d,t)) - Q(\theta(0,t)) + t^2\frac{\gamma}{4}\Big(\theta^2(d,t) - \theta^2(0,t)\Big)\Big].$$

Литература

1. Burgers J.M. The nonlinear diffusion equation / J.M. Burgers. – Dordrecht, Holland.: D. Reidel Publisher Company, 1974. – 150 p.

2. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах / П.Бхатнагар // – М.: Мир, 1983. – 135 с.

3. Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р.Додд, Эйлбек Дж.Гиббон, Х.М.Дж.Моррио. – М.: Мир, 1988. – 694 с.

4. Дубинов А.Е. Нелинейная динамика электронных пучков с виртуальным катодом / А.Е.Дубинов, И.А.Ефимова, И.Ю.Корнилова, С.К.Сайков, В.Д. Селемир // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2004. – Т.35, № 2. – 462 с.

5. Дубинов А.Е. Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теор. и прикл. физ. – Т.2, № 3. – 2001.

6. Журавлев В.М. Точные решения уравнения нелинейной диффузии в двумерном координатном пространстве // ТМФ. – 2000. – Т.124, № 2. – С.265-278.

7. Журавлёв В.М. О новом представлении двумерных уравнений ди-намикинесжимаемой жидкости // ПММ. – 1994. – Т.58, № 6. – 61 с.

8. Журавлев В.М. Квадратичные формы и точные решения уравнений двумеризованных цепочек Тоды // Ученые записки УлГУ, сер. физическая. – 2000. - Вып. 2(9). – С.3-11.

9. Журавлев В.М. Модели автоволновых процессов в средах с диффузией и уравнения типа Лиувилля / В.М. Журавлев // Известия вузов, сер. прикладная нелинейная динамика. – 2001. – Т.9, № 6. – С.115-128.

10. Журавлев В.М. Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула-Хопфа / В.М. Журавлев, А.В. Никитин // Нелинейный мир. – 2007. – Т.5, № 9. – С.603-611.

11. Журавлев В.М. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула–Хопфа, и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости / В.М.Журавлев, Д.А.Зиновьев // Письма ЖЭТФ. – 2008. – Т.87, № 5. – С.266-270.

12. Журавлев В.М. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости / В.М. Журавлев, Д.А. Зиновьев // Письма ЖЭТФ. – 2008. – Т.88, № 3. – С.194-197.

13. Журавлев В.М. Новый метод идентификации нелинейных моделей пространственно-временных процессов и прогнозирования по эмпирическим данным / В.М.Журавлев, А.В.Журавлев // Нелинейный мир. – 2009. – № 10. – С.763-771.

14. Журавлев В.М. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории нелинейных дискретных систем / В.М.Журавлев, А.В.Журавлев, Д.А.Корнилов, А.В.Никитин, В.В.Самойлов // Сб. Прикладная математика и механика. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. С.89-103.

15. Журавлев В.М. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // ТМФ. – 2009. – Т.158, № 1. – С.58-71.

16. Zhuravlev V. M. Nonlinear Waves in Self-Gravitating Compressible Fluid and Generalized Cole?Hopf Substitutions / V. M.Zhuravlev, D.A.Zinov'ev // Physics of Wave Phenomena. – 2011. – Vol.19, № 4. – P.313–317.

17. Журавлев В.М. Интегрируемые модели динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Метод подстановок Коула – Хопфа / В.М.Журавлев, Д.А.Зиновьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Серия Физико-математические науки. – 2012. - № 4. – С.174-190.

18. В. М. Журавлев. О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Серия физико-математическая. – 2016. - № 4. – С.84-101.

19. В.М. Журавлев. Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шедингера и функциональные подстановки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. - № 1. – С.147-163.

20. Бурсиан В. Журнал Русского физ. общества / В.Бурсиан, В.Павлов // – 1923. – Т.55, № 1-3. – 71 с.

21. Урюков Б.А. Аналогия между диффузией и гидродинамикой / Б.А. Урюков // Теплофизика и аэромеханика. – 1999. – Т.6, № 3. – С.421-424.

22. Захаров В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский // – М.:Наука, 1980. – 319 с.

23. Захаров В.Е. Тонкая теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах / В.Е.Захаров, А.Б.Шабат // ЖЭТФ. – 1971. – Т.61. – 119 с.

24. Hopf E. The partial differential equation ut + uux = μuxx / E. Hopf // Comm.Pure and Appl.Math. – 1950. – Vol.3. – P.201–230.

25. Cole J.D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics / J.D.Cole. // Quart.Appl.Math. – 1951. – Vol.9, № 3. – P.225-236.

26. Старцев С.Я. О дифференциальных подстановках типа преобразований Миуры / С.Я. Старцев // ТМФ. – 1999. – Т.166, № 3. – С.336-348.

27. Старцев С.Я. О гиперболических уравнениях,допускающих дифференциальные подстановки / С.Я. Старцев // ТМФ. – 2001. – Т.127, № 1. – С.63-74.

28. Кузнецов В.И. Нестационарные режимы диода бурсиана. Часть I. Устойчивость стационарных решений / В.И.Кузнецов, А.Я.Эндер // Физика плазмы. – 2010. – Т.36, №3. – С.248–257.

29. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P.D. Lax // Comm.Pure and Appl.Math. – 1968. – Т.21, № 5. P.467-490.

30. Гуревич А.В. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория / А.В.Гуревич, К.П.Зыбин // УФН. – 1995. – Т.165. – С.723–758.

31. Bronnikov K.A. Lekcii po gravitacii i kosmologii. Uchebnoe posobie / K.A. Bronnikov, S.G. Rubin. – M.: Izd.MIFI, 2008. – 460 p.

32. Liouville J. Sur l'equation aux differences partielles: $d2log\lambda/dudv \pm \lambda a2 = 0$ / J. Liouville // J.Math. – 1853. – Vol.18. – P.71–72.

33. Polyanin A.D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Chapman and Hall / A.D.Polyanin, V.F.Zaitsev. – CRC Boca Raton, 2004. – 625 p.

34. Буллафа Р. Солитоны / Р. Буллафа // Перевод с анг.яз. Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.

35. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем // – М.: Мир, 1974. – 638 с.

36. Zenchuk A.I. On the remarkabel relations among PDEs integrable by the inverse spectral transformation method, by the method of characteristics and by the Hopf-Cole transformation / A.I.Zenchuk, P.M. Santini // – 2008. – P.1-36. – Access mode: arXiv:0801.3945v1[nlin.SI]

37. Santini P.M. Inverse Problem / P.M. Santini. – 1992. – Vol.8. – P.285-301.

38. Семенов Э.И. О новых точных решениях неавтономного уравнения Лиувилля / Э.И. Семенов // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т.48, № 1. – С.207-217.

39. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И.Н. Векуа. – М.:Наука, 1978. – 296 с.

40. Журавлев В.М. Точные решения в гидродинамике сжимаемой жидкости и методы функциональных подстановок типа Коула-Хопфа / В.М. Журавлев // Сб. Инновационные технологии. Под ред.проф. С.В. Булярского. – Ульяновск: Изд. УлГУ, 2010. – 77 с.

41. Журавлев В.М. Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау – Лифшица. Нелинейная динамика. / В.М. Журавлев – 2014. – Т.10, № 1. – С.35–48.

42. Лэмб Г. Гидродинамика / Г. Лэмб. – М.:Л.Гостехиздат, 1947. – 928 с.

43. Полянин А.Д. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса / А.Д.Полянин, А.В.Вязьмин, А.И.Журов, Д.А.Казенин // – М.:Факториал, 1998. – 367 с.

44. Новиков И.Д. Эволюция Вселенной / И.Д. Новиков // — М.: Наука, 1983. – 176 с.

45. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с.

46. McCrea W. Spring Theory as an Approach to the Unification of Fields / W.McCrea, E.Milne // Quart.J.Math. – 1934. - № 5. – 73 p.

47. Озерной Л.М. Астрофизика высоких энергий / Л.М.Озерной, О.Ф.Прилуцкий, И.Л.Розенталь. – М.: Атомиздат, 1973. – 245 с.

48. Langmuir I. The eject of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum / I. Langmuir // Physical Review. – 1913. – Vol.2, № 6. – 450 p.

INTEGRABLE MODELS OF THEORETICAL PHYSICS. THE METHOD OF FUNCTIONAL SUBSTITUTIONS.

V.M. Zhuravlev

The paper considers the method of functional substitutions and integrable models of theoretical physics, as well as hydrodynamic substitutions for self-consistent models of hydrodynamics.

Keywords: method of functional substitutions, integrable models of theoretical physics, hydrodynamic substitutions, self-consistent models.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

Ю.Г. Игнатьев

Предельные евклидовы циклы в космологических моделях, основанных на нелинейных скалярных полях с самодействием

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК 530.12:531.51:519.711.3

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЕВКЛИДОВЫ ЦИКЛЫ В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ, ОСНОВАННЫХ НА НЕЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЯХ С САМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев[1]

1 *ignatev_yu@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Обсуждается общая тенденция космологических моделей, основанных на нелинейных скалярных полях с самодействием, стремление фазовых траекторий к гиперповерхностям нулевой эффективной энергии, соответствующих евклидовому пространству.

Ключевые слова: космологические модели, скалярные поля, нелинейные динамические системы, качественный и численный анализ динамических систем.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете с минимальными связями. I. Качественный анализ модели / Ю.Г. Игнатьев, И.А.Кох // Известия ВУЗов, Физика. – 2018. – Т.61. - №6. -– С.42-81.

2. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете с минимальными связями. II. Численное моделирование фазовых траекторий / Ю.Г. Игнатьев, И.А.Кох // Известия ВУЗов, Физика. – 2018. – Т.61. – №9 (в печати).

3. Ignat'ev Yu. The Peculiarities of the Cosmological Models Based on Non-Linear Classical and Phantom Fields with Minimal Interaction. I. The Cosmological Model Based on Scalar Singlet / Yu. Ignat'ev, A. Agathonov, I. Kokh. – Access mode: arXiv:1808.04570 [gr-qc]

LIMIT EUCLIDEAN CYCLES IN COSMOLOGICAL MODELS BASED ON NONLINEAR SCALAR FIELDS WITH SELF-ACTION

Y.G. Ignatev

The General tendency of cosmological models based on nonlinear scalar fields with self-action and the tendency of phase trajectories to hypersurfaces of zero effective energy corresponding to Euclidean space are discussed.

Keywords: cosmological models, scalar fields, nonlinear dynamical systems, qualitative and numerical analysis of dynamical systems.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

А.А. Попов

Поляризация вакуума квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-временах

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК 530.122; 530.22

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КВАНТОВАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В СТАТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ-ВРЕМЕНАХ

А.А. Попов[1]

1 *apopov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Получено аналитическое приближение для $\langle\varphi^2\rangle$ квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных пространствах-временах. Предполагалось, что поле является массивным или безмассовым, с произвольной константой ξ связи скалярного поля с кривизной и находится в квантовом состоянии с нулевой температурой. Выражение для $\langle\varphi^2\rangle$ разделено на низко- и высокочастотные части. Вклады высокочастотных мод в эти величины вычислены для произвольного квантового состояния. В качестве примера, низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ вычислен в асимптотически плоских пространствах-временах в квантовом состоянии, соответствующем вакууму Минковского (квантовое состояние Бульвара). Обсуждаются пределы применимости этих приближений.

Ключевые слова: поляризация вакуума, квантованное скалярное поле, гравитация.

СОДЕРЖАНИЕ:

1 Введение 87
2 Высокочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ и $\langle T^\mu_\nu\rangle$ квантованного скалярного поля 88
3 Низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ 94
4 Заключение 95
Литература 97

1. Введение

Исследование эффектов квантованных полей на фоне внешнего гравитационного поля имеет долгую историю [1]. Эти эффекты оказались весьма важными, например, при описании ранней вселенной [2] и квантового испарения черных дыр [3]. Наиболее важными величинами, характеризующими квантованные поля во внешнем гравитационном поле, являются $\langle\varphi^2\rangle$ и $\langle T^\mu_\nu\rangle$, где φ есть квантованное поле, а T^μ_ν – оператор тензора энергии-импульса для φ. Однако, получить точную функциональную зависимость этих величин от метрики даже в однопетлевом приближении невозможно, за исключением ряда высокосимметричных пространств-времен (см., например, [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Численные вычисления, как правило, являются весьма трудоемкими [12, 13, 14, 15, 16, 25, 17, 18]. Очевидно, таким образом, что получение аналитических приближений для $\langle\phi^2\rangle$ и $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, когда это возможно, является полезным. Одним из наиболее широко используемых методов получения приближенных выражений для $\langle\varphi^2\rangle$ и $\langle T^\mu_\nu\rangle$ является разложение ДеВитта-Швингера этих величин в ряд по $1/(m^2 l_g^2)$, где m есть масса квантованного поля, а l_g – характерный масштаб радиуса кривизны фонового гравитационного поля [19]. Для конформно связанных безмассовых полей в некоторых классах пространств-времен, не фиксированных явно заданием функционального вида метрики, приближенные вычисления также производились. Например, аналитическое приближение для $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ в статических Эйнштейновских пространствах-временах ($R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$) было получено Пэйджем, Брауном и Оттевилом [20, 21, 22]. Эти результаты были обобщены на случай произвольных статических пространств-времен Занниасом [23]. Подход к вычислению приближенных выражений для $\langle\phi^2\rangle$ и $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, предложенный Фроловым и Зельниковым [24], основывается скорее на геометрических аргументах и общих свойствах тензора энергии-импульса, чем на теории поля. Приближение же Андерсона, Хискока и Самюэля [25] основывалось на методах квантовой теории скалярного поля. Они предполагали, что поле может находиться в вакуумном квантовом состоянии с нулевой или ненулевой температурой, может быть массивным или безмассовым и иметь произвольную константу связи

ξ поля с кривизной. Их результат был представлен в виде суммы двух частей: численной и аналитической

$$\langle T_\nu^\mu \rangle_{ren} = \langle T_\nu^\mu \rangle_{numeric} + \langle T_\nu^\mu \rangle_{analytic}. \tag{1}$$

Аналитическая часть их выражений удовлетворяла закону сохранения и имела след, равный аномальному следу в случае конформно инвариантного поля. По этой причине они предложили использовать $\langle T_\nu^\mu \rangle_{analytic}$ непосредственно как приближение для $\langle T_\nu^\mu \rangle_{ren}$. Аналогичный результат был получен Гровесом, Андерсоном и Карлсоном [26] для безмассового поля спина 1/2 в произвольном статическом сферически симметричном пространстве-времени.

Принципиально важной проблемой всех этих приближений для безмассовых полей или массивных полей с массой $ml_g \lesssim 1$ является определение области их применимости. Некоторую уверенность в справедливости полученных приближений давало авторам сравнение полученных результатов с численными или аналитическими расчетами, проведенными для пространств-времен с заданным функционально видом метрики.

В этой лекции строятся приближенное выражение для $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-временах. Поле предполагается массивным или безмассовым, имеющим произвольную константу связи скалярного поля с кривизной и находящемся в вакуумном состоянии с нулевой температурой. Выражение для $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ разбивается на низко и высокочастотные части. Для аппроксимации высокочастотных частей используется подход Андерсона, Хискока и Самюэля [25]. Эти части содержат все ультрафиолетовые расходимости и могут быть перенормированы. Низкочастотный вклад в $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ определяется в общем случае глобальной структурой пространства-времени и вычислен в статическом сферически симметричном асимптотически плоском пространстве-времени для квантового состояния, соответствующего вакууму Минковского (в общепринятой терминологии это соответствует выбору квантового состояния Бульвара). Важной частью исследования является получение пределов применимости рассмотренных приближений.

2. Высокочастотный вклад в $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ квантованного скалярного поля

Запишем метрику статического сферически симметричного пространства-времени в виде

$$ds^2 = f\,d\tau^2 + d\rho^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{2}$$

где f и r являются функциями собственной радиальной координаты ρ, а τ есть евклидово время ($\tau = it$, где t координата, соответствующая времениподобному вектору Киллинга, всегда существующему для статического пространства-времени).

Вакуумное среднее оператора ϕ^2 квантованного скалярного поля ϕ может быть вычислено с использованием метода раздвижки точек [27, 28] из евклидовой функции Грина $G_E(x, \tilde{x})$ следующим образом

$$\langle \phi^2 \rangle_{unren} = G_E(x, \tilde{x}), \tag{3}$$

где $G_E(x, \tilde{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\Box_x - m^2 - \xi R(x) \right] G_E(x, \tilde{x}) = -\frac{\delta^4(x, \tilde{x})}{\sqrt{g(x)}}, \tag{4}$$

а $\Box_x$ и $g(x)$ вычисляются с использованием евклидовой метрики (2), m есть масса скалярного поля, ξ константа связи скалярного поля с кривизной пространства-времени R.

В метрике (2) правая часть (4) может быть представлена в виде

$$\frac{\delta^4(x, \tilde{x})}{\sqrt{g(x)}} = \frac{\delta(\tau - \tilde{\tau})\delta(\rho, \tilde{\rho})\delta(\Omega, \tilde{\Omega})}{r^2\sqrt{f}}, \tag{5}$$

где $\delta(\Omega, \tilde{\Omega})$ может быть разложена по полиномам Лежандра P_l

$$\delta(\Omega, \tilde{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\gamma), \tag{6}$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\tilde{\theta} + \sin\theta\sin\tilde{\theta}\cos(\varphi - \tilde{\varphi}) \tag{7}$$

Если скалярное поле находится в квантовом состоянии с температурой T, определенном по отношению к времениподобному вектору Киллинга, то евклидова функция Грина является периодической по $\tau - \tilde{\tau}$ с периодом $1/T$. Однако, здесь мы будем рассматривать случай квантового состояния скалярного поля с нулевой температурой. В этом случае

$$\delta(\tau - \tilde{\tau}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \cos\left[\omega(\tau - \tilde{\tau})\right]. \tag{8}$$

Таким образом, евклидова функция Грина может быть представлена в виде

$$G_E(x;\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d\omega \cos[\omega(\tau - \tilde{\tau})] \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\gamma)\ \chi_{\omega l}, \tag{9}$$

где $\chi_{\omega l}(\rho, \tilde{\rho})$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \left[\frac{1}{2f}\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\rho}\right]\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]\right\}\chi_{\omega l} = -\frac{\delta(\rho - \tilde{\rho})}{r^2\sqrt{f}}. \tag{10}$$

Если обозначить независимые решения соответствующего однородного уравнения $p_{\omega l}(\rho)$ и $q_{\omega l}(\rho)$

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \left[\frac{1}{2f}\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\rho}\right]\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]\right\}\begin{Bmatrix} p_{\omega l} \\ q_{\omega l}\end{Bmatrix} = 0, \tag{11}$$

то $\chi_{\omega l}(\rho, \tilde{\rho})$ можно представить в виде

$$\chi_{\omega l}(\rho, \tilde{\rho}) = C_{\omega l}\ p_{\omega l}(\rho_<)\ q_{\omega l}(\rho_>) \tag{12}$$

где $C_{\omega l}$ есть нормировочная постоянная, $\rho_<$ and $\rho_>$ есть меньшее или большее значение ρ или $\tilde{\rho}$, соответственно. Фиксирование нормировочной константы $C_{\omega l}$ может быть достигнуто интегрированием (10) по ρ от $\tilde{\rho} - \delta$ до $\tilde{\rho} + \delta$ и стремлением $\delta \to 0$. Это дает следующее условие на вронскиан

$$C_{\omega l}\left[\ p_{\omega l}\frac{dq_{\omega l}}{d\rho} - q_{\omega l}\frac{dp_{\omega l}}{d\rho}\right] = \frac{-1}{r^2 f^{1/2}}. \tag{13}$$

В выше приведенных обозначениях выражение для $G_E(x;\tilde{x})$ имеет вид

$$G_E(x;\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d\omega \cos[\omega(\tau - \tilde{\tau})] \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\gamma)\ C_{\omega l}\ p_{\omega l}(\rho_<)\ q_{\omega l}(\rho_>). \tag{14}$$

Легко увидеть, что после подстановки

$$\begin{aligned} p_{\omega l} &= \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}}\exp\left\{\int^\rho W f^{-1/2} d\rho\right\}, \\ q_{\omega l} &= \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}}\exp\left\{-\int^\rho W f^{-1/2} d\rho\right\}, \end{aligned} \tag{15}$$

условие на вронскиан (13) тождественно выполняется, если

$$C_{\omega l} = 1 \tag{16}$$

а уравнение на радиальные моды $p_{\omega l}(\rho)$ и $q_{\omega l}(\rho)$ (11) дает, в этом случае, следующее уравнение на функцию $W(\rho)$

$$W^2 = \omega^2 + \frac{f}{r^2}l(l+1) + f m^2 + \frac{f}{4r^2}$$

$$+V+\frac{f'}{8}\frac{(W^2)'}{W^2}+\frac{f}{4}\frac{(W^2)''}{W^2}-\frac{5f}{16}\frac{(W^2)'^2}{W^4}, \tag{17}$$

где

$$V=\left(2\xi-\frac{1}{4}\right)\frac{f}{r^2}+f\left(\frac{(r^2)''}{2r^2}+\frac{f'(r^2)'}{4fr^2}-\frac{(r^2)'^2}{4r^4}\right)$$
$$+\xi f\left(-\frac{f''}{f}-2\frac{(r^2)''}{r^2}+\frac{f'^2}{2f^2}+\frac{(r^2)'^2}{2r^4}-\frac{f'(r^2)'}{fr^2}\right). \tag{18}$$

В случае достаточно массивного поля, т.е.

$$m=\frac{1}{r_{\rm c}}\gg\frac{1}{l_g}, \tag{19}$$

где

$$\frac{1}{l_g}=\max\left\{\frac{1}{|r|},\left|\left[\ln(fr^2)\right]'\right|,\ \left|\left[\ln(fr^2)\right]''\right|^{1/2},\ \left|\left[\ln(fr^2)\right]'''\right|^{1/3},\ \ldots\right\}, \tag{20}$$

существует малый параметр

$$\varepsilon_{\rm WKB}=\frac{r_{\rm c}}{l_g}\ll 1 \tag{21}$$

по степеням которого может быть разложено решение уравнения (17). При этом нулевой член разложения может быть выбран в виде

$$(W^2)_{(0)}=\omega^2+\frac{f}{r^2}l(l+1)+fm^2. \tag{22}$$

Тогда член следующего порядка имеет вид

$$(W^2)_{(2)}=\frac{f}{4r^2}+V+\frac{f'}{8}\frac{(W^2)_{(0)}{}'}{(W^2)_{(0)}}+\frac{f}{4}\frac{(W^2)_{(0)}{}''}{(W^2)_{(0)}}-\frac{5f}{16}\frac{(W^2)_{(0)}{}'^2}{(W^2)_{(0)}{}^2} \tag{23}$$

и т.д. . Для удобства вычислений к нулевому члену разложения может быть добавлено слагаемое второго порядка малости по $\varepsilon_{\rm WKB}$.

$$(W^2)_{(0)}=\omega^2+\frac{f}{r^2}l(l+1)+fm^2+\frac{1}{4r^2}=\omega^2+\frac{f}{r^2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+fm^2, \tag{24}$$

поскольку это не меняет соотношений

$$(W^2)_{(0)}\gg(W^2)_{(2)}\gg(W^2)_{(4)}\gg\ldots \tag{25}$$

или

$$(W^2)_{(2)}\sim\varepsilon^2_{\rm WKB}(W^2)_{(0)},\quad (W^2)_{(4)}\sim\varepsilon^4_{\rm WKB}(W^2)_{(0)},\quad \ldots \tag{26}$$

и

$$W^2=(W^2)_{(0)}+(W^2)_{(2)}+(W^2)_{(4)}+\ldots. \tag{27}$$

Такой подход дает [19, 25] разложение ДеВитта-Швингера величины $\langle\varphi^2\rangle$ по степеням $1/(ml_g)$. Следует отметить, что добавление к нулевому члену итерационной процедуры членов второго порядка малости может потребовать дополнительного разложения полученного выражения для $\langle\varphi^2\rangle$ по малому параметру $1/(ml_g)$.

Здесь мы рассмотрим случай безмассового скалярного поля или поля с малой массой, т.е.

$$r_{\rm c}=\frac{1}{m}\gtrsim l_g. \tag{28}$$

В этом случае малого параметра не существует, однако можно вычислить вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ высокочастотных мод. Такой вклад может быть получен учетом в интегралах по w в выражении (14)) только тех частот, для которых

$$w\geq w_0 \tag{29}$$

или

$$u \geq u_0 = w_0 \sqrt{r^2/f}, \tag{30}$$

то есть

$$\langle \varphi^2 \rangle^{\text{HFC}}_{unren} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{u_0}^{\infty} du \cos(u\varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\sqrt{\frac{f}{r^2}} \frac{(l+1/2)}{W} - 1 \right], \tag{31}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{f}{r^2}} (\tau - \tilde{\tau}), \; u = \frac{r}{\sqrt{f}} \omega. \tag{32}$$

В качестве малого параметра итерационной процедуры решения уравнения (17) может быть выбран следующий

$$\varepsilon_{\text{WKB}} = \frac{\sqrt{f}}{w_0 l_g} = \frac{|r|}{u_0 l_g} \ll 1. \tag{33}$$

Это также означает (см. определение l_g (20) и u (32))

$$u_0 \gg \frac{|r|}{l_g} \geq 1. \tag{34}$$

Решение нулевого порядка по ε_{WKB} уравнения (17) может быть выбрано в виде

$$(W^2)_{(0)} = \omega^2 + \frac{f}{r^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2. \tag{35}$$

Тогда решение второго есть

$$(W^2)_{(2)} = V + \frac{f'}{8} \frac{{(W^2)_{(0)}}'}{(W^2)_{(0)}} + \frac{f}{4} \frac{{(W^2)_{(0)}}''}{(W^2)_{(0)}} - \frac{5f}{16} \frac{{(W^2)_{(0)}}'^2}{{(W^2)_{(0)}}^2}, \tag{36}$$

Высокочастотная часть величины $\langle \phi^2 \rangle_{unren}$ получается подстановкой W^2 (27) в выражение (31)

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^2 \rangle^{\text{HFC}}_{unren} = \frac{1}{4\pi^2} \Bigg\{ & \frac{1}{r^2} S_0^0(\varepsilon, u_0) - \frac{V}{2f} S_1^0(\varepsilon, u_0) - \frac{r^2}{16f^2} \left[f' \left(\frac{f}{r^2} \right)' \right. \\
& \left. + 2f \left(\frac{f}{r^2} \right)'' \right] S_2^1(\varepsilon, u_0) + \frac{5r^4}{32f^2} \left(\frac{f}{r^2} \right)'^2 S_3^2(\varepsilon, u_0) + \frac{r^2}{16f^2} \Big[\, 6V^2 - f'V' \\
& - 2fV'' \Big] S_2^0(\varepsilon, u_0) + \frac{r^4}{128f^3} \Bigg[\Bigg(20Vf' + 40fV' - f'f'' \left(\frac{f}{r^2} \right)' \\
& - 2ff''' \Bigg) + \left(40fV - 3f'^2 - 8ff'' \right) \left(\frac{f}{r^2} \right)'' - 12ff' \left(\frac{f}{r^2} \right)''' \\
& - 4f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'''' \Bigg] S_3^1(\varepsilon, u_0) + \frac{r^6}{512f^4} \Big[\Big(21f'^2 + 56ff'' \\
& - 280fV \Big) \left(\frac{f}{r^2} \right)'^2 + 84f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)''^2 + 112f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)' \left(\frac{f}{r^2} \right)''' \\
& + 252ff' \left(\frac{f}{r^2} \right)' \left(\frac{f}{r^2} \right)'' \Big] S_4^2(\varepsilon, u_0) + \frac{r^8}{512f^5} \left[-231ff' \left(\frac{f}{r^2} \right)'^3 \right. \\
& \left. - 462f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'' \right] S_5^3(\varepsilon, u_0) \\
& + \frac{r^{10}}{2048f^6} \left[1155f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'^4 \right] S_6^4(\varepsilon, u_0) \Bigg\} + O\left(\frac{\varepsilon^2_{\text{WKB}}}{L^2} \right),
\end{aligned} \tag{37}$$

Величины $S_n^k(\varepsilon, u_0)$ в этих выражениях имеют вид

$$S_n^k(\varepsilon, u_0) = \int_{u_0}^{\infty} du \cos(\varepsilon u) \sum_{l=0}^{\infty} \Bigg\{ \; \frac{(l+1/2)^{2k+1}}{\left(u^2 + (l+1/2)^2 \right)^{(2n+1)/2}}$$

$$-\text{расходящиеся члены}\Big\}, \tag{38}$$

где k и n есть целые числа, $k \geq 0$ и $n \geq -1$. "Расходящиеся члены" в суммах по l получаются разложением суммируемых функций по обратным степеням l и отбрасыванием членов, стремящихся к нулю при $l \to \infty$. Такое вычитание соответствует удалению расходимостей в суммах по l, которое обсуждалось выше

$$S^n_{n-1}(\varepsilon, u_0) = \int_{u_0}^{\infty} du \cos(\varepsilon u) \sum_{l=0}^{\infty} \Bigg\{ \frac{(l+1/2)^{2n+1}}{[u^2 + (l+1/2)^2]^{(2n-1)/2}} - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + (2n-1)\frac{u^2}{2} \Bigg\}, \tag{39}$$

$$S^n_n(\varepsilon, u_0) = \int_{u_0}^{\infty} du \cos(\varepsilon u) \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{(l+1/2)^{2n+1}}{\left[u^2 + (l+1/2)^2\right]^{(2n+1)/2}} - 1 \right\}. \tag{40}$$

Для других величин $S^k_n(\varepsilon, u_0)$ расходящихся членов нет. Детали вычисления $S^k_n(\varepsilon, u_0)$ в пределе $\varepsilon \to 0$ приведены в Приложении

$$S^0_{-1}(\varepsilon, u_0) = -\frac{2}{\varepsilon^4} - \frac{1}{24\varepsilon^2} + \frac{u_0^4}{12} - \frac{u_0^2}{48} + \frac{7}{1920}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{31}{129024}\frac{1}{u_0^2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \tag{41}$$

$$S^1_0(\varepsilon, u_0) = \frac{4}{\varepsilon^4} - \frac{u_0^4}{6} + \frac{7}{960}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{31}{32256}\frac{1}{u_0^2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \tag{42}$$

$$S^0_0(\varepsilon, u_0) = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{u_0^2}{2} - \frac{1}{24}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) + \frac{7}{3840}\frac{1}{u_0^2} + \varepsilon^2\left[-\frac{u_0^4}{8} + \frac{u_0^2}{96} - \frac{7}{2560} + \frac{7}{3840}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{31}{86016}\frac{1}{u_0^2}\right] + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{43}$$

$$S^1_1(\varepsilon, u_0) = \frac{2}{\varepsilon^2} + u_0^2 - \frac{7}{1920}\frac{1}{u_0^2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \tag{44}$$

$$S^n_n(\varepsilon, u_0) = \frac{(2n)!!}{(2n-1!!)}\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{(2n)!!}{(2n-1!!)}\frac{u_0^2}{2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \quad (n \geq 2), \tag{45}$$

$$S^0_1(\varepsilon, u_0) = -\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) + \frac{1}{48}\frac{1}{u_0^2} + \varepsilon^2\left[\frac{u_0^2}{4} + \frac{1}{48}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{1}{32} - \frac{7}{2560}\frac{1}{u_0^2}\right] + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{46}$$

$$S^1_2(\varepsilon, u_0) = -\frac{2}{3}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) + \varepsilon^2\left[\frac{u_0^2}{6} + \frac{7}{3840}\frac{1}{u_0^2}\right] + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)$$

$$+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \tag{47}$$

$$S^n_{n+1}(\varepsilon,u_0)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left[-\left(C+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2u_0^2\right|\right)+\varepsilon^2\frac{u_0^2}{4}\right]+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)$$
$$+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (n\geq 2), \tag{48}$$

$$S^0_2(\varepsilon,u_0)=\frac{1}{6u_0^2}+\varepsilon^2\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\left(C+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2u_0^2\right|\right)-\frac{1}{96u_0^2}\right]+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)$$
$$+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (n\geq 2), \tag{49}$$

$$S^n_{n+2}(\varepsilon,u_0)=\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\left\{\frac{1}{2u_0^2}+\varepsilon^2\left[-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2u_0^2\right|\right)\right]\right\}$$
$$+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (n\geq 1), \tag{50}$$

$$S^n_{n+3}(\varepsilon,u_0)=-\frac{(2n)!!}{(2n+5)!!}\frac{3\varepsilon^2}{4u_0^2}+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right),$$
$$(n\geq 0), \tag{51}$$

$$S^k_n(\varepsilon,u_0)=O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \quad (k\geq 0,\ n\geq k+4). \tag{52}$$

Подстановка этого выражения в (37) дает $\langle\varphi^2\rangle^{\text{HFC}}_{unren}$ - высокочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle_{unren}$. Отметим, что разложение $\langle\varphi^2\rangle^{\text{HFC}}_{unren}$ по степеням u_0 соответствует разложению ДеВитта-Швингера $\langle\varphi^2\rangle_{unren}$ по степеням ml_g.

Перенормировка $\langle\varphi^2\rangle$ достигается вычитанием ренормализационных контрчленов из $\langle\varphi^2\rangle_{unren}$ с последующим вычислением предела $\tilde{\tau}\to\tau$:

$$\langle\varphi^2\rangle_{ren}=\lim_{\tilde{\tau}\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right], \tag{53}$$

где

$$\langle\phi^2\rangle_{\text{DS}}=\frac{1}{8\pi^2\sigma}+\frac{1}{8\pi^2}\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\left[C+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2_{DS}|\sigma|}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{m^2}{16\pi^2}+\frac{1}{96\pi^2}R_{\alpha\beta}\frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta}{\sigma}, \tag{54}$$

константа m_{DS} равна массе m поля для массивного скалярного поля. В случае безмассового поля эта константа является известным параметром инфракрасного обрезания в $\langle T^\mu_\nu\rangle_{DS}$. Конкретный выбор величины m_{DS} соответствует конечной перенормировке коэффициентов при членах гравитационного лагранжиана, квадратичных по тензору Вейля и скалярной кривизне, и должен быть фиксирован экспериментом или наблюдениями. Величины σ^μ для метрики (2), рассчитанные с необходимой степенью точности, есть

$$\sigma^t=(t-\tilde{t})+\frac{f'^2}{24f}(t-\tilde{t})^3-\frac{1}{120}\left(\frac{f'^4}{8f^2}-\frac{3}{8}\frac{f'^2f''}{f}\right)(t-\tilde{t})^5$$
$$+O\left((t-\tilde{t})^7\right),$$

$$\sigma^{\rho}=-\frac{f'}{4}(t-\tilde{t})^2-\frac{f'f''}{96}(t-\tilde{t})^4+O\left((t-\tilde{t})^6\right),$$
$$\sigma^{\theta}=\sigma^{\phi}=0,$$
$$\sigma=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}, \tag{55}$$

Все ультрафиолетовые расходимости $\langle\varphi^2\rangle$ содержатся в $\langle\varphi^2\rangle^{\mathrm{HFC}}_{unren}$. Вычитая из последнего ренормализационные контрчлены, получим

$$\langle\varphi^2\rangle_{\mathrm{WKB}}=\lim_{\tilde{\tau}\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle^{\mathrm{HFC}}_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\mathrm{DS}}\right]=\left(\varphi^2\right)_{(0)}+\left(\varphi^2\right)_{(2)}+O\left(\frac{1}{u_0{}^2L^2}\right), \tag{56}$$

где $\left(\varphi^2\right)_{(0)}$, $\left(\varphi^2\right)_{(2)}$ величины нулевого и второго ВКБ порядка для $\langle\varphi^2\rangle_{\mathrm{WKB}}$ соответственно

$$\left(\varphi^2\right)_{(0)}=\frac{u_0{}^2}{8\pi^2r^2}, \tag{57}$$

$$\left(\varphi^2\right)_{(2)}=\frac{m^2}{16\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\ln\left|\frac{4u_0^2}{m_{DS}^2r^2}\right|-\frac{f'^2}{96\pi^2f^2}$$
$$+\frac{f''}{96\pi^2f^2}+\frac{f'(r^2)'}{96\pi^2fr^2}, \tag{58}$$

$$u_0=w_0\sqrt{r^2/f}\gg 1. \tag{59}$$

3. Низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$

Вклад низкочастотных мод в $\langle\varphi^2\rangle$ в общем случае определяется граничными условиями и топологией пространства-времени. Если пространство-время является асимптотически плоским, а характерный масштаб λ области, в которой гравитационное является сильным (пример дан ниже), много меньше параметра $\sqrt{f}/\omega_0$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{f}/\omega_0}\ll 1, \tag{60}$$

то в асимптотически плоской области низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ может быть разложен в ряд по степеням этого малого параметра. Ниже нулевой член такого разложения используется для приближенного описания низкочастотного вклада в $\langle\varphi^2\rangle$. Такой подход означает, что мы считаем длинноволновые моды приближенно совпадающими с длинноволновыми модами вакуума Минковского (в общепринятой терминологии теории черных дыр это соответствует вакуумному состоянию Бульвара в асимптотически плоской области). Для этих мод в координатах

$$ds^2=dT^2+dx^2+dy^2+dz^2=dT^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{61}$$

евклидова функция Грина имеет вид

$$G_E(T,x^{\alpha};\tilde{T},\tilde{x})=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\Omega d^3p\frac{\exp\left[i\Omega\left(T-\tilde{T}\right)+ip_{\alpha}\left(x^{\alpha}-\tilde{x}^{\alpha}\right)\right]}{\left(\Omega^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2+m^2\right)}$$
$$=\frac{1}{4\pi^3}\int d\Omega e^{i\Omega\Delta T}\int_0^{\infty}dp\frac{p\sin(p\Delta r)}{\Delta r\left(\Omega^2+p^2+m^2\right)}$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\int d\Omega e^{i\Omega\Delta T}\frac{\exp\left(-\Delta r\sqrt{\Omega^2+m^2}\right)}{\Delta r}$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\int d\Omega e^{i\Omega\Delta T}\left[\frac{1}{\Delta r}-\sqrt{\Omega^2+m^2}+O(\Delta r)\right]. \tag{62}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении соответствует обсуждавшейся выше, а также в работах [12, 13, 30, 31], расходимости. И также, как и выше, такая расходимость должна быть удалена. Таким образом, приближенным выражением для низкочастотного вклада в $\langle\varphi^2\rangle$ может служить

$$\langle\varphi^2\rangle_{\mathrm{LFC}}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\left\{-\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0}d\Omega e^{i\Omega\Delta\tau}\sqrt{\Omega^2+m^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{8\pi^2}\left(\Omega_0\sqrt{{\Omega_0}^2+m^2}+m^2\ln\left|\frac{\Omega_0+\sqrt{{\Omega_0}^2+m^2}}{m}\right|\right). \tag{63}$$

В случае безмассового поля или поля с массой, удовлетворяющей условию $\Omega_0 \gg m$, это выражение может быть переписано следующим образом

$$\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}=-\frac{{\Omega_0}^2}{8\pi^2}-\frac{m^2}{16\pi^2}-\frac{m^2}{16\pi^2}\ln\left|\frac{4{\Omega_0}^2}{m^2}\right|+O\left(\frac{m^4}{{\Omega_0}^2}\right). \tag{64}$$

И если принять во внимание соотношение $\Omega_0 = \omega_0/\sqrt{f}$, то

$$\begin{aligned}\langle\varphi^2\rangle_{ren}&=\lim_{\tilde{\tau}\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right]=\lim_{\tilde{\tau}\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle^{\text{HFC}}_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right]+\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}\\&=\langle\varphi^2\rangle_{\text{WKB}}+\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}\\&=\frac{R}{16\pi^2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\ln\left|\frac{4{u_0}^2}{m_{DS}^2r^2}\right|-\frac{f'^2}{96\pi^2f^2}+\frac{f''}{96\pi^2f}+\frac{f'(r^2)'}{96\pi^2fr^2}\\&\quad+O\left(\frac{1}{L^2{u_0}^2}\right).\end{aligned} \tag{65}$$

4. Заключение

В этой лекции получено аналитическое приближение для $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-временах. Предполагается, что константа ξ связи скалярного поля с кривизной произвольна, поле находится в квантовом состоянии с нулевой температурой и имеет произвольную массу m.

Условиями применимости аналитического приближения (65) являются

$$\lambda \ll \frac{\sqrt{f(\rho)}}{w_0} \ll L(\rho), \tag{66}$$

где λ есть характерный размер области асимптотически плоского пространства-времени, в которой гравитационное поле является сильным, а w_0 есть константа ВКБ разложения.

В качестве примера, рассмотрим гравитационное поле, создаваемое сферическим телом радиуса $r_0 > r_g$, где r_g есть гравитационный радиус этого тела. Тогда $\lambda \sim r_0$, а метрика пространства-времени вне этого тела есть

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_g}{r(\rho)}\right)dt^2+d\rho^2+r(\rho)^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2), \tag{67}$$

где $r(\rho)$ - обратная функция к функции

$$\begin{aligned}\rho(r)=\rho_0+r_g&\left[\sqrt{\frac{r}{r_g}\left(\frac{r}{r_g}-1\right)}-\sqrt{\frac{r_0}{r_g}\left(\frac{r_0}{r_g}-1\right)}\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{r/r_g-1}+\sqrt{r/r_g}\right)\left(\sqrt{r_0/r_g-1}-\sqrt{r_0/r_g}\right)}{\left(\sqrt{r/r_g-1}-\sqrt{r/r_g}\right)\left(\sqrt{r_0/r_g-1}+\sqrt{r_0/r_g}\right)}\right|\right].\end{aligned} \tag{68}$$

При $r(\rho) \gg r_0$

$$f(\rho)\sim 1, \quad L(\rho)\sim r(\rho), \tag{69}$$

и условия (66) могут быть удовлетворены выбором w_0,

$$r_0 \ll w_0 \ll r(\rho). \tag{70}$$

Это означает, что вдали от тела (т.е. в области, где $r(\rho) \gg r_0$) приближение (65) является справедливым.

Присутствие в выражении (65) произвольного параметра $u_0 = w_0 r/\sqrt{f}$ является общей чертой аналитических приближений [25, 26, 32, 33, 34]. Для безмассовых полей этот параметр может быть объединен с константой m_{DS}.

Для конформно инвариантного скалярного поля приближение (65) совпадает с приближениями Пейджа, Брауна и Оттевила [20, 21, 22], Фролова, Зельникова [24] (для некоторого выбора произвольных параметров в их выражениях) и аналитическим приближением Андерсона, Хискока, Самюэля [25]. Отметим, что в этом случае низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ эквивалентен низкочастотному вкладу, который дает процедура работы [25]. Это означает, что приближения, полученные в [35, 36, 37], является корректными для конформно инвариантного квантованного скалярного поля, находящегося в вакуумном состоянии Бульвара, в статическом сферически симметричном асимптотически плоском пространстве-времени.

Приложение: Детали вычислений $S_n^k(\epsilon, u_0)$

Первым шагом при вычисления величин $S_n^k(\varepsilon, u_0)$ является вычисление различных сумм по l. Начнем с вычисления суммы в выражении (39):

$$S(u,n)=\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n-1)/2}}-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right\},\qquad n\geq 0. \tag{71}$$

Для вычисления воспользуемся методом Абеля-Плана [34, 38]

$$\sum_{l=0}^{\infty}F(l+1/2)=\int_q^{\infty}F(x)dx+\int_{q-i\infty}^{q}\frac{F(z)}{1+e^{i2\pi z}}dz-\int_q^{q+i\infty}\frac{F(z)}{1+e^{-i2\pi z}}dz, \tag{72}$$

где $-1/2<q<1/2$, $f(z)$ является голоморфной функцией для $Rez\geq q$ и $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|F(x+iy)\right|<\epsilon(x)e^{a|y|},\quad 0<a<2\pi, \tag{73}$$

а $\epsilon(x)$ является произвольной функцией с асимптотическим поведением

$$\epsilon(x)\to 0\quad \text{for}\quad x\to+\infty. \tag{74}$$

Используя эту формулу, мы можем вычислить сумму (71):

$$\begin{aligned}
S(u,n)=&\lim_{q\to+0}\left\{\int_q^{\infty}\left[\frac{x^{2n+1}}{(u^2+x^2)^{(2n-1)/2}}-x^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right]dx\right.\\
&+\int_{q-i\infty}^{q}\left[\frac{z^{2n+1}}{(u^2+z^2)^{(2n-1)/2}}-z^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right]\frac{dz}{(1+e^{i2\pi z})}\\
&\left.-\int_q^{q+i\infty}\left[\frac{z^{2n+1}}{(u^2+z^2)^{(2n-1)/2}}-z^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right]\frac{dz}{(1+e^{-i2\pi z})}\right\}\\
=&\frac{(2n-1)}{3}\frac{(2n)!!\,u^3}{(2n-1)!!}+2(-1)^m\lim_{\delta\to+0}\left[\int_0^{u+\delta}\frac{x^{2n+1}dx}{(u^2-x^2)^{(2n-1)/2}(1+e^{2\pi x})}\right.\\
&\left.-\left(\begin{array}{c}\text{члены этого интеграла,}\\ \text{расходящиеся в пределе } \delta\to+0\end{array}\right)\right]\\
=&\frac{(2n-1)\,u^3}{(2n-1)!!}\left\{\frac{(2n)!!}{3}-2\left(\frac{d}{udu}\right)^n\left[u^{2n}\int_0^1\frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi uy}}\right]\right\}
\end{aligned}\qquad (n\geq 0). \tag{75}$$

Сумма в выражении (40) может быть вычислена дифференцированием $S(u,n)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n+1)/2}}-1\right\}=\frac{-1}{(2n-1)}\left(\frac{d}{udu}\right)S(u,n)\\
&=-\frac{(2n)!!\,u}{(2n-1)!!}+\frac{2}{(2n-1)!!}\left(\frac{d}{udu}\right)\left\{u^3\left(\frac{d}{udu}\right)^n\left[u^{2n}\int_0^1\frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi uy}}\right]\right\},
\end{aligned}\qquad (n\geq 0). \tag{76}$$

Другие суммы в выражениях для $S_n^k(\varepsilon, u_0)$ (38) также могут быть вычислены дифференцированием $S(u,n)$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n+2k+3)/2}} = \frac{(-1)^k(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2k+1)!!}\left(\frac{d}{udu}\right)^{k+2} S(u,n)$$
$$= -\frac{(2n)!!}{(2n+2k+1)!!}\frac{(2k-1)!!}{u^{2k+1}}$$
$$-\frac{2(-1)^k}{(2n+2k+1)!!}\left(\frac{d}{udu}\right)^{k+2}\left\{u^3\left(\frac{d}{udu}\right)^n\left[u^{2n}\int_0^1 \frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi uy}}\right]\right\}, \begin{pmatrix} n\geq 0, \\ k\geq 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Интегралы по y во всех этих выражениях могут быть вычислены приближенно, поскольку подынтегральные выражения уменьшаются экспоненциально при $y > 1/(2\pi u)$. Параметр u во всех выражениях (38) удовлетворяет условию $u > u_0 \gg 1$. Поэтому основной вклад в этот интеграл дают малые величины y ($y \ll 1$), а, следовательно, квадратный корень в подынтегральном выражении может быть разложен в ряд по y. Затем верхний предел интегрирования может быть сдвинут к бесконечности:

$$\int_0^1 \frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi uy}} = \int_0^\infty \frac{ydy}{1+e^{2\pi uy}}\left[1-\frac{y^2}{2}-\frac{1!!}{4!!}y^4-\frac{3!!}{6!!}y^6+O(y^8)\right]$$
$$= \frac{1}{48u^2}-\frac{7}{3840u^4}-\frac{31}{129024u^6}+O\left(\frac{1}{u^{10}}\right). \quad (78)$$

Подставляя это выражение в (75)-(77) и интегрируя в (38) мы получим окончательные выражения (41)-(52).

Литература

1. Schrödinger E., *T* // h – e. – Vol. **p**, – P. roper vibrations of the expandung universe / E. Schrödinger, / // / – P. – Vol. **h**, – P. ysica. – 1939. – №6. – P. 899-912.

2. Гриб А. А. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях / А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, В.М. Мостепаненко. – М.:Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.

3. Frolov V.P. Black Holes Physics: Basic Concepts and New Developments / V.P. Frolov, I.D. Novikov. – Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/Boston/London, 1998. – 770 p.

4. Dowker J. S. Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space / J.S. Dowker, R. Critchley // Phys. Rev. D. – 1976. – №13. – P. 3224-3232.

5. Brown L. S. Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: General theory, Maxwell field / L.S. Brown, J.P. Cassidy // Phys. Rev. D. – 1977. – № 15. – P. 2810-2829.

6. Bunch T. S. Quantum Field Theory in De Sitter Space:Renormalization by Point-Splitting / T.S. Bunch, P.C. Davies // W. Proc. R. Soc. London. – 1978. – A360. – P. 117-134.

7. Bunch T.S. On renormalisation of the quantum stress tensor in curved space-time by dimensional regularisation / T.S. Bunch // J. Phys. A: Math. Gen. – 1979. №12. – P. 517-531.

8. Allen B. Massless minimally coupled scalar field in de Sitter space / B. Allen, A. Folacci // Phys. Rev. D. – 1987. №35. – P. 3771-3778.

9. Folacci A. Quantum field theory of p-forms in curved space-time / A. Folacci // J. Math. Phys. – 1991. – №32. – P. 2813-2827.

10. Folacci A. Two-point functions and stress-energy tensors of p-forms in de Sitter and anti-de Sitter spaces / A. Folacci // J. Math. Phys. – 1991. – №32. P. 2828-2838.

11. Kirsten K. Massless minimally coupled fields in de Sitter space: O(4)-symmetric states versus de Sitter–invariant vacuum / K. Kirsten, J. Garriga. // Phys. Rev. D. – 1993. – №48. P. 567-577.

12. Howard K.W. Quantum stress tensor in Schwarzschild space-time / K.W. Howard, P. Candelas // Phys. Rev. Lett. – 1984. – №53. – 403-406.

13. Candelas P. Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime / P. Candelas // Phys. Rev. D. – 1980. – №21. – P. 2185-2202.

14. Fawcett M.S. The Energy-Momentum Tensor near a Black Hole / M.S. Fawcett // Commun. Math. Phys. – 1983. – №89. P. 103-115.

15. Jensen B. Renormalized electromagnetic stress tensor in Schwarzschild spacetime / B. Jensen, A. Ottevill // Phys. Rev. D. – 1989. №39. – P. 1130-1138.

16. Jensen B. Anisotropy of the quantum thermal state in schwarzschild space-time / B. Jensen, J. G. Mc Laughlin, A. Ottevill // Phys. Rev. D. – 1992. №45. P. 3002-3005.

17. Anderson P.R. Semiclassical stability of the extreme Reissner-Nordström black hole / P.R. Anderson, W.A. Hiscock, D.J. Loranz // Phys. Rev. Lett. – 1995. – №74. – P. 4365-4368.

18. Bezerra de Mello E.R. Vacuum polarization of a massless spinor field in global monopole spacetime / E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, N.R. Khusnutdinov // Phys. Rev. D. – 1999. – №60. – P. 063506.

19. ДеВитт Б. С. Динамическая теория групп и полей / Б.С. ДеВитт // Пер. с англ.;Под ред. Г. А. Вилковыского. – М.:Наука, 1987. – 288 с.

20. Page D.N. Thermal stress tensors in static Einstein spaces / D.N. Page // Phys. Rev. D. – 1982. №25. – P. 1499-1509.

21. Brown M. R., Ottewill A. C. Effective actions and conformal transformations / M.R. Brown, A.C. Ottewill // Phys. Rev. D. – 1985. №31. P. 2514-2520.

22. Brown M.R. Conformally invariant quantum field theory in static Einstein space-times / M.R. Brown, A.C. Ottewill, D.N. Page // Phys. Rev. D. – 1986. №33. – P. 2840-2850.

23. Zannias T. Renormalized thermal stress tensor for arbitrary static space-times / T. Zannias // Phys. Rev. D. – 1984. – №30. – P.1161-1167.

24. Frolov V.P. Killing approximation for vacuum and thermal stress-energy tensor in static space-times / V.P. Frolov, A.I. Zelnikov // Phys. Rev. D. – 1987. – №35. – P. 3031-3044.

25. Anderson P.R. Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes / P.R. Anderson, W.A. Hiscock, D.A. Samuel // Phys. Rev. D. – 1995. – №51. – P. 4337-4358.

26. Groves P.B. Method to compute the stress-energy tensor for the massless spin 1/2 field in a general static spherically symmetric spacetime / P.B. Groves, P.R. Anderson, E.D. Carlson // Phys. Rev. D. – 2002. – №66. – P. 124017.

27. Christensen S.M. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method / S.M. Christensen // Phys. Rev. D. – 1976. – №14. – P. 2490-2501.

28. Christensen S.M. Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation / S.M. Christensen // Phys. Rev. D. – 1978. – №17. – P. 946-963.

29. Popov A. A. Analytical approximation for $\langle\varphi^2\rangle$ of a quantized scalar field in ultrastatic asymptotically flat spacetimes / A.A. Popov // Phys. Rev. D. – 2004. – №70. – P. 084047.

30. Candelas P. Vacuum $\langle\phi^2\rangle$ in Schwarzschild spacetime / P. Candelas, K. W. Howard // Phys. Rev. D. – 1984. – №29. – P. 1618-1625.

31. Howard K.W. Vacuum $\langle T_\mu{}^\nu\rangle$ in Schwarzschild spacetime / K.W. Howard // Phys. Rev. D. – 1984. – №30. – P. 2532-2547.

32. Anderson P.R. A method to compute $\langle\phi^2\rangle$ in asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetimes / P.R. Anderson // Phys. Rev. D. – 1990. №41. – P. 1152-1162.

33. Popov A.A. Vacuum polarization of a scalar field in wormhole spacetimes / A.A. Popov, S.V. Sushkov // Phys. Rev. D. – 2001. – №63. – P. 044017.

34. Popov A. A. Stress-energy of a quantized scalar field in static wormhole spacetimes / A.A. Popov // Phys. Rev. D. – 2001. – №64. – P. 104005.

35. Balbinot R. Vacuum polarization in the Schwarzschild space-time and dimensional reduction / R. Balbinot, A. Fabbri, V. Frolov, P. Nicolini, P. Sutton, A. Zelnikov // Phys. Rev. D. – 2001. – №63. – P. 084029.

36. Balbinot R. Vacuum polarization in two-dimensional static spacetimes and dimensional reduction / R. Balbinot, A. Fabbri, P. Nicolini, P. Sutton // Phys. Rev. D. – 2002. – №66. – P. 024014.

37. Frolov V. The dimensional reduction anomaly / V. Frolov, P. Sutton, A. Zelnikov // Phys. Rev. D. – 2000. – №61. – P. 024021.

38. Евграфов М. А. Аналитические функции / М.А. Евграфов // М.:Наука, 1968. – 342 с.

VACUUM POLARIZATION OF A QUANTIZED SCALAR FIELD IN STATIC SPHERICALLY SYMMETRIC ASYMPTOTICALLY FLAT SPACETIMES

A.A. Popov

Analytical approximations for $\langle\varphi^2\rangle$ of a quantized scalar field in static spherically symmetric spacetimes are obtained. The field is assumed to be both massive and massless, with an arbitrary coupling ξ to the scalar curvature, and in a zero temperature vacuum state. The expression for $\langle\varphi^2\rangle$ is divided into low- and high-frequency parts. The contributions of the

high-frequency modes to these quantities are calculated for an arbitrary quantum state. As an example, the low-frequency contribution to $\langle\varphi^2\rangle$ is calculated in asymptotically flat spacetimes in a quantum state corresponding to the Minkowski vacuum (Boulware quantum state). The limits of the applicability of these approximations are discussed.
Keywords: vacuum polarization, quantized scalar field, gravitation.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

С.В. Червон

Тензорно-мульти-скалярная гравитация и киральные космологические модели

Казань, Казанский федеральный университет, 28 октября — 3 ноября 2018

УДК 530.12 + 531.51

ТЕНЗОРНО-МУЛЬТИ-СКАЛЯРНАЯ ГРАВИТАЦИЯ И КИРАЛЬНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

С.В. Червон[1]

1 *chervon.sergey@gmail.com*; Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова

Тензорно-мульти-скалярная (ТМС) теория гравитации является естественным расширением скалярно-тензорной теории гравитации на случай нескольких гравитационных скалярных полей, которое продиктовано, в частности, наличием дилатона и модульных полей в теории суперструн. В контексте таких теорий скалярные поля не являются источниками гравитационного поля как в случае Киральной Космологической Модели (ККМ). Инфляционные решения, полученные в рамках ККМ, могут рассматриваться как решения в ТМС гравитации в отсутствии источников. Космологические решения в ТМС теории гравитации с инфлатоном, как источником гравитационного поля, подтверждают существование ускоренного расширения Вселенной на ранней стадии ее эволюции.
В докладе обсуждаются инфляционные решения в киральной космологической модели и их аналоги в рамках ТМС космологии.

Ключевые слова: тензорно-мульти-скалярная гравитация, киральные космологические модели.

TENSOR-MULTI-SCALAR GRAVITY AND CHIRAL COSMOLOGICAL MODELS

S.V. Chervon

The tensor-multi-scalar (TMS) theory of gravity is a natural extension of the scalar-tensor theory of gravity to the case of several gravitational scalar fields, which is dictated, in particular, by the presence of dilaton and modular fields in the theory of superstrands. In the context of such theories, scalar fields are not sources of the gravitational field as in the case of the Chiral Cosmological Model (CCM). Inflationary solutions obtained within the framework of the CCM can be considered as solutions in the TMS of gravity in the absence of sources. Cosmological solutions in TMS theory of gravity with inflaton as a source of gravitational field confirm the existence of accelerated expansion of the Universe at an early stage of its evolution.
The report discusses inflationary solutions in the chiral cosmological model and their analogues in the framework of TMS cosmology.

Keywords: tensor-multi-scalar gravity, chiral cosmological models.

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

УДК 5530.12+531.51

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УСРЕДНЕНИЯ В РЕШЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С УСЛОВИЯМИ РЕЗОНАНСА: ФИЗИЧЕСКИЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Т.Р. Абдульмянов[1]

1 *abdulmyanov.tagir@yandex.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Анализируются основные схемы усреднения гамильтоновых систем. На примере конкретной системы выполнено сравнение результатов применения трех схем усреднения для случая резонанса частот.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, схемы усреднения, резонансы.

Обоснование методов усреднения для многочастотных резонансных гамильтоновых систем

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}; \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{1}$$

где $H = H(x, y)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Гамильтониан $H(x, y)$ канонической системы (1) часто удается представить в виде ряда по возрастающим степеням малого параметра μ: $H(x, y) = H_0 + H_1 + \ldots + H_i + \ldots$, $H_i = o(\mu^i)$ – является малой величиной порядка μ^i. Предположим, что H_0 является функцией только двух первых пар канонический сопряженных элементов $H_0 = H_0(x_1, x_1; y_1, y_2)$. Применяя для решения системы (1) методы теории возмущений, сначала отдельно находят решение канонических уравнений для гамильтониана H_0. При этом H_0 выбирается таким, чтобы система с гамильтонианом H_0 содержала основные свойства исходной системы (1) с гамильтонианом H. После решения системы с гамильтонианом H_0 находят возмущения первого, второго и более высокого порядков.

Во многих случаях для нахождения решения системы (1), в частности, системы с гамильтонианом H_0, необходимо бывает применение различных методов усреднения. В результате применения схем усреднения получаются системы сравнения. В решениях систем сравнения сохраняются исследуемые свойства исходной системы и сглаживаются, исключаются те возмущения, происхождение и характер которых хорошо известны. Основной целью применения методов усреднения является такое преобразование исходных уравнений, в результате которого получается система сравнения, обладающая двумя, по меньшей мере, свойствами [4]. Во-первых, для полученной системы сравнения должен существовать алгоритм решения, позволяющий в явной форме получить решение. Во-вторых, необходимо, чтобы была возможность оценки и оценка расхождения решения системы сравнения и решения исходной системы (1). При достижении этой цели и в том случае, если расхождения малы, получим решение системы сравнения, которое будет обладать всеми основными свойствами исходной системы (1).

Сформулированная выше задача усреднения имеет эффективное решение только для стандартных, в определении Боголюбова [3,4], систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для систем уравнений, имеющих частотные резонансы, не существует общего метода решения сформулированной задачи усреднения. Несмотря на это, применение методов усреднения к резонансным системам также имеет общие элементы для всех резонансов вида $(p + q)/p$. Более конкретно, сравнение и оценка расхождения решений исходной системы и системы сравнения для резонансных систем возможна только в случае правильного определения топологической структуры траекторий, либрационных орбит [6]. Отсутствие общего метода объясняется тем, что топологии либрационных орбит для каждого резонанса индивидуальны и эти особенности не могут быть учтены в общих методах. Для обоснования этого утверждения рассмотрим следующий конкретный пример гамильтониана H_0, имеющего следующий вид:

$$H_0 = \frac{1}{2(x_1 + x_2)^2} + n_1 x_1 + \mu f(y_1),$$

где μ – малый параметр, $x_1 = G, x_2 = \Gamma = L–G, y_1 = \lambda–\lambda_1$ – канонические переменные [1], $f(y_1)$ – дифференцируемая, периодическая функция с периодом 2π. Канонические уравнения для гамильтониана H_0 имеют следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial y_1} = \mu f'(y_1); \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x_1} = \frac{1}{(x_1 + x_2)^3} - n_1, \qquad (2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial y_2} = 0; \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x_2} = \frac{1}{(x_1 + x_2)^3}.$$

Из двух последних уравнений системы (2) следует, что x_2 должна быть постоянной, а x_1 будет константой в двух случаях. Во-первых, при $\mu = 0$. Во-вторых, если y_1 будет постоянно находиться в точках экстремума функции $f(y_1)$ для произвольных значений μ. Если переменную y_1 представить в виде разности двух новых переменных $y^*, y_1^* : y_1 = y^*–y_1^*$, тогда необходимым условием движения в точках экстремума (при $\mu \neq 0$) будет синхронное изменение переменных y^* и y_1^* с одинаковой частотой n_1. Если эти условия будут выполнены, то x_1 будет константой. Значение $y_1 = y^*–y_1^*$ также будет равен константе, а значение этой константы будет соответствовать экстремуму функции $f(y_1)$. В результате, получим решение системы (2), соответствующее частному случаю синхронного вращения с одинаковой частотой в одном и том же направлении. В остальных случаях, ввиду того, что константа μ является малой величиной, переменная $y_1 = y^*–y_1^*$ будет совершать либрации вблизи одной из минимумов функции $f(y_1)$) с конечной амплитудой. Соответствующее решение было получено Гарфинкелем [5, 6] как решение задачи идеального резонанса. Гарфинкелем была также проведена полная классификация всех либрационных орбит, включая либрации с большими амплитудами [6].

Если же движение не будет синхронным с одинаковой частотой, то может быть движением с соизмеримыми частотами. В остальных случаях движение не будет резонансным. Предположим, что движение происходит в одном и том же направлении с частотами, имеющими соизмеримость $(p + q)/p$. Тогда вариации вблизи точек экстремумов будет совершать разность $y^*–[(p + q)/p]y_1^*$. Для того, чтобы получить ситуацию, аналогичную случаю резонанса 1/1, необходимо соответствующим образом преобразовать канонические уравнения (переход к системе координат, вращающейся с угловой скоростью $[(p + q)/p]n_1^*$). Преобразованный гамильтониан H_0 будет иметь следующий вид:

$$H_0 = \frac{1}{2(x_1 + x_2)^2} + \frac{p+q}{p} n_1 x_1 + \mu f(y^* - \frac{p+q}{p} y_1^* + l - y_1^*). \qquad (3)$$

В результате все, что касается резонанса 1/1, можно повторить и для резонанса общего вида $(p+q)/p$. Исключением является то, что переменная $y_1 = y^*–y_1^* \approx q/p \cdot y_1^* + c$ в общем случае ($q \neq 0$) будет функцией y_1^*. Следовательно, во всех случаях, за исключением резонанса 1/1, необходимо выполнить усреднение преобразованного гамильтониана H_0 и исключить короткопериодические вариации переменных. Учитывая то, что в точной соизмеримости $y^*–(p + q)/p \cdot y_1^* = c$ является константой, в гамильтониане (3) получим функцию $f(c + l–y_1^*)$ с двумя независимыми переменными $l = (p + q)/p \cdot y_1^*$ и y_1^*. Причем, переменные l и y_1^* являются независимыми в силу произвольности p и q. Тогда к системе с гамильтонианом (3) можно применить схему усреднения Моисеева [4]. В результате, получим следующий усредненный гамильтониан:

$$\overline{H_0} = \frac{1}{2(\overline{x_1} + x_2)^2} + \frac{p+q}{p} n_1 \overline{x_1} + \mu \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y^* - \frac{p+q}{p} y_1^* + l - y_1^*) dl. \qquad (4)$$

Можно также к гамильтониану (3) применить схему усреднения Фату [4]. Тогда получим следующий усредненный гамильтониан:

$$\overline{H_0} = \frac{1}{2(\overline{x_1} + x_2)^2} + \frac{p+q}{p} \omega_1 \overline{x_1} + \mu \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y^* - \frac{p+q}{p} y_1^* + l - y_1^*) dy_1^*. \qquad (5)$$

В случае явной зависимости y_1^* от времени можно также выполнить усреднение по времени. В связи с существованием этих трех схем усреднения возникает вопрос об их сравнении и выяснении физического смысла решений уравнений, соответствующих этим трем усредненным гамильтонианам. Известно [4], что в случае резонанса частот результаты усреднения по угловым переменным и по

времени будут отличаться. По этой причине необходимо также уточнить сформулированные выше цели усреднения.

Предположим, что сформулированные выше цели усреднения достигнуты для каждого из этих трех схем усреднения. Тогда следует ожидать, во-первых, что при помощи решения систем сравнения можно будет получить полную классификацию траекторий исходной динамической системы. Во-вторых, согласно теореме Боголюбова [3, 4], траектории сравнения будут находиться в ε-окрестности траекторий исходной динамической системы. Однако, такая оценка справедлива только для стандартных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [4]. Для динамических систем с частотными резонансами такую ε-окрестность можно получить только при значительных ограничениях исходной динамической системы [2, 4]. В связи с этим, необходимо уточнить формулировку задачи и цели усреднения для резонансных динамических систем. Выясним специфику ε-оценок для резонансных систем по сравнению с ε-оценками для стандартных систем.

Рассмотрим общий вид соизмеримости частот $n = [(p+q)/p]n_1$. В точной соизмеримости $y_1 = y^* - (p+q)/p \cdot y_1^* = c$ будет равен константе, и в этом случае получим:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial \overline{H_0}}{\partial \overline{x_1}} = \frac{1}{(\overline{x_1}+x_2)^3} - \frac{p+q}{p}n_1 = 0, \frac{d\overline{x_1}}{dt} = 0 = \frac{\partial H_0}{\partial y_1} = \mu \overline{f'}(y_1). \tag{6}$$

Из последнего равенства следует, что в точной соизмеримости значение константы с должно соответствовать экстремуму усредненной функции $f(y_1)$ для любой из трех схем усреднения. Однако эти схемы различные. Например, в случае усреднения по времени, получим усредненную функцию $f(y_1)$, равную константе. Её производная, в этом случае, будет равна нулю для любого значения аргумента y_1 как в точной соизмеримости, так и вне соизмеримости. Следовательно, усреднение по времени соответствует режиму отсутствия либраций, то есть вращению или режиму выхода из данного резонанса. Поэтому, в дальнейшем будем рассматривать только две другие схемы усреднения, то есть, схему Моисеева и Фату. В этих двух случаях получим нетривиальное решение, и либрации будут происходить вблизи устойчивых положений равновесия. Предположим, что известно решение исходной системы уравнений $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ и решение уравнений для усредненного гамильтониана H_0. То есть, такие решения, для которых выполняются следующие равенства:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x_1} = \frac{1}{(x_1+x_2)^3} - n_1, \frac{d\overline{y_1}}{dt} = -\frac{\partial \overline{H_0}}{\partial \overline{x_1}} = \frac{1}{(\overline{x_1}+x_2)^3} - \frac{p+q}{p}n_1.$$

Вычитая второе уравнение из первого, и интегрируя, получим:

$$y_1 - \overline{y_1} = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{(x_1+x_2)^3} - \frac{1}{(\overline{x_1}+x_2)^3} \right] dt + \frac{q}{p}n_1(t-t_0) = \varepsilon + \frac{q}{p}n_1(t-t_0). \tag{7}$$

Согласно равенству (7) разность решения исходного уравнения и усредненного имеет вид: $\varepsilon + q/pn_1(t-t_0)$. Появление слагаемого $q/pn_1(t-t_0)$ в этой разности связано с переходом к новой вращающейся системе координат. По этой причине, второе слагаемое не является погрешностью, несмотря на то, что входит в разность (7). Второе слагаемой является той величиной, которую необходимо прибавить к усредненному решению для того, чтобы сравнение было корректным и чтобы можно было получить истинную погрешность ε. При $q = 0$ получим класс либрационных орбит соизмеримости 1/1. В случае соизмеримости частот общего вида каждому резонансу вида $(p+q)/p$ будет соответствовать свой класс либрационных орбит. При этом орбиты, принадлежащие к различным классам, несравнимы между собой подобно тому, как не имеют общих элементов разные классы целых чисел, сравнимых по модулю m.

Рассмотрим теперь первую часть погрешности (7), то есть величину ε, которая определяется следующей формулой:

$$\varepsilon = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{(x_1+x_2)^3} - \frac{1}{(\overline{x_1}+\overline{x_2})^3} \right] dt.$$

Подынтегральное выражение в формуле погрешности ε содержит две слагаемые. Первое слагаемое содержит как долгопериодические, так и короткопериодические вариации, а второе – только долго-

периодические. Считая, что $t_0 = 0$, получим следующую оценку для погрешности ε:

$$\varepsilon \le \left[\frac{1}{(x_1 + x_2)^3} - \frac{1}{(\overline{x_1} + \overline{x_2})^3} \right] T,$$

где T – наибольший период долгопериодических либраций, а вместо переменных x_1, x_2 и вместо их усредненных значений необходимо подставить соответствующие им максимальные значения. Так как периоды T будут разными для разных резонансов, то и погрешности также будут отличаться. Следовательно, если применять теорему Боголюбова [3] к резонансным системам, то следует иметь ввиду следующую специфику. Во-первых, сравнение оценка погрешности будет корректным только для орбит, принадлежащих к одному и тому же резонансу. Во-вторых, погрешность ε будет стремиться к нулю только тогда, когда решения исходной системы и усредненной будут приближаться к порождающему решению. Именно по этой причине усреднение необходимо выполнить вдоль порождающей траектории по соответствующей угловой переменной или по времени на периоде порождающей траектории. То есть, выбор схемы усреднения для резонансных систем не является свободным, а обусловлен выбором порождающей траектории. Несмотря на то, что формула погрешности (7) и ее структура вполне обосновывают выбор порождающей траектории в качестве траектории усреднения, рассмотрим также пример, который делает приведенные рассуждения наглядными и конкретными.

Сравнение результатов применения трех схем усреднения в случаях резонансов малого порядка

В качестве конкретного примера рассмотрим систему уравнений (2), в которой функция $f(y_1)$ имеет следующий вид [1]:

$$f(y_1) = [1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(y_1)]^{-1/2} - r_0 \cos(y_1), \tag{8}$$

где r_0 – значение полярного радиуса в центре либраций (в полярной системе координат). Функция $f(y_1)$ является главной частью возмущений в круговой ограниченной задаче трех тел. Небесномеханические задачи могут послужить хорошим примером для решения сложной задачи обоснования методов усреднения для резонансных систем и применения этих методов в различных аналогичных приложениях. Координаты центра либраций определяются при помощи двух уравнений системы (6). Решая первое из этих уравнений, получим:

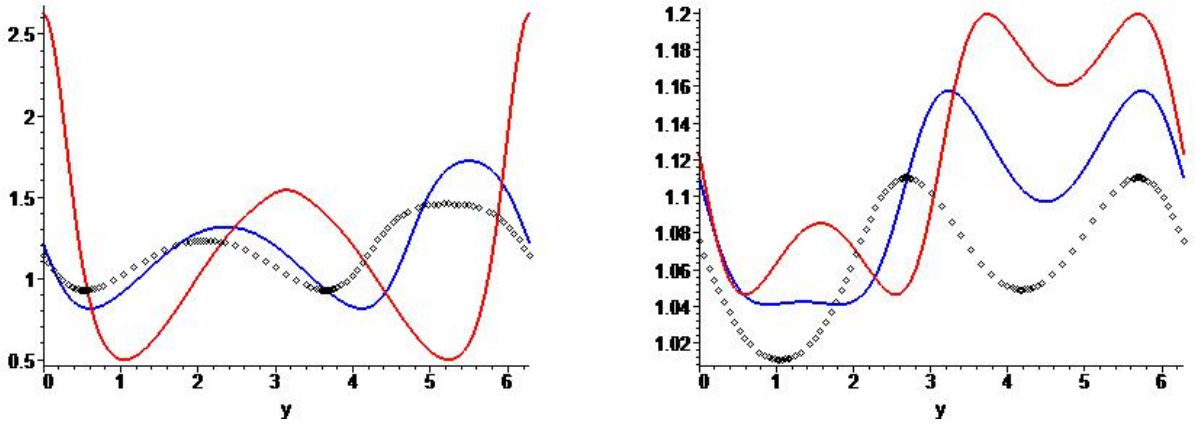
$$\overline{x_1} = \left[\frac{p+q}{p} n_1 \right]^{-1/3} - x_2. \tag{9}$$

Для того, чтобы определить полярный угол точки равновесия системы, необходимо вычислить производную усредненной функции $f(y_1)$). На рис. 1 представлены графики функции $f(y_1)$), усредненной по схеме Моисеева, для соизмеримостей 1/1, 4/3, 3/2 (рис.1а) и 2/1, 7/3, 3/1 (рис. 1б). Согласно рис. 1а усредненная функция $f(y_1)$, в случае соизмеримости 1/1, совпадает с исходной, а для соизмеримостей 4/3 и 3/2 – существенно отличаются от исходной функции $f(y_1)$.

Для всех этих трех резонансов усредненные функции имеют два минимума и два максимума. В случае люковых резонансов 2/1 и 7/3 усредненные функции имеют три минимума и три максимума, а для соизмеримости 3/1 – имеют два минимума и два максимума (рис. 1б). Либрации будут вблизи всех этих резонансов.

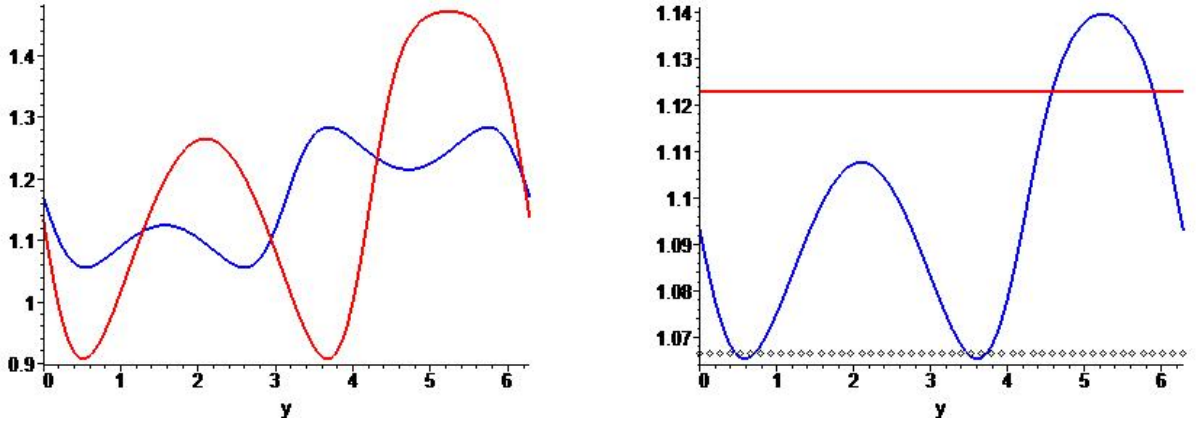
На рис. 2 представлены графики функции $f(y_1)$, усредненной по схеме Фату. Сравнение графиков на рис. 1 и рис. 2 показывает, что при значениях параметра $p = 1$, согласно схеме Фату, либрации будут отсутствовать (рис. 2б), а в остальных случаях либрации будут существовать. Результаты усреднения функции $f(y_1)$ по времени представлены на рис. 3. Согласно результатам усреднения по времени, для всех пяти рассматриваемых резонансов 4/3, 3/2 (рис. 1а), 2/1, 7/3 и 3/1 (рис. 1б) либрации будут отсутствовать. То есть, усредненный гамильтониан в этом случае характеризует не либрационное движение, а вращение и выход их данного резонанса.

Сравнение результатов усреднения функции $f(y_1)$ по трем схемам, по схеме Моисеева (рис. 1), по схеме Фату (рис. 2) и по времени (рис. 3), показывает, что усреднение по схеме Моисеева (вдоль порождающей орбиты) является усреднением по наименьшему периоду, при котором либрационный тип движения будет при всех соизмеримостях. Периоды усреднения по схеме Фату и по времени



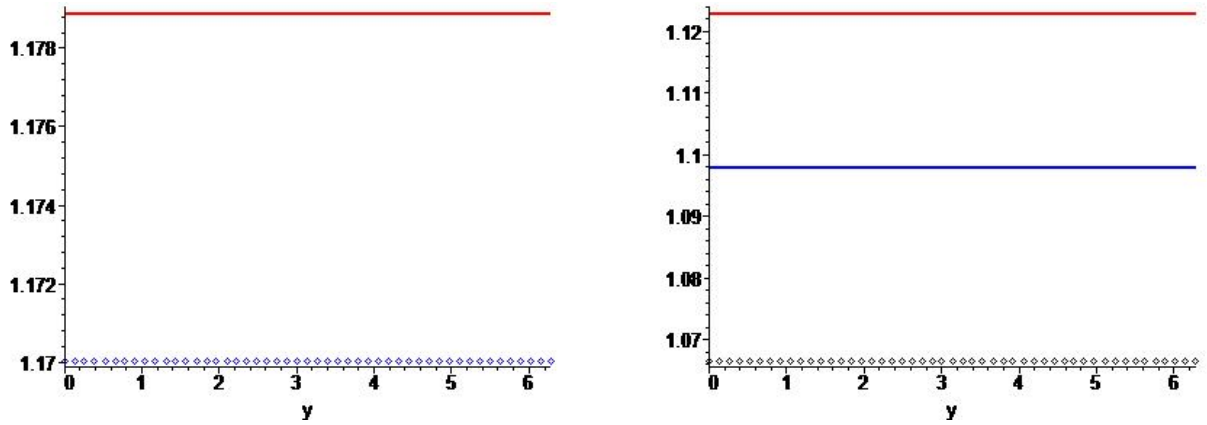
а) б)

Рис. 1. Графики функции $f(y_1)$, усредненной по схеме Моисеева, для соизмеримостей 1/1, 4/3, 3/2 (рис.1а) и 2/1, 7/3, 3/1 (рис. 1б).



а) б)

Рис. 2. Графики функции $f(y_1)$, усредненной по схеме Фату, для соизмеримостей 4/3, 3/2 (рис.2а) и 2/1, 7/3, 3/1 (рис. 2б).



а) б)

Рис. 3. Графики функции $f(y_1)$, усредненной по времени t для соизмеримостей 4/3, 3/2 (рис.3а) и 2/1, 7/3, 3/1 (рис. 3б).

больше периодов схемы Моисеева. В таких случаях либрационные траектории будут сглаживаться. Следовательно, расхождение результатов усреднения вдоль порождающей орбиты и по времени не

является недостатком схемы Моисеева, а является преимуществом этой схемы. Увеличение периода усреднения сглаживает и устраняет существующие особенности гамильтоновой системы и делает эту систему менее адекватной по сравнению системой, полученной в результате усреднения по наименьшему периоду. Адекватность гамильтоновой системы, усредненной по схеме Моисеева можно проверить при помощи теоремы Боголюбова [3]. Несмотря на то, что теорема Боголюбова и ее ε-оценка справедливы только для стандартных систем, с учетом приведенного выше анализа можно ее применить и к системам, усредненным по порождающей траектории. При этом необходимо учитывать приведенную в формуле (7) особенность ε-оценки для резонансных систем. То есть, в других обоснованиях, кроме теоремы Боголюбова, для схемы Моисеева необходимости не существует.

Физические, геометрические и статистические основы применения методов усреднения

Исследования динамических систем с условиями резонанса имеют важное научное и практическое значение по той причине, что проявления резонансов могут приводить к катастрофическим последствиям с большими разрушениями. По этой причине, оценка значимости резонансов в теории КАМ как меры множества частот, не представляется адекватной для таких явлений. Рассмотреть различные аспекты проблемы резонанса можно при помощи сравнения траекторий динамических систем с условиями резонанса вблизи резонанса и точном резонансе. Сравнения показывают, что аналитические решения для точного резонанса адекватно представляют ожидаемые резонансные изменения системы. Однако проблемы возникают тогда, когда динамическая система приближается к точному резонансу или же переходит из одного резонанса в другой, в соседний. Что происходит на границе перехода из одного резонанса к другому?

С точки зрения физики резонансы проявляются тогда, когда полная энергия динамической системы становится больше, чем некоторая критическая величина и система выходит из данного резонанса, может перейти в другой резонанс. С математической точки зрения, аналитические решения для различающихся резонансов, представляют собой топологически несравнимые классы траекторий динамических систем. При помощи методов усреднения можно определить топологическое строение этих классов траекторий. Однако известны разные схемы для построения усредненных динамических систем. Сравнение и обоснование применения этих схем усреднения дает важный инструмент для исследования резонансных переходов. Сравнительный анализ схем усреднения, выполненный в данной работе, подтверждает статистически ожидаемые выводы: усреднения на сравнительно больших периодах сглаживают индивидуальные топологические особенности траекторий динамических систем для отдельно взятых резонансов. По этой причине для усреднения необходимо применять такие схемы, которые имеют наименьший период по времени.

Литература

1. Абдульмянов Т.Р. Определение характеристик либрационных движений астероидов вблизи соизмеримостей 1/1, 4/3, 3/2, 2/1, 7/3, 5/2, 3/1 средних движений астероидов и Юпитера / Т.Р. Абдульмянов // Астрон. вестн. – 2001. – Т.35, № 5. – С. 449.

2. Арнольд В.И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы / В.И. Арнольд // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 161, № 1. - С. 9.

3. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физ.-мат. лит., 1958. – 458 с.

4. Гребеников Е.А. Методы усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребеников. – М.: Наука, 1986. – 256 с.

5. Garfinkel B. Theory of Libration / B. Garfinkel // Celest. mech. – 1976. – Vol.13, № 2. – P. 229-246.

6. Garfinkel B. Theory of Trojan Asteroids / B. Garfinkel // Astron. J. – 1977. – Vol. 82, № 5. – P. 368.

7. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / Г.Е.О. Джакалья. – М.: Наука, 1979. – 323 с.

8. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике / К.Л. Зигель. – М.: ИЛ, 1959. – 300 с.

9. Колмогоров А.Н. О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1954. – Т.98, № 4. – С. 527—530.

10. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах / Ю. Мозер. – М.: Мир, 1973. – 164 с.

11. Мюррей К. Динамика Солнечной системы / К. Мюррей, С. Дермотт. – Физматлит. М., 2009. – 588 с.

12. Себехей В. Теория орбит / В. Себехей. – М: Наука, 1982. – 657 с.

APPLICATION OF THE AVERAGING METHODS IN THE SOLUTION OF HAMILTON SYSTEMS WITH THE CONDITIONS OF RESONANCE: PHYSICAL, GEOMETRIC AND STATISTICAL BASIS OF THEIR APPLICATION

T.R. Abdulmyanov

The main averaging schemes for Hamiltonian systems are analyzed. The example of a particular system compares the results of applying three averaging schemes for the case of frequency resonance.

Keywords: Hamiltonian systems, averaging schemes, resonances.

УДК .

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ

Р.А. Абзалов[1], С.В. Сушков[2]

1 *robert-abzalov@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *sergey_sushkov@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В нашей работе были рассмотрены космологические возмущения в скалярно-тензорной теории гравитации с неминимальной кинетической связью. Лагранжиан модели содержит член вида $\zeta G^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$ и представляет собой частный случай общего Лагранжиана Хорндески, который приводит к уравнениям движения второго порядка. Построен полный набор уравнений для скалярных, векторных и тензорных возмущений. Детально исследованы векторные и тензорные моды возмущений. Показано, что векторные моды затухают, а поведение тензорных мод под хаббловским горизонтом кардинально отличается от соответствующего поведения во фридмановской космологии.

Ключевые слова: космологические возмущения, Лагранжиана Хорндески.

Литература

1. Saridakis E.N. Quintessence and phantom cosmology with nonminimal derivative coupling / E.N. Saridakis, S.V. Sushkov // Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 81, №. 8. – P. 083510.1–8.

2. Sushkov S.V. Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling / S.V. Sushkov // Phys. Rev. – 2012. – № 85. – P. 123520.

3. Skugoreva M.A. Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a power-law potential / M. A. Skugoreva, S. V. Sushkov, A. V. Toporensky // Physical Review D. — 2013. — Vol. 88. — P. 083539.

COSMOLOGICAL PERTURBATIONS IN GRAVITATIONAL THEORY WITH NON-MINIMAL KINETIC COUPLING

R.A. Abzalov, S.V. Sushkov

In our work, cosmological perturbations in the scalar-tensor theory of gravity with non-minimal kinetic coupling were considered. The Lagrangian of the model contains a term of the form $\zeta G^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$ and is a special case of the General Lagrangian of Horneski, which leads to second order equations of motion. A complete set of equations for scalar, vector and tensor perturbations is constructed. Vector and tensor perturbation modes are studied in detail. It is shown that vector modes fade, and the behavior of tensor modes under the Hubble horizon is radically different from the corresponding behavior in Friedman cosmology.

Keywords: cosmological perturbations, Hordeski Lagrangian.

UDC 514.763

ON INTEGRATION OF THE EISENHART EQUATION AND H-SPACES OF THE TYPE {32}.

A.V. Aminova[1], D.R. Khakimov[2]

1 *asya.aminova@kpfu.ru*; Kazan Federal University
2 *dzhamoliddink@mail.ru*; Kazan Federal University

In this paper by using the method of skew-normal frame (Aminova) the Eisenhart equations are integrated and five-dimensional h-spaces of the type {32} *are determined.*

Keywords: Eisenhart equation, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space of the type {32}.

УДК 530.12: 531.51

ВНУТРЕННЕЕ РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА В ПЕНЛЕВЕ-ПОДОБНЫХ КООРДИНАТАХ

А.М. Баранов[1]

1 *alex_m_bar@mail.ru*; Красноярский государственный педагогический университет им. В.П.Астафьева, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. Решетнева

Для известного внутреннего решения Шварцшильда, записанного в координатах кривизн, найдено аналитическое преобразование к Пенлеве-подобным координатам, аналогичным координатам Пенлеве для внешнего решения Шварцшильда. Метрика для внутреннего решения Шварцшильда переписана в новых координатах и показано, что гравитационнное поле является конформно-плоским, как и должно быть для модели гравитирующего статического шара с однородным распределением плотности массы вещества.

Ключевые слова: внешнее и внутреннее решения Шварцшильда, координаты Пенлеве, Пенлеве-подобные координаты.

В результате дискуссии по вопросам теории относительности, в частности, о координатной записи внешнего решения для точечной массы в рамках общей теории относительности, Поль Пенлеве предложил переписать это решение в новых координатах [1]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}\, dtdr - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{1}$$

полученного ранее Карлом Шварцшильдом в координатах кривизн [2]. Здесь M – масса тела, r, θ, φ – сферические координаты; $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2)$, скорость света и ньютоновская постоянная выбраны равными единице.

Пространственная метрика $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ $(i, j = 1,2,3)$, которая является 3-метрикой поверхности $t = const$, в этом случае отвечает плоскому 3-сечению.

Оказывается, что 4-метрика (1) может быть приведена к компактному виду

$$ds^2 = dt^2 + \left(\sqrt{\frac{2M}{r}}\, dt - dr\right)^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{2}$$

В связи с этим возникает вопрос: а можно ли нечто подобное проделать и с внутреннем решением для однородного гравитирующего шара, заполненого нейтральной паскалевой несжимаемой жидкостью и полученного Шварцшильдом в том же 1916 году [3] и в тех же координатах кривизн?

Чтобы ответить на этот вопрос, запишем 4-метрику для внутреннего решения Шварцшильда в координатах кривизн в виде (см, например, [4])

$$ds^2 = G_{Sch}^2(r)\, dt^2 - \frac{dr^2}{\varepsilon_{Sch}^2(r)} - r^2 d\Omega^2, \tag{3}$$

где $G_{Sch}(r) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(R)} - \sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}\right)$, R – радиус шара, $\varepsilon_{Sch}(r) = 1 - \eta r^2 = 1 - \Phi(r)$, $\Phi(r)$ – аналог ньютоновского потенциал внутри шара.

Произведем переход к новой временной координате по правилу

$$t \to t + f(r); \quad t \to dt + f'(r)dr, \tag{4}$$

где $f'(r) = df/dr$.

После подстановки (4) в метрику (3) получаем (после приведения подобных)

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)dt^2 - 2G^2_{Sch}(r)f'(r)dtdr - \left(G^2_{Sch}(r)\,f'^2(r) - \frac{1}{\varepsilon^2_{Sch}(r)}\right)dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{5}$$

Если потребовать обращения в ноль коэффициента при dr^2, то приходим к известным координатам Бонди с

$$f'(r) = \frac{1}{G_{Sch}(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{Sch}(r)}}, \tag{6}$$

где координата времени имеет смысл запаздывающего времени, а метрика (3) записывается в виде

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 - 2\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - r^2 d\Omega^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)\,dtdr - r^2 d\Omega^2. \tag{7}$$

Внутреннее решение Шварцшильда в такой записи было получено в 1972 г. (см. [5, 6]).

Если теперь потребовать равенства коэффициента при dr^2 единице, что эквивалентно требованию, чтобы 3-сечение $t = const$ было плоским, то для производной $f'(r)$ запишется выражение в виде

$$f'(r) = \frac{1}{G_{Sch}(r)}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}} \tag{8}$$

или

$$df(r) = \frac{2\eta r\,dr}{\left(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2}\right)\sqrt{1-\eta r^2}} = 2\,d\left(\ln\left(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2}\right)\right). \tag{9}$$

Тогда

$$f(r) = 2\ln\left(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2}\right) \equiv \ln\left(\left(3\sqrt{1-\eta R^2} - \sqrt{1-\eta r^2}\right)^2\right) \tag{10}$$

или

$$f(r) = \ln(4\,G^2_{Sch}(r)) = \ln(4\,g^{Sch}_{00}), \tag{11}$$

то есть преобразование (4) для данного случая справедливо в записи

$$t \to t + \ln(4\,G^2_{Sch}(r)).$$

В свою очередь метрика (5) принимает вид

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 - 2G_{Sch}(r)\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{12}$$

Если в этом выражении добавить и отнять слагаемое $G^2_{Sch}(r)\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))/(\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2$, то метрика (12) перепишется как

$$ds^2 = G^2_{Sch}(r)\,dt^2 + \frac{G^2_{Sch}(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2 - \\ - \frac{G^2_{Sch}(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}\,(1-\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2 - 2G_{Sch}(r)\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{13}$$

Из этой записи метрики видно, что ее можно преобразовать следующим образом, выделяя полный квадрат,

$$-\frac{G_{Sch}^2(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}(1-\varepsilon_{Sch}(r))\,dt^2-2G_{Sch}(r)\sqrt{\frac{1-\varepsilon_{Sch}(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}}\,dtdr-dr^2=$$

$$=-\left(\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}dt-dr\right)^2, \quad (14)$$

а оставшиеся слагаемые при dt^2 можно свести к

$$\left(G_{Sch}^2(r)+\frac{G_{Sch}^2(r)}{(\varepsilon_{Sch}(r))}(1-\varepsilon_{Sch}(r))\right)dt^2=\left(\frac{G_{Sch}^2(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}\right)dt^2. \quad (15)$$

Объединяя результаты (14) и (15), получим метрику (13) в виде, квазиподобном метрике Пенлеве для внешнего Шварцшильда,

$$ds^2=\left(\frac{G_{Sch}^2(r)}{\varepsilon_{Sch}(r)}\right)dt^2-\left(\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}\,dt-dr\right)^2-r^2d\Omega^2. \quad (16)$$

Для такой записи метрики Шварцшильда для внутреннего решения для гравитирующего шара с однородным распределением вещества легко вводятся базисные дифференциальные 1-формы Картана

$$\Theta^{(0)}=\left(\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\right)dt;\ \Theta^{(1)}=\frac{G_{Sch}(r)}{\sqrt{\varepsilon_{Sch}(r)}}\sqrt{1-\varepsilon_{Sch}(r)}\,dt-dr;\ \Theta^{(2)}=rd\theta;\ \Theta^{(3)}=r\sin\theta d\varphi,$$

которые позволяют переписать (16) как

$$ds^2=g_{(\alpha)(\beta)}\Theta^{(\alpha)}\Theta^{(\beta)}=\eta_{\alpha\beta}\Theta^{(\alpha)}\Theta^{(\beta)}, \quad (17)$$

где тетрадная метрика $g_{(\alpha)(\beta)}$ совпадает с метрикой Минковского $\eta_{\alpha\beta}=diag(1,-1,-1,-1)$.

Из первых уравнения структуры Картана

$$\mathbf{d}\Theta^{(\alpha)}=-\omega_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\beta)}\wedge\Theta^{(\beta)},$$

где **d** – внешний дифференциал, а операция $\wedge$ обозначает внешнее произведение, находим отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности $\omega_{(\alpha)(\beta)}$.

В силу постоянства тетрадной метрики ($dg_{(\alpha)(\beta)}=0$) 1-формы связности обладают свойством антисимметричности $\omega_{(\alpha)(\beta)}=-\omega_{(\beta)(\alpha)}$.

Тетрадные компоненты тензора кривизны $R_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\delta)}$ находятся из вторых уравнения структуры Картана

$$\Omega_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\beta)}=\frac{1}{2}R_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\delta)}\Theta^{(\gamma)}\wedge\Theta^{(\delta)}=d\omega_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\beta)}+\omega_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\sigma)}\wedge\omega_{\cdot}^{(\sigma)}{}_{(\beta)},$$

где $\Omega_{(\alpha)(\beta)}=-\Omega_{(\beta)(\alpha)}$ — 2-форма кривизны.

Тензор Риччи по известным компонентам тензора кривизны находится как $R_{(\beta)(\gamma)}=R_{\cdot}^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\alpha)}$, а скалярная кривизна есть свертка тензора Риччи $R_{\cdot}^{(\beta)}{}_{(\beta)}=R$.

Зная тензор кривизны, тензор Риччи и скалярную кривизну, нетрудно построить тензор конформной кривизны Вейля

$$W_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}=R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}+R_{(\gamma)[(\alpha)\eta_{\beta]\delta}}-R_{(\delta)[(\alpha)\eta_{\beta]\gamma}}-\frac{1}{3}R\eta_{\gamma[\alpha\eta_{\beta]\alpha}}.$$

Как известно смена координат не приводит к изменению тензора кривизны и тензора Вейля. Поэтому, вычисляя тензор Вейля для метрики (16) в Пенлеве-подобных координатах, получаем отсутствие ненулевых компонент тензора Вейля, как это и реализуется для внутреннего решения Шварцшильда, гравитационное поле которого по алгебраической классификации Петрова [7] принадлежит к конформно-плоскому типу. Тем самым мы лишний раз убедились, алгебраическая классификация Петрова гравитационных полей не зависит от выбора координат, удобный выбор которых связан с решением гравитационных уравнений.

Таким образом, получение новой записи известного внутреннего решения Шварцшильда в новых координатах возможно позволит по иному взглянуть на внутренние решения уравнений Эйнштейна.

Литература

1. Painlevé P. La mécanique classique et la théorie de la relativité / P. Painlevé // C.R.Acad. Sci., Paris. – 1921. – Vol. 173.– P. 677-680.

2. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a point mass following Einstein's theory) / K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. – 1916. – P. 189–196.

3. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a ball of incompressible fluid following Einstein's theory) / K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. – 1916. – P. 424–434.

4. Синг Дж. Общая теория относительности / Дж. Синг. – М.: ИЛ, 1963. – С.247-248.

5. Баранов А.М. Внутреннее сферически-симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна-Максвелла / А.М. Баранов // Изв.вузов. Физика. – 1973. – №6729-73. – С.9.

6. Baranov A.M. An interior spherical static solution of Einstein-Maxwell equations [Электронный ресурс] /A.M.Baranov. – Режим доступа: https://arxiv.org/gr-qc/1712.01268.

7. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. -– М.: Наука, 1966. – 495 с.

THE INTERIOR SOLUTION OF SCHWARZSHILD IN THE PAINLEVÉ-LIKE COORDINATES

A.M. Baranov

The analytical transformation from the curvatures co-ordinates to the Painlevé-like co-ordinates for the known interior solution of Schwarzschild is discovered. The metric for interior solution of Schwarzschild is rewritten in new co-ordinates and is shown, that gravitational field is conformally flat, as well as should be for model of a gravitating static ball with the homogeneous distribution of mass density of substance.

Keywords: the extention and interior solutions of Schwarzschild, the Painlevé coordinates, the Painlevé-like coordinates.

UDC 530.12:531.51

ON GENERALIZED MELVIN SOLUTIONS FOR LIE ALGEBRAS OF RANK 3

S.V. Bolokhov[1], V.D. Ivashchuk[2]

1 *boloh@rambler.ru*; Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
2 *ivashchuk@mail.ru*; Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS

Generalized Melvin solutions for rank-3 Lie algebras A_3, B_3 and C_3 are considered. Any solution contains metric, three Abelian 2-forms and three scalar fields. It is governed by three moduli functions $H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ ($z = \rho^2$ and ρ is a radial variable), obeying three differential equations with certain boundary conditions imposed. These functions are polynomials with powers $(n_1, n_2, n_3) = (3,4,3), (6,10,6), (5,8,9)$ for Lie algebras A_3, B_3, C_3, respectively. The solutions depend upon integration constants $q_1, q_2, q_3 \neq 0$. The power-law asymptotic relations for polynomials at large z are governed by integer-valued 3×3 matrix ν, which coincides with twice the inverse Cartan matrix $2A^{-1}$ for Lie algebras B_3 and C_3, while in the A_3 case $\nu = A^{-1}(I + P)$, where I is the identity matrix and P is a permutation matrix, corresponding to a generator of the Z_2-group of symmetry of the Dynkin diagram. The duality identities for polynomials and asymptotic relations for solutions at large distances are obtained. 2-form flux integrals over a 2-dimensional disc of radius R and corresponding Wilson loop factors over a circle of radius R are presented.

Keywords: generalized Melvin solutions, Lie algebras of rank 3.

УДК 530.12+531.51

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИИ С ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВ

К.А. Бронников[1], С.В. Болохов[2]

1 *kb20@yandex.ru*; Российский университет дружбы народов
2 *boloh@rambler.ru*; Российский университет дружбы народов

В рамках многомерной теории типа Калуцы—Клейна с нелинейными членами по кривизне и двумя сферическими дополнительными фактор-пространствами изучены свойства эффективного действия для масштабных факторов дополнительных измерений. С учетом качественных оценок казимировского вклада для безмассовых скалярных мод на физически приемлемых масштабах длин продемонстрировано существование таких наборов исходных параметров, которые обеспечивают минимум эффективного потенциала в соответствии с реалистичным значением эффективной 4-мерной космологической постоянной и тем самым приводят к стабилизации дополнительных измерений.

Ключевые слова: нелинейная многомерная гравитация, космология, дополнительные измерения.

Теории с дополнительными измерениями в последние десятилетия получили большое распространение в связи с развитием теории суперструн, моделей миров на бране и теорий объединения взаимодействий (модели Калуцы—Клейна). Физически приемлемая многомерная теории должна содержать механизм, объясняющий ненаблюдаемость дополнительных измерений на доступных в эксперименте масштабах длин и энергий, что в случае компактности дополнительных пространств влечет проблему устойчивости их малых размеров в течение достаточно длительного времени существования Вселенной. При этом определенный вклад в картину устойчивости может вносить вакуумный эффект Казимира, обусловленный компактной топологией фактор-пространств.

В данной работе исследуется обобщенная модель нелинейной многомерной гравитации в $D > 4$ измерениях на фоне многообразия $M_4 \times \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ ($\mathbb{S}^n$ – n-мерная сфера) с действием

$$S = \frac{1}{2} m_D^{D-2} \int \sqrt{g_D}\, d^D x\, [F(R) + c_1 R^{AB} R_{AB} + c_2 R^{ABCD} R_{ABCD} + L_m],$$

где $m_D \equiv 1/r_0$ – D-мерная планковская масса, (r_0 – фундаментальная длина), g_D – детерминант D-мерной метрики, $F(R)$ – функция многомерной скалярной кривизны, c_1 и c_2 суть феноменологические коэффициенты, L_m – возможный вклад материальных полей и энергии Казимира.

Метрика в пренебрежении неабелевыми калибровочными модами имеет вид

$$ds_D^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \sum_{i=1}^{2} \mathrm{e}^{2\beta_i(x)} g^{(i)}, \tag{1}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика 4-мерного пространства, $g^{(i)}$ – метрики дополнительных фактор-пространств единичных радиусов, а β_i – мультиплет скалярных полей, определяющих размер дополнительных измерений.

Исследование включает в себя следующие этапы: 1) Расщепление многомерной кривизны и квадратичных инвариантов (для реалистичного сценария можно ограничиться приближением медленных изменений, пренебрегая высшими степенями по производным); 2) интегрирование по объему дополнительных измерений с получением эффективного 4-мерного действия; 3) переход от исходной йордановской конформной картины к эйнштейновской, более удобной для исследования динамики скалярных полей; 4) оценка казимировского вклада; 5) переход к безразмерному представлению эффективного потенциала $W(\beta_i(x))$ и поиск его локальных минимумов в полуклассической области $r_0 \ll r_0 \mathrm{e}^{\beta_i} \lesssim l_{\mathrm{TeV}}$ с учетом условия положительности кинетических членов скалярных полей и наблюдательного ограничения $\Lambda_{\mathrm{eff}}/m_{\mathrm{pl}}^2 \sim 10^{-120}$.

Итогом работы является демонстрация существования такого множества начальных параметров теории (в случае $m = n \neq 3$), которые обеспечивают минимум эффективного потенциала на рассматриваемом полуклассическом масштабе длин. Реалистичное значение эффективной 4D-космологической постоянной и компенсация относительно большого казимировского вклада достигается тонкой подстройкой. Размер дополнительных измерений зависит от того, какая конформная

калибровка теории (эйнштейновская или йордановская) принимается за наблюдаемую, что в йордановском случае приводят к ограничениям на полную размерность многообразия [1].

Литература

1. Bolokhov S. V. On Cosmology in Nonlinear Multidimensional Gravity with Multiple Factor Spaces / S. V. Bolokhov, K. A. Bronikov // Gravitation and Cosmology – 2018. – Vol.24, №2. – P. 154–160.

ON STABILIZATION OF EXTRA DIMENSIONS IN MODELS OF MULTIDIMENSIONAL GRAVITY WITH PRODUCT OF FACTOR SPACES

K.A. Bronnikov, S.V. Bolokhov

Within the scope of multidimensional Kaluza–Klein gravity with non-linear curvature terms and two spherical extra spaces, we study the properties of an effective action for the scale factors of extra dimensions. Taking into account qualitative estimates of the Casimir energy contribution for massless scalar modes at the physically acceptable length scales, we demonstrate the existence of such sets of initial parameters that provide a minimum of the effective potential in accordance with the realistic value of the effective 4D cosmological constant and thus lead to the stabilization of extra dimensions.

Keywords: nonlinear multidimensional gravity, cosmology, extra dimensions.

УДК 52:531.51; 52:530.12

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ А.З. ПЕТРОВА И СТРУКТУРА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Ю.С. Владимиров[1]

1 *yusvlad@rambler.ru*; Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова; Институт гравитации и космологии РУДН

В статье описана алгебраическая классификация А.З. Петрова и структура элементарных частиц.

Ключевые слова: алгебраическая классификация А.З. Петрова, структура элементарных частиц.

В нашей группе развивается программа бинарной предгеометрии (геометрофизики) [1, 2, 3, 4], нацеленная, во-первых, на вывод классических пространственно-временных представлений из более элементарных понятий и закономерностей, присущих физике микромира, и, во-вторых, на построение объединенной теории известных видов физических взаимодействий, включая гравитацию. В предлагаемом докладе излагаются принципы математического аппарата бинарной предгеометрии и его применение для описания структуры элементарных частиц, участвующих в сильных, электрослабых и чисто элемектромагнитных взаимодействий.

Для описания элементарных частиц используется математический аппарат бинарных систем комплексных отношений (БСКО) ранга (4,4). Эта теория строится на двух множествах элементов между которыми определены комплексные парные отношения, удовлетворяющие некому алгебраическому закону (см. [1-4]). Элементы этой системы характеризуются комплексными финслеровыми 3-компонентными спиорами.

В бинарной предгеометрии на базе БСКО ранга (4,4) массивные частицы строятся из трех элементов (3-компонентных финслеровых спиноров), удовлетворяющих специальным условиям склейки в единую частицу. Такие частицы предлагается интерпретировать барионами, а составляющие их элементы – кварками, что соответствует стандартным представлениям барионов из трех кварков.

Таким образом, в теории БСКО ранга (4,4) массивные частицы в каждом из двух множеств характеризуются 3×3-матрицами из комплексных параметров трех финслеровых спиноров.

Определено понятие собственной системы отношений частицы и записан вид парных отношений в ней.

Для выяснения структуры элементарных частиц, участвующих в различных видах физических взаимодействий, предлагается использовать алгебраическую классификацию комплексных 3×3-матриц, в свое время примененную А.З. Петровым для алгебраической классификации пространств

Эйнштейна. Позднее Р. Пенроузом была предложена графическая иллюстрация классификации Петрова в виде диаграммы, где по горизонтальной оси отмечалось число независимых векторов (столбцов), а по вертикальной оси – число различных собственных значений характеристического уравнения.

Найдены собственные значения характеристического уравнения состояний частиц в собственной системе отношений. Предложена физическая интерпретация всех типов и подтипов матриц, характеризующих состояния частиц.

Согласно предложенной интерпретации, первый алгебраический тип соответствует состояниям (структуре) барионов, причем подтип I соответствует структуре бариона, участвующего в сильных взаимодействиях, подтип D соответствует структуре бариона, участвующего в электрослабых взаимодействиях, а подтип O – структуре бариона, участвующего в электромагнитных взаимодействиях.

Второй алгебраический тип интерпретируется соответствующим состояниям (структуре) лептонов, причем подтип II соответствует структуре массивного лептона, участвующего в электрослабых взаимодействиях, а подтип N – структуре лептона, участвующего в электромагнитных взаимодействиях.

Наконец, третий алгебраический тип соответствует состояниям нейтрино.

Литература

1. Владимиров Ю.С. Реляционные основания теории пространства-времени и взаимодействий // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2015. - № 4 (13).– С.57-74.

2. Владимиров Ю.С. Реляционная концепция Лейбница–Маха / Ю.С. Владимиров. – М.: ЛЕНАНД, – 2017. – 232 с.

3. Владимиров Ю.С. Метафизика и фундаментальная физика. Книга 3. Реляционные основания искомой парадигмы. / Ю.С. Владимиров. – М.: ЛЕНАНД, – 2018. – 256 с.

4. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. – М.: Изд-во Московского университета, – 1998. – 448 с.

ALGEBRAIC CLASSIFICATION OF PETROV AND THE STRUCTURE OF ELEMENTARY PARTICLES

Yu.S. Vladimirov

The paper describes the algebraic classification of z and the structure of Petrov elementary particle.

Keywords: A. Z. Petrov's algebraic classification, structure elementary particle.

УДК 531.36, 534.1

К ВОПРОСУ О СИНХРОНИЗАЦИИ МАЯТНИКОВ

С.О. Гладков[1], С.Б. Богданова[2]

1 *sglad51@mail.ru*; Московский Авиационный Институт (МАИ)
2 *sonjaf@list.ru*; Московский Авиационный Институт (МАИ)

На примере двух компланарных металлических маятников, точки подвеса которых находятся на одном горизонтальном уровне при фиксированном расстоянии b друг от друга, показана принципиальная возможность их синхронизации благодаря учету двух факторов: электромагнитного взаимодействия между ними и учету ЭМ излучения, приводящего к нелинейному затуханию.

Ключевые слова: электромагнитное взаимодействие, электромагнитное излучение, синхронизация.

В настоящем сообщении речь пойдет о решении проблемы синхронизации физических маятников, подвешенных в одной вертикальной плоскости на некотором расстоянии друг от друга. Этот вопрос совсем не нов, и восходит еще ко временам Гюйгенса, который впервые обратил внимание на эффект синхронизации металлических маятников, висящих на некотором отдалении друг от друга.

Значительно позднее эффект синхронизации изучался в многочисленных работах [1] – [4], и ему посвящено большое количество монографий [5] – [7]. Заметим, что ни в одном из упомянутых выше источников не было оценено время синхронизации t_{synchr} , и не было введено физически обоснованное взаимодействие между маятниками, приводящее именно к эффекту синхронизации. Тем более, никогда не принимался в расчет эффект электромагнитного излучения, который, как мы сейчас строго докажем, играет определяющую роль в этом интересном явлении, и о чем во всех предыдущих работах по этой проблеме ранее не говорилось. Во множестве исследований, касающихся явления синхронизации, роль взаимодействия довольно часто отводится упругому пружинному механизму, соединяющему оба маятника, с потенциальной энергией равной $\frac{kx^2}{2}$, где k – жесткость пружины, а x – смещение. В общем случае, если длины подвесов разные и равны l_1 и l_2 , то для расстояния между центрами маятников имеем

$$R = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + b^2 + 2bl_1 \sin\varphi_1 - 2bl_2 \sin\varphi_2 - 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{1}$$

В нашем случае, когда оба маятника тождественны, то есть $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$ из соотношения (1) тривиально записывается условие синхронизации колебаний, а именно должно выполняться равенство $R = b$. Это автоматически приводит к условиям

$$\varphi_1 = \varphi_2,\ \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2. \tag{2}$$

Запишем полную энергию системы

$$E = T + U = U_0 + \frac{ml_c^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ml_c^2\dot{\varphi}_2^2}{2} - mgl_c\left(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + U(R) = const, \tag{3}$$

где $U_0 = mgH$, l_c – расстояние от точки подвеса маятников до их центра масс, а H – высота подвеса маятников над Землей,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \int_0^t (\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t))\, dt, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ – скорости обоих шаров. Чтобы вычислить ЭМ энергию взаимодействия между маятниками воспользуемся уравнениями Максвелла. В квазистатическом случае из классической электродинамики следует, что векторный потенциал $\mathbf{A}$ поля магнитной индукции $\mathbf{B}$ должен удовлетворять уравнению

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{5}$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока, появляющаяся при колебании маятника, а c – скорость света. Как известно [8], взаимодействие, определяемое движением электронов, может быть представлено в виде $U = -\frac{1}{c}\int_V \mathbf{j}\mathbf{A}dV$. В результате найдем для их энергии взаимодействия

$$U = \frac{1}{c^2}\iint_{V_1\ V_2} \frac{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2}{\tilde{R}}\, dV_1 dV_2. \tag{6}$$

Вектор $\tilde{\mathbf{R}}$ определяется как $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, где радиус – вектора $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ представляют собой текущие направления в каждом из шаров, отсчитываемых из их центров, по которым ведется интегрирование в (6), V_1 и V_2 объемы этих шаров. После интегрирования получаем

$$U_{EM} = -\frac{\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)\rho_e^2 V^2 l_c^2 \cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{c^2 b}\xi, \tag{7}$$

где xi – численный безразмерный коэффициент порядка единицы, не слишком важный для нас.

Чтобы вычислить теперь мощность ЭМ излучения маятников, приводящей в конечном итоге к их синхронизации, воспользуемся потенциалами Лиенара – Вихерта. В самом деле, согласно [11], любой движущийся заряд создает на некотором расстоянии r от себя скалярный потенциал ψ и векторный $\mathbf{A}$, которые для нашего случая можно представить как

$$\psi(\mathbf{r},t)=\frac{enV}{R\left[1-\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right]}\approx\frac{enV}{R}\left[1+\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right],$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{enV\mathbf{v}}{R\left[1-\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right]}\approx\frac{enV\mathbf{v}}{R}\left[1+\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right], \tag{8}$$

где n – концентрация носителей заряда, а V – объем маятника.

Потенциалы (8) позволяют вычислить и распределения ЭМ полей вне маятников. Действительно, согласно известным из электродинамики формулам (см. [11]), имеем для электрического и магнитного поля соответственно

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\psi,$$
$$\mathbf{B}=rot\mathbf{A}. \tag{9}$$

Подставив сюда (8), найдем

$$\mathbf{E}=-\frac{enV}{c^2}\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}+\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R})}{R^3}\right)+\frac{enV\mathbf{R}}{R^3}+\frac{enV\mathbf{R}}{R^3}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2+\frac{2enV\mathbf{v}}{R^3}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)^2=$$
$$=\frac{enV\mathbf{R}}{R^3}-\frac{enV}{c^2}\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}+\frac{enV\mathbf{R}}{R^3}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2+\frac{enV\mathbf{v}}{R^3}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)^2, \tag{10}$$
$$\mathbf{B}=\frac{enV}{cR^3}[\mathbf{v}\times\mathbf{R}],$$

где учтено, что $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)$ и $\dot{\mathbf{R}}=-\dot{\mathbf{r}}_0=-\mathbf{v}$.

Оставляя в (10) единственное слагаемое, связанное с излучением, и присутствующее только в определении электрического поля, имеем

$$\mathbf{E}^{rad}=-\frac{enV}{c^2}\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}. \tag{11}$$

Следуя далее определению интенсивности излучения I согласно [11], с учетом формулы (11) имеем для нее, учитывая, что, $v=l\dot{\varphi}$

$$I=\frac{c\mathbf{E}_{rad}^2}{8\pi}=\frac{c}{8\pi}\left(\frac{enV}{c^2}\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}\right)^2=\frac{enV}{8\pi c^3}\frac{1}{R^2}\left(\dot{\mathbf{v}}^2+\frac{\mathbf{v}^4}{l^2}\right). \tag{12}$$

Так как, в свою очередь, $v=l\dot{\varphi}$, то

$$I=\frac{(enV)^2}{8\pi c^3}\frac{l^2}{R^2}\left(\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4\right). \tag{13}$$

По определению мощность излучения определяется как $W=\int IR^2dO=4\pi IR^2$. Поэтому, в соответствии с (13) получаем для нее

$$W=\frac{(enVl)^2}{2c^3}\left(\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4\right). \tag{14}$$

Для вывода уравнений движения удобно воспользоваться подходом, предложенным в работе [12], который в общем виде должен выглядеть как

$$\sum\dot{E}+\sum\dot{Q}+\sum W=0, \tag{15}$$

где $\dot{Q}$ – диссипативная функция. В пренебрежении диссипативными свойствами среды в нашем случае это будет просто

$$\sum \dot{E} + \sum W = 0. \tag{16}$$

Действительно, дифференцируя полную энергию (3) по времени с учетом (14) и (16), находим

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \omega_0^2 \sin\varphi_1 + \omega_1^2 q_1 \left[\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - a\cos\varphi_2\right] - \lambda_2 q_2 (\varphi_2'' cos\psi - \varphi_2' \psi' \sin\psi)\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ - 3\lambda_2 q_2 (\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_2' \cos\psi + \kappa\varphi_1'^3 - \\ - \dfrac{3\lambda_2 a}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\left[\dfrac{\varphi_1'\cos\varphi_1 - \varphi_2'\cos\varphi_2}{Q_{12}^5} + \dfrac{\varphi_2'\cos\varphi_2 - \varphi_1'\cos\varphi_1}{Q_{21}^5}\right]\varphi_2'\cos\psi = 0, \\ \varphi_2'' + \omega_0^2 \sin\varphi_2 + \omega_1^2 q_1 \left[\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a\cos\varphi_1\right] - \lambda_2 q_2 (\varphi_1'' cos\psi - \varphi_1' \psi' \sin\psi)\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ - 3\lambda_2 q_2 (\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_1' \cos\psi + \kappa\varphi_2'^3 - \\ - \dfrac{3\lambda_2 a}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\left[\dfrac{\varphi_1'\cos\varphi_1 - \varphi_2'\cos\varphi_2}{Q_{12}^5} + \dfrac{\varphi_2'\cos\varphi_2 - \varphi_1'\cos\varphi_1}{Q_{21}^5}\right]\varphi_1'\cos\psi = 0. \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_c}, \omega_1^2 = \frac{Gm}{l_c^3}, \lambda_2 = \frac{\rho_e^2 V}{mc^2 b}\xi, \kappa = \frac{(enVl)^2}{2mc^3 l_c^2}, \tag{18}$$

а новые введенные функции определены как

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q_{12}^3} + \frac{1}{Q_{21}^3}\right), q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q_{12}^5} + \frac{1}{Q_{21}^5}\right), \tag{19}$$

где

$$Q_{12} = \sqrt{a^2 + 2\left(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) + 2a\left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right)},$$
$$Q_{21} = \sqrt{a^2 + 2\left(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) - 2a\left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right)}.$$

Вводя для удобства еще один безразмерный параметр $\lambda_1 = \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$, а также безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, находим в результате

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin\varphi_1 + \lambda_1 q_1 \left[\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - a\cos\varphi_2\right] - \lambda_2 q_2 (\varphi_2'' cos\psi - \varphi_2' \psi' \sin\psi)\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ - 3\lambda_2 q_2 (\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_2' \cos\psi + k\varphi_1'^3 - \\ - \dfrac{3\lambda_2 a}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\left[\dfrac{\varphi_1'\cos\varphi_1 - \varphi_2'\cos\varphi_2}{Q_{12}^5} + \dfrac{\varphi_2'\cos\varphi_2 - \varphi_1'\cos\varphi_1}{Q_{21}^5}\right]\varphi_2'\cos\psi = 0, \\ \varphi_2'' + \sin\varphi_2 + \lambda_1 q_1 \left[\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a\cos\varphi_1\right] - \lambda_2 q_2 (\varphi_1'' cos\psi - \varphi_1' \psi' \sin\psi)\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ - 3\lambda_2 q_2 (\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_1' \cos\psi + k\varphi_2'^3 - \\ - \dfrac{3\lambda_2 a}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\left[\dfrac{\varphi_1'\cos\varphi_1 - \varphi_2'\cos\varphi_2}{Q_{12}^5} + \dfrac{\varphi_2'\cos\varphi_2 - \varphi_1'\cos\varphi_1}{Q_{21}^5}\right]\varphi_1'\cos\psi = 0, \end{cases} \tag{20}$$

где штрихи означают дифференцирование по τ и новый безразмерный параметр $k = \dfrac{(enl)^2 V\omega_0}{2\rho c^3 l_c^2}$, где плотность металлического шара $\rho = \dfrac{m}{V}$. Считая, что $Q_{12} \approx Q_{21} = a$, уравнения (20) сильно упростятся, и мы получим вполне компактную систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin\varphi_1 + \gamma\varphi_2''\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + 3\gamma(\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_2'\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + k\varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin\varphi_2 + \gamma\varphi_1''\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + 3\gamma(\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + k\varphi_2'^3 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Для решения уравнений (21) следует задать еще начальные условия, которые мы выберем в следующем виде

$$\varphi_1(0) = -\varphi_{01}, \varphi_2(0) = \varphi_{02}, \dot{\varphi_1}(0) = \dot{\varphi_2}(0) = 0. \tag{22}$$

Необходимо также подчеркнуть, что в излагаемом решении мы не затрагиваем никакие диссипативные процессы типа сухого трения, как это делается, скажем, для часовых механизмов и чему посвящено подавляющее большинство работ по теории синхронизации (см., например, [7], [8]). Приводимое нами строгое доказательство принципиальной возможности синхронизации основано только на учете двух факторов: энергии электромагнитного взаимодействия между металлическими шарами и ЭМ излучение. Численное решение системы уравнений (21) для граничных условий

$$\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{6}, \varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}, \dot{\varphi_1}(0) = \dot{\varphi_2}(0) = 0. \tag{23}$$

можно проиллюстрировать с помощью рис. 1 – 4.

Таким образом, проведенное выше аналитическое и численное решение полученных уравнений и их анализ говорит нам о том, что суть проблемы синхронизации стала более понятна, а изложенное выше решение, объясняющее механизмы взаимодействия маятников, отвечает на вопрос о физической природе этого интересного и весьма любопытного явления. С точки же зрения численного анализа чрезвычайно важным, ввиду своей наглядности, является графическая иллюстрация решений уравнений (21), что позволяет показать на рисунках весь этап синхронизации, и численно оценить время синхронизации t_{synchr} для разных значений параметров γ и k. Итак,

1. Благодаря предположению, что взаимодействие между маятниками носит дальнодействующий характер электромагнитной природы, получена система симметричных относительно перестановок $\varphi_1 \to \varphi_2, \varphi_2 \to \varphi_1$ and $\varphi_1 \to -\varphi_1, \varphi_2 \to -\varphi_2$ и нелинейных дифференциальных уравнений, в которых с необходимостью учтен также эффект ЭМ излучения. На основании этих двух физических факторов удается строго математически описать весь процесс синхронизации.

2. Строго аналитически показано, что в приближении малых колебаний эффект синхронизации наступает через время t_{synchr}, численные значения которого соответствуют экспериментально наблюдаемым временам.

Литература

1. Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled – oscillator system. The mapping approach / T.Yamada, H. Fujisaka // Progr. Theor. Phys. – 1983. – Vol. 70. – P. 1240–1248.

2. Веричев Н.Н. О синхронизации стохастических колебаний параметрически возбуждаемых нелинейных осцилляторов / Н.Н. Веричев, А.Г. Максимов // Известия вузов. Радиофизика. – 1989. – Т.32, №8. – С.962-965.

3. Pecora L.M. Synchronization in chaotic systems/ L.M. Pecora, T.L. Carroll // Phys. Rev. Lett. – 1990. – Vol. 64. – P. 821 – 824.

4. Rosenblum M.G. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators / M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78. – P. 4193 – 4196.

5. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике / И.И. Блехман. – М.: Наука, 1981. - 320 с.

6. Акимов В.Н. Системы фазовой синхронизации / В.Н. Акимов, Л.Н. Белюстина и др. – М.:Радио и связь, 1982. – 288 с.

7. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М: Физматлит, 1959. – 916 с.

8. Oliveria H. synchronization of two clocks / H. M. Oliveria, L. V. Melo // Scientific Reports. – 2015. – Access mode: DOI:10.1038/srep11548.

9. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

10. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра / С.О. Гладков // ЖТФ.– 2018. – Т.88, №3. – С. 337–341.

11. Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 2003. – 536 с.

12. Гладков С.О. О вычислении интенсивности излучения электромагнитной энергии неподвижной ферромагнитной сферической частицей, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле / С.О. Гладков // ЖТФ. – 2015. – Т.85, №7.– С. 138-141.

13. Гладков С.О. Вращающийся ферромагнитный шар, как источник длинноволнового ЭМ – излучения / С.О. Гладков, С.Б.Богданова // Радиотехника и электроника. – 2016. – Т.62, №7. – С.632–641.

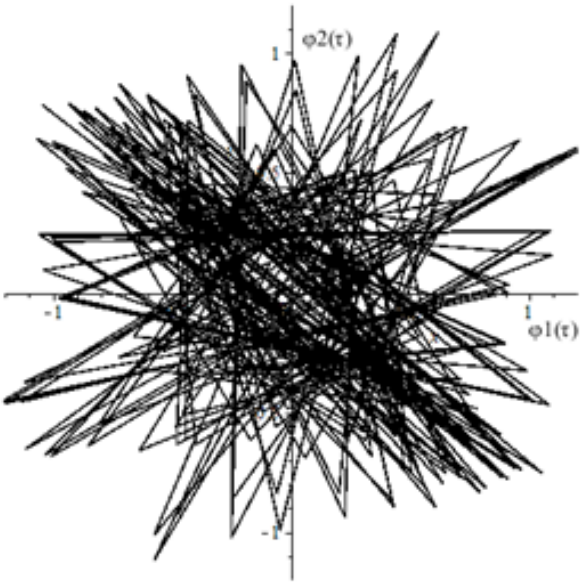


Рис. 1. Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ на интервале времен $\tau \in [0, 500]$.

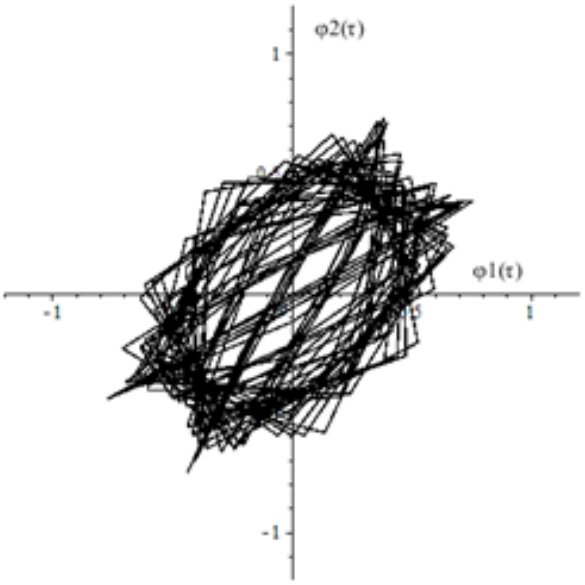


Рис. 2. Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ на интервале времен $\tau \in [2000, 3000]$.

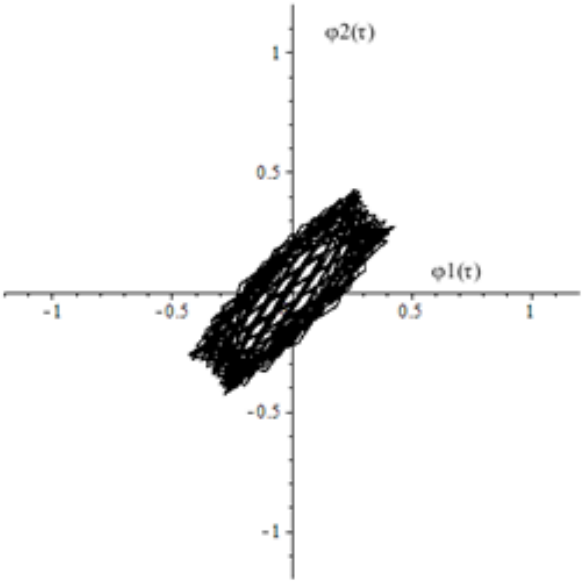


Рис. 3. Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ на интервале времен $\tau \in [8000, 9000]$.

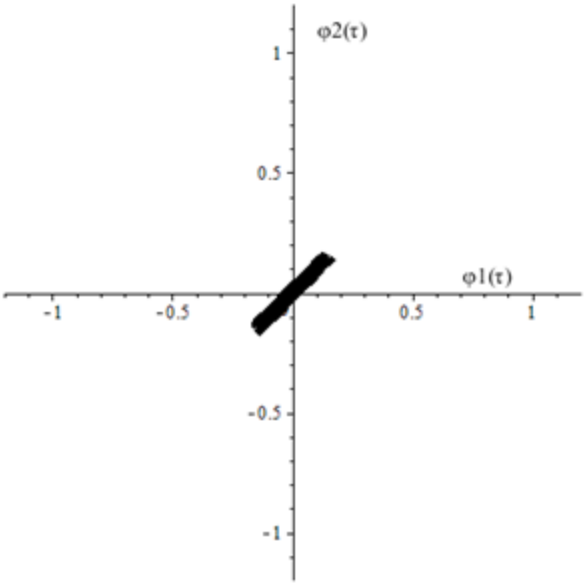


Рис. 4. Зависимость $\varphi_2 \approx \varphi_1$ на интервале времен $\tau \in [48000, 49000]$.

TO THE PROBLEM ON SYNCHRONIZATION OF PENDULUMS

S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova

It's consider as an example of two coplanar metal pendulums, suspension points of which are at the same horizontal level and the same fixed distance of b from each other. It's shown that the principle of possibility of synchronization due to two main factors. The first one is the effect of electromagnetic interaction between the pendulums. The second one is taking into account of the power of EM radiation coming to the nonlinear attenuation.

Keywords: electromagnetic interaction, electromagnetic radiation, synchronization.

УДК 532.592

ОДНО ТОЧНОЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ С УДАРНОЙ ВОЛНОЙ АННИГИЛЯЦИИ

А.Н. Голубятников[1], Д.Б. Любошиц[2]

1 *golubiat@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
2 *daniilll@ya.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Указано новое сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна в случае предельно жесткого уравнения состояния, которое описывает гиперболический (открытый) разлет газа. Характерно, что, в отличие от однородного решения А. Фридмана, оно имеет ненулевой градиент давления, связанный с ускорением среды. Данное решение склеивается на ударной волне с параболическим сжатием пыли, состоящей из частиц и античастиц. Для реализации такого процесса на поверхности разрыва предполагается наличие реакции полной аннигиляции античастиц. Приводятся оценки, связанные с моделью Большого взрыва Вселенной.

Ключевые слова: космология, аннигиляция, ударная волна.

Введение

Открытие в конце 90-х годов ускорения разлета галактик [1] заставляет думать о наличии неоднородностей расширения Вселенной и протекании в прошлом таких динамических процессов, например, вызванных предварительным гравитационным коллапсом, которые могли бы привести к ее взрыву. Такого рода сценарий эволюции был высказан М. Кахилом и А. Таубом [2] на основании решения в рамках общей теории относительности такого рода задачи в предположении автомодельности. С точки зрения ньютоновской газовой динамики здесь возникает трудность при предположении о параболическом характере сжатия (с нулевой скоростью на бесконечности) пыли и гиперболичности наблюдаемого разлета (с ненулевой скоростью) с необходимостью вложения энергии, способной развернуть и ускорить движение среды.

В настоящей работе предполагается, что источником такой энергии может служить аннигиляция части коллапсирущей материи, представляющей смесь частиц и античастиц, начинающих взаимодействовать в центре симметрии при достижении определенной плотности. Оценки, основанные на теории Большого взрыва [3] по определению числа образовавшихся фотонов, указывают на существовавшую относительную разность числа частиц и античастиц порядка 10^{-9}, что приводит к очень большой удельной энергии реакции порядка 10^{30} см^2/с^2.

Отметим, что ранее методом обратной задачи для сильных ударных волн был построен ряд решений задачи о склейке коллапсирующей пыли со статическим, однородным и автомодельным решениями уравнений релятивистского гравитирующего газа при наличии детонации [4, 5, 6, 7], склейка с решением А. Фридмана с учетом аннигиляции исследована авторами [8].

1. Ньютоновская механика

Для понимания процесса и выяснения возможности его реализации в целом приведем сначала решение задачи об ударной волне аннигиляции в рамках ньютоновской механики, предполагая, что коллапсирущая пыль переходит в однородный разлет совершенного газа с показателем адиабаты γ. В случае неоднородного разлета решение задачи при $\gamma = 4/3$ можно найти в [6].

Уравнения движения в случае сферической симметрии для радиуса $r(t, m)$, как функции времени t и массовой переменной m (массы шара радиуса r) имеют вид:

$$r_{tt} + 4\pi r^2 p_m + \frac{Gm}{r^2} = 0, \quad p = p(\rho, m), \quad \rho = \frac{3}{4\pi r^2 r_m}. \tag{1.1}$$

Нижние индексы обозначают частные производные, p – давление и ρ – плотность, G – гравитационная постоянная. Переменная m при адиабатическом процессе входит в давление через энтропию.

Реакцию аннигиляции можно описать следующим образом. Рассмотрим пыль (среду без давления), как смесь частиц и и соответствующих им античастиц, двигающихся с одинаковой скоростью.

Предположим, что все античастицы аннигилируют в ударном слое. Пусть m – та часть массы частиц, которая осталась после реакции аннигиляции и $\omega(m)$ – массовая концентрации античастиц. Тогда на ударной волне коллапсирущую пыль можно наделить внутренней энергией

$$u = \frac{c^2}{1-2\omega}, \tag{1.2}$$

где c – скорость света, и считать m сохраняющейся на разрыве массовой переменной. Вывод формулы (1.2) дадим позже.

В рамках ньютоновской механики однако необходимо, чтобы выполнялось неравенство $u - c^2 \ll c^2$. Это приводит к равенству $u \approx c^2(1-2\omega)$. При $\omega \to 1/2$ ситуация становится существенно релятивистской и величина u может достигать очень больших значений. В теории Большого взрыва [3] порядка 10^{30} см^2/с^2. Таким образом, в ньютоновской теории следует ограничится только относительно слабой аннигиляцией с $\omega \ll 1$, например, порядка химической или ядерной детонации. При этом в уравнениях движения пыли потерей массы вообще можно пренебречь.

После сокращения на удельную энергию покоя c^2 условия на поверхности разрыва $m = M(t)$ дают соотношения теории детонации [9]. Здесь можно считать u тепловой частью удельной внутренней энергии.

$$[r] = 0, \quad [r_t\dot{M} - 4\pi p] = 0,$$
$$\left[\left(\frac{r_t^2}{2} + u\right)\dot{M} - 4\pi p r_t\right] = Q, \quad Q = 2c^2\omega. \tag{1.3}$$

Перед волной аннигиляции мы имеем гравитационный коллапс пыли ($p = 0$) с параболической скоростью:

$$\frac{r_t^2}{2} - \frac{Gm}{r} = 0, \quad r = \left(\frac{9Gm}{2}\right)^{1/3}(t_0(m) - t)2/3,$$
$$\rho = \frac{1}{6\pi(t_0 - t)(t_0 + 2mt_0' - t)}. \tag{1.4}$$

Применим метод обратной задачи. Пусть за волной аннигиляции реализуется однородный гиперболический разлет газа:

$$r = m^{1/3}a(t), \quad \rho = \frac{3}{4\pi a^3}, \quad p = p(a).$$
$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{G}{a} = K > 0, \tag{1.5}$$

K – постоянная, связанная с кинетической энергией газа при $a \to \infty$.

Для совершенного газа

$$p = B/a^{3\gamma}, \quad u = \frac{4\pi B}{3(\gamma-1)a^{3(\gamma-1)}}. \tag{1.6}$$

Тогда из трех условий на разрыве (1.3) можно определить функции $M(t)$, $\omega(m)$ и $t_0(m)$, возможно, в неявном виде. Действительно, из сохранения потока импульса после исключения $\dot{a} > 0$ имеем уравнение для $M(a)$:

$$M^{2/3} = \frac{4\pi}{3}\int_{a_0}^{a} \frac{p(a)a^3 da}{Ka + G + \sqrt{G(Ka+G)}}, \tag{1.7}$$

где $a_0 > 0$ – начальный масштабный фактор, который определяется определенным уровнем плотности пыли (1.4), необходимым для начала реакции.

Далее определяется необходимое тепловыделение:

$$Q = u(a) - M^{2/3}\left(K + \frac{2G}{a} + \frac{2}{a}\sqrt{G(Ka+G)}\right). \tag{1.8}$$

А из непрерывности радиуса функция $t_0(a)$.

Формулы (1.7), (1.8) показывают, что, во-первых, полная масса системы конечна $m \le M_1$ и, во-вторых, при $a \to \infty$ необходимое тепловыделение Q становится отрицательным.

Таким образом, процесс аннигиляции кончается за конечное время. Далее однородность разлета будет нарушена. К центру пойдет слабый разрыв сжатия, возможность опрокидывания которого не исключена. Картина движения усложняется.

2. Общая теория относительности

Уравнения Эйнштейна для сферически-симметричного адиабатического движения гравитирующего газа в пространстве-времени с метрикой, записанной в сопутствующей среде системе координат,

$$ds^2 = B^2 dt^2 - A^2 d\xi^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{2.1}$$

в наиболее простом виде представляются формой Мизнера-Шарпа [2], где мы полагаем постоянные $c = 1$ и $G = 1$:

$$1 - \frac{2E}{r} + \frac{r_t^2}{B^2} - \frac{r_\xi^2}{A^2} = 0, \quad E_t = -4\pi p r^2 r_t, \quad E_\xi = 4\pi\varepsilon r^2 r_\xi, \quad \varepsilon = \rho u(\rho,\xi),$$

$$p = \rho^2 u_\rho, \quad \frac{B_\xi}{B} + \frac{p_\xi}{p+\varepsilon} = 0, \quad Ar^2\rho = g(\xi), \quad m = 4\pi\int_0^\xi g\, d\xi. \tag{2.2}$$

Здесь функции E и m имеют смысл гравитирующей энергии и массы покоя соответственно.

Решение для параболически сжимающейся пыли есть

$$r = \left(\frac{9E}{2}\right)^{1/3}(t_0(\xi) - t)^{2/3}, \quad u = u(\xi), \quad A = r_\xi, \quad B = 1, \quad E = 4\pi\int_0^\xi g u\, d\xi. \tag{2.3}$$

Пусть в области перед ударной волной $u = 1$ и масса покоя пыли есть m_1. Тогда имеем равенства, связанные с кинетикой аннигиляции,

$$dE = dm_1 = u(1 - 2\omega)dm_1 = u dm, \tag{2.4}$$

где m – оставшаяся масса покоя. Откуда следует формула (1.2) для эффективной удельной энергии пыли u, которая входит в условия на разрыве.

Пусть $t = T_{1,2}(\xi)$ – формулы, описывающие поверхность разрыва перед и за ударной волной соответственно. Здесь координата t разрывна, а координаты ξ, θ, φ непрерывны. Условия на разрыве гидродинамических величин в общей теории относительности сводятся, как известно [2], к непрерывности первой и второй квадратичных форм гиперповерхности разрыва с пространственноподобной нормалью.

В результате получим [4]

$$[r] = 0, \quad [g] = 0, \quad [E] = 0,$$

$$T_1' = \frac{B_2(\varepsilon_2 + p_2)T_2'}{\rho_2 u_1}, \quad T_2' = \frac{A_2}{B_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_2^2 - \rho_2^2 u_1^2}. \tag{2.5}$$

Непрерывны также и производные величин r, g, E по ξ, вычисленные вдоль ударной волны. Это дает, в частности, соотношение

$$E_1' = (E_2)_t T_2' + (E_2)_\xi = 4\pi g_1 u_1. \tag{2.6}$$

3. Точное решение

В работе [2] был исследован класс автомодельных нестационарных решений уравнений (2.2) вида $r = \xi R(\xi/t^n)$, которые всегда сводятся при $n \ne 0, \infty$ к случаю $n = 1$, но при учете энергии покоя ρ описываются достаточно сложными уравнениями. Случай $n = 0$ отвечает состоянию равновесия. Однако, имеет смысл рассмотреть и пропущенный, на первый взгляд, формальный случай $n = \infty$. При этом инвариантной автомодельной переменной выступает само время t, но его реализация требует специального уравнения состояния $p = \varepsilon$, т.е. предельно жесткого уравнения состояния со скоростью звука, равной скорости света [3].

Решение после специального выбора координат имеет вид:

$$r = \xi t, \quad A = 1, \quad B = \frac{\xi}{F(t)}, \quad F^2 = \frac{8\pi C}{t^2} + t^2 - 1,$$

$$\varepsilon = p = \frac{C}{\xi^2 t^4}, \quad E = \frac{4\pi C\xi}{t}, \quad \rho = \frac{\rho_0(\xi)}{t^2}, \quad g = \xi^2\rho_0(\xi), \tag{3.1}$$

где C – постоянная.

Решение имеет одну произвольную функцию $\rho_0(\xi)$, которую можно связать с функцией энтропии $f \sim \exp(S/c_V)$, где c_V – удельная теплоемкость при постоянном собственном объеме, используя уравнения состояния совершенного газа $\varepsilon = f(\xi)\rho^2$. Откуда $f = C/(\xi^2\rho^2)$.

Переменную t можно рассматривать как масштабный фактор $t = a(\tau)$, используя равенства

$$B\,dt = \xi\,d\tau, \quad r = \xi a(\tau), \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi C}{a^2} + a^2 - 1. \tag{3.2}$$

Переменная τ при фиксированном ξ пропорциональна собственному времени частицы газа.

Последнее уравнение (3.2) имеет при $a > 0$ три характерных решения, содержащих стадию разлета, классификация которых связана с неравенством $\dot{a}^2 \geq 0$. Для наглядности результата мы употребляем термин “ускорение” в смысле $r_{\tau\tau}/\xi^2 = \ddot{a}/\xi$, а не по канонам общей теории относительности (см. ниже).

1) $32\pi C > 1$ – нет корней правой части. Реализуется разлет с торможением, сменяющимся ускорением, без остановки.

2) $32\pi C = 1$ – один корень $a^2 = 1/2$. Движение аналогично, но с остановкой.

3) $32\pi C < 1$ – два корня $a^2_{1,2} = 1/2 \mp \sqrt{1/4 - 8\pi C}$. Имеется два режима течения: при $a < a_1$ разлет, остановка, затем сжатие; при $a > a_2$ разлет. Отметим, что оба корня меньше единицы.

Уравнение (3.2) может быть проинтегрировано. Обозначим $8\pi C = \alpha^2$. Тогда при $\dot{a} \geq 0$ в случае существования $F(a)$

$$\tau = (1/2)\ln\left|\frac{2aF(a) + 2a^2 - 1}{2a_0F(a_0) + 2a_0^2 - 1}\right|, \tag{3.3}$$

где a_0 – начальное значение a.

Приведем также ненулевые компоненты кинематических характеристик движения в сопутствующих координатах, где u^i – вектор 4-скорости, $a^i = u^k\nabla_k u^i$ – вектор ускорения и $e_{ij} = (1/2)(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)_{\perp\mathbf{u}}$ – тензор скоростей деформаций.

$$u^t = 1/B = F(t)/\xi = \dot{a}/\xi, \quad a^\xi = B_\xi/B = 1/\xi > 0,$$

$$e^\theta_\theta = e^\varphi_\varphi = F(t)/(\xi t) = \dot{a}/(a\xi). \tag{3.4}$$

Таким образом, мы имеем постоянное в частице среды ускорение газа в смысле общей теории относительности за счет отрицательной производной давления $p_\xi < 0$. Деформации вдоль направления ξ фактически нет (как в состоянии равновесия), но меняется радиус наблюдателя $r = a(\tau)\xi$. Отметим, что переход к ньютоновской механике при $c \to \infty$ здесь затруднен в силу отсутствия в теории энергии покоя ρc^2.

Сопоставим метрические коэффициенты A, B, r (3.1) с теми же составляющими открытой метрики А. Фридмана при том же уравнении состояния $p = \varepsilon$, в которой

$$A^2 = t^2/(1 + \xi^2) \vee 1, \quad B^2 = (1 + (8\pi/3)\varepsilon t^2)^{-1} \vee \left(\frac{\xi}{F(t)}\right)^2, \quad \varepsilon = \frac{C}{t^6} \vee \frac{C}{\xi^2 t^4}, \tag{3.5}$$

$r = \xi t$ – то же.

Как мы видим, метрики практически совпадают при больших t в окрестности изотропной гиперповерхности $t \approx \xi \to \infty$. Однако отметим, что в решении А. Фридмана указанное выше ускорение среды в силу $(B)_\xi = 0$ точно равно нулю. Поэтому наблюдательные данные об ускорении материи во Вселенной должны указывать, прежде всего, на отклонения модели от однородного разлета с шестипараметрической группой движений трехмерного гиперболоида.

После замены $\xi = e^x$ метрика принимает конформный вид

$$ds^2 = e^{2x}\left(d\tau^2 - dx^2 - a(\tau)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right), \tag{3.6}$$

где конформно-сопряженная метрика, очевидно, инвариантна помимо трехпараметрической группы вращений также и относительно сдвигов x. Прямые вычисления соответствующей алгебры Ли подтверждают это свойство конформной инвариантности исходной метрики, дополнительных непрерывных преобразований группа не содержит.

4. Волна аннигиляции

Проведем склейку полученного локального решения (3.1) с параболически (с нулевой скоростью на бесконечности) коллапсирующей пылью, используя формулы (2.5), (2.6). В сращиваемых решениях имеется произвол в три функции лагранжевой переменной $g_1 = g_2 = g(\xi)$, $t_0(\xi)$ и $\omega(\xi)$ или $u_1(\xi)$. Кроме этого, надо найти еще две функции $T_{1,2}(\xi)$, описывающие движение разрыва. Поэтому четырех оставшихся уравнений и их следствий, можно надеяться, должно хватить с избытком.

Используя соотношение (2.6), исключим u_1 из последнего уравнения (2.5):

$$\xi^2\rho_0 u_1 = C(1/T_2 - \xi T_2'/T_2^2). \tag{4.1}$$

Замечательно, что при этом исключится и распределение $\rho_0(\xi)$. В результате получим независимое дифференциальное уравнение для $T_2(\xi)$, которое является ключевым для дальнейших вычислений. Используем далее переменную $x = \ln\xi$, параметр $\alpha = (8\pi C)^{1/2}$ и обозначим $T_2 = T(x)$, тогда имеем:

$$T_x^2 = F^2(1 - T^2 + 2TT_x - T_x^2). \tag{4.2}$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно производной x_T, получим

$$\frac{dx}{dT} = \frac{\alpha^2 + T^4}{TF(T^2F \pm \alpha)}, \quad TF = \left(\alpha^2 + T^4 - T^2\right)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Здесь для определенности мы приняли $F \geq 0$.

Решение уравнений (4.1), (4.2) должно удовлетворять определенным ограничениям. Во-первых, должно существовать $F(T)$. Далее в силу выбора предельно жесткого уравнения состояния должно выполняться условие ультрарелятивизма: $\varepsilon \gg \rho$, что дает неравенство $\xi^2\rho_0 T^2 \ll C$, что можно удовлетворить заданием достаточно малого $\rho_0(\xi)$. Также должно быть $u_1 \geq 1$. Кроме того, будем считать производную $x_T > 0$.

В силу соотношения

$$T^4F^2 - \alpha^2 = (\alpha^2 + T^4)(T^2 - 1)$$

можно несколько упростить уравнение (4.2):

$$\frac{dx}{dT} = \frac{T^2F \mp \alpha}{(T^2-1)TF} = \frac{T}{T^2-1} \mp \frac{\alpha}{(T^2-1)(\alpha^2 - 1/4 + (T^2 - 1/2)^2)^{1/2}}. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) интегрируется в виде квадратуры, первое слагаемое – точно. Исследуем поведение его решений в зависимости от значений параметра α в соответствии с случаями, указанными ранее в п. 3.

Прежде всего отметим, что знаменатель правой части уравнения (4.3) имеет две особенности: корень функции $F(T)$ как интегрируемую особенность, которая не меняет знака производной, за исключением второго случая с $\alpha = 1/2$; и корень $T^2F - \alpha$, равный $T = 1$, который возможен только при нижнем знаке. Если $T < 1$, в силу формы уравнения (4.4) $x_T > 0$ только при верхнем знаке (плюс в (4.3)), при этом $\alpha > T^2F$. Если же $T > 1$, производная положительна только при $\alpha < T^2F$. В последнем случае возможны два вида аннигиляции – быстрая (нижний знак) и медленная (верхний).

Если решение $x(T)$ начинается при малых T_0, то оно уходит в первом случае, когда всюду $F > 0$, на бесконечность за бесконечное время. То же имеет место и во втором случае при $T = 1/\sqrt{2} < 1$, но за конечное время. Либо решение имеет бесконечную, но интегрируемую производную при $T = a_1 < 1/\sqrt{2}$ в третьем, при этом решение ограничено в пространстве.

Таким образом, продолжению решения может препятствовать только особенность $F(T) = 0$, которая проявляется в последних двух случаях. Соответственно начальное значение T_0 должно просто укладываться в интервалы существования функции $F(T)$. Быстрая аннигиляция возможна, если $T_0 > 1$ во всех трех случаях. Переход медленной аннигиляции в быструю в точке $T = 1$ без существенных внешних воздействий невозможен.

5. Интегрируемый случай

Второй случай допускает полное интегрирование в элементарных функциях. При этом $\alpha = 1/2$, $TF = |T^2 - 1/2|$. Тогда уравнение (4.4) дает

$$\frac{dx}{dT} = \frac{T}{T^2-1} \mp \frac{1}{2(T^2-1)|T^2-1/2|}. \tag{5.1}$$

Ограничимся случаем $T^2 < 1/2$ и знаком минус. Тогда получим

$$\ln\xi = (1/2)\ln(1-T^2) - (1/2)\left(\ln\frac{1+T}{1-T} - \sqrt{2}\ln\frac{1/\sqrt{2}+T}{1/\sqrt{2}-T}\right) + \text{const}. \tag{5.2}$$

Или

$$\xi = \xi_0 \frac{(1-T)\left(\frac{1/\sqrt{2}+T}{1/\sqrt{2}-T}\right)^{1/\sqrt{2}}}{(1-T_0)\left(\frac{1/\sqrt{2}+T_0}{1/\sqrt{2}-T_0}\right)^{1/\sqrt{2}}}. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) показывает, что движение ударной волны аннигиляции должно начинаться от некоторого начального ядра радиуса $r_0 = \xi_0 T_0$, который может равняться нулю только при $T_0 = 0$. При этом знаменатель дроби (5.3) обращается в 1, ξ_0 – произвольно.

Далее из условий на разрыве (2.5) определяются остальные величины.

Заключение

Таким образом, указано новое сферически-симметричное решение уравнений общей теории относительности, пригодное для моделирования Большого взрыва при наличии ускорения материи. Источником взрыва служит реакция аннигиляции, которая происходит на ударной волне, распространяющейся в смеси частиц и античастиц. Приведены оценки, связанные с известным относительным числом оставшихся барионов.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 17-01-00037).

Литература

1. Riess A.G. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / A.G. Riess et al. // Astronomical Journal. – 1998. – Vol. 116. – P. 1009-1038.

2. Cahill M. Spherically Symmetric Similarity Solutions of the Einstein Field Equations for a Perfect Fluid / M. Cahill, A. Taub // Commun. math. Phys. – 1971. – Vol. 21. – P. 1-40.

3. Зельдович Я.Б. Релятивистская астрофизика / Я.Б. Зельдович, И. Д. Новиков. – М.: Наука, 1967. – 656 с.

4. Голубятников А.Н. О сферически-симметричном движении релятивистского гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны / А.Н. Голубятников // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, №3. – С. 318-321.

5. Голубятников А.Н. Сильный взрыв и перестройка положения равновесия при релятивистском гравитационном коллапсе / А.Н. Голубятников // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, №6. – С. 1330-1334.

6. Голубятников А.Н. К образованию однородного разлета гравитирующего газа при наличии градиента давления / А.Н. Голубятников // Изв. АН. Механика жидкости и газа. – 1998. – № 4. – С. 176-182.

7. Golubiatnikov A.N. On the formation of homogeneous expansion of a relativistic gravitating gas/ A. N. Golubiatnikov // Gravitation and Cosmology. – 1999. – Vol.5, №4. – P. 329-332.

8. Golubiatnikov A.N. Annihilation shock wave in the dynamics of gravitating gas / A.N. Golubiatnikov, D.B. Lyuboshits // Gravitation and Cosmology. – 2018. – Vol. 24, 4. – P. 258-263.

9. Черный Г.Г. Газовая динамика / Г.Г. Черный. – М.: Наука, 1988. – 424 с.

AN EXACT COSMOLOGICAL SOLUTION WITH ANNIHILATION SHOCK WAVE

A.N. Golubiatnikov, D.B. Lyuboshits

A new spherical-symmetric solution of the Einstein equations in the case of the extremely rigid equation of state, which describes the hyberbolic (open) expansion of the gas, is presented. Specifically, in contrast to the homogeneous A. Friedmann solution, this solution has a non-zero pressure gradient associated with the acceleration of the continuum. This solution is glued on the shock wave with parabolic compression of dust consisting of particles and antiparticles. To implement such a process, the presence of reaction of complete annihilation of antiparticles on the surface of the discontinuity is assumed. Estimates related to the Big Bang model of the Universe are made.

Keywords: cosmology, annihilation, shock wave.

UDC 530.12:531.51

STABLE EXPONENTIAL COSMOLOGICAL SOLUTIONS WITH ZERO VARIATION OF *G* AND THREE DIFFERENT HUBBLE-LIKE PARAMETERS IN EGB MODEL WITH A Λ-TERM

K.K. Ernazarov[1], V.D. Ivashchuk[2]

1 ...; Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
2 *ivashchuk@mail.ru*; Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS

We consider a D-dimensional gravitational model with a Gauss-Bonnet term and the cosmological term Λ. We restrict the metrics to diagonal cosmological ones and find for certain Λ a several solutions with exponential time dependence of three scale factors, governed by three non-coinciding Hubble-like parameters $H > 0$, h_1 and h_2, corresponding to factor spaces of dimensions 3, $k_1 > 1$ and $k_2 > 1$, respectively, with $mH + k_1 h_1 + k_2 h_2 \neq 0$, and $D = 1 + m + k_1 + k_2$. We prove the stability of obtained solutions in a class of cosmological solutions with diagonal metrics. A solution describing an exponential expansion of $3d$ subspace with Hubble parameter H and small enough variation of the effective gravitational constant G is presented.

Keywords: cosmological solutions, Einstein-Gauss-Bonnet model.

UDC 530.12:531.51

STABLE EXPONENTIAL COSMOLOGICAL SOLUTIONS WITH TWO FACTOR SPACES IN THE EINSTEIN-GAUSS-BONNET MODEL WITH A Λ-TERM

V.D. Ivashchuk[1], A.A. Kobtsev[2]

1 *ivashchuk@mail.ru*; Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS
2 ...; Russian Federation Institute for Nuclear Research of the Russian Academy of Sciences

We study D-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet gravitational model including the Gauss-Bonnet term and the cosmological term Λ. We find a class of solutions with exponential time dependence of two scale factors, governed by two Hubble-like parameters $H > 0$ and h, corresponding to factor spaces of dimensions $m > 2$ and $l > 2$, respectively. These solutions contain a fine-tuned $\Lambda = \Lambda(x, m, l, \alpha)$, which depends upon the ratio $h/H = x$, dimensions of factor spaces m and l, and the ratio $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$ of two constants (α_2 and α_1) of the model. The master equation $\Lambda(x, m, l, \alpha) = \Lambda$ is equivalent to a polynomial equation of either fourth or third order and may be solved in radicals. The explicit solution for $m = l$ is presented in Appendix. Imposing certain restrictions on x, we prove the stability of the solutions in a class of cosmological solutions with diagonal metrics. We also consider a subclass of solutions with small enough variation of the effective gravitational constant G and show the stability of all solutions from this subclass.

Keywords: cosmological solutions, Einstein-Gauss-Bonnet model.

UDC 530.12:531.51:519.711.3

THE PECULIARITIES OF THE COSMOLOGICAL MODELS BASED ON SCALAR SINGLET WITH MINIMAL INTERACTION

Yu.G. Ignat'ev[1], A.A. Agathonov[2]

1 *ignatev-yurii@mail.ru*; Kazan Federal University
2 *a.a.agathonov@gmail.com*; Kazan Federal University

A qualitative analysis and numerical simulation of evolution of the cosmological models based on classical and phantom scalar fields with self-action was performed. The phase portraits of the dynamic systems of classical and phantom fields were constructed. The phase space of such systems becomes multiply connected, the ranges of negative total effective energy unavailable for motion, getting appear there. In the case when attracting centers are situated inside these ranges, the phase trajectories of the classical scalar field in the infinite future tend to limit cycles, winding onto the boundaries of these ranges. The phase trajectories of the phantom scalar field, in turn, get away from the boundaries of ranges with null effective energy and in the infinite future are wound onto one of the symmetrical focuses (centers). Thus, the situations when the Universe, in case of classical scalar field, begins its history with the inflation and ends it up in the Euclidian future, or, in the case of phantom scalar field, in opposite, has the Euclidian start and proceeds to inflation mode after anomalous burst of the acceleration, both become possible. The potentials of scalar fields on the surface of null curvature are distinct from zero and thereby define a certain vacuum state.

Keywords: cosmological model, phantom and classical scalar fields, quality analysis, asymptotic behavior, numerical simulation.

1. Introduction

Standard cosmological models (SCM), (see, e.g., [1]), based on classical scalar field were investigated using methods of qualitative analysis of dynamic systems in papers [2]–[6]. In the Author's paper [7] the qualitative and numerical analysis of the standard cosmological model based on the classical scalar field was over again performed, now reducing the problem to the research of the dynamic system on the 2-dimensional phase plane $\{\Phi, \dot{\Phi}\}$. The microscopic oscillating character of the invariant cosmological acceleration at late stages of the expansion was shown. The results were then generalized to cosmological models with λ - term [8], [9], and the Authors managed to prove the conservation of the oscillating character of the invariant cosmological acceleration at sufficiently small values of the cosmological term. Besides that, in the recent papers the possibility of macroscopic acceleration's achieving non-relativistic mode at late stages of the early Universe[1] was shown by means of averaging the cosmological acceleration over microscopic oscillations. The effective macroscopic equation of state was obtained in [10], [11] by means of direct averaging of the scalar potential and the derivative of the classical field over microscopic oscillations; it was also shown that it tends to non-relativistic state. Besides that, the macroscopic average of the scalar potential's square fluctuations was calculated in these works and it was also shown that at late stages of the cosmological evolution the root-mean-square energy of the microscopic oscillations of the scalar field exceeds the energy of the macroscopic scalar field by many orders of magnitude. In the work [12] the research method mentioned in the cited articles was used: it was applied to the 2-component system "scalar field + liquid" with an arbitrary function $V(\phi)$[2].

However, the introduction of the phantom fields in the structure of the quantum field theory comes across serious problems related either to the probabilistic interpretation of the quantum theory, or to the problem of the vacuum state's stability due to unlimitedness of the negative energy [13]. It is noted in the paper [14] that the terms that lead to the instability, can be considered as corrections, which are only significant at small energies below the level of the physical cutoff. So, notwithstanding various difficulties, the cosmological models with the phantom scalar fields have the right to exist.

The cited above researches demonstrate the necessity to investigate more in details the classical and the phantom scalar fields with the self-action as possible basis of the cosmological model of the early Universe. In the papers [15]–[17] it was carried out the preliminary qualitative analysis of the cosmological

1 i.e. at stages with scalar field's prevalence
2 In particular, for the Higgs potential.

model based on the phantom scalar field with the self-action. In the given work we develop and elaborate the results of researches of the cosmological models based on the classical and the phantom scalar fields. We consider the free classical and phantom fields without a source.

2. The Basic Relations of the Cosmological Model Based on the Single Scalar Field

The Field Equation

The Lagrangian function of the scalar field Φ with the self-action has the following form:

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(e_1 g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - 2V(\Phi)\right), \tag{1}$$

where it is

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - e_2\frac{m^2}{\alpha}\right)^2, \tag{2}$$

where α is the self-action constant, m is the scalar field's mass of quanta; it is $e_1 = 1$ for the classical scalar field, it is $e_1 = -1$ for the phantom scalar field. The potential energy U is defined by the relation:

$$4\pi U = V(\Phi) \equiv -\alpha\frac{\Phi^4}{4} + e_2\frac{m^2\Phi^2}{2} - \frac{m^4}{4\alpha} \quad \Rightarrow \quad 4\pi U = -\alpha\frac{\Phi^4}{4} + e_2\frac{m^2\Phi^2}{2} + \text{Const}, \tag{3}$$

so that

$$U(-\alpha, -e_2, \pm\Phi) \equiv -U(\alpha, e_2, \pm\Phi). \tag{4}$$

The additive constant in the potential function can be dropped, therefore in the limit of the small constant of self-action we have the "massive term" in the Lagrangian (1)

$$U = e_2\frac{m^2\Phi^2}{4\pi}, \quad \alpha \to 0.$$

Thus, in this sense, we can conditionally separate out the following cases;

1. $e_2 = 1$ is the scalar field with attraction;
2. $e_2 = -1$ is the scalar field with repulsion.

The tensor of the energy-momentum of the scalar field relative to the Lagrangian function (1) takes the standard form:

$$T_{ik} = \frac{1}{8\pi}\left(2e_1\Phi_{,i}\Phi_{,k} - g_{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + 2V(\Phi)g_{ik}\right). \tag{5}$$

The equality to null of the covariant divergence of this tensor leads us to the equation of the free scalar field:

$$\Box\Phi + V'(\Phi) = 0. \tag{6}$$

Since we can append an arbitrary constant to the Lagrange function [3], we further omit the corresponding constant in the potential function where it leads to simplifications. Such a renormalization returns us back to the initial Lagrange function of the scalar field with the self-action which was used in the papers [15]–[17], and which we will use further:

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(e_1 g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - e_2 m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right), \tag{7}$$

The enery – momentum reltive to the Lagrangian function (7) is equal to

$$T_{ik} = \frac{1}{8\pi}\left(2e_1\Phi_{,i}\Phi_{,k} - g_{ik}e_1\Phi_{,j}\Phi^{,j} + g_{ik}e_2 m^2\Phi^2 - g_{ik}\frac{\alpha}{2}\Phi^4\right). \tag{8}$$

3 which leads to the renormalization of the cosmological constant

Using the Lagrangian function in the form (7), let us obtain from (6):

$$\Box\Phi + m_*^2\Phi = 0, \tag{9}$$

where m_* is the effective mass of a scalar boson

$$m_*^2 \equiv e_1(e_2 m^2 - \alpha\Phi^2), \tag{10}$$

which theoretically can be an imaginary value.

Let us write out the Einstein equation with the cosmological term[4]

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}, \tag{11}$$

where $\lambda \geq 0$ is the cosmological constant.

The Equations of the Cosmological Model

Let us write out the self-consistent system of equations of the cosmological model based on the free scalar field and space-flat Friedmann metric (9) – (13), supposing $\Phi = \Phi(t)$:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{12}$$

The mentioned system comprises of the single Einstein equation

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = e_1\dot{\Phi}^2 + e_2 m^2\Phi^2 - \frac{\alpha}{2}\Phi^4 + \lambda \tag{13}$$

and the equation of the scalar field:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m_*^2\Phi = 0, \tag{14}$$

where $\dot{f} \equiv df/dt$. Herewith the tensor of the energy-momentum (8) has a structure of the energy – momentum tensor of the isotropic liquid with the following energy density and pressure:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}\left(e_1\dot{\Phi}^2 + e_2 m^2\Phi^2 - \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right); \tag{15}$$

$$p = \frac{1}{8\pi}\left(e_1\dot{\Phi}^2 - e_2 m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right), \tag{16}$$

so that:

$$\varepsilon + p = \frac{e_1}{4\pi}\dot{\Phi}^2.$$

Further we will need the values of 2 kinematic functions of the Friedmann Universe:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \geq 0;\ \Omega(t) = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \tag{17}$$

is the Hubble constant $H(t)$ and the invariant cosmological acceleration $\Omega(t)$, which is invariant and defined in the next way with a use of the *barotrope coefficient* $\kappa = p/\varepsilon$[5]:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa). \tag{18}$$

Differentiating (13) with an account of the definition (17) and the field equation (14) we find:

$$\dot{H} = -e_1\dot{\Phi}^2. \tag{19}$$

Thus, for the classical scalar fields it is $\dot{H} \leq 0$, for the phantom scalar fields it is $\dot{H} \geq 0$, therefore for the classical fields it is $\Omega \leq 1$, and for the phantom it is $\Omega \geq 1$.

4 We use the Planck system of units: $G = c = \hbar = 1$; the Ricci tensor is obtained by convolution of the first and the forth indices $R_{ik} = R^j{}_{ikj}$; the metric has the signature $(-1,-1,-1,+1)$.

5 In the commonly accepted notation $\kappa = w$.

3. The Qualitative Analysis

The Reduction of the System of Equations to the Normal Form

Using the fact that the Hubble constant can be expressed from the Einstein equation (13) through the functions $\Phi, \dot{\Phi}$, proceeding to the dimensionless *Compton time*:

$$m t = \tau; \quad (m \neq 0) \tag{20}$$

and carrying out a standard substitution of variables $\Phi' = Z(\tau)$ ($f' \equiv df/d\tau$), let us reduce the Einstein equation (13) to the dimensionless form:

$$H'^2_m = \frac{1}{3}\left[e_1 Z^2 + e_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \lambda_m\right], \tag{21}$$

and the field equation (14) - to the form of normal autonomous system of ordinary differential equations on the plane $\{\Phi, Z\}$:

$$\begin{aligned} \Phi' &= Z; \\ Z' &= -\sqrt{3} Z \sqrt{e_1 Z^2 + e_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \lambda_m} - e_1 e_2 \Phi + e_1 \alpha_m \Phi^3, \end{aligned} \tag{22}$$

where the following denotations are introduced:

$$\lambda_m \equiv \frac{\lambda}{m^2}; \; \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}.$$

Here it is:

$$\frac{a'}{a} \equiv \Lambda' = H_m \equiv \frac{H}{m}; \quad \Omega = \frac{a a''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}, \tag{23}$$

where

$$\Lambda = \ln a(\tau). \tag{24}$$

Let us note that all the values $\Phi, Z, H_m, \alpha_m, \Omega, \tau$ in this denotation are dimensionless; the time τ is changed at that in the Compton scale.

Thus, we have the autonomous 2-dimensional dynamic system on the phase plane $\{\Phi, Z\}$. To reduce it to the standard notation of the qualitative theory of differential equations (see e.g., [15]) let us assume:

$$\begin{aligned} &\Phi = x; \; Z = y; \\ &P(x, y) = y; \\ &Q(x, y) = -\sqrt{3} y \sqrt{e_1 y^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 + \lambda_m} - e_1 e_2 x + e_1 \alpha_m x^3. \end{aligned} \tag{25}$$

The corresponding normal system of equations in the standard notation has the following form:

$$x' = P(x, y); \quad y' = Q(x, y). \tag{26}$$

The Accessible Regions of Motion on the Phase Plane

For the system of differential equations (22) (or (26)) to have real solution, it is necessary that the following inequality is fulfilled (see Fig. 1 – 3):

$$e_1 y^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 + \lambda_m \geq 0. \tag{27}$$

The boundary of the range (27) is defined by the algebraic equation of the 4th order:

$$e_1 y^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 + \lambda_m = 0. \tag{28}$$

Introducing the variables,

$$u = x^2 - \frac{e_2}{\alpha_m}; \; v = y^2 + e_1\left(\frac{1}{2\alpha_m} + \lambda\right), \tag{29}$$

the inequality (27) can be transformed to the next inequalities:

$$\begin{aligned} u^2 &\le \frac{2e_1}{\alpha_m} v, \quad \alpha > 0; \\ u^2 &\ge \frac{2e_1}{\alpha_m} v, \quad \alpha < 0. \end{aligned} \tag{30}$$

and the equation (28) – to the canonical equation of the parabola with an axis v:

$$u^2 = \frac{2e_1}{\alpha_m} v. \tag{31}$$

Let us notice that for the classical field ($e_1 = 1$) in the case when $\alpha > 0$ it is always $v > 0$, therefore the variable u can take the values only in the bounded interval.

Let us also notice that the curve of the 4th order (28) corresponds to the null value of the Hubble constant i.e null expansion velocity. From the other hand, if we consider the sum of the energy of the scalar field and the cosmological term's contribution as the effective energy of the matter

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon + \frac{1}{8\pi}\lambda = m^2 \varepsilon_m = \frac{m^2}{8\pi}\left(e_1 y^2 + e_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 + \lambda_m\right),$$

the curve (28) will be corresponded by the null effective energy $\varepsilon_{eff} = 0$.

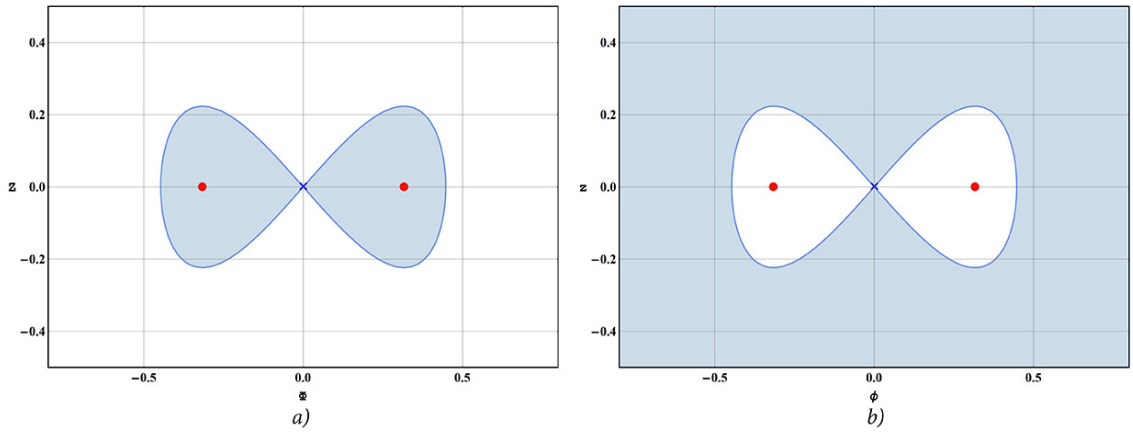


Fig. 1. The prohibited ranges of motion of the dynamic system. **a)** The classical scalar field ($e_1 = 1$, $e_2 = -1$, $\alpha = -10, \lambda = 0$); **b)** The phantom scalar field ($e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $\alpha = 10, \lambda = 0$). The motion is only possible in the unpainted ranges. Here and further the attractive centers are marked with red dots and the saddle points are marked with blue crosses.

At $\lambda = 0$ the external range, which is limited by this curve, is an area of allowable values of the dynamic values for the classical field (Fig. 1 a); the admitted values of the dynamic variables for the phantom field, on the contrary, lie in the internal area (Fig. 1 b). The invertibility property disappears at $\lambda \neq 0$ and the split of the area of allowable values of the dynamic variables into two symmetrical ranges become possible (Fig. 2, 3). Thus, the nonlinear scalar fields, both classical nd phantom ones, are characterized by the violation of the simple connectedness of the phase space and appearance of the white areas, inaccessible for the dynamic system. This fact can lead to the fundamental differences of the asymptotic behavior of the cosmological models based on nonlinear scalar fields.

4. The Consideration of the Models with Single Scalar Fields

Let us now consider the most interesting case of the model $\lambda \ge 0$ with the classical scalar field with the self-action $e_1 = 1$, $e_2 = -1$, $\alpha < 0$. The phase trajectories coming out from the infinity, approach the boundary of the area of allowable values of the dynamic variables with time. It is necessary to understand what happens with these trajectories. Let us notice that the scalar field's equation (6) for the Friedman Universe

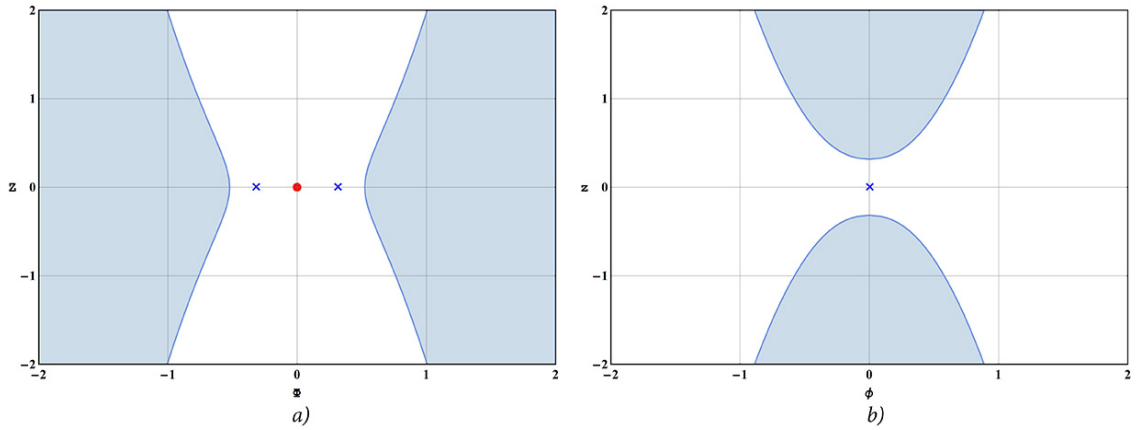


Fig. 2. The prohibited ranges of motion of the dynamic system. **a)** The classical scalar field ($e_1 = 1,\ e_2 = 1,\ \alpha = 10, \lambda = 0.1$); **b)** The phantom scalar field ($e_1 = -1,\ e_2 = 1,\ \alpha = -10, \lambda = 0$). The motion is possible only in the unpainted ranges.

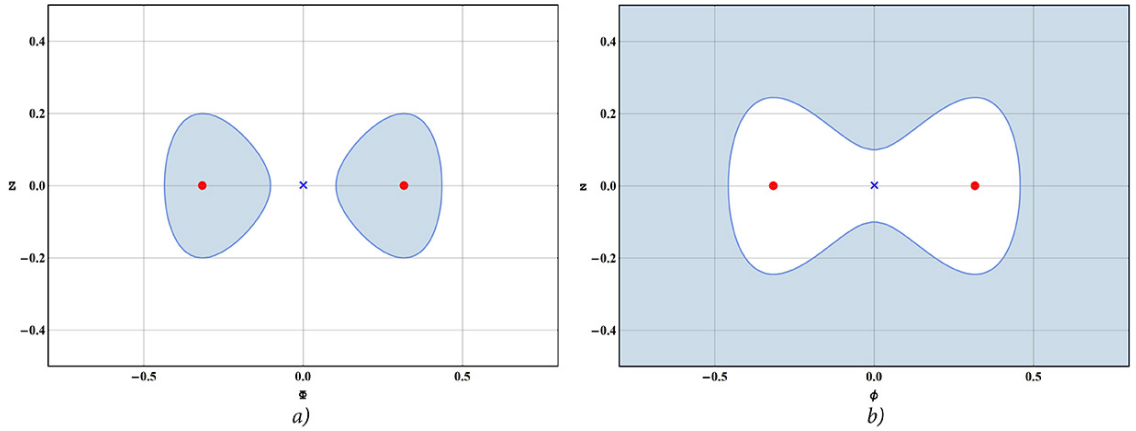


Fig. 3. The prohibited ranges of motion of the dynamic system. **a)** The classical scalar field ($e_1 = 1,\ e_2 = -1,\ \alpha = -10, \lambda = 0.01$); **b)** The phantom scalar field ($e_1 = -1,\ e_2 = 1,\ \alpha = 10, \lambda = 0.01$). The motion is possible only in the unpainted ranges.

has a form of the standard equation of nonlinear oscillations with an account of the friction coefficient $\beta(x, x')$, which is dependent on the coordinate and speed of a particle (see e.g., [7]):

$$x'' + \beta x' + V'(x) = 0, \tag{32}$$

where $\beta = 3H_m(x) = \sqrt{3\varepsilon_m}$. Therefore the approaching of the trajectory to the line $\varepsilon_{eff} = 0$ can be interpreted as fall of the coefficient of friction to null in the neighborhood of the inaccessible range. This means that the system's trajectory should come to the trajectory of free potential nonlinear oscillations:

$$x'' + V'(x) = 0, \tag{33}$$

which has the following integral of the total energy:

$$\frac{x'^2}{2} + V(x) = E_0. \tag{34}$$

Exactly this integral describes the curve (28), *if we renormalize the constant E_0 with the help of cosmological constant*. The Fig. 4 illustrates the results of the numerical integration of the equation of the free oscillations (33).

The Fig. 5 illustrates the results of the numerical integration of the dynamic equations (25) in the neighborhood of the trajectory of the free oscillations.

Thus, in the wide enough range of parameters of the model of nonlinear scalar field, both classical one and phantom one, the appearance of the stable boundary cycle at $t \to +\infty$ is possible; this cycle can be

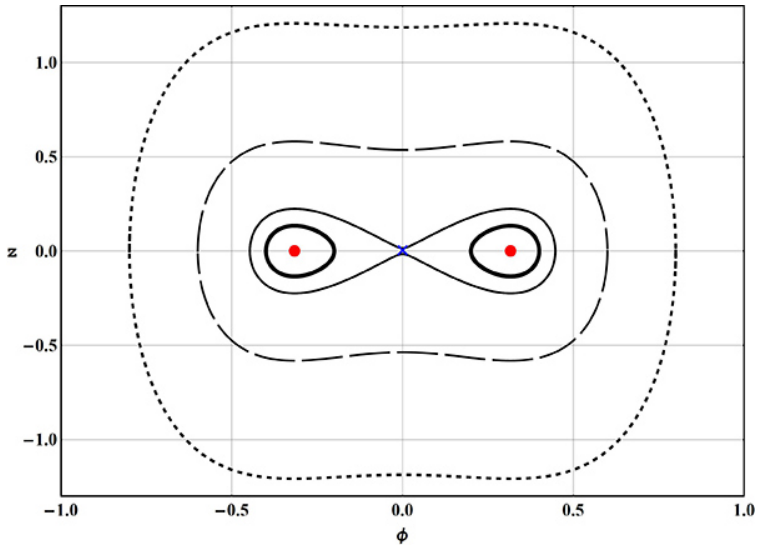


Fig. 4. The phase trajectories of the free oscillations (33): $e_1 = 1,\ e_2 = -1,\ \alpha = -10$; the heavy line is $\lambda = 0.288$; the thin line is $\lambda = 0.400769$; the dash-dotted line is $\lambda = 1.008$, the dotted line is $\lambda = 2.688$.

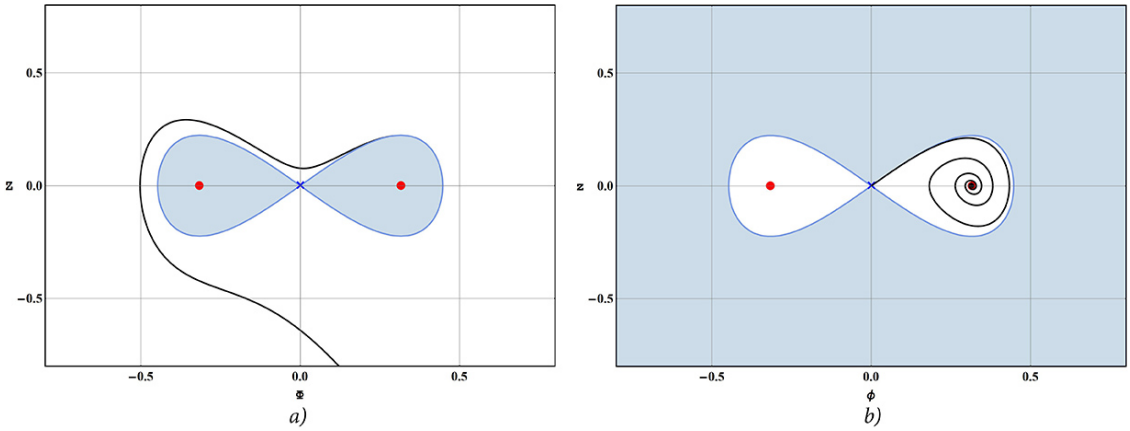


Fig. 5. **a)** The approaching of the phase trajectory of the dynamic system (25) to the trajectory of free potential oscillations (solid blue line) in the case of the classical scalar field (the solid black line): $e_1 = 1,\ e_2 = -1,\ \alpha = -10;\ \lambda = 0$. The permitted area is shown on the Fig. 1a. **b)** The dynamic system's (25) phase trajectory's get off from the trajectory of free potential oscillations (33) (solid blue line) in the case of the phantom scalar field: $e_1 = -1,\ e_2 = 1,\ \alpha = 10, \lambda = 0$. The permitted area is shown on the Fig. 1b.

described by the trajectory with the null effective energy (28) and it represents the free (sustained) oscillations in the potential field. Naturally, there raises a question about the enerfy and pressure of the scalar field in this finite state. Substituting the expression for the energy density of the scalar field (15) in the equation of the boundary trajectory (28), independently on the parameters of the model we obtain for the energy density of the scalar field on the boundary curve the following expression:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{\lambda}{8\pi}. \tag{35}$$

Thus, this value should be negative at $\lambda > 0$ which is possible *only at certain values (and signs!) of the model's parameters*. Substituting the obtained value for the energy density into the expression (16) for the scalar field's pressure, we find on the boundary curve:

$$p_\infty = \frac{1}{8\pi}(2m^2 e_1 \Phi'^2 + \lambda). \tag{36}$$

Let us investigate the asymptotic behavior of the system in the considered case at $\tau \to +\infty$. Since it is $H = \dot{a}/a \to 0$, then $\dot{a} \to o$, it follows that $\ddot{a} \to 0$. Then, as a consequence of the Einstein equation for the space

componenets it should be $p \to \lambda/8\pi,\ t \to +\infty$. According to (15), (16), (35) this is only possible when the condition $\dot{\Phi} \to 0 \to \Phi \to \Phi_0$ and $\varepsilon_{eff} = 0$ fulfills:

$$e_2 m^2 \Phi_0^2 - \frac{\alpha}{2}\Phi_0^4 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2 x_0^2 - \frac{\alpha_m}{2} x_0^4 + \lambda_m = 0.$$

This equation coincides with the curve equation (28) at $y = 0$, consequently it defines the point lying at the intersection of the abscissa axis with this curve and can be rewritten in the terms of the potential $V(\Phi)$ (2):

$$V(\Phi_0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\alpha} + \lambda\right).$$

There could be two of such points $M_0(\pm\Phi_0, 0)$ or four, depending on the model's parameters. Thus, such Universe can tend to the Euclidian Universe with the scalar vacuum fully compensating for the cosmological term, at $t \to +\infty$ and suitable parameters of the model. The process of the transition to this mode of expansion requires addition research.

In the case of the phantom field, apparently, we have unstable boundary cycle (see [4]), off which the phase trajectories repulse at $t \to -\infty$. For such a field the start with the Euclidian Universe and then the transition to irreversible inflation is possible. The question about the existence of the unstable boundary cycle for the phantom field also requires additional complex research. Nevertheless, we can put forward some physical arguments in favor of the existence of the mentioned boundary cycles corresponding to null effective energy, i.e. the Euclidian Universe. For that we can analyse the behavior of the effective energy ε_{eff} (32) and invariant cosmological acceleration Ω (18) in the neighborhood of the trajectory of the null effective energy. Figures 6 and 7 illustrate the plots of these values for the model with the classical field and the figures 8 and 9 illustrate the plots of these values for the phantom field. These plots correspond to the phase trajectories on Fig. 5 and are obtained on the basis of the numerical integration of the system (25).

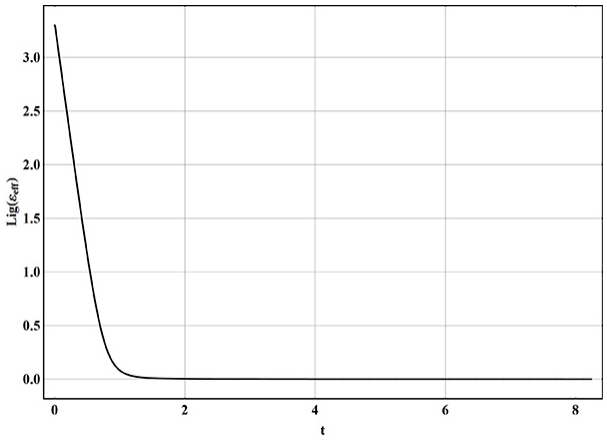


Fig. 6. The evolution of the value $8\pi\varepsilon_{eff}/m^2$, proportional to the effective energy (32) of the classical field: $e_1 = 1,\ e_2 = -1,\ \alpha = -10,\ \lambda = 0,\ \Phi(0) = 10,\ Z(0) = 0.85$. The values of the dimensionless time τ are plotted along the abscissa axis.

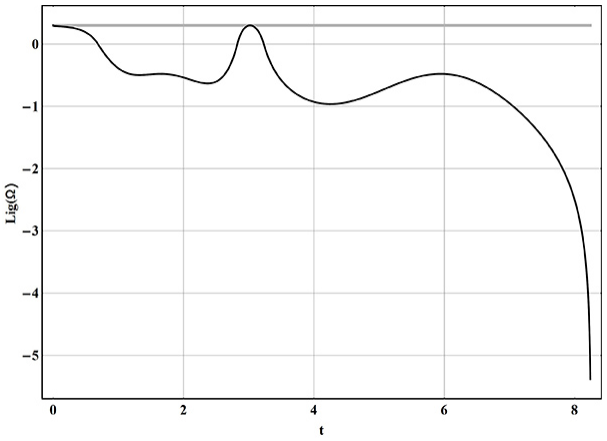


Fig. 7. The evolution of the invariant cosmological acceleration Ω (18) of the classical field: $e_1 = 1,\ e_2 = -1,\ \alpha = -10,\ \lambda = 0,\ \Phi(0) = 10,\ Z(0) = 0.85$. The gray horizontal line corresponds to the value $\Omega = 1$.

For the convenience of the results representation on the entire real axis $\mathbb{R}$ having incomparable scales it was used the function $\mathrm{Lig}(x)$:

$$\mathrm{Lig}(x) \equiv \mathrm{sgn}(x)\log_{10}(1 + |x|),$$

such that:

$$\mathrm{Lig}(x) \approx \begin{cases} x, & |x| \to 0; \\ \mathrm{sgn}(x)\log_{10}|x|, & |x| \to \infty. \end{cases}$$

As it can be seen on the Fig. 6, the value of $E = 8\pi\varepsilon_{eff}/m^2$, starts from the values $E \approx 10^3$ at $\tau = 0$ (to which the lower point of the phase trajectory corresponds on the Fig. 5.a)), and after time $\tau \sim 2$ decreases to the values close to null. Simultaneously, the value of the invariant cosmological acceleration Ω, starts from

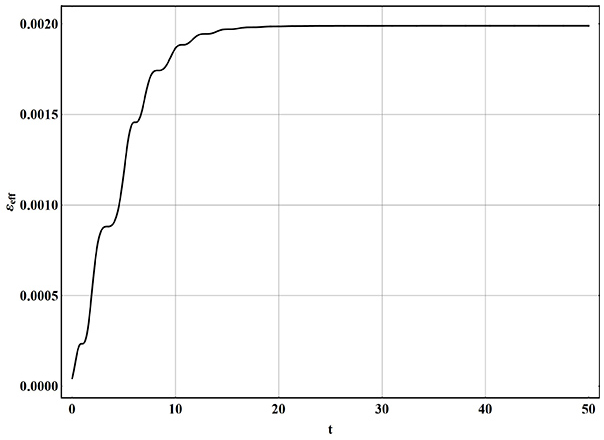


Fig. 8. The evolution of the value $8\pi\varepsilon_{eff}/m^2$, proportional to the effective energy (32) of the phantom field: $e_1 = -1,\ e_2 = 1,\ \alpha = 10,\ \lambda = 0,\ \Phi(0) = 0.3,\ Z(0) = 0.22$. The values of the dimensionless time τ are plotted along the abscissa axis.

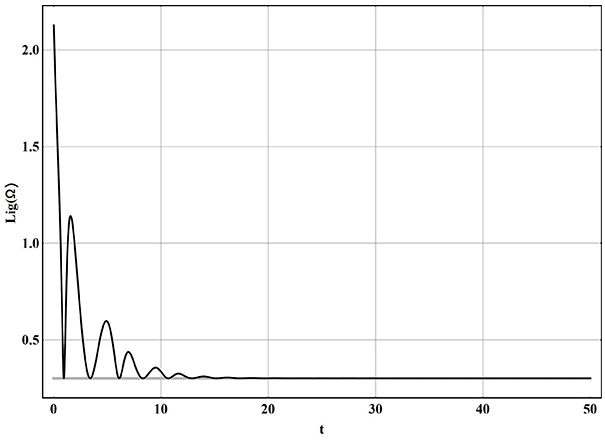


Fig. 9. The evolution of the invariant cosmological acceleration Ω (18) of the phantom field: $e_1 = -1,\ e_2 = 1,\ \alpha = 10,\ \lambda = 0,\ \Phi(0) = 0.3,\ Z(0) = 0.22$. The gray horizontal line corresponds to the value $\Omega = 1$.

the $\Omega = 1$, then sharply falls at $\tau \sim 6$ and reaches great negative values $\Omega \approx -10^5$ at $\tau \sim 8$, which corresponds to abrupt deceleration at transition to the trajectory of free oscillations with null effective energy (see Fig. 7).

In the case of the phantom field (Fig. 8), the value of $E = 8\pi\varepsilon_{eff}/m^2$, starts practically from null values at $\tau = 0$ (to which the point of the phase trajectory located in the neighborhood of the saddle point $M(0,0)$ on the Fig. 5.b)), after time $\tau \sim 10$ reaches values $E \approx 0.002$ and then comes to the constant value. Simultaneously the magnitude of the invariant cosmological acceleration Ω starts with great positive values of $\Omega \approx 100$ at $\tau = 0$ falls in the oscillation mode and at $\tau \sim 10$ tends to the constant value $\Omega = 1$, which corresponds to inflation.

The unique features of the classical and the phantom scalar fields with the self-action, revealed by the Authors and concluding in the possibility of the Euclidian start of the Universe for the phantom field and the Euclidian finish of the Universe for the classical field confirm the possibility of reconsideration of the standard cosmological scenario. Apparently, this scenario can be made more elegant and the well-known contradictions can be avoided. Also, these features point to the necessity of investigation of the combined model built on the asymmetrical scalar doublet of the classical and the phantom scalar fields, which is our intent to do in the second part of the paper. Let us notice, that we have not aimed to adapt the considered models to the well-known theoretical field schemes, therefore the revealed peculiarities have, first and foremost, the fundamental nature. Let us also notice, that at linkage to certain theoretical field schemes it is necessary to take into account that all constants, as well as the time, are normalized on the mass of the scalar field m.

References

1. Gorbunov D.S. Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. – Singapore: World Scientific, 2011. – 504 p.

2. Belinskii V.A. / V.A. Belinskii, L.P. Grishchuk, Ya.B. Zel'dovich, I.M. Khalatnikov // Sov. Phys. JETP. – 1985. - №. 62(2). – P. 195-203.

3. Zhuravlev V.M. Two-component cosmological models with variable equation of state of matter and thermal equilibrium of components / V.M. Zhuravlev // ZETP. – 2001. - № 120. – P. 1042-1061.

4. L.A. Urena-Lopez, M.J. Reyes-Ibarra. – Access mode: arXiv: 0709.3996v2 [astro-ph].

5. Zhuravlev V.M. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane / V.M. Zhuravlev, T.V. Podymova, E.A. Pereskokov // Gravitation and Cosmology. – 2011. – Vol. 17, №. 2. – P. 101-109.

6. L.A. Urena-Lopez, 2012. – Access mode:arXiv:1108.4712v2 [astro-ph.CO].

7. Ignat'ev Yu.G. The standard cosmological model: mathematical, qualitative and numerical analysis / Yu.G. Ignat'ev // Space, Time and Fundamental Interections. – 2016. – №. 3(16). – P. 16-36.

8. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and numerical analysis of the standard cosmological model with Λ-term / Yu.G. Ignat'ev // Space, Time and Fundamental Interections. – 2016. – №. 3(16). – P. 37-47.

9. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Modely Based on a Classical Massive Scalar Field / Yu.G. Ignat'ev // Gravitation and Cosmology. – 2017. – Vol. 23. – P. 131-141.

10. Ignat'ev Yu.G. Averaging of the equations of the standard model over rapid oscillations / Yu.G. Ignat'ev, A.R. Samigullina // Russian Physics Journal. – 2017. – №. 60. – P. 1173-1181.

11. Ignat'ev Yu.G. A Macroscopic View of the Standard Cosmological Model / Yu.G. Ignat'ev, D.Yu. Ignatyev, A.R. Samigullina // Gravitation and Cosmology. – 2018. – Vol. 24. – P. 148-153.

12. Zhuravlev V.M. Qualitative analisys of cosmological models with scalar fields / V.M. Zhuravlev // Space, Time and Fundamental Interections. – 2016. – №. 4(17). – P. 39–51.

13. Cline J.M. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts / J.M. Cline, S. Jeon, G.D. Moore // Physical Review D. – 2004. – vol. 70.

14. Vernov S.Yu. Exact solutions of nonlocal nonlinear field equations in cosmology / S.Yu. Vernov // Theoretical and Mathematical Physics. – 2011. – Vol.166, №.3. – P. 392-402.

15. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model with a Phantom Scalar Field / Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. – 2017. – №. 59. – P. 2074-2079.

16. Ignat'ev Yu.G. The qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on phantom scalar field with self interation / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov // Space, Time and Fundamental Interections. – 2016. – №. 4(17). – P. 52-61.

17. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on a Phantom Scalar Field with Self-Interaction / Yu.G. Ignat'ev and A.A. Agathonov // Gravitation and Cosmology. – 2017. – Vol. 23. – P. 230-235.

18. Bogoyavlensky O.I. Methods of the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics / O.I. Bogoyavlensky. – Moskow: Nauka, 1980. – 320 p.

УДК 530.12:531.51:519.711.3

ОСОБЕННОСТИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА АСИММЕТРИЧНОМ СКАЛЯРНОМ ДУБЛЕТЕ

Ю.Г. Игнатьев[1], И.А. Кох[2]

1 *ignatev_yu@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *irina_kokh@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Проведены качественный анализ и численное моделирование эволюции космологических моделей, основанных на дублете классического и фантомного скалярных полях с самодействием. Выделены 3 характерных типа поведения космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете.

Ключевые слова: асимметричный скалярный дублет, космологические модели, качественный анализ, численное моделирование, СКМ Maple.

1. Основные соотношения космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете

Функция Лагранжа и потенциал взаимодействия

Рассмотрим систему, состоящую из двух минимально взаимодействующих скалярных полей, классического и фантомного, которую будем называть *асимметричным скалярным дублетом*. Функция Лагранжа скалярного дублета, состоящего из классического и фантомного скалярных полей с самодействием в форме Хиггса с минимальной связью имеет вид [1, 2]:

$$L = \frac{1}{8\pi}(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - 2V(\Phi)) - \frac{1}{8\pi}(g^{ik}\varphi_{,i}\varphi_{,k} + 2v(\varphi)), \qquad (1)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - e\frac{m^2}{\alpha}\right)^2; \tag{2}$$

$$v(\varphi) = -\frac{\beta}{4}\left(\varphi^2 - \varepsilon\frac{\mathfrak{m}^2}{\beta}\right)^2 \tag{3}$$

– потенциальная энергия соответствующих скалярных полей, α и β – константы их самодействия, m и $\mathfrak{m}$ – их массы квантов. Вводя суммарный потенциал

$$U(\Phi,\varphi) = V(\Phi) + v(\varphi) = -\frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - e\frac{m^2}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{4}\left(\varphi^2 - \varepsilon\frac{\mathfrak{m}^2}{\beta}\right)^2 \equiv U(e,\varepsilon,\alpha,\beta;\Phi,\varphi), \tag{4}$$

можно сделать следующие выводы:
1. Потенциал $U(\Phi,\varphi)$ обладает следующими симметриями:

$$U(\pm\Phi,\pm\varphi) = U(\Phi,\varphi); \tag{5}$$

$$U(-e,-\varepsilon,-\alpha,-\beta;\Phi,\varphi) = -U(e,\varepsilon,\alpha,\beta;\Phi,\varphi). \tag{6}$$

2. При $\{e=1,\varepsilon=1\}$ функция $U(\Phi,\varphi)$ имеет абсолютный максимум в начале координат фазовой плоскости $\{\Phi,\varphi\}$ $M_0(0,0)$, а при $\{e=-1,\varepsilon=-1\}$ – абсолютный минимум – всюду $e\varepsilon=1$, при $e\varepsilon=-1$ – условный экстремум (седловая точка).
3. При $e\alpha>0$ и $\varepsilon\alpha<0$ функция $U(\Phi,\varphi)$ имеет абсолютный максимум в точках $M_{10}(-m/\sqrt{e\alpha},0)$ и $M_{20}(m/\sqrt{e\alpha},0)$ при $\alpha<0$ (т.е. $\alpha<0,e=-1,\varepsilon=+1$) и абсолютный минимум в этих точках при $\alpha>0$ (т.е. $\alpha>0,e=+1,\varepsilon=-1$) – всюду $e\varepsilon=-1$; при $e\alpha>0$ и $\varepsilon\alpha>0$ – условный экстремум в этих точках (седловые точки) – всюду $e\varepsilon=1$.
4. При $\varepsilon\beta>0$ и $e\beta<0$ функция $U(\Phi,\varphi)$ имеет абсолютный максимум в точках $M_{01}(0,-m/\sqrt{\varepsilon\beta})$ и $M_{02}(0,m/\sqrt{\varepsilon\beta})$ при $\beta<0$ (т.е. $\beta<0,e=+1,\varepsilon=-1$) и абсолютный минимум в этих точках при $\beta>0$ (т.е. $\beta>0,e=-1,\varepsilon=+1$) – всюду $e\varepsilon=-1$; при $\varepsilon\beta>0$ и $e\beta>0$ – условный экстремум в этих точках (седловые точки), т.е. при $e\varepsilon=1$.
5. При $e\alpha>0$, $\varepsilon\beta>0$ и $\alpha\beta>0$ функция $U(\Phi,\varphi)$ имеет абсолютный максимум в точках $M_{11}(-m/\sqrt{e\alpha},-m/\sqrt{\varepsilon\beta})$, $M_{12}(-m/\sqrt{e\alpha},m/\sqrt{\varepsilon\beta})$, $M_{21}(m/\sqrt{e\alpha},-m/\sqrt{\varepsilon\beta})$ и $M_{22}(m/\sqrt{e\alpha},m/\sqrt{\varepsilon\beta})$ при $\alpha>0$ (т.е. $\alpha>0,\beta>0,e=1,\varepsilon=1$) и абсолютный минимум в этих точках при $\alpha<0$ – всюду $e\varepsilon=1$; при $\alpha\beta<0$ – условный экстремум в этих точках (седловые точки), т.е. при $e\varepsilon=-1$.

Таким образом, учитывая тот факт, что стационарные точки динамической системы с функцией Лагранжа вида (1) совпадают со стационарными точками потенциала $U(\Phi,\varphi)$, можно утверждать следующее. В зависимости от знаков параметров $\{e,\varepsilon,\alpha,\beta\}$ потенциала $U(e,\varepsilon,\alpha,\beta;\Phi,\varphi)$ соответствующая динамическая система может иметь 1, 3 или 9 стационарных точек, среди которых есть притягивающие (абсолютный минимум), отталкивающие (абсолютный максимум) и седловые (условный экстремум) точки.

Уравнения космологической модели

Тензор энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (1) принимает стандартный вид:

$$T_{ik} = \frac{1}{8\pi}(2\Phi_{,i}\Phi_{,k} - g_{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + 2V(\Phi)g_{ik}) - \frac{1}{8\pi}(2\varphi_{,i}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j}\varphi^{,j} - 2v(\varphi)g_{ik}). \tag{7}$$

Вариация функции Лагранжа (1) приводит к уравнениям поля:

$$\Box\Phi + V'(\Phi) = 0;$$
$$\Box\varphi + v'(\varphi) = 0.$$

Производя перенормировку функции Лагранжа (1), приведем ее к виду:

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - em^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right) - \frac{1}{8\pi}\left(g^{ik}\varphi_{,i}\varphi_{,k} + \varepsilon\mathfrak{m}^2\varphi^2 - \frac{\beta}{2}\varphi^4\right). \tag{8}$$

Соответствующая перенормировка тензора энергии-импульса дает

$$T_{ik} = \frac{1}{8\pi}\left(2\Phi_{,i}\Phi_{,k} - g_{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + g_{ik}em^2\Phi^2 - g_{ik}\frac{\alpha}{2}\Phi^4\right) - \frac{1}{8\pi}\left(2\varphi_{,i}\varphi_{,k} - g_{ik}\varphi_{,j}\varphi^{,j} - g_{ik}\varepsilon\mathfrak{m}^2\varphi^2 + g_{ik}\frac{\beta}{2}\varphi^4\right). \quad (9)$$

Стандартной вариационной процедурой над функцией Лагранжа в форме (8) получаются уравнения свободных классического и фантомного полей:

$$\Box\Phi + m_*^2\Phi = 0; \quad (10)$$

$$\Box\varphi + \mathfrak{m}_*^2\varphi = 0, \quad (11)$$

где m_* и $\mathfrak{m}_*$ – эффективные массы скалярных бозонов:

$$\begin{aligned} m_*^2 &= em^2 - \alpha\Phi^2; \\ \mathfrak{m}_*^2 &= -\varepsilon\mathfrak{m}^2 + \beta\varphi^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее рассмотрим самосогласованную систему уравнений космологической модели (10), (11) и уравнений Эйнштейна (13) [1]

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}, \quad (13)$$

где $\lambda \geq 0$ – космологическая постоянная, основанную на свободном асимметричном скалярном дублете и пространственно-плоской метрики Фридмана (1)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (14)$$

полагая $\Phi = \Phi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. При этом тензор энергии-импульса (9) принимает структуру тензора энергии-импульса изотропной жидкости с плотностью энергии $\mathscr{E}$ и давлением p:

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_f, \quad p = p_c + p_f; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_c &= \frac{1}{8\pi}\left(\dot{\Phi}^2 + em^2\Phi^2 - \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right); \mathscr{E}_f = \frac{1}{8\pi}\left(-\dot{\varphi}^2 + \varepsilon\mathfrak{m}^2\varphi^2 - \frac{\beta}{2}\varphi^4\right); \\ p_c &= \frac{1}{8\pi}\left(\dot{\Phi}^2 - em^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right); p_f = \frac{1}{8\pi}\left(-\dot{\varphi}^2 - \varepsilon\mathfrak{m}^2\varphi^2 + \frac{\beta}{2}\varphi^4\right). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом выполняется тождество:

$$\mathscr{E} + p \equiv \frac{1}{4\pi}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{4\pi}\dot{\varphi}^2. \quad (17)$$

Исследуемая система состоит из одного уравнения Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \left(\dot{\Phi}^2 + em^2\Phi^2 - \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right) - \left(\dot{\varphi}^2 - \varepsilon\mathfrak{m}^2\varphi^2 + \frac{\beta}{2}\varphi^4\right) + \lambda \quad (18)$$

и двух уравнений скалярного поля:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + em^2\Phi - \alpha\Phi^3 = 0; \quad (19)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \varepsilon\mathfrak{m}^2\varphi + \beta\varphi^3 = 0. \quad (20)$$

1 Мы используем планковскую систему единиц: $G = c = \hbar = 1$; тензор Риччи получается сверткой первого и четвертого индексов $R_{ik} = R^{j}_{ikj}$; метрика имеет сигнатуру $(-1,-1,-1,+1)$.

2. Качественный анализ космологической модели

Приведение системы уравнений к нормальному виду

Переходя к безразмерному комптоновскому времени: $mt = \tau$; ($m \neq 0$) и проводя стандартную замену переменных:

$$\Phi' = Z(\tau), \;\; \varphi' = z(\tau), \;\; (f' \equiv df/d\tau), \tag{21}$$

Вводя далее, согласно (2) и (3), потенциальную энергию классического, $V(\Phi)$, и фантомного, $v(\varphi)$, полей запишем выражение для *эффективной приведенной плотности энергии*

$$\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z) = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_f + \Lambda_m = \left(\frac{Z^2}{2} - V(\Phi)\right) - \left(\frac{z^2}{2} - v(\varphi)\right) + \Lambda_m, \tag{22}$$

где введены «полные энергии» для классического и фантомного полей:

$$\mathscr{E}_c = \frac{Z^2}{2} - V(\Phi); \quad \mathscr{E}_f = -\left(\frac{z^2}{2} - v(\varphi)\right), \tag{23}$$

$$\alpha_m = \frac{\alpha}{m^2}, \quad \beta_m = \frac{\beta}{m^2}, \quad \lambda_m = \frac{\lambda}{m^2}, \Lambda_m = \lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m} - \frac{\mu^2}{2\beta_m}, \quad \mu \equiv \frac{\mathfrak{m}}{m}. \tag{24}$$

Введем также эффективное приведенное давление скалярного дублета:

$$p_m(\Phi, Z, \varphi, z) = p_c + p_f - \Lambda_m = \left(\frac{Z^2}{2} + V(\Phi)\right) - \left(\frac{z^2}{2} + v(\varphi)\right) - \Lambda_m. \tag{25}$$

Таким образом, уравнение Эйнштейна (18) приведем к безразмерному виду:

$$\frac{a'^2}{a^2} \equiv H'^2_m = \frac{1}{3}\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z), \tag{26}$$

а уравнения поля (19), (20) – к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_4 : \{\Phi, Z, \varphi, z\}$

$$\Phi' = Z; \quad Z' = -Z\sqrt{3\mathscr{E}_m} - e\Phi + \alpha_m\Phi^3; \tag{27}$$

$$\varphi' = z; \quad z' = -z\sqrt{3\mathscr{E}_m} + \varepsilon\mu^2\varphi - \beta_m\varphi^3.$$

Далее, для того, чтобы система дифференциальных уравнений (27) имела вещественное решение, необходима неотрицательность выражения под радикалом в уравнениях, т.е., неотрицательность эффективной энергии системы с учетом космологической постоянной:

$$\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z) \equiv Z^2 + e\Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 - z^2 + \varepsilon\mu^2\varphi^2 - \frac{\beta_m}{2}\varphi^4 + \lambda_m \geq 0. \tag{28}$$

Для приведения системы (27) к стандартным обозначениям качественной теории (см., например, [3])

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x_1, \ldots, x_n), i = \overline{1, n} \tag{29}$$

примем следующие обозначения:

$$\begin{array}{l} \Phi = x \quad (= x_1); \quad \varphi = y \quad (= x_2); \\ F_1 \equiv P = Z \quad (= x_3); \quad F_3 \equiv p = z \quad (= x_4); \\ F_2 \equiv Q = -\sqrt{3}Z\sqrt{\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z)} - ex + \alpha_m x^3; \\ F_4 \equiv q = -\sqrt{3}z\sqrt{\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z)} + \varepsilon\mu^2 y - \beta_m y^3. \end{array} \tag{30}$$

Соответствующая нормальная система уравнений в стандартных обозначениях (29) имеет вид:

$$x' = P; \;\; Z' = Q; \;\; y' = p; \;\; z' = q. \tag{31}$$

Необходимое условие вещественности решения (28) перепишется в виде:

$$\left(Z^2 + ex^2 - \frac{\alpha_m}{2}x^4\right) - \left(z^2 - \varepsilon\mu^2 y^2 + \frac{\beta_m}{2}y^4\right) + \lambda_m \geq 0. \tag{32}$$

Уникальной особенностью рассматриваемой системы является изменение топологии фазового пространства вследствие появления в нем областей, в которых невозможно движение. Эти области выделяются условием отрицательности эффективной полной энергии (22), области же доступные фазовым траекториям определяются условием (28). Гиперповерхности нулевой эффективной энергии $S_3^0 \subset \mathbb{R}_4$, разделяющие фазовое пространство на области допустимых и запрещенных значений динамических переменных, описываются уравнениями:

$$\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z) = 0 \Rightarrow \frac{Z^2}{2} - V(\Phi) - \left(\frac{z^2}{2} - \upsilon(\varphi)\right) + \Lambda_m = 0. \tag{33}$$

Заметим, что вследствие определения (24) перенормированное значение космологической постоянной Λ_m может принимать, вообще говоря, и отрицательные значения. Заметим далее, что уравнения поля (19), (20) имеют вид уравнений свободных колебаний в поле потенциала 4-го порядка

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{34}$$

с нелинейным «коэффициентом трения»:

$$k = \sqrt{3\mathscr{E}_m(\Phi, Z, \varphi, z)} \equiv \sqrt{3(\mathscr{E}_c(\Phi, Z) + \mathscr{E}_f(\varphi, z) + \Lambda_m)}. \tag{35}$$

Согласно теории колебаний, соответствующая динамическая система должна, теряя полную энергию вследствие диссипативного процесса, соответствующего силе трения в (34), опуститься с течением времени в минимум потенциальной энергии при наличии последнего, в случае же его отсутствия безгранично скатываться «вниз». Специфика нашей задачи заключается, во-первых, в существенной зависимости коэффициента трения от полной энергии системы, во-вторых, в нелинейной связи подсистем через «коэффициент трения» и, в-третьих, в факторе отрицательности кинетической энергии фантомной компоненты.

Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются системой алгебраических уравнений (см., например, [3, 4]):

$$M: \quad F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{36}$$

Согласно (30) и (36) эти точки определяются системой уравнений:

$$Z = 0, \quad z = 0; \quad x(e - \alpha_m x^2) = 0; \quad y(\varepsilon\mu^2 - \beta_m y^2) = 0. \tag{37}$$

Замечание 1. Отметим следующее важное обстоятельство. В случае, если в конкретной особой точке M_i выполняется условие вещественности (32), то, в принципе, фазовые траектории динамической системы (29) – (30) могут входить в такую особую точку, или выходить из нее. Если же особая точка находится в запрещенной области фазового пространства, фазовые траектории динамической системы не могут проходить через эту особую точку, а лишь притягиваться к границе запрещенной области или отталкиваться от нее в зависимости от характера особой точки.

Таким образом, как мы указывали выше, динамическая система (29) – (30) имеет следующие 9 особых точек.

1. M_0: При любых значениях α_m и β_m :

$$M_0 : (0, 0, 0, 0). \tag{38}$$

Необходимое условие вещественности решений в особой точке:

$$\lambda_m \geq 0.$$

2. $\boldsymbol{M_{01}}$, $\boldsymbol{M_{02}}$: При любых α_m и $\varepsilon\beta_m > 0$:

$$M_{01}\left(0,0,\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\beta_m}},0\right);\quad M_{02}\left(0,0,-\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\beta_m}},0\right). \tag{39}$$

Необходимое условие вещественности решений в особых точках $\boldsymbol{M_{01}}$, $\boldsymbol{M_{02}}$:

$$\sigma_1^2 \equiv \frac{3}{4}\left(\lambda_m + \frac{\mu^4}{2\beta_m}\right) \geq 0. \tag{40}$$

3. $\boldsymbol{M_{10}}$, M_{20}: При любых β_m и $e\alpha_m > 0$:

$$M_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{e\alpha_m}},0,0,0\right);\quad M_{20}\left(-\frac{1}{\sqrt{e\alpha_m}},0,0,0\right). \tag{41}$$

Необходимое условие вещественности решений в особых точках $\boldsymbol{M_{10}}$, M_{20}:

$$\sigma_2^2 \equiv \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\alpha_m} + \lambda_m\right) \geq 0. \tag{42}$$

4. M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}: При $e\alpha_m > 0$ и $\varepsilon\beta_m > 0$:

$$\begin{gathered} M_{11}\left(\tfrac{1}{\sqrt{e\alpha_m}},0,\tfrac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\beta_m}},0\right); M_{12}\left(\tfrac{1}{\sqrt{e\alpha_m}},0,-\tfrac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\beta_m}},0\right); \\ M_{21}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{e\alpha_m}},0,\tfrac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\beta_m}},0\right); M_{22}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{e\alpha_m}},0,-\tfrac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\beta_m}},0\right). \end{gathered} \tag{43}$$

Необходимое условие вещественности решений в особых точках M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}:

$$\sigma_3^2 \equiv \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\alpha_m} + \frac{\mu^4}{2\beta_m} + \lambda_m\right) \geq 0. \tag{44}$$

3. Численное моделирование динамической системы

Заметим сразу, что большое количество параметров космологической модели, основанной на асимметричном дублете: $\{e,\varepsilon,\alpha_m,\beta_m,\mu,\lambda_m\}$ (всего 6), делают перебор всех возможных вариантов весьма громоздкой задачей, поэтому ниже мы перечислим лишь некоторые, наиболее интересные на наш взгляд варианты. Представленные ниже фазовые траектории получены с помощью авторского пакета программ `DifEqTools` [5], являющегося приложением к прикладному пакету `Maple`. Как показали исследования, динамическая система (27) может иметь 3 типа поведения.

A: Стандартный Фазовые траектории в обеих плоскостях, Σ_Φ и Σ_φ, накручиваются на центры/фокусы (см., например, Рис. 1 – 2). В рассмотренном случае величина космологического ускорения имеет скачок $\Omega_{max} > 1$, после которого космологическая модель выходит на инфляционный режим $\Omega = 1$.

B: Отскок Фазовые траектории в плоскости Σ_Φ асимптотически стремятся к линии $Z = 0$, тогда как фазовые траектории в плоскости Σ_φ, отталкиваясь от седловых точек M_{01}, M_{02}, уходят на бесконечность по асимптоте $\varphi = z, \tau \to \infty$ (см., например, Рис. 3 – 4). В этом случае космологическое ускорение после всплеска выходит на режим инфляции.

C: Прилипание Фазовые траектории в обеих плоскостях Σ_Φ и Σ_φ прижимаются к гиперповерхности нулевой эффективной энергии. Это происходит по причине отталкивания фазовой траектории от седловой точки (см, например, Рис. 5) или по причине притяжения к недоступному центру/фокусу (см., например, Рис. 6). В этом случае эффективная энергия быстро падает до нуля, космологическое ускорение стремится к $-\infty$ – происходит очень резкое торможение.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологических моделей основанных на асимметричном скалярном дублете: классическое + фантомное скалярное поле. I. случай минимально взаимодействующих скалярных полей: качественный анализ / Ю.Г. Игнатьев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – № 2. – С. 36–52.

2. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете с минимальными связями. I. Качественный анализ модели / Ю.Г. Игнатьев, И.А. Кох // Известия ВУЗов, Физика. – 2018. – Т. 61, № 6. – С. 72–81.

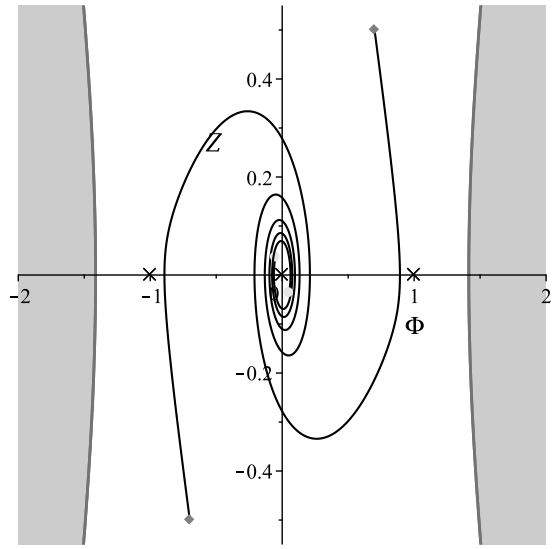


Рис. 1. Фазовые траектории классического поля в модели с параметрами $[\alpha_m = 1, \beta_m = -1, e = 1, \varepsilon = -1, \mu = 1, \lambda_m = 0]$ и начальными условиями $[\Phi(0) = 0.7, Z(0) = 0.5, \varphi(0) = 0.1, z(0) = 0]$.

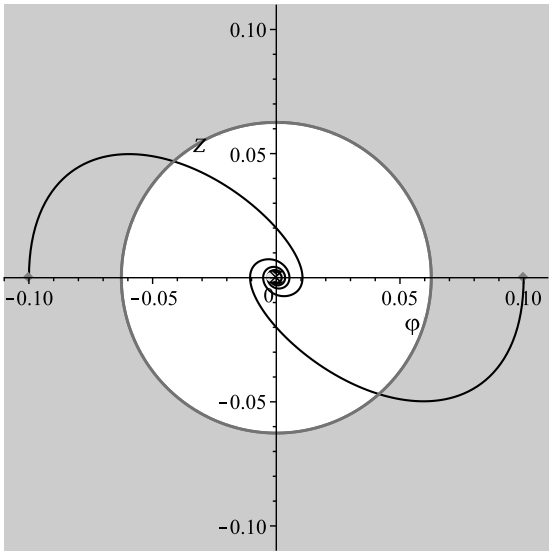


Рис. 2. Фазовые траектории фантомного поля в модели с параметрами $[\alpha_m = 1, \beta_m = -1, e = 1, \varepsilon = -1, \mu = 1, \lambda_m = 0]$ и начальными условиями $[\Phi(0) = 0.7, Z(0) = 0.5, \varphi(0) = 0.1, z(0) = 0]$.

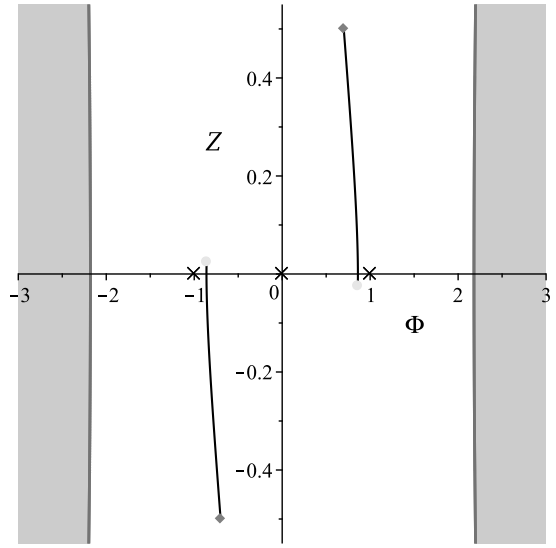


Рис. 3. Фазовые траектории классического поля в модели с параметрами $[\alpha_m = 1, \beta_m = -1, e = 1, \varepsilon = -1, \mu = 1, \lambda_m = 0]$ и начальными условиями $[\Phi(0) = 0.7, Z(0) = 0.5, \varphi(0) = 1.5, z(0) = 0]$.

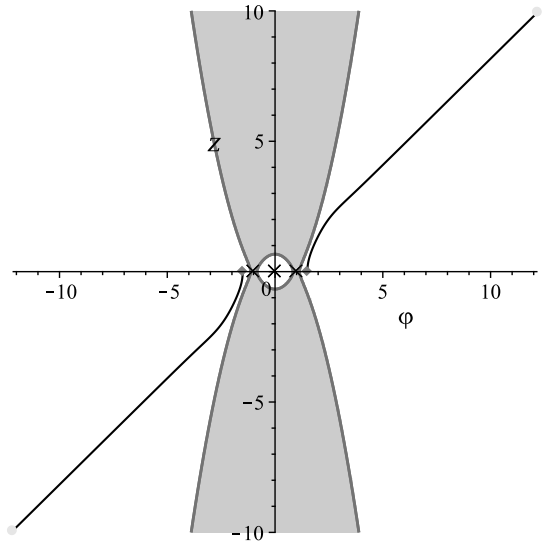


Рис. 4. Фазовые траектории фантомного поля в модели с параметрами $[\alpha_m = 1, \beta_m = -1, e = 1, \varepsilon = -1, \mu = 1, \lambda_m = 0]$ и начальными условиями $[\Phi(0) = 0.7, Z(0) = 0.5, \varphi(0) = 1.5, z(0) = 0]$.

3. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия “Справочная математическая библиотека” / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1989. – 489 с.

4. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

5. Игнатьев Ю.Г. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. III. Визуализация нелинейных динамических систем и приложения к механике и космологии / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – Вып. 3(20). – 2017. – С. 28–54.

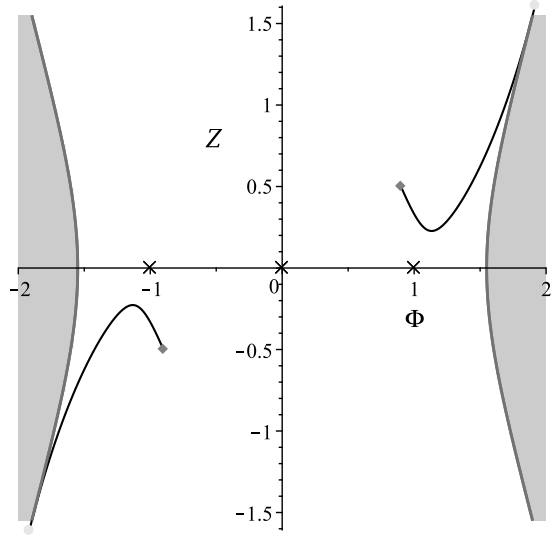


Рис. 5. Фазовые траектории классического поля в модели с параметрами $[\alpha_m = 1, \beta_m = 1, e = 1, \varepsilon = 1, \mu = 1, \lambda_m = 0]$ и начальными условиями $[\Phi(0) = 0.9, Z(0) = 0.5, \varphi(0) = 1.3, z(0) = 0.5]$.

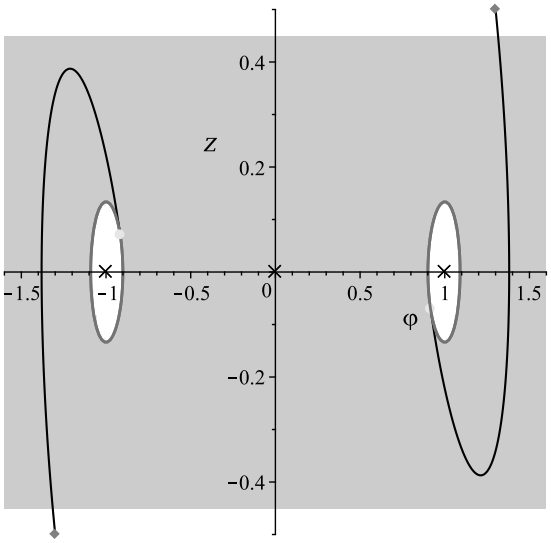


Рис. 6. Фазовые траектории фантомного поля в модели с параметрами $[\alpha_m = 1, \beta_m = 1, e = 1, \varepsilon = 1, \mu = 1, \lambda_m = 0]$ и начальными условиями $[\Phi(0) = 0.9, Z(0) = 0.5, \varphi(0) = 1.3, z(0) = 0.5]$.

FEATURES OF THE COSMOLOGICAL MODEL, BASED ON AN ASYMMETRIC SCALAR DOUBLET

Yu.G. Ignatyev, I.A. Kokh

Qualitative and numerical analysis of cosmological models based on classic and phantom doublet of scalar fields with self-interaction. Three characteristic types of behavior of the cosmological model, based on an asymmetric scalar doublet, are described.

Keywords: asymmetric scalar doublet, cosmological model, quality analysis, numerical simulation, CAS Maple.

УДК 530.12:531.51:519.711.3

ЧИСЛЕННО - АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE: РАСШИРЕНИЕ ВИЗУАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПАКЕТА «DIFEQTOOLS», ТЕСТИРОВАНИЕ НА ТОЧНОСТЬ И СКОРОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ю.Г. Игнатьев[1], А.Р. Самигуллина[2]

1 *ignatev_yu@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *alsu_sam@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Представлен расширенный вариант авторского пакета DifEqTools для автоматизации научных исследований нелинейных динамических систем, являющийся приложением к СКМ Maple 2017. Показаны примеры исследования нелинейных динамических систем.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, численное моделирование, СКМ Maple, автоматизация численного моделирования, визуализация математических моделей.

В ряде предыдущих работ Авторов [1], [2], [3] были описаны численно-аналитические методы исследования нелинейных динамических систем, а в работах [4], [5] был представлен Авторский пакет `DifEqTools`, предназначенный для автоматизированного исследования и визуализации нелинейных динамических систем произвольной размерности. В работах [6][1], [8] с помощью этого пакета

1 см. также [7]

было проведено усреднение динамических функций стандартной космологической модели (СКМ) на стадии доминирования скалярного поля. Эти исследования подтвердили необходимость развития численно-аналитических методов исследования нелинейных динамических систем и важность автоматизации процесса их исследования и визуализации соответствующих моделей для качественного проведения фундаментальных исследований. В процессе разработки специализированного пакета, предназначенного, в первую очередь, для физиков - теоретиков, остались не решенными вопросы о точности и скорости вычислений. Решение этих вопросов необходимо для исследователей, проводящих конкретные вычисления, с целью выбора оптимальных параметров процедур численного интегрирования, а именно, методов численного интегрирования, минимальных порогов точности вычислений, максимального количества шагов интегрирования, т.е., таких параметров, которые, с одной стороны, обеспечивают необходимую точность интегрирования, а с другой стороны – приемлемое время построения численной модели. В данной работе мы, с одной стороны, представляем дополнительные программные процедуры, позволяющие проводить автоматизированное тестирование программ `DifEqTools` на точность и скорость вычислений, а с другой стороны – специализированные программы тестирования пакета на основе сравнения численного решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), как с известными точными решениями, так и численными решениями повышенной точности. Кроме того, последняя версия СКМ Maple (версия 2017) предоставляет дополнительные возможности визуализации математических моделей, которые учтены в расширенной версии авторского пакета `DifEqTools` 2018 года. Сам модернизированный пакет `DifEqTools` будет предоставлен в свободное пользование на сайте журнала «Пространство, время и фундаментальные взаимодействия» http://www.stfi.ru/ в ближвйшее время.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / А.Р. Самигуллина, Ю.Г.Игнатьев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – № 4(17). – С.78-105.

2. Игнатьев Ю.Г. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем В СКМ Maple. II. Автоматизация математического анализа нелинейных математических моделей / Ю.Г.Игнатьев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. -– 2017. — № 2(19) — С.74-83.

3. Игнатьев Ю.Г. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем В СКМ Maple. III. Визуализация нелинейных динамических систем и приложения к механике и космологии / Ю.Г.Игнатьев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. - № 3(20). – С.28-56.

4. Игнатьев Ю.Г. Программный комплекс численно - аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып.4(17). – С.147-148.

5. Игнатьев Ю.Г. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / Ю.Г.Игнатьев, А.Р. Самигуллина // Пакет программ. – Режим доступа: `http://www.stfi.ru/ru/software.html`

6. Ignat'ev Yu.G. A Macroscopic View of the Standard Cosmological Model / Yu.G. Ignat'ev, D. Yu. Ignatyev, A. R. Samigullina // Grav. and Cosmol. – 2018. – Vol.24. – № 2. – P.148-153.

7. Ignat'ev Yu.G. A macroscopic view to the standard cosmological model / Yu.G. Ignat'ev, D.Yu. Ignatyev, A.R. Samigullina // – Access mode: arXiv:1705.05000 [gr-qc].

8. Игнатьев Ю.Г. Усреднение уравнений стандартной космологической модели по быстрым осцилляциям / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина // Изв. вузов. Физика. – 2017. — Т.60, №7. — С.78-84.

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS OF MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS IN SCM MAPLE: EXTENSION OF VISUAL CAPABILITIES OF "DIFEQTOOLS" PACKAGE, TESTING FOR ACCURACY AND SPEED OF CALCULATIONS

Yu.G. Ignatev, A.R. Samigullina

An extended version of the author's DifEqTools package for automation of scientific research of nonlinear dynamic systems, which is an application to CAS Maple 2017, is presented. Examples of investigation of nonlinear dynamic systems are shown.
Keywords: onlinear dynamic systems, numerical modeling, CAS Maple, automation of numerical modeling, visualization of mathematical models.

УДК 514.822

ПРИНЦИП МАТЕРИАЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

В.М. Журавлев[1]

1 *zhvictorm@gmail.com*; Ульяновский государственный университет, НИТИ им. С.П. Капицы

В работе формулируется принцип материальности пространства и на его основе проводится краткий критический анализ общей идеологии Специальной и Общей теорий относительности. Рассматривается связь нового принципа с ранее развитой Топологической теорией фундаментальных полей (ТТФП). Рассматривается способ конструктивной реализации принципа материальности в рамках физической теории фундаментальных полей. Выводятся общие уравнения динамики маркеров материальных точек физического пространства и устанавливается их связь с уравнениями ТТФП.

Ключевые слова: свойства пространства и времени, топологическая теория фундаментальных полей, динамика маркеров материальных точек.

1. Введение

В работах [1, 2, 3, 4, 5, 6] был предложен новый подход к описанию динамики материи, включая электромагнитное и гравитационное поля, который далее будет называться **топологической теорией фундаментальных полей** или сокращенно **ТТФП**. Одним из элементов данного подхода является возможность, исходя из геометрических и топологических представлений о структуре пространства, получить адекватное описание квантовых явлений, процессов и объектов, в том числе элементарных частиц. Такой геометрический подход является альтернативным к геометрическому подходу Общей теории относительности (ОТО). Однако он позволяет построить совместную с квантовой теорией геометрическую теорию и гравитационного поля, и электромагнитного. Хотя общая конструкция развиваемой теории пока не замкнута (см. [5]), тем не менее ряд важных характеристик частиц получает вполне ясное описание. В частности, в рамках такого подхода получает топологическую интерпретацию электрический и барионный заряды, геометрическую интерпретацию получает масса и понятие волновой функции частиц. Постулат Борна о вероятностной интерпретации квадрата модуля волной функции в данном подходе получает также ясную геометрическую интерпретацию.

Основной проблемой ТТФП, на которую обращалось особое внимание в работах [5, 6], является отсутствие в ней физической идеологии, с помощью которой можно описать геометродинамику **физической материальной гиперповерхности** $\mathcal{V}^3$ (**ФМГ**), вложенной в объемлющее пространство $\mathcal{W}^4$ на единицу большего числа измерений. Геометрия пространства в ТТФП более простая, чем в ОТО, и генерируется вложением трех-мерной физической гиперповерхности в евклидово пространство размерности 4. Поэтому все свойства такой гиперповерхности в любой заданный момент времени t определяются только одной функцией высоты $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$. Однако, пока не известна физическая природа самой гиперповерхности и окружающей ее среды, нет возможности сформулировать уравнение изменений ее во времени. При этом описание элементов структуры гиперповерхности может быть построено в терминах геометрических маркеров, не требующих знания зависимости $\mathcal{F}$ от координат и времени. Подобная проблема стояла на первых этапах создания ОТО, поскольку прямых данных о свойствах кривизны пространства-времени не было.

Решение этой проблемы можно искать опираясь на некоторые косвенные данные. Например, такой косвенной информацией являются хорошо известные свойства электромагнитных полей, которые являются основным элементом предлагаемой тополого-геометрической теории полей и частиц. Одним из этих свойств электромагнитного поля является то, что, по крайней мере в случае слабых полей, электромагнитные волны в пустом пространстве распространяются с фиксированной скоростью - скоростью света в вакууме. Наиболее простыми моделями ФМГ, в которых выполняется такое свойство, являются модель упругой трех-мерной мембраны и модель границы раздела двух сред, подобных жидкости или газа. Более общая модель предполагает наличие границы раздела с упругими свойствами, находящейся в некотрой среде, заполняющей объемлющее простран-

ство. На выбор именно такой модели наталкивают два обстоятельсчтва. Первое - это существоание электромагнитных волн, распространяющихся в пустоте с постоянной соростью c?. Это указывает на "упругие" совйства ФМГ. Второе обстоятельство связано с баринной асимметрией материи, имеющей место в реальности. В ТТФП [5] барионы связываются с топологическими ручками (ручки типа ручек Уилера) "вклееными" в ФМГ. Поскольку ФМГ предполагается ориентированной, то ручки могут располагаться с разных сторон ФМГ, что определяет различие между материей и антиматерией. Наличие в реальности только материи можно объяснить различием свойств среды по разные стороны от ФМГ в окружающем пространстве $\mathcal{V}^4$ во времена возникновения Вселенной. Если принять концепцию, что Вселенная в форме ФМГ имела очень малые размеры, как это принимается в современной космологии, то естественно условия образования топологических ручек внутрь объема $\mathcal{V}^4$, ограниченного ФМГ, будут отличаться от условий образования таких объектов (барионов) вовне этого объема. Исходя из этого, можно считать гипотезу заполнения $\mathcal{V}^4$ некой средой с разными свойствами по разные стороны ФМГ вполне обоснованной.

В такой модели при малых отклонениях ФМГ от положения равновесия в виде гиперплоскости P^3 существуют волновые ее возмущения, которые будут распространяться с постоянной скоростью, которая определяется внутренними свойствами мембраны и свойствами сред, вблизи их границы раздела. В обоих моделях можно предполагать, что уравнение динамики ФМГ должно быть похожим на уравнение типа Д'Аламбера с некоторым источником и переходить в это уравнение в некотором приближении слабых возмущений. Однако при попытках реализовать идею упругой мембраны возникает ряд других сложностей. Во-первых, нам не известен тип материи, "заполняющей" объемлющее пространство, что не дает возможности правильно сформулировать форму внешнего источника, влияющего на динамику материальной гиперповерхности. Во-вторых, попытка использовать уравнения упругой мембраны на прямую оказывается не состоятельной, поскольку уравнения должны быть сформулированы таким образом, что бы имелась возможность вывести из них следствия для геометрических маркеров, которые играют фундаментальную роль в математическом описании динамики материи и ее структуры в предлагаемой теории. Кроме этого, описание барионной компоненты материи в ТФП опирается на представление о неодносвязности ФМГ. Уже упоминалось, что в [5] было показано, что такие частицы как протоны и нейтроны и, как следствие, ядра атомов, могут быть представлены некоторым набором топологических объектов типа ручек Уилера. Следовательно, уравнение, описывающее геометродинамику ФМГ, должно допускать многозначные решения в координатах объемлющего евклидова пространства. Все это заставляет искать новый подход для описания динамики ФМГ, который бы изначально учитывал все эти требования. В частности, такой подход изначально должен формулироваться в терминах геометрических маркеров, уравнения для которых должны допускать многозначные решения, которые в некотором пределе должны быть похожи на уравнения Д'Аламбера. Учитывая все эти аргументы, в работе [5] было предложено использовать для вывода недостающего уравнения геометродинамки системы квазилинейных уравнений, которые в соответствие с [8, 9] связаны с уравнениями второго порядка нужного для ТТФП вида, и обладают многозначными решениями. Более полное обоснование этой идеи проводится в данной работе.

На первом этапе в предлагаемой работе формулируется принцип материальности ФМГ, отсутствующий в СТО и ОТО, хотя ряд замечаний, касающихся проблем с материальностью пространства-времени в ОТО и СТО приводился в работах [5, 7]. Далее для математического выражения принципа материальности вводится понятие о глобальных и локальных маркерах и уравнениях их переноса, как основных уравнениях динамики материального объекта. Исходя из этих уравнений и опираясь на результаты работ [10, 8, 9] анализируются уравнения геометродинамики с точки зрения тех их параметров, которые следует связывать с материальными свойствами ФМГ.

2. Принцип материальности физических объектов

Одним из основных недостатков Специальной (СТО) и Общей теорий относительности (ОТО) (см. [7]) является не материальность физического пространства. Абсолютное пространство классической механики также не материально, однако это пространство не имеет ни каких других свойств, кроме очевидного свойства протяженности, которое, по сути, является синонимом понятия пространства. Само по себе пространство не оказывает на материальные тела ни какого влияния, что как раз постулируется в первом законе Ньютона. В СТО же пространство-время уже наделяется спе-

циальными свойствами, состоящими в том, что оно, не являясь материальным объектом, влияет на движения материальных тел. Это влияние имеет, в соответствие с постулатами СТО, форму преобразований Лоренца, приводящих к изменению длины линеек и скорости ходя часов в разных системах отсчета без какого-либо участия в этом других материальных тел. В ОТО нематериальное пространство-время наделяется еще большим числом физических свойств, которые определяются свойствами его кривизны как четырех-мерного псевдо-риманова пространства. Как и в СТО кривизна нематериального пространства-времени в ОТО влияет на движение материальных тел и приборов и, более того, определяет наблюдаемое свойства материальных тел - их взаимодействие с помощью сил тяготения. Результатом включения в теорию и материальных и нематериальных объектов одновременно является наличие и в СТО и в ОТО ряда парадоксов. Примером может служить парадокс близнецов. В ОТО же - это, например, эффект Унру, а также свойства таких объектов как черные дыры или кротовые норы.

Все объяснения парадоксов в СТО и ОТО обычно строятся на доказательстве математической непротиворечивости самой теории, а иррациональность выводов этих теорий обычно относится к не возможности понять реальность с точки зрения практического опыта человека, живущего в макромире классической механики. Например, парадокс близнецов требует для своего объяснения факта не “симметричности” систем отсчета, в которых находятся близнецы. Такая формальная асимметрия наблюдается в том случае, если принять во внимание наличие обязательного отрезка пути улетающего космонавта-близнеца, на котором космический корабль ускоряется. При последующем движении с постоянной скоростью улетающего близнеца в неподвижной и движущейся системах отсчета условия совершенно симметричны, что не может приводить к расхождению времени по часам близнецов. Однако эта не симметричность иррациональна с точки зрения объяснения ее возникновения. Отличительной особенностью ускоренной системы отсчета является наличие сил инерции, которые выражаются в том, что космонавта прижимает к стенке корабля, что и создает с точки зрения материальных сил асимметрию. Однако трудно себе представить, что именно воздействие стенки корабля на космонавта является причиной изменений в ходе его биологических часов. При “математическом” объяснении данного парадокса обычно останавливаются на самом факте наличия асимметрии в системах отсчета, считая что само нематериальное пространство-время “как-то” умудряется влиять на все часы и линейки. Такая же ситуация возникает и в связи с релятивистским фактом увеличения массы частиц при приближении их скорости к скорости света по отношению к неподвижному наблюдателю. **Масса частиц возрастает сама по себе за счет свойств нематериального пространства-времени**.

Если в эксперименте изменяются свойства эталонов длины и времени при переходе от одной системы отсчета к другой, то необходимо указать конкретный физический механизм изменения длины и времени, связав его со взаимодействием эталонов с окружающими материальными телами, а не со свойствами абстрактного способа нумерации точек пространства-времени. Изменение длины твердого тела в движущейся системе отсчета по отношению к лабораторной автоматически ведет к изменению расстояний между атомами в нем, что, в свою очередь, ведет к изменению напряженностей электромагнитных полей в нем. С формальной математической точки зрения можно ввести преобразования напряженностей электромагнитных полей, которые приводят в соответствие наблюдения в различных системах отсчета. Однако это не дает представления о реальном физическом механизме таких изменений, которое можно было бы приписать какому-то материальному объекту. Например, уравнения распространения звуковых волн в однородной упругой линейной среде (уравнения Д’Аламбера) являются инвариантными относительно преобразований Лоренца, в которых скорость света заменена на скорость звука в среде. Однако в акустике нет физического механизма, который бы поддерживал инвариантность этих уравнений относительно таких преобразований Лоренца. Поэтому преобразования Лоренца связывают между собой решения уравнений акустики для двух различных физических условий, а наблюдатель в движущейся системе отсчета будет наблюдать волны, подчиняющиеся волновому уравнению, измененному в соответствии с преобразованиями Галилея. Физический механизм таких изменений очевиден и опирается на постулат абсолютности пространства и времени. В электродинамике инвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца интерпретриуется как изменение свойств не материального пространства-времени в различных смистемах отсчета. Это объясняет ряд экспериментов, но приводит и к ряду физических парадоксов. Однако можно было бы признать справедливость преобразований Лорен-

ца (эксперимент Майкельсона-Морли), но ввести некоторое материальное поле, возникающее при переходе от одной системы отсчета другой, которое в точности компенсирует добавки в уравнениях электродинамики Максвелла, появляющиеся в результате преобразований Галилея. В СТО был выбран путь, связанный с наделением физических свойств не материальному полю, а нематериальному пространству-времени.

Чтобы исключить наличие парадоксов в физической теории, необходимо при построении любой физической теории вводить специальный принцип материальности всех объектов, которые наделяются в теории измеримыми физическими свойствами. Данный принцип должен быть сформулирован следующим образом: **Любой объект, который описывает физическое воздействие на материальные тела, т.е. такие воздействия, которые могут быть обнаружены с помощью материальных приборов, должен сам являться материальным объектом.**

Следуя этому принципу необходимо отказаться от принятого в СТО и ОТО способа описания явлений при больших скоростях материальных частиц близких к скорости света, а так же описания тяготения вблизи массивных тел или частиц с большой плотностью материи. Поскольку явления, которые объясняются ОТО и СТО, наблюдаются в реальности, необходимо найти новое толкование основополагающим фактам, составляющим базу этих теорий. Одним из основных постулатов ОТО является постулат неевклидовости пространства-времени. Как уже отмечалось, каждой точке нематериального пространства-времени приписывается свойство кривизны, с помощью которого объясняется в дальнейшем наличие Всемирного закона тяготения в обобщенной форме. Этот постулат представляется наиболее простым способом объяснить тяготение. Поэтому и в новой теории этот принцип должен сохраняться, однако в силу принципа материальности физическое свойство кривизны необходимо отнести именно к физической **материальной** гиперповерхности. В этом случае объемлющее пространство $\mathscr{W}^4$ может рассматриваться как аналог абсолютного пространства классической механики, наделенного только свойством протяженности с условием, что время во всех точка этого пространства течет одинаково. Такая концепция и была положена в основу ТТФП.

Вместе с тем сформулированный принцип материальности должен содержать способ отличать физическое пространство как материальный объект от нематериального пространства как вместилища всех физических процессов. Наиболее очевидным свойством материальных объектов является возможность организации слежения за ними с помощью тех или иных прямых физических измерений. Это означает, что каждой точке материального объекта можно сопоставить набор физических маркеров, отражающих измеримые свойства физического объекта, процедура слежения за которыми, выраженная в форме математических уравнений, и может быть использована в теории в качестве отражения признака его материальности.

Предположим, что материальный объект имеет форму гиперповерхности V^d размерности d, вложенной в объемлющее пространство $\mathcal{V}^D$ размерности $D > d$. Физическая материальная гиперповерхность выделяет исследуемый объект, а объемлющее пространство необходимо для внесения в теорию эталона свойства протяженности, сравнивая с которым у нас может появиться представление об изменении размеров на физической гиперповерхности. Под геометрическим маркером $e^a(\mathbf{X}, t)$ будем далее понимать функцию координат объемлющего пространства, которая связана с одной точкой материального объекта, т.е. с одной точкой гиперповерхности $V^d \in \mathcal{V}^D$. По аналогии с гидродинамикой, значением маркерной функции может служить значение координаты материальной точки в $\mathcal{V}^D$ в момент времени $t = 0$, выделенной определенным измеримым свойством, если в момент времени t эта материальная точка находится в точке $\mathcal{V}^D$ с координатами $\mathbf{X} = (x^1, x^2, \ldots, x^D) \in \mathcal{V}^D$. Исходя из этого, число геометрических маркеров $e^a(x_1, x_2, \ldots, x_D),\ a = 1, \ldots, D$ должно быть равно D независимых функций. При этом все маркеры точек материального объекта следует разделить на два класса. Первый класс - это **глобальные маркеры**, выделяющие физическую материальную гиперповерхность в объемлющем пространстве как целое. Число таких маркеров должно быть равно $M = D - d$. Действительно, материальную гиперповерхность размерности d в евклидовом пространстве $\mathcal{V}^D$ в момент времени t можно задать с помощью системы из M алгебраических уравнений:

$$e_a(\mathbf{X}, t) = C_a = \text{const}, \quad a = d + 1, \ldots, D.$$

Здесь C^a - совокупность некоторого набора вещественных постоянных, выделяющая конкретную гиперповерхность среди всех возможных гиперповерхностей с другими значениями глобальных маркеров. Совокупность функций $e_a(\mathbf{X}, t)$ можно рассматривать как M маркеров, которые мы и будем

называть **глобальными маркерами**. Их значения определяются в момент $t = 0$ с помощью той или иной измерительной процедуры и остаются неизменными при любых изменениях геометрии ФМГ.

Остальные d маркеров, которые будем называть локальными, выделяют отдельные точки самой ФМГ. Эти маркеры отражают перемещение точек ФМГ с заданными физическими свойствами вдоль самой ФМГ при изменении ее геометрии. Это означает, что локальные маркеры должны быть связаны с такими преобразованиями функциональной зависимости глобальных маркеров от $\mathbf{X}$ $e_a(\mathbf{X}, t)$, которые не меняют геометрии ФМГ, а лишь сводятся к переобозначению ее точек.

Для описания движения гиперповерхности V^d со временем теперь достаточно ввести в теорию уравнение переноса маркеров:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + U^i(\mathbf{x}, t)\frac{\partial e^a}{\partial x^i} = 0, \quad a = 1, \ldots, D; \quad i = 1, \ldots, D. \tag{1}$$

Поле $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ с компонентами $U^i(\mathbf{X}, t)$ будем называть полем скорости переноса маркеров. Вдоль интегральных кривых этого поля, т.е. интегральных кривых системы уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = U^i(\mathbf{X}, t).$$

Это поле должно в физической теории играть основополагающую роль, поскольку с ним связаны все основные элементы движения маркеров и, как следствие, всей материальной гиперповерхности. В связи с этим уравнение (1) представляет собой математическое выражение второго постулата материальности. Именно: **Основным математическим выражением динамики материальной гиперповерхности является уравнение (1), а поле $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ переноса маркеров является фундаментальным полем описания динамики материального объекта V^d.**

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (номер проекта 16.2773.2017/4.6), РФФИ проект 16-42-732119 р_офи_м, а также средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров..

Литература

1. V.M. Zhuravlev. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure // Gravitation and Cosmology –2011. –Vol. 17. -№. 3. – P. 201–217.

2. В.М. Журавлев. Геометрия, топология и физические поля. Часть I. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. –2014. -№. 4. –С. 6-24.

3. В.М. Журавлев. Геометрия, топология и физические поля. Часть II. // Масса и гравитация. –2014. -№. 4.Ё –С. 25-39.

4. В.М. Журавлевю Геометрия, топология и физические поля. Часть III. // Уравнения индукции фундаментальных полей. –2015. –№. 3. –С. 44-60.

5. В.М. Журавлев. Геометрия, топология и физические поля. Часть IV. // Топологическая структура частиц. –2015. –№. 4. –С. 1-15.

6. V. M. Zhuravlev. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter // Gravitation and Cosmology. –2017. –Vol. 23. -№. 2. –P. 95–104.

7. Журавлев В.М. Материя и геометрия. ОТО и далее.... / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. –2016. –№2. –С. 5-26.

8. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями / В. М. Журавлев // ТМФ. –2013. –Т.174, №2.– С. 236-246.

9. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов / В. М. Журавлев // ТМФ. –2016. –Т. 186, № 3. – С. 371–385.

10. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка / В. М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2013. - №. 4. – С. 56-67.

THE PRINCIPLE OF THE MATERIALITY OF SPACE AND THE FUNDAMENTAL FIELDS

V.M. Zhuravlev

In this paper, the principle of the materiality of space is formulated and on its basis a brief critical analysis of the general ideology of the Special and General Theories of Relativity is conducted. The connection of the new principle with the previously developed Topolgic theory of fundamental fields (TTFF) is considered. The method of constructive realization of the principle of materiality within the framework of the physical theory of fundamental fields is considered. General equations of the dynamics of markers of material points of physical space are derived and their connection with the equations of the TTFF is established.

Keywords: properties of space and time, topological theory of fundamental fields, dynamics of markers of material points.

УДК 514.822

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА-ГОРДОНА И РИВЕРТОНЫ

В.М. Журавлев[1]

1 *zhvictorm@gmail.com*; Ульяновский государственный университет, НИТИ им. С.П. Капицы

На основе решений системы квазилинейных уравнений первого порядка специального вида (ривертонов) построены классы точных решений многомерных нелинейных уравнений Клейна-Гордона. Установлена связь между функциональной формой нелинейности уравнений Клейна-Гордона и функциональной зависимостью решений от самих ривертонов и их производных. Исследованы условия, при которых нелинейность уравнения Клейна-Гордона имеет конкретный функциональный вид. Приведены примеры. Установлена связь геометрической структуры ривертонов с начальными условиями. Описана общая схема построения решений и примеры, которые могут быть использованы в задачах ОТО.

Ключевые слова: многомерные уравнения Клейна-Гордона, многомерные квазилинейные уравнения первого порядка, ривертоны, точные решения.

В работах [1, 2] была установлена связь между решениями многомерных квазилинейных уравнений первого порядка специального вида с многомерными нелинейными (и линейными в частном случае) уравнениями второго порядка в частных производных. Среди нелинейных уравнений второго порядка, решения которых совпадают с решениями квазилинейных уравнений первого порядка, имеются многомерные уравнения типа уравнений электромагнитных волн в диэлектрической среде с нелинейной поляризацией произвольного вида, но при отсутствии дисперсии, а также уравнения акустических волн в сжимаемой среде [1]. Среди линейных уравнений второго порядка имеются как многомерные уравнения Д'Аламбера, так и уравнения Лапласа. Сами решения в случае гиперболичности уравнений, названные в [1] ривертонами, представляют собой в общем случае опрокидывающиеся волны, распространяющиеся вдоль кривых, называемых базовыми. Геометрическая форма базовых кривых определяется начальными условиями. В работе [1] было показано, что решения типа ривертонов присущи не только перечисленным типам уравнений, но и целому ряду других нелинейных уравнений, например, некоторым многомерным уравнениям Клейна-Гордона и, в частности, многомерным уравнениям Лиувилля. В двумерном случае нелинейные уравнения Клейна-Гордона играют важную роль во многих прикладных задачах, например, геометрии и гидродинамике [3], а также в квантовой и калибровочной теории полей [4, 6] и ОТО [7, 8]. В силу этого представляет особый интерес возможность расширения класса точных решений на основе ривертонов, полученных в [1], для более широкого круга типов нелинейности уравнений Клейна-Гордона в многомерном случае.

Целью настоящей работы является задача распространить развитый в [1, 2] метод построения решений типа ривертонов на общий класс многомерных нелинейных уравнений Клейна-Гордона (nKGn). В работе предлагается общий рецепт построения решений уравнений KGn и строятся примеры точных решений. В работе проводится анализ связи геометрической структуры ривертонов с начальными условиями и устанавливается явная связь между геометрией базовой кривой риверто-

на с начальным распределением неизвестной функции. Эта часть работы важна для использования последующих результатов в прикладных задачах. Основные результаты можно найти в работе [9].

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (номер проекта 16.2773.2017/4.6) , РФФИ проект 16-42-732119 р_офи_м, а также средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Литература

1. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями / В. М. Журавлев // ТМФ. – 2013. –Т. 174, № 2. –С. 236-246.

2. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов / В. М. Журавлев // ТМФ. – 2016. – Т.186, № 3. – С. 371–385.

3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И.Н. Векуа – М.:Наука, 1978.– 340 с.

4. Berestycki H. Nonlinear scalar fiel equations.I.Existence of a ground state/ H.Berestycki. P.L. Lions. A. // Rational Mech.Anal – 1983. –Vol.82, №.4. – P. 313–345.

5. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.:Мир, 1985. – 560 с.

6. Рыбаков Ю.П. Многомерные солитоны / Ю.П. Рыбаков, В.И. Санюк. – М.:Изд. РУДН, 2001. – 360 с.

7. Zhuravlev V.M. The scalar fields with negative kinetic energy, dark matter and dark energy / V.M. Zhuravlev, Kornilov D.A., Savelova E.P. // General Rel. and Grav. – 2004. – Vol.6., №.7. – P. 1719-1736.

8. Zhuravlev V.M. Dark matter, dark energy and field of negative energy. / V.M. Zhuravlev, Kornilov D.A., Savelova E.P. // Gravitation & Cosmology. – 2006. – Vol.12. – № 4. – С. 283–288.

9. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные уравнения Клейна-Гордона и ривертоны / В. М. Журавлев // ТМФ. – 2018. Принята в печать.

EXACT SOLUTIONS OF MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATIONS AND RIVERTONS

V.M. Zhuravlev

Based on the solutions of a system of first-order quasilinear equations of a special form (rivertons), classes of exact solutions of multidimensional nonlinear Klein-Gordon equations are constructed. A connection is established between the functional form of the nonlinearity of the Klein-Gordon equations and the functional dependence of the solutions on the rivertons themselves and their derivatives. The conditions under which the nonlinearity of the Klein-Gordon equation has a specific functional form are investigated. Examples are given. The relationship between the geometric structure of the Rivertons and the initial conditions is established. A general scheme for constructing solutions and examples that can be used in problems of general relativity are described.

Keywords: multidimensional Klein-Gordon equations, multidimensional first-order quasilinear equations, rivertones, exact solutions.

УДК 530.12:531.51

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Ф.Ш. Зарипов[1]

1 *farhat.zaripov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В рамках модифицированной теории индуцированной гравитации (МТИГ) и феноменологического подхода предложен механизм фазовых переходов и описание многофазного поведения космологического сценария. Теория описывает две системы (стадии): эйнштейновскую (ES) и "эволюционирующую" или "перестроечную" (RS). Величины параметров, таких как, гравитационная и космологическая "константы", "параметр Хаббла", в RS стадии могут флуктуировать около монотонно изменяющихся средних значений. Найдены и проанализированы решения полученных уравнений для случая пространства заданного

метрикой Фридмана - Робертсона - Уокера, а также для центрально-симметрического статического пространства. Исходя из непротиворечивости к наблюдательным данным оценены параметры теории. Эти параметры могут быть сопоставлены с наблюдательными данными, описываемыми как явления темной энергии и темная материя.

Ключевые слова: космология, темная энергия, темная материя, постоянная Хаббла.

1. Различие значений космологической постоянной, полученной из астрофизических наблюдений и предсказаний общей теории относительности (ОТО), с учетом квантовых эффектов поляризации вакуума, известно в науке как "проблема космологической постоянной" (см.[3]). Остроту этой проблемы усиливает факт, что указанное различие огромное - 10^{120}.

2. Существует проблема "точности измерения гравитационной постоянной" G (см. например [1], [2]. Это несоответствие результатов различных экспериментов по измерению G, после третьего знака после запятой.

Последние наблюдения (группы доктора Адама Рисса) используемые для расчета значения постоянной Хаббла приводят проблеме несоответствия результатов, полученных телескопами «Hubble» и «Planck» ([4]). Спутник «Hubble» направлен (настроен) на измерения параллакса переменных Цефеид Млечного пути и расстояния составляют $1.7 - 3.6kpc$ (современная Вселенная). А измерения телескопа «Planck» соответствуют отдаленным галактикам (ранней Вселенной порядка 375000 лет). На 2018 год точность измерения H_0 повышена до 2,3 процента, что дает $H_0 = 73.48 \pm 1.66 km \cdot s^{-1} Mpc^{-1}$. На ранней Вселенной, прогнозируемое значение $H_0 = 67.0 \pm 1.2 km \cdot s^{-1} Mpc^{-1}$, на основании данных полученных из спутника «Planck» и ΛCDM теории. Разница составляет около 9 процентов, при этом точность около 4.5 процентов от среднего значения. Также существует разброс в наблюдениях проведенных в разное времена и различными методами ([5], [6]). По нашему мнению проблема может заключаться в жесткой привязке вычислений параметра Хаббла H_0 к ΛCDM модели. В нашей работе приводится модель, где за счет колебательного режима в решениях уравнений, параметр Хаббла также флуктуирует относительно среднего значения - который в свою очередь также является функцией времени.

3. Проблемы так называемых "темной энергии" (DE) и "темной материи" (DM). Первую из которых можно свести к проблеме существования и малости "космологической постоянной" (пункт 1). Теоретическая задача, поставленная проблемой космологической постоянной [3], вызвала множество попыток прямого изменения гравитации Эйнштейна на больших расстояниях [7]. Примером такой инфракрасной (ИК) модификации является модель Бран-DGP ([9]). В этом сценарии наш видимый мир завершается браной в бесконечной 5D - части. Как показано в [10], используемые текущие данные Планка лучше всего подходят для модели в не плоской LDGP. В [8], [9],[7] выдвинута мысль о том, что если гравитация достаточно ослаблена в инфракрасном диапазоне, энергия вакуума может эффективно отделиться от гравитации или дегравировать с течением времени. Из наших исследований в данной работе следует аналогичный результат, связанный с нелокальным поведением гравитационной системы со скалярными полям в классическом приближении.

В работах [11], [12], на основе работ [13], также делается попытка перехода от парадигмы частицы - подобной темной материи WIMP в альтернативную возможность того, что DM может иметь структуру скалярного поля. В работах [13], Каллош и Линде обратили внимание на новое семейство суперконформных инфляционные потенциалы, впоследствии называемые α-аттракторами. Как отмечается в [11], семейство α - аттракторов может интерполировать между большим классом инфляционных моделей. Мы подробно не сравнивали нашу модель с перечисленными моделями в указанных выше работах. Однако, общими являются использование скалярных полей для описания DM и EM и остаточная от конформно-инвариантной теории симметрия.

Наша теория является феноменологической моделью, используемая для сопоставления с наблюдательными данными DE и DM.

Выше перечисленные проблемы мы попытались разрешить в рамках теории модифицированная теория индуцированной гравитации (МТИГ), предложенной в работах [14, 15, 16].

Основной идеей является существование макроскопического параметра теории $(X, X) = X^A X^B \eta_{AB} \equiv Y$, которая порождает как гравитационную так и космологические "постоянные":

$$k_{eff} = \pm \frac{wc^3}{16\pi\xi(X,X)\hbar} \equiv G_{eff} \frac{c^3}{8\pi\hbar}, \qquad \Lambda_{eff} = \frac{1}{2\xi Y}(-B + U_{eff}), \quad n = 4, \tag{1}$$

где $\hbar$ - постоянная Планка, c - скорость света, $B = B_0(n-2)/2 - w\varepsilon_v$, ε_v - энергия вакуума B_0, w, ξ - постоянные теории, $U_{eff} = U_{eff}(Y)$ - эффективный потенциал теории.

Экспериментальное значение гравитационной постоянной G_m будем сравнивать с эффективной "гравитационной постоянной":

$$G_m \equiv \frac{8\pi k_n \hbar}{c^3} \equiv 6.565362 \cdot 10^{-65} cm^2 = \pm \frac{w}{2\xi C_m}, \tag{2}$$

где C_m - современное значение функции $Y = Y(t_m)$; $k_n = G$ - гравитационная постоянная Ньютона, значение которой взяли равным $6.674286 \times 10^{-8} cm^3 c^{-2} g^{-1}$; t_m - параметр времени соответствующий современному значению (приблизительно 13,8 млрд. лет). Аналогично, в согласии с астрофизическими наблюдательными данными современное значение космологической постоянной примем равным $\Lambda_m = 1.27143 \cdot 10^{-56}/cm^2$.

Функции $X^A = X^A(\sigma^\mu)$, где $A, B = 1, 2, \ldots, D, \quad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, n-1$, отображают n-мерное Риманово многообразие Π описываемое метрикой $g_{\mu\nu}$, в D-мерное плоское пространство - время M с метрикой η_{AB} ([14]). В дальнейших вычислениях мы положим $n = 4$.

Для космологической модели (подобная модель строится и для центрально - симметрического пространства), предложенный нами механизм сводится к тому, что дифференциальные уравнения описывающие эволюцию функций $Y(t)$ и $a(t)$ имеют вид

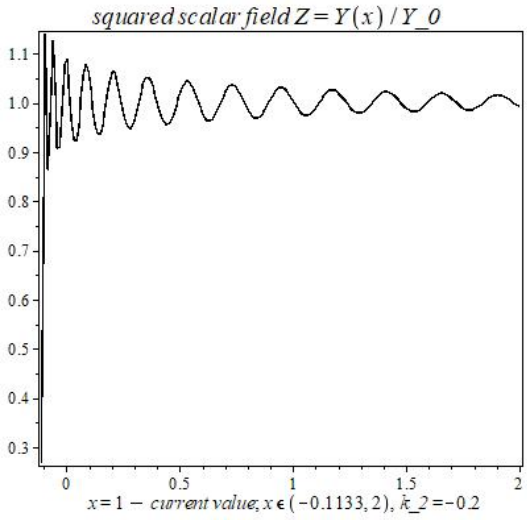
$$\dot{Y} \cdot (\Phi_1(Y,\ a)) = 0; \quad \Phi_2(Y,\ a) = 0,$$

где $\Phi_1(Y,\ a)$, $\Phi_2(Y,\ a)$ – некоторые выражения от функций $Y(t)$ и космологического масштабного фактора $a(t)$ и их производных до второго порядка. При $Y(t) = const$, второе уравнение переходит в уравнение совпадающее с уравнением в ОТО, а первое уравнение исчезает. Таким образом, возможны решения которые могут как совпадать с решениями стандартной теорией гравитации, так и не совпадать. Тогда, фундаментальные "постоянные" теории, такие как гравитационная и космологическая могут эволюционировать во времени, а также зависеть от координат. В достаточно общем случае, теория описывает две системы (стадии): эйнштейновскую (ES - стадия) и "эволюционирующую" или "перестроечную" (RS - стадия). Данный процесс напоминает явление фазового перехода, где различные фазы (эйнштейновские гравитационные системы, но с различными постоянными) переходят друг в друга. Возможно, нет способа (вычисляемого) описания таких переходов. Можно лишь указать "благоприятные" точки в которых такие переходы возможны. Это моменты времени, когда вторая производная от масштабного фактора $a(t)$ или первая производная от $Y(t)$ обращаются в нуль. Мы в этой работе покажем что на значения наблюдаемых характеристик гравитационного поля влияет не только значения гравитационных постоянных, а по большей части их производных.

В работе [15] для разрешения проблемы 1, мы рассмотрели два механизма сокращения постоянной части энергии вакуума ε_{vac} . В первом варианте величина ε_{vac} компенсируется другими членами $(-B_0 + U_{eff})/(2\xi Y)$ из Λ_{eff}. Сокращение двух величин налагает требования на постоянные теории ($w,\ \xi,\ C_0$,) до огромных порядков точности. Второй механизм сокращения постоянной части энергии вакуума сводится мультипликативному сокращению. Принцип его простой и основан на законе сохранения энергии при фазовых переходах, соответствующих различным этапам эволюции Вселенной и структурой рассматриваемой теории ([15]). Если первой фазе соответствует стадия инфляции ((ES) - стадия), то основной характеристикой является постоянная Хаббла $H_{inf} = \sqrt{3\Lambda_{eff}}$, которая определяется отношением двух величин $B,\ C_{inf} = Y = const$. Затем происходит переход в RS стадию, в которой начальные условия связанные законом сохранения энергии в момент перехода, определяют масштабный фактор $a(t)$ и переменное поле $Y(t)$, которое пропорционально B. Из $\Lambda_{eff} \sim B/Y(t)$ следует, что Λ_{eff} не зависит (в первом приближении по Y в разложении потенциала U_{eff} в окрестности минимума) от $B = (-B_0 + w\varepsilon_{vac})$, а значит и от ε_{vac}. Отметим, что указанный механизм сокращения энергии вакуума аналогичен механизму сокращения расходимостей в квантовой теории перенормировок, несмотря на то, что рассматриваемая теория является классической. В работе [15] исследовано влияние материи в виде идеальной жидкости на поведение $Y(t)$.

В данной работе рассматривается влияние квадратичного, стандартного потенциала на решения RS стадии. По нашему мнению, представляют интерес решения содержащие ангармонические колебания, вызванные случайными начальными и граничными условиями. В отличие от решений уравнения Эйнштейна с асимптотикой плоского пространства - времени, наличие перемен-

ного "космологического члена"приводит нелокальному самовзаимодействию поля Y. На монотонно изменяющиеся решения (например приведённые в работе [15]) накладываются флуктуации со сложным спектром. Такое поведение приводит флуктуациям параметров относительно их средних классических значений. Таким образом мы выдвигаем гипотезу, что гравитационная “константа” G и “параметр Хаббла”, кроме медленной эволюции в RS стадии флуктуируют относительно классических значений. Например, на рисунках 1-2 представлены численные нормированные решения $Y(t)/Y_0,\ b \equiv a(t)/a_0, x \equiv t/a_0,\ Z \equiv Y(r)/Y_0$ исследуемых уравнений.



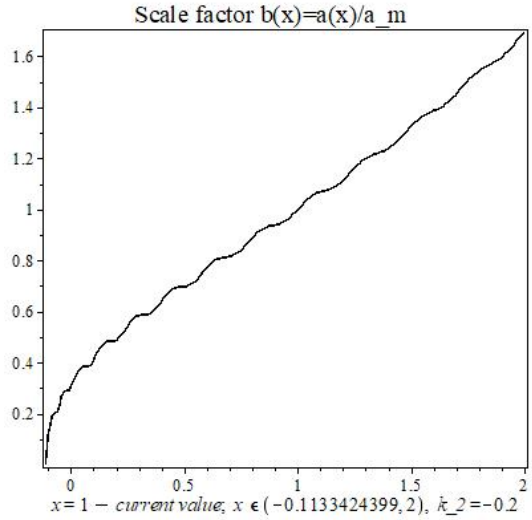


Рис.1. Колебательные решения для плоской космологической модели. $x = t/t_m$, $\tilde{B}_n = 144.517..$, $k_2 = -0.2$. Начальные условия: $Z_m = 1.0040965$.

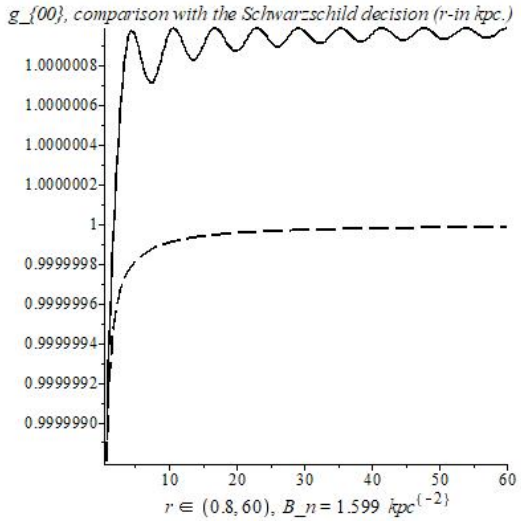


Рис.2. Для модели галактики. Сравнение зависимости $g_{00} = e^{\nu}$ для центрально-симметрического пространства с решением Щварцщильда -де Ситтера (пунктирная линия); r - в килопарсеках. $B_n = 1.599..kpc^{-2}$, $GM = 10^{10} M_{\odot}$.

Мы в первую очередь требуем непротиворечивости выводов теории после сравнения с наблюдательными данными, а далее ищем предсказательные возможности теории. Исходя из этого, выбор параметров теории должен должен приводить флуктуациям влияющим на четвертый порядок (максимум на третий порядок) решения $Y(t)/Y_0 \simeq 1,000 m_1 m_2..$, интерпретируемого как современное значение этого параметра. Конечно же в прошлые времена значения параметров могли быть существенно другими и эти параметры реализовали качественное другие этапы эволюции (рис.1). График масштабного фактора приведённого на рис.1, можно согласовать с результатами наблюдательных данных (например, для вычисления постоянной Хаббла [4]), если разницу в 9 процентов полученную за счет измерения отдаленных (соответствующих ранней Вселенной) и близких объектов приписать к усредненному по локальным флуктуациям графику, а 4.5 процента погрешности измерений ([4]) можно отнести к самим локальным флуктуациям.

В [16] проведены исследования численных решений для случая центрально-симметрического пространства. Найдены решения которые с одной стороны согласуются с наблюдательными данными, с другой стороны могут привести существенно к другой астрономической картине вдали от центра. Например, на расстояниях более 0.01 парсек от Солнца и более одного килопарсека от центра галактики. Даже если эти примеры не соответствуют действительности, они демонстрируют существование моделей с существенно нелокальным поведением и с не плоской асимптотикой и не противоречащих наблюдениям.

Сравнение решений космологической модели и модели в случае центрально-симметрического пространства приводят к тому, что "темная материя" и "темная энергия" могут описываться в единой концепции. Хотим отметим, эта концепция не совсем сводится к трактовке "эволюции постоянных". Важным фактором является то, что энергия скрыта в членах содержащих производные от поля Y. В силу феноменологического описания, мы не изучаем квантово - механическую природу превращения "темной энергии" в "темную материю" и наоборот. Такие трактовки возможны в рамках нашей теории, однако это все - проблемы дальнейших исследований.

Более подробное описание решений уравнений МТИГ приведенных в работах [15]), [16]), с учетом квадратичных членов будет опубликовано в ближайшее время.

Литература

1. Speake C. The search for Newton's constant / C. Speake , T. Quinn // Physics Today. – 2014. – Vol. 67, № 7. – P. 27-33.

2. Rosi G. Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms / G. Rosi , F. Sorrentino , L. Cacciapuoti , M. Prevedelli, G. M. Tino // Nature. – 2014. – Vol.510, №.7506. – P.518—521. – ISSN 0028-0836. – Access mode:DOI:10.1038/nature13433.

3. Weinberg C.S. The cosmological constant problem / C.S. Weinberg // Rev. Mod. Phys. – 1989. – Vol. 61. – P.1-23.

4. Riess A. G. New Parallaxes of Galactic Cepheids from Spatially Scanning the Hubble Space Telescope: Implications for the Hubble Constant / A. G. Riess. – 2018. – P.1-37.

5. Riess A. G. A 0.024 Determination of the Local Value of the Hubble Constant / A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, et al. // The Astrophysical Journal. – 2016. – № 826. – 56 p.

6. Planck Collaboration Planck intermediate results XLVI. Reduction of large-scale systematic effects in HFI polarization maps and estimation of the reionization optical depth / Planck Collaboration, Aghanim, N., Ashdown, M.,et al. – 2016. – Access mode: DOI:10.1051/0004-6361/201628890

7. Rham C. Cascading Gravity and Degravitation / C. Rham, H. Stefan, K. Justin, J.T. Andrew. – 2007. – P.1-31.

8. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali and G. Gabadadze. – 2002. – Access mode: arXiv:hep-th/0209227.

9. G. R. Dvali 4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space. Phys. Lett / G. Gabadadze and M. Porrati. – 2000. – B. 485, Vol. 208.

10. Ravanpak A. Probing Lambda-DGP Braneworld Model. Astron. Astrophys. / H. Farajollahi, G. F. Fadakar. – 2016. – Vol.16, №.9. – 137 p.

11. Mishra S.S. Sourcing Dark Matter and Dark Energy from α -attractors / S.S. Mishra, V. Sahni, Y. Shtanov. – 2017. – P.1-37.

12. Sahni V. The Case for a Positive Cosmological Lambda-term / V. Sahni, A.A. Starobinsky. – Access mode: arXiv:astro-ph/9904398. DOI:10.1142/S0218271800000542.

13. Kallosh R. Multi-field Conformal Cosmological Attractors / R. Kallosh, A. Linde. – 2000. – P.1-84.

14. Zaripov F.Sh. A conformally invariant generalization of string theory to higher-dimensional objects. Hierarchy of coupling constants / F.Sh. Zaripov // Gravitation and Cosmology. – 2007. – Vol.13, №4. – P.273-281.

15. Zaripov F.Sh. Modified equations in the theory of induced gravity / F.Sh. Zaripov // Astr. and Space Sci. – 2014. – Vol.352. – I. 1. – P. 289-305.

16. F. Sh. Zaripov. Phenomenological Model of Multiphase Cosmological Scenario in Theory of Induced Gravity / F. Sh. Zaripov // Russian Physics Journal. – 2017. – Vol.59, №11. – P.1834-1841.

OSCILLATING COSMOLOGICAL SOLUTIONS IN THE THEORY OF INDUCED GRAVITY

F.Sh. Zaripov

This work is the extension of author's research, where the modified theory of induced gravity (MTIG) is proposed. The theory

describes two systems (stages): Einstein (ES) and "restructuring" (RS). The solutions of equations obtained for the case of spaces defined by the Friedman-Robertson-Walker metric, as well as for a centrally symmetric space are found and analyzed. The values of such parameters as "Hubble parameter", gravitational and cosmological "constants" in the RS stage can fluctuate near monotonically evolving mean values. Based on consistency with observational data, the parameters of the theory are estimated. These parameters can be matched with observational data, described as a dark energy phenomena and dark matter.

Keywords: cosmology, dark energy, dark matter, Hubble constant.

УДК 514.821

СТО В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

В.В. Карбановский[1], М.В. Богатырева[2], О.В. Мелёхина[3], Н.С. Ступаченко[4]

1 *karbanovski_v_v@mail.ru*; Мурманский арктический государственный университет
2 *marybee15@bk.ru*; Мурманский арктический государственный университет
3 *olga_melehina@mail.ru*; Институт развития образования, г. Мурманск
4 *stupachenko.natasha2014@ya.ru*; Мурманский арктический государственный университет

Предложен подход к описанию движения частиц в неинерциальных системах отсчета (НСО) в рамках СТО. Получены соответствующие уравнения движения. Обсуждаются возможные следствия их применения.

Ключевые слова: СТО, НСО, уравнения движения.

Рассмотрим проблему описания СТО в НСО. Для получения её решения будем интерпретировать скорости поступательных и вращательных движений НСО как некоторые «силовые поля». Тогда действие свободной частицы в произвольной НСО может быть представлено как

$$S = -mc^2 \int d\tau - mc \int U_i dx^i + mc^2 \int u_i x_j \omega^{ij} d\tau + \frac{mc^2}{2} \int x_i x^k \omega_{jk} \omega^{ij} d\tau \tag{1}$$

(здесь U^i – 4-скорость в НСО, φ^{ij} – матрица углов поворота, τ и u_i –собственное время и 4-скорость частиц соответственно, m – его массы, $\omega^{ij} = \frac{d\varphi^{ij}}{cd\tau}$ – угловая 4-скорость в НСО.)

Варьируя (1) по координатам частиц, получим уравнения движения частицы в СТО

$$\left(1 - \frac{1}{2} x_i x^k \omega_{jk} \omega^{ij}\right) a_e + A_e + 2\omega_{ie} u^i - x^j \beta_{ej} + x_i \omega_{je} \omega^{ij} - \omega_{jk} \omega^{ij} x_i u^k u_e - x_i x^k \omega_{jk} \beta^{ij} u_e = 0, \tag{2}$$

где $A_e = \frac{dU_e}{cd\tau}$, $\beta^{ij} = \frac{d\omega^{ij}}{sd\tau}$, $a_e = \frac{du_e}{cd\tau}$.

Выбирая условия $\omega^{0\alpha} = 0$ $(\alpha = 1,2,3)$, можно переписать систему (2) в следующем виде

$$\begin{aligned} \left\{1 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 [\vec{r} \times \vec{\Omega}]\right\} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \left(\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt}\right) \vec{V}\right) + \frac{\Gamma}{\gamma} \left(\vec{A} + \Gamma^2 (\vec{A}\vec{V}) \vec{V}\right) - 2[\vec{V} \times \vec{\Omega}] - \\ \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \left(\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt}\right) [\vec{r} \times \vec{\Omega}] - [\vec{r} \times \vec{\delta}] - [\vec{\Omega} \times [\vec{r} \times \vec{\Omega}]] + \frac{\gamma^3}{c^2} ([\vec{V} \times \vec{\Omega}] [\vec{r} \times \vec{\Omega}] \vec{V}) + \\ \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 [\vec{r} \times \vec{\Omega}] [\vec{r} \times \vec{\delta}] \vec{V} + \frac{\gamma^4}{c^3} \left(\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt}\right) [\vec{r} \times \vec{\Omega}]^2 \vec{V} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

где $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\Gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$ – ускорение в НСО, $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – 3-скорости частицы в НСО соответственно, угловая 3-скорость определяется из соотношения $\omega_{\alpha\beta} = \frac{\gamma}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} \Omega^\lambda$, $\vec{\delta} = \dot{\vec{\Omega}}$ – угловое 3-ускорение в НСО .

SRT IN NON-INERTIAL FRAMEWORKS

V.V. Karbanovski, M.V. Bogatyreva, O.V. Melehina, N.S. Stupachenko

An approach is proposed to describe the motion of particles in non-inertial frames of reference within the framework of SRT. The corresponding equations of motion are obtained. Possible consequences of their application are discussed.

Keywords: SRT, non-inertial reference frames, the equations of motion.

УДК 531.266.3

ГРАВИТАЦИЯ КАК СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

В.В. Карбановский[1], С.В. Акиньшина[2], Н.С. Ступаченко[3]

1 *karbanovski_v_v@mail.ru*; Мурманский арктический государственный университет
2 *posmotri@hotmail.com*; Мурманский арктический государственный университет
3 *stupachenko.natasha2014@yandex.ru*; Мурманский арктический государственный университет

Предложена схема построения теории гравитации основанная на поле скалярного потенциала. Получены уравнение поля и уравнение движения частицы в нем. Рассмотрены возможные применения данной теории.

Ключевые слова: теория гравитации, скалярный потенциал, уравнение движения.

Как известно ОТО и ряд других теорий основаны на представлении что источником гравитации являются геометрические структуры пространства – времени основанные на полях метрического тензора g_{ik}, связности Γ^i_{kl}, тензора неметричности и других. «Хронической» проблемой всех подобных теорий является «недоопределённость» системы уравнений описывающих гравитационное поле. И как следствие зависимость получающихся решений от выбора дополнительных условий. Здесь мы рассмотрим теорию, в которой гравитация определяется скалярным потенциалом Ф. В результате действие для частицы в заданном поле будет иметь вид

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau + m \int_a^b \Phi d\tau. \tag{1}$$

Варьируя (1) по координатам частицы получим уравнение ее движения

$$a_j = -\frac{1}{\left(c^2 - \Phi\right)} \left[u_j u^k + \delta^k_j \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}. \tag{2}$$

Устанавливая из (2), по аналогии с электродинамикой, «силовую характеристику поля» можно записать действие для системы частица плюс поле

$$S = -m \int \left(c^2 - \Phi\right) d\tau + \frac{1}{2c} \int \lambda^{ik} E_j E_k (-g)^{\frac{1}{2}} d\Omega. \tag{3}$$

В свою очередь варьируя (3) по полевой переменной Ф, получим уравнение

$$(-g)^{\frac{-1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\lambda^{ik}}{\left(c^2 - \Phi\right)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} (-g)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\lambda^{ik}}{\left(c^2 - \Phi\right)^3} \frac{\partial \Phi \partial \Phi}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\rho}{g}. \tag{4}$$

В отсутствии поляризации гравитационного вакуума

$$\lambda_{jk} = \frac{c^4}{4\pi G} \eta^{jk}$$

и при неподвижном источнике $\gamma = 1$ уравнение (4) содержит зависимость потенциала от плотности распределения материи ρ. В результате можно сформулировать алгоритм решения астрофизических задач в рамках такой теории: по наблюдательному движению пробной частицы определяем ее ускорение a_j, решая систему (2) находим потенциал Ф, подставляя его в (4) получаем плотность

распределения массы в источнике ρ. Другие его характеристики устанавливают как компоненты канонического тензора энергии импульса скалярного поля.

GRAVITY AS A SCALAR FIELD

V.V. Karbanovski, S.V. Akin'shina, N.S. Stupachenko

A scheme is proposed for constructing a theory of gravity based on the field of a scalar potential. The equation of the field and the equation of motion of the particle in it are obtained. Possible applications of this theory are considered.

Keywords: theory of gravity, scalar potential, equation of motion.

УДК 537.9

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В СРЕДАХ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

В.В. Карбановский[1], О.В. Мелёхина[2], Н.С. Ступаченко[3]

1 *karbanovski_v_v@mail.ru*; Мурманский арктический государственный университет
2 *olga_melehina@mail.ru*; Институт развития образования, г. Мурманск
3 *stupachenko.natasha2014@yandex.ru*; Мурманский арктический государственный университет

Рассмотрена проблема получения уравнений электродинамики в средах по вариационному принципу. Показано, что такая система обобщает вторую пару уравнений Максвелла. Обсуждаются свойства новой теории и ее возможные применения.

Ключевые слова: электродинамика в материи, четырехмерное обобщение тензоров проницаемости, монополь Дирака, индукционные члены.

Вариационный вывод уравнений электродинамики в сплошных средах. Как известно, первая пара уравнений Максвелла представляет собой следствие алгебраических свойств тензора электромагнитного поля F^{ik}. Поэтому она справедлива как в вакууме, так и в веществе. При этом вторая пара уравнений Максвелла в вакууме выводится из вариационного принципа. А вид этих уравнений в веществе постулируется. Нами предлагается вариационный вывод уравнений электромагнитного поля в веществе. Исходя из действия

$$W = -mc^2 \int d\tau + \frac{e}{c} \int A_i dx^i - \frac{1}{4c} \int \lambda^{iklm} F_{ik} F_{lm} d\Omega \tag{1}$$

(здесь λ^{iklm} удовлетворяет условиям $\lambda^{iklm} = -\lambda^{kilm} = -\lambda^{ikml} = \lambda^{lmik}$).

Варьируя (1) по переменным электромагнитного поля, и, полагая λ^{iklm} независимыми от них, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\int \lambda^{iklm} F_{lm} \right) = \frac{1}{c} j^i. \tag{2}$$

Выбирая условия

$$\lambda_{0\alpha 0\beta} = -\varepsilon_0 \varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

$$\lambda_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} \left(\mu_0 \mu_{\lambda\gamma} \right)^{-1/c}, \tag{4}$$

систему (2) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \vec{D} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda^{0\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\nu} B_\nu \right) = \rho, \tag{5}$$

$$rot \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\lambda^{\alpha\beta 0\gamma} E_\gamma \right) + \frac{\vec{e}_\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda^{\alpha 0\beta\gamma} e_{\beta\gamma\nu} B_\nu \right) = \vec{j}. \tag{6}$$

Очевидно, при нулевых компонентах $\lambda^{0\alpha\beta\gamma}$ (5,6) переходит в материальные уравнения Максвелла. В общем же случае дополнительное слагаемое в (5) соответствует монополю Дирака, а аналогичный член в (6) «порождает» дополнительные индукционные токи внутри вещества.

В случае нелинейных сред, когда λ^{iklm} зависят от 4-потенциала электромагнитного поля, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\int \lambda^{iklm} F_{lm}\right) + \frac{1}{4}\frac{\delta \lambda^{nklm}}{\delta A_i} F_{nk} F_{lm} = \frac{1}{c} j^i. \tag{7}$$

При этом нелинейные члены в (7) могут соответствовать поправкам квантовой электродинамики.

THE ELECTRODYNAMICS EQUATIONS IN MEDIA FROM VARIATIONAL PRINCIPLE

V.V. Karbanovski, O.V. Melehina, N.S. Stupachenko

An obtaining problem of the electrodynamics equations in media from variational principle is considered. It is shown, that such system generalizes the second pair of the Maxwell equations. The properties of new theory and its possible applications are discussed.

Keywords: electrodynamics in matter, four-dimensional generalization of permeability tensors, Dirac monopole, induction terms.

УДК 514.822

О МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА И ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА

В.В. Карбановский[1], О.В. Мелёхина[2], Т.В. Каиров[3], Н.С. Ступаченко[4]

1 *karbanovski_v_v@mail.ru*; Мурманский арктический государственный университет
2 *olga_melehina@mail.ru*; Институт развития образования, г. Мурманск
3 *kairov_t_v@list.ru*; Мурманский государственный технический университет
4 *stupachenko.natasha2014@yandex.ru*; Мурманский арктический государственный университет

Представлены классы вакуумных сферически - симметричных решений ОТО с постоянным и переменным источником. Установлено, что некоторые из них не могут быть сведены к статическим. В этом контексте дан критический анализ «статуса» метрики Шварцшильда и теоремы Биркгофа.

Ключевые слова: ОТО, вакуумные решения, метрика Шварцшильда, теорема Биркгофа.

Ранее нами были получены два класса сферически – симметричных вакуумных решений уравнений ОТО с постоянным источником. Один из них определяется выражением

$$ds^2 = -1/dt^2 + 2\left\{L\left[\left[(y\dot{x})^2 + 1 + \frac{c}{x}\right]/y\right]^{\frac{1}{2}} - x'/y\dot{x}\right\}dtdr \tag{1}$$
$$+\left\{2x'L/\dot{x}\left[\left(y\dot{x}^2 + 1 + c/x\right)/y\right]^{\frac{1}{2}} - L^2(1 + c/x) + x'^2/y\dot{x}^2\right\}dr^2 + x^2 d\Omega^2,$$

где L находится из условия

$$\dot{L} = \frac{\dot{x}F' - x'\dot{F}}{2F^{1/2}(F - 1 - c/x)^{3/2}}. \tag{2}$$

Было показано, что метрика (1) не может быть сведена к статической, что противоречит теореме Биркгофа. В настоящее время получено решение для источника, описываемого функцией, изменяющейся во времени.

$$dS^2 = -\frac{4(f + x + \varphi x\dot{x})}{x\varphi^2}dt^2 + \left(-\frac{4x'}{\varphi}\right)dtdr + x^2 d\Omega^2, \tag{3}$$

где f и ϕ – функции t.

Очевидно, что метрика (3) также не имеет статического предела.

Что касается статуса решения Шварцшильда, то можно отметить, что она не обеспечивает переход к выражению

$$dS^2 = -(1 + 2\zeta)c^2 dt^2 + (1 - 2\zeta)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \tag{4}$$

соответствующему классическому пределу в рамках ОТО (здесь $\zeta = \frac{r_j}{r}$). Это позволяет сделать вывод о некорректности использования решения Шварцшильда в качестве вакуумной метрики для сферически - симметричных объектов.

ON THE SCHWARZSCHILD METRIC AND BIRKHOFF'S THEOREM

V.V. Karbanovski, O.V. Melehina, T.V. Kairov, N.S. Stupachenko

Classes of vacuum spherically symmetric solutions of general relativity with a constant and variable source are presented. It is established that some of them cannot be reduced to static ones. In this sense, a critical analysis is given of the "status" for the Schwarzschild metric and the Birkhoff theorem.

Keywords: General relativity, vacuum solutions, Schwarzschild metric, Birkhoff's theorem.

УДК 51-73

НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ И АВТОВОЛНЫ В СРЕДЕ С БЫСТРОЙ ДИФФУЗИЕЙ

В.М. Морозов[1], В.М. Журавлев[2]

1 *aieler@rambler.ru*; Ульяновский государственный университет, НИТИ им. С.П. Капицы
2 *zhvictorm@mail.ru*; Ульяновский государственный университет, НИТИ им. С.П. Капицы

В статье строятся точные решения уравнения быстрой диффузии типа автоволн. Для построения решений предлагается метод нелинейных функциональных подстановок. Так же исследуются условия возникновения и роста периодических структур в среде с быстрой диффузией.

Ключевые слова: уравнение быстрой диффузии, периодические структуры, функциональные подстановки.

Рассмотрим уравнение нелинейной диффузии следующего вида:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{D_0}{n_0 + n}\Big)\frac{\partial n}{\partial z} - \mu n + G, \tag{1}$$

где n - концентрация диффундирующего вещества, μ - коэффициент, учитывающий наличие стоков, G - поток частиц, вызванный внешним источником излучения. Уравнение (1) имеет множество приложений и описывает диффузию частиц газа, точечных дефектов в кристалле, неравновесных носителей в полупроводнике и т.д.

Для решения уравнения (1) предлагается метод функциональных подстановок, который заключается в рассмотрении уравнения для вспомогательной функции $T(x,t)$:

$$T_t T_x = T_{xx} T, \tag{2}$$

которое переходит в уравнение типа (1), если к нему добавить еще пару уравнений, называющихся базовыми соотношениями:

$$T_x = A(x,t)T, \;\; T_t = B(x,t)T. \tag{3}$$

Условие совместности уравнений (3) имеет вид: $B_x = A_t$. Дифференцируя уравнение (1) по x и используя базовые соотношения, получаем следующее уравнение для функции $A(x,t)$:

$$A_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{A}A_x + A_x = \frac{\partial^2 \ln A}{\partial x^2} + A_x,$$

которое является уравнением типа (1) без источников. Таким образом. можно строить точные решения уравнений типа (1), решая вспомогательное уравнение (2).

Для решения уравнения типа (2) более общего вида, приводящего к аналогичному уравнению для функции A:

$$(T_t + CT_x + QT)(T_x + KT) = (T_{xx} + PT_x + ST_t + RT)T, \tag{4}$$

используются нелинейные подстановки для производных:

$$T_t = v(t,x,T), \;\; T_x = u(t,x,T). \tag{5}$$

Подстановка соотношений (5) в (4), вместе с условием совместности (5) дает следующую систему квазилинейных уравнений:

$$T(u_x + uu_T) - uv - Cu^2 - MuT - NT^2 - HvT = 0,\ u_t + vu_T = v_x + uv_x. \quad (6)$$

Решение системы (6) можно искать в следующем виде:

$$u = U_1(x,t)T + U_N(x,t)T^N,\ v = V_1(x,t)T + V_N(x,t)T^N.$$

Что приводит к решениям уравнения (1) при $\mu = G = 0$ следующего вида:

$$n = \frac{1}{1-N}\frac{\partial}{\partial x}\ln\Big(\int \frac{dx}{\varepsilon^2(x+pt)} + c_0\Big) + f'(x-qt) + \frac{1}{2(N-1)}\Psi'(x+pt),$$

где f, ε, Ψ - некоторые функции. Полученное решение зависит от бегущих переменных с разными скоростями, при этом оно удовлетворяет уравнению диффузии без источника, т.е. является автоволной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках гос. задания 3.2111.2017/4.6.

Литература

1. Журавлев В.М. Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии / В.М. Журавлев // ТМФ. – 2015. – Т. 183. – № 1. – С. 36-50.

2. Журавлев В.М. Лазерно-индуцированная генерация поверхностных периодических структур в средах с нелинейной диффузией / В.М. Журавлев, И.О. Золотовский, Д.А. Коробко, В.М. Морозов, В.В. Светухин, И.О. Явтушенко, М.С. Явтушенко // ФТТ. – 2017. – Т. 159. № 12. – С. 2291-2998.

3. Журавлев В.М. Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау – Лифшица / В.М. Журавлев // Нелинейная динамика. – 2014. – Т.10, №1. – С. 35-48.

NONLINEAR FUNCTIONAL SUBSTITUTIONS AND AUTOWAVES IN A MEDIUM WITH FAST DIFFUSION

V.M. Morozov, V.M. Zhuravlev

The exact solutions of the fast-diffusion equation of the autowave type are constructed in the article. To construct solutions, we propose a method of nonlinear functional substitutions. The conditions for the formation and growth of periodic structures in a medium with fast diffusion are also investigated.

Keywords: fast diffusion equation, periodic structures, functional substitutions.

УДК 53.06

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ – КАК ПОЛЕ СОПЕРНИЧЕСТВА ЗА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ ЛИДЕРСТВО

И.С. Нургалиев [1]

1 *ildus58@mail.ru*; Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева

Показано, что неизбежность космологической сингулярности – миф. Этот миф корнями уходит в религиозное сознание. Его долгоживучесть зиждится на авторитете уважаемых коллег, «доказавших» такую неизбежность, основываясь на нереалистической лемме – усеченном уравнении Рэйчаудхури.

Ключевые слова: космология, сингулярность, якобиан, религия.

Сначала было слово. Слово было точка. Точка была у пространства. Учение об этом назвали геометрией. Далее заметили, что слово хорошее. Начали использовать и не по начальному прямому

Рис. 1. http://www.funpress.ru/uploads/posts/2011-01/1294772559_11.jpg

назначению тоже, введя понятие «материальная точка». Оксиморон. Исчерпав объяснительные способности у такой "точки своего рода кентавра, настолько маленького тела, что оно не могло вращаться (?!) было введено более естественное понятие материальной точки второго рода [1 – 5]. Для точки–галактики (см. рисунок) материальная точка второго рода - объект со способностями расширяться-сжиматься, изменять форму и свой материальный состав, более подходящее понятие, чем ранее существовавшее.

Напомним определение якобиана $\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)}$ как множителя в преобразовании элемента объема при переходе в криволинейные координаты, сначала записанного в ортонормированных декартовых координатах для трехмерного, например, евклидового пространства, $dV = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$, тем самым понятного для любого добросовестного школьника, а далее записывающегося в движущейся системе координат уже несколько сложнее:

$$dV = dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \pm\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \pm\sqrt{g}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \qquad (*)$$

А попутно заметим, что на аналогичное определение, обобщаемое непосредственно на любую размерность, и степенность (порядок) метрики, мы могли бы посмотреть как на источник мер (метрик), на которых базируются более богатые геометрии, с большими обещаниями в области объяснительного физического потенциала, возможно реализуемых, нежели риманова геометрия, крепко наследующая свою "поверхностную родословную". Очевидно, что естественнее было бы порядок метрики привести в соответствие с размерностью пространства, т.е. построить геометрию физического пространства в условиях, диктуемых естественным ходом математической мысли, и не ограничиваться готовенькой геометрией Римана, расширившим свой аппарат для сколько-угодно-мерной искривленной геометрии на основе метрики двумерной поверхности. Но наша задача сейчас не в этом трудном, но захватывающем деле, поэтому останемся пока верны принципу минимализма, пока можем, пока не требует этого императивно его величество эксперимент. Однако не можем не заметить, что объем мы только что ввели не через расстояние, хотя введение расстояния и площади - дело как бы уже состоявшееся. Но это не так. Это важно отметить.

Обобщив (*) до размерности 4:

$$dV = \frac{\partial(x^1,x^2,x^3,x^4)}{\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4 = \pm\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4 =$$

$$\pm\sqrt{g}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \qquad (**)$$

перейдем к произвольной системе координат. В связи с этим откажемся от присутствия в равенствах (*) и (**) самых простых вариантов формы объема с произведением только диагональных членов

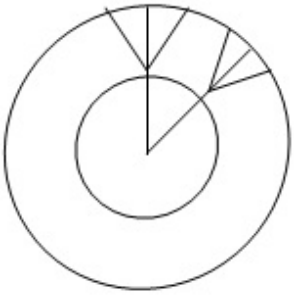
метрики. Пусть поток $x^i = x^i(\{\xi^i\})$ не потенциален. Кстати, это именно так даже тогда, когда ускорение соответствующего движения материи, протекающего в поле потенциальных сил, таких как Ньютоновская гравитация, потенциально. А то, что это именно так, что фрагменту материи, коим является галактика для космологического потока, свойственно дифференцированно вращаться во всевозможных направлениях - это наблюдательный факт, а не только теоретическое утверждение, отчетливо продиктованное здравым смыслом. Читатель приглашается убедиться в этом посмотрев на приведенный чарующий рисунок галактики, одной из важных применений материальных точек второго рода, введенных автором. А если вращения этой "точки"не заметили с первого взгляда, предлагается посмотреть еще раз. Тогда уже не будет особо трудно заметить, что вращение не только есть, оно не твердотельное, а дифференцированное. Так выглядит материальная точка второго рода. Таким образом у такого вращательного движения нет единственной оси, если оно не редкая ее разновидность в виде твердотельного вращения. Осями могут быть все направления одновременно. И являются во Вселенной если мы придерживаемся космологического принципа. А мы придерживаемся.

Тензорный закон преобразования метрики приведет к закону преобразования их определителей:

$$g(x) = \left(\det\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|\right)^2 \det(\xi),$$

где коэффициентом служит квадрат якобиана $J = \det\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|$, определителя якобиевой матрицы. Отказ от необоснованного предположения обязательной потенциальности движения добавляет в якобиан новых отрицательных слагаемых, зануляющих его значение раньше якобиана физического подпространства. Поэтому, например, космологическая сингулярность в реалистической завихренной вселенной, такой, типичного элемента которой читатель видит в образе галактики на приведенном рисунке, означает выворачивание ее наизнанку при конечной плотности материи и при ненулевом трехмерном объеме.

Этот вывод заслуживает быть представленным для наглядности на очень простой, дидактической схеме, имеющей благодаря своей тривиальности и наглядности большую доказательную и убедительную силу.



Отрезки дуг большого круга, моделирующего области трехмерного подпространства четырехмерного пространства-времени, представленного на рисунке самой плоскостью, вырезаемые соответствующими уголками, заполнены неинтегрируемым (неламинарным) неконгруэнтным самопроникающимся потоком. Внутренний круг меньшего размера – моделирует трехмерное подпространство меньшего размера, в другой момент времени, до которого оно сжалось, двигаясь, оставаясь ортогональным радиальным временным линиям. Тем самым получаем, что четырехмерные объемы схематически изображенных двух областей четырехмерного пространства–времени представлены на рисунке *площадями* соответствующих двух треугольников, каждый ограниченный с одной из своих сторон соответствующей дугой, а с двух – времениподобными отрезками. То, что все подобные треугольники сожмутся в точку с нулевым четырехмерным объемом ровно в центре рисунка, т.е. ровно одновременно с обнулением объема трехмерного своего «пространстоподобного подпространства» – ни чем не обоснованное предположение, кроме желания получить простую модель. Такое движение имеет место только в случае, когда все равны нулю, что означает синхронную

сопутствующую систему координат, т.е. отсутствие вращения и завихренности. Так это или не так в нашей Вселенной помогает решать его величество наблюдение, т.е. непредвзятое рассматривание приведенного рисунка телескопа Хаббла. Название телескопа себя оправдывает еще тем, что именно Хаббл мудро заявлял, что оставляет более уверенную интерпретацию «закона Хаббла» теоретикам. А новое поколение теоретиков благодаря снимкам телескопа Хаббла оказались в состоянии повторить легендарное восклицание Галилея «Epur si muove!», т.е. «Все таки она движется!» имея в виду движение материальной точки, относящееся ее (материальной точке второго рода, введенного автором) внутренним степеням свободы. Отсутствие вращения и завихренности - атрибут абсолютно нереалистической вырожденной модели Вселенной, ровно каковой является модель сингулярной Вселенной. Такая модель (Фридмана) хороша только вдали от сингулярности, так считал, кстати, и Фридман. Приведенного доказательства более чем достаточно, если Вы стоите на научной позиции, и нет других мотивов, чтобы сингулярность послужила подтверждением иных, чуждых науке текстов.

Таким образом, запоздалому введению в оборот таких полезных несимметричных конструкций как завихренность, непотенциальность, кручение потока мешало отсутствие физических объектов их приложения в виде материальных точек второго рода, образующих континуум неинтегрируемого потока. И именно это позволяло так долго, почти 100 лет, просуществовать космологической сингулярности и даже появлению таких фантомных понятий как темные компоненты Вселенной. Они, в действительности, всего лишь неучтенные вклады инерциальных сил, ассоциированных с упомянутыми компонентами движения или, что есть то же самое, вклады в кинетической энергии, впервые учитывающиеся во внутренних степенях свободы модели материальной точки второго рода.

Материальная точка второго рода имеет переменную массу. Подчеркнем, пользуясь случаем, приоритет российского вклада в мировую науку в области теоретического обоснования освоения космоса (И.В. Мещерский, К.Э. Циолковский) в конце XIX – начале XX вв., которые заложили основы нового раздела теоретической механики - механики тел переменного состава, предтечи материальной точки второго рода. Этот вклад обеспечил приоритет Советской науки в первом выходе в околоземный космос в Советский период России, когда нашлись сила и воля руководства страны и, главное, здоровые амбиции и понимание того, что перегнать Запад можно и нужно. Но вовсе не потому что они враги. Ровно наоборот: и Западу лишь выгодна суверенная Российская научная мысль перед лицом предстоящих реальных глобальных опасностей. Со всеми нюансами, обсуждение которых выело бы нас за пределы настоящей статьи. Правильное описание дальнего космоса – несингулярной Вселенной без придумывания темных вкладов, но на основе модели материальной точки второго рода - продолжение традиций Мещерского и Циолковского в повторяющихся таких же отечественных условиях (первоначальное игнорирование, даже отчуждение, затем взятие за основу разработок Циолковского, оказавшихся теоретической основой индустрии обеспечения обороноспособности страны). Отказ от зародившегося в Западной науке концепции конечного во времени существования Вселенной (а Фридман был сторонником пульсирующей Вселенной) – нормальное развитие науки, свойственное естественному ходу событий. Восточная концепция вечной Вселенной отчетливо на основе приведенного научного подхода говорит Западной на данном этапе «Спасибо, но нет!».

Восточная космологическая парадигма согласовывается с новыми научными достижениями гораздо теснее. Серия работ автора об отсутствии космологической сингулярности говорит об этом прозрачно. Они базируются на незашоренной математике и честном наблюдении. То, что Православие, воспринимаемое, практически, для всех россиян – и для мусульман, и для буддистов – как родное, поскольку это религия большинства нашей страны, в эти дни снова в кризисе ищет себя между Византией и Московией, не свидетельсьвует ли, что пора диалог между наукой и религией поставить на достойное место в изучении будущего? Не пора ли перестать «стесняться» что мы религию отцов чтим, но ею не прикрываемся перед лицом ответственности за будущее, которая уже нависла ощутимо даже для самых «кононически» догматизированных из нас?!

Литература

1. Nurgaliev I.S. E Pur Se Muove! / I.S. Nurgaliev // Ярославский педагогический вестник. –2012. – Т. 3, №4. – С.7-12.

2. Nurgaliev I.S. Dark Energy and Dark Matter as Components of Cosmological Term Stand for Vorticity and Shear / I.S. Nurgaliev // The

Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity. Astrophysics and Relativistic Field Theories. – 2015. – P.1553-1557.

3. Nurgaliev I.S. New Model of Material Point and Bouncing Cosmology without Singularity Prejudice / I.S. Nurgaliev // World Scientific. – 2015.

4. URL: http://www.science.gov/topicpages/d/dark+matter+components.html

5. URL: http://adsabs.harvard.edu/abs/2015mgm.conf.1553N

COSMOLOGICAL VIEWS AS A FIELD OF COMPETITION FOR INTELLECTUAL LEADERSHIP

I.S. Nurgaliev

It is shown that the inevitability of the cosmological singularity is a myth. This myth is rooted in religious consciousness. His dolgorovski was based on the authority of respected colleagues, «proved»such an inevitability, based on unrealistic Lemma – truncated equation, Raychaudhuri.

Keywords: cosmology, singularity, Jacobian, religion.

UDC 530.12+531.51

NEW MODEL OF MATERIAL POINT AND INERTIAL CHARACTER OF ACCELERATED COSMOLOGICAL EXPANSION OF NONSINGULAR UNIVERSE

I.S. Nurgaliev[1]

1 *ildus58@mail.ru*; Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy

The conceptions of the material point of the second type and of a «homogeneous and isotropic rotation» are developed for galaxy models involved in the previous publications. The conclusion about the not robust and religiously biased artificial character of the cosmological singularity is derived from this modeling. The inertial character of the accelerated expansion of bouncing Universe is justified.

Keywords: cosmology, non-singular universe, vorticity, material point of the second type, religion.

Introduction

«Everything must be made as simple as possible. But not simpler.» A. Einstein

Pre-religious myths and oldest oriental religious sources consider world eternal. Ancient Hindu religious scriptures, for example, describe the universe to be repeatedly originated and destroyed all through eternity by Brahma, the creator, in a never-ending process of finite and transient time cycles called the kalpa.

Younger Abrahamic religions, such as Judaism, Christianity and Islam, cultivated the eschatological conception of the beginning and the end of the universe. The Bible begins with the conception of creation of the universe: «In the beginning God created the heavens and the earth». Many of founding-fathers of the modern science were not only Christian believers but religious thinkers and church figures. Therefore when in the beginning of 20th century scientific theory after apparently unsuccessful static Einstein Universe conceded recognition to singular in the beginning cosmologic model it was almost immediately adopted as world model in harmony with existed religious worldview inherited from founding fathers. The interpretation by the first author of such cosmological solution, Alexander Friedman from Soviet Petrograd, who mentioned parallels between universe and a Phoenix bird from Indian mythology did not impress anybody. Strong religious roots, intellectual and moral leadership of Christianity in European arena, including sciences, consciously or subconsciously, but confidently enough elaborated the concept of beginning delicately substituting term «creation» by religiously neutral term «singular birth». Vatican Conferences of seventies fixed «peaceful co-existence» ceremonially.

Cosmologic model as foremost scientific scenario cannot be left for partisan fantasies because it might challenge trust into scientific method, while its high role is, in contrary, to serve as a sample for quality of other forward engagement disputes such as of global world order, climate change, asteroid danger and others. Almost one-hundred year history of the singular cosmology is good tribute payment by science to the religious faith, to predecessor, but too long saving singular creation as the umbilical cord camouflaged by neutral term my cause intoxication hazard to both organisms. We respect religion not for scientific predictions but for saving humanity from barbarianism.

How come Physics allows such non-scientifically looking model exist as model of reality so long? Well, physicists are also humans with all consequences out of this fact.

Getting Rid of Sophism and introducing new concept of material point

Let us start from the scratch. The simplest physical object is material point. Terms such as point mass, and particle are used in English literature more often. By definition they are massive bodies with infinitesimal linear sizes and volume. Material element of mass is treated as a point and, therefore, its deformation and orientation degrees of freedom are ignored. So we see typical sophism. «Let us call it point, as far we call it point let us treat it as a point».

We will call traditional conception of material point material point of the first type to distinguish it from the new concept of the material point of the second type we involve in this paper. New conception is provided by the characteristics of the continuous media in the given point of the space. The main differences between two types of the material points are the following: the first type is characterized by finite mass and charge, has not deformational and orientation degrees of freedom; the second type is

characterized by density of mass and charge and can be deformed and has orientation in space, just as any element of matter does. Even though we call piece of matter a point let as treat it as a piece of matter because it is piece of matter regardless the name.

Vorticity is driver of accelerated expansion

Velocity vector V_α of the material point (further we will mean always one of the second type by default unless other is not specified) is projected onto coordinate space by the tensor of the second rang $H_{\alpha\beta}$:

$$V_\alpha = H_{\alpha\beta} R^\beta,$$

where R^β is radius-vector of the material point. The covariant consideration is presented in pioneer paper [1]. Symmetrical parts of the non-diagonal elements of $H_{\alpha\beta}$ can be eliminated by appropriate choose of the system of coordinates. Therefore for homogeneous and isotropic universe we can simplify $H_{\alpha\beta}$:

$$H_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} H & \pm\omega & \pm\omega \\ \mp\omega & H & \pm\omega \\ \mp\omega & \mp\omega & H \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where the global average vorticity can be zero ($<\omega>=0$, $<\omega^2>\neq 0$), though not necessarily.

Homogeneous and isotropic rotation

Just as in the case of the skills needed to imagine the homogeneous and isotropic expansion we meet some challenge with the imagining «homogeneous and isotropic rotation». Parenthesis emphasize quite limited appropriateness of the term "rotation", traditionally coming from solid body motion context, to the sort of motion involved here corresponding to vorticity, sort of continuously differential rotational motion of the every material point of the continuous media. The term «the developed turbulence stirring» is also relevant. The rigid body rotation violates isotropy because it involves the specific axis of rotation. This new «rotation» has all directions as a continuum of axes, therefore does not violate isotropy. This is quite analogous to Hubble expansion to imagine.

Picture 1 might serve some didactic help to better imagination and faster visualization of this new cosmological motion accompanying Hubble expansion which, in its turn, also needed some period of time to be adapted in the intuition of the cosmologists first, then of the general audience as the expansion did. Note that expansion, shear and vorticity are three components of the continuous motion with the totally equal rights to exist. Hubble expansion (picture on the left) is a real growth of the cone volume because its height is growing into new volume in the space, while the new cosmological motion is growth (spreading) only of the every given highlighted cone because of the growing its solid angle only within the given limited and existed full angle of 4 . The doubled arrows are mentioning that those material points of the given cone after filling all of 4 radians of space reach starting point again from opposite direction toward starting point and keep moving. This new component of the cosmological motion does not change the density of the matter in the cone because every given cone, as a local region, has the given height and fulfill the same 4 radians of its previous full solid angle. This motion can be thought as more fundamental than Hubble expansion in this sense, because Hubble expansion has limits in its existence (at least the beginning) and therefore transient as a process, while new homogeneous and isotropic vorticity-related motion is able to provide Universe eternity, to counterbalance gravity and to explain acceleration of the expansion. Therefore, it is forth to spend some time to manage to imagine it.

Is not this component of cosmological motion unknown wanted fundamental phenomenon which Edvin Hubble was searching for the red shift (transversal in fact) to relate to?

Dynamic equations

Researching a role of rotation in cosmology has long history [2 – 18] (this bibliography is not complete). We will use firsthand Newtonian equations with clear cut didactic motivation – to emphasize that cosmological singularity is consequence of the too simple model of the flow (contradicting to the mentioned Einstein's thought taken as epigraph) and has nothing to do at all with special and general relativism as a cause. The covariant generalization of the result given below for general relativistic description is easy and straightforward.

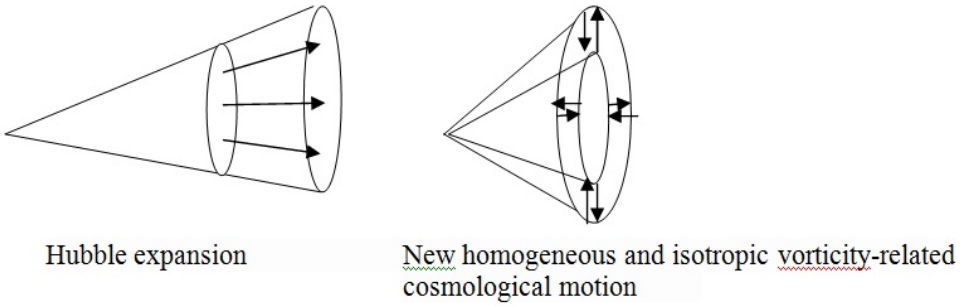


Fig. 1. Picture 1.

Standard equations of Newtonian hydrodynamics in standard notations read:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\nabla\vec{v} = -\nabla\varphi + \frac{1}{\rho}\nabla\rho + \frac{\mu}{\rho}\triangle\vec{v} + \ldots,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\vec{v} = 0, \tag{2}$$

$$\triangle\varphi = 4\pi G\rho.$$

Procedure of separating of diagonal H, trace-free symmetrical σ and anti-symmetrical ω elements of velocity gradient was used by Indian theoretician Amal Kumar Rauchaudhury (1923 – 2005) [1]. The equation for expansion θ, sum of the diagonal elements of $H_{\alpha\beta}$,

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^2 - \omega^2 = -4\pi G\rho + \mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\Sigma f\right) \tag{3}$$

is most instrumental in the analysis of singularities and bears the name of its talented author. In equation (3) we will omit σ, directing coordinate basic axis along the main directions of the deformations. Last term in the RHS is divergence of the sum of all tensions, besides gravity, which is presented as the first term in the RHS. The solution of this equation with only gravity as an interaction, was presented in the publications and reports [19 – 26] by the author and clearly demonstrated that the long survival of the singularity in the cosmological models are based on the unrealistic supposition of the vanishing vorticity. Presenting exact solutions in terms of Newtonian formalism, which is equivalent, in the presence of pressure – after small modifications, to general relativistic description, – emphasize the real factor of averting singularity, which is *vorticity*. In doing this emphasis stronger and in making driving force for accelerating expansion clearer in this paper we will go even farer. We will ignore not only special and general relativism but Newtonian gravity too! And will come to the conception of the *inertial accelerated expansion*. Inertial accelerated expansion displaces apparent dark energy. Dark energy is possessed by vortex-related degrees of freedom of the second type material points. In other words, it is part of kinetic energy. No mystery.

System (2) gets simplified up to two equations

$$\begin{gathered}\dot{\theta} + \tfrac{1}{3}\theta^2 - \omega^2 = 0,\\ \dot{\omega} + \tfrac{2}{3}\theta\omega = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Recalling $\theta = 3H$ the integral of (4) can be presented as

$$H^2 = H_\infty^2 - \frac{3\omega_0^2 R_0^4}{R^4}. \tag{5}$$

Do singular cosmological models have any specific cognitive value while the real universe is not singular as we have seen? Yes they do. Those models are just like extreme car crash test experiments at an automobile plant. Even though real cars will escape such extremely harsh circumstances in reality it is valuable to learn limits of the real characteristics of a car to identify their real weaknesses. Singular cosmologic

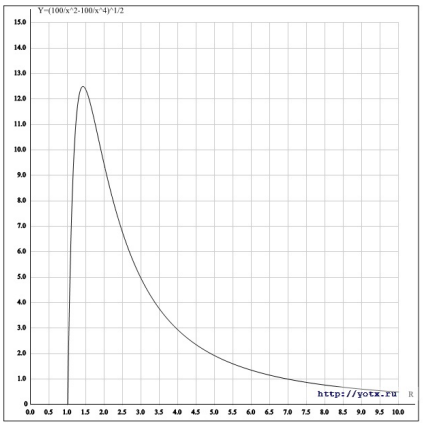


Fig. 2. Qualitative look of function (5) as a curve $y = 100/x^2 - 100/x^4$. The phase point appears from infinite R on the right and bounces back at $y = 0$.

models along with collapse of the celestial objects serve as a test table and natural collisions plant for new high energy theories such as GUT and quantum gravity.

Historically many authors have solved Einstein equations and Newtonian hydrodynamic equations with rotation in the cosmological context [2 – 18]. Still existing ambiguities whether a rotation averts the singularities in real cosmology or do not deals mainly with the leaving one direction without rotation, to which the collapse occur even in other directions, with rotations, it is averted. When involved here isotropic rotation is presented in all and each directions this ambiguity disappears [19 – 26]. Cosmological singularity is gone robustly and can be thought of only as imaginative artificial scenario with nonrealistic space symmetry of cosmologic flow without any chance to be realized in the real Universe. Static Universe is feasible as a model and it is stable because of the stabilizing factor is dynamic vorticity rather than cosmological constant. Static equations $\sigma^2 - \omega^2 = -4\pi G\rho$ in general relativistic consideration of the static averaged universe hold $\sigma^2 - \omega^2 = -4\pi G(\rho + 3p)$.

Modification of Hubble law from ideal toy model toward realistic one should be done in accordance with modern observations rather than on the bases of «have to be this way» principle.

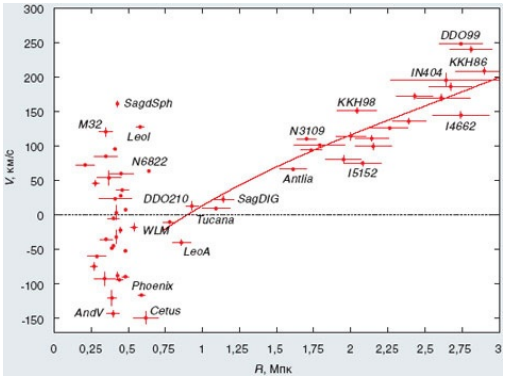


Fig. 3. Source http://elementy.ru/lib/430424. I.D. Karachentsev diagram

Conclusion

Abrahamic religious tradition of neo-creationistic fantasies of singularity in the real Universe after having been nested in scientific cosmology in the 20es and after almost hundred-year survival is displaced by absolutely natural conception of the bounce on the effective centrifugal potential. The dynamics of the Universe appears to be similar to the launching Soviet Sputnik rather than the Newton's apple falling. Two-body and many body tasks are mechanic analogs of the cosmology rather than vertical free fall task. Every Keplerian orbit has apogee with accelerated receding. Accelerated expansion is one of the three parts of the acceleration divergence along with shear and vorticity squares apparently acting as mysterious dark matter and energy [27]. As Confucius put it «The hardest thing of all is to find a black cat in a dark room, especially

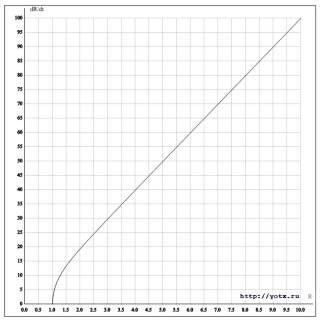


Fig. 4. Qualitative outlook of the velocity function v depending on distance R according to $v = \sqrt{100 - 100/R64}$. Each material point of the second type is surrounded by separatrix spheres eliminating invariant singularity.

if there is no cat».

Литература

1. Raychaudhuri A.K. On the Relationship between the Geometry of Space-Time and Its Information Content. – Physical Review. – 1955. – T.98. – P.1123-1126. – URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.98.1123

2. Godel K. An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation. – Review of Modern Physics. – 1949. – T.21. – P.447-450.

3. Godel K. Rotating universes in General Relativity Theory in Proceedings / K. Godel // International Congress of Math. I. – 1950. – P.175-181.

4. Heckmann O. –J. of Astrophys / Heckmann O., Shucking E. – 1955. – T.38. – P.95.

5. Heckmann O. –Astron. J. – 1961. – T.66. – 599 p.

6. McCrea W.H. Newtonian universes and the curvature of space / Quart. J. Math, McCrea W.H., Milne E.A. – 1934. – T.5. – 73 p.

7. Narlikar J.V. –Mon.Not.Roy.Astron.Soc. – 1963. – T.126. – 203 p.

8. Narlikar J.V. –Mon.Not.Roy.Astron.Soc. – 1966. – T.131. – 501 p.

9. Davidson W. Newtonian universes expanding or contracting with shear and rotation / W. Davidson, A.B. Evans // Inter. J. of Theor. Physics. – 1973. – V.7. – I.5. – P.353-378.

10. Davidson W. Nature / W.Davidson, A.B.Evans. – London, 1971. – 29 p.

11. Hawking S.W. On the Rotation of the Universe / S.W. Hawking // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1969. – T.142. – P.129-141. – URL: http://dx.doi.org/10.1093/mnras/142.2.129

Heckmann O. Zeitschrift for Astrophysik / O.Heckmann, E.L.Shucking. – 1955. - № 38. – 95 p. Heckmann O. Zeitschrift for Astrophysik / O.Heckmann, E.L.Shucking. – 1956. - № 40. – 81 p.

12. Heckmann O –Zeitschrift fur Astrophysik / O.Heckmann, E.L.Shucking. – 1955. – T.38. – 95 p.

13. Kristian J. Observations in Cosmology / J. Kristian, R.K. Sachs // Astrophysical Journal. – 1966. – T.143. – P.379-399.

14. McCrea W.H. Newtonian universes and the curvature of space / W.H. McCrea, E.A. Milne // Quarterly Journal of Mathematics. – 1934. – T.5. – P.73-80.

15. Narlikar J.V. Newtonian Universes With Shear and Rotation. – Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1963. – T.126. – 203 p.

16. Shikin I.S. Homogeneous Anisotropic Models with Shear in Newtonian Cosmology // – Soviet Physics: JETP. – 1971. – T.32. – 101 p.

17. Zeldovich Y.B. – Soviet Astronomy // – AJ. – 1965. – T.8. – 700 p.

18. Иваненко Д.Д. О вращении Вселенной Проблемы Теор. гравиТации и элементарных часТиц. Под ред. В.Н. Мельникова / Д.Д. Иваненко, В.Г. КречеТ, В.Ф. Панов. – М.: ЭнергоатомиздаТ, 1986. – Вып. 17. – 815 с.

19. Nurgaliev I.S. Singularities Are Averted by Vortices / I.S. Nurgaliev // Gravitation and Cosmology. – 2010. – Vol.16, № 4. – P.313-315.

20. Nurgaliev I.S. Vorticity Induces Cosmological Term of Eternal Universe and Removes Darkness / I.S. Nurgaliev // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2013. - № 1. – С. 58-64.

21. Nurgaliev I.S. E Pur Se Muove! / I.S. Nurgaliev // Ярославский педагогический весТник. – 2012. – Т. 3. - № 4. – С.7-12.

22. Nurgaliev I.S. The Twelfth Marcel Grossmann Meeting On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. – 2009. – Vol.3. – P.1748-1750.

23. Nurgaliev I.S. Dark Energy Belongs to Vorticity, Deformations Could be «Dark Matter» / I.S. Nurgaliev // Modern Problems of Gravitation, Cosmology and Relativistic Astrophysics. International Conference. – 2010. – 112 p.

24. Nurgaliev I.S. Effect of Accelerated Expansion is Effect of Nonzero Average of Local Isotropic Rotation Square / I.S. Nurgaliev // 14-th Russian Gravitational Conference -International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics. – 2011. – P.150-151.

25. Nurgaliev I.S. Confirmation of Cosmological Bounces Predicted by Alexander Friedmann / I.S. Nurgaliev // 8th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology. – 2011. – Vol.3. – P.281-285.

26. Nurgaliev I.S. World as Flow: from Agro-ecological Micrometeorology to Cosmology / I.S. Nurgaliev // International Journal of Engineering and Technical Research. – 2014. – P. 57-61. – URL: https://www.erpublication.org/IJETR/Best%20Paper%20Award.htm

27. Ignatyev Yu.G. Classical cosmology and dark energy / Yu.G. Ignatiev. – Kazan: Kazan publishing House of Kazan University, 2016. – 248 p.

UDC 517.917

SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF A SCALAR CHARGE IN AN EXTREME CHARGED ANTI-DILATONIC WORMHOLE

A.A. Popov[1], O. Aslan[2]

1 *apopov@kpfu.ru*; Kazan Federal University
2 *alsucuk@gmail.com*; Kazan Federal University

The self-interaction for a static scalar charge in the space-time of extreme charged anti-dilatonic wormhole is calculated. We assume that the scalar charge is the source of massless scalar field with minimal coupling of the scalar field to the curvature of spacetime.

Keywords: self-force, wormhole, scalar field.

We have modeled the behavior of a pointlike scalar charge
in an extreme charged anti-dilatonic wormhole (A. Popov, *Space, Time and Fundamental Interactions* n.**1** (2015), p.24-38)

$$ds^2 = -e^{-2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\alpha(r)}\left[dr^2 + \left(r^2+Q_e^2\right)\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \tag{1}$$

where

$$2\alpha(r) \quad = \quad \frac{\pi^2}{4} - \arctan^2\left(\frac{r}{|Q_e|}\right). \tag{2}$$

It is assumed that dilaton charge Q_d , electric charge Q_e, and mass M of the wormhole are related by the relations

$$Q_d = M = \frac{\pi}{2}|Q_e|.$$

This problem has mathematical difficulties. The field of charge in the considered problem is determined by the Green's function of some ordinary inhomogeneous differential equation of the second order;

$$\frac{\partial^2 g_l(r,\tilde{r})}{\partial r^2} + \frac{2r}{\left(r^2+Q^2\right)}\frac{\partial g_l(r,\tilde{r})}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{(r^2+Q^2)}g_l(r,\tilde{r}) = -\frac{\delta(r,\tilde{r})}{e^{\alpha(r)}(r^2+Q^2)}. \tag{3}$$

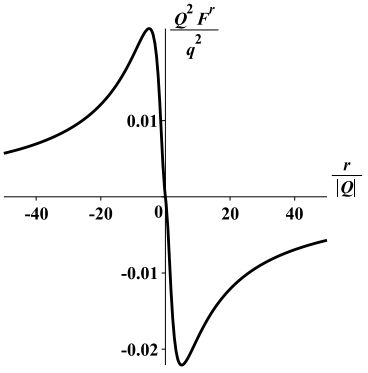
This Green's function can be expressed in terms of independent solutions of the corresponding homogeneous equation. As a rule, the Wronskian of these solutions coincides, up to a normalization constant, with the coefficient in front of the delta-function in the Green's function equation. In the case under consideration, this is not so. To solve this problem, we used the properties of the delta-function;

$$\frac{\delta(r,\tilde{r})}{e^{\alpha(r)}} = \frac{\delta(r,\tilde{r})}{e^{\alpha(\tilde{r})}}. \tag{4}$$

This enables us to reduce the problem to the standard case.

We have obtained an expression for the self-force on an arbitrarily coupled, static scalar charge in a wormhole space-time.

$$F^r(r) = -\frac{q}{2}g^{rr}\frac{\partial\phi_{ren}(r)}{\partial r} = -\frac{q^2e^{-3\alpha(r)}\left(\frac{r}{|Q|}-\frac{1}{2}\arctan(\frac{r}{|Q|})\right)}{\pi Q^2\left(1+r^2/Q^2\right)^2}. \tag{5}$$



АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

A
Agathonov A.A. 129
Aminova A.V. 110
Aslan O. 174

B
Bolokhov S.V. 113

E
Ernazarov K.K. 128

I
Ignat'ev Yu.G. 129
Ivashchuk V.D. 113, 128

K
Khakimov D.R. 110
Kobtsev A.A. 128

N
Nurgaliev I.S. 168

P
Popov A.A. 174

А
Абдульмянов Т.Р. 103
Абзалов Р.А. 109
Акиньшина С.В. 159

Б
Баранов А.М. 110
Богатырева М.В. 158
Богданова С.Б. 116
Болохов С.В. 7, 114
Бронников К.А. 7, 114

В
Владимиров Ю.С. 10, 115

Г
Гальцов Д.В. 29
Гладков С.О. 116
Голубятников А.Н. 122

Ж
Журавлев В.М. 38, 147, 152, 162

З
Зарипов Ф.Ш. 153

И
Игнатьев Ю.Г. 85, 138, 145

К
Каиров Т.В. 161
Карбановский В.В. 158–161
Кох И.А. 138

Л
Любошиц Д.Б. 122

М
Мелёхина О.В. 158, 160, 161
Морозов В.М. 162

Н
Нургалиев И.С. 163

П
Попов А.А. 87

С
Самигуллина А.Р. 145
Ступаченко Н.С. 158–161
Сушков С.В. 109

Ч
Червон С.В. 101

ЛЕКЦИИ И МАТЕРИАЛЫ VIII-ГО МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА «НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ, СТАТИСТИКЕ, ТЕОРИИ ПОЛЯ И КОСМОЛОГИИ» - GRACOS-18

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**

Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, Л.А. Бикбаева, Н.Н. Исметова, Н.В. Зайцева, И.А. Кох, А.М. Нигмедзянова, А.Р. Самигуллина, Э.В. Чеботарева**

Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2ε в учебно - научной лаборатории «Информационных технологий в математическом образовании» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета

В сборнике трудов опубликованы **32** статьи, посвященные современным проблемам теоретической физики, теории гравитации, космологии и нелинейной механики

Подписано в печать 24.10.18.Формат 60×84/8
Печать цифровая. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 20,46
Общий тираж 500 экз. Первый завод 100 экз. Заказ № 24.10/18-1

Отпечатано с готового оригинал-макета
В типографии издательства
Академии наук Республики Татарстан
420111, г. Казань, ул. Баумана, 20.