УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2021, Т. 163, кн. 2 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 214–225 ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3 doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.214-225

ЧИСЛЕННАЯ СИМУЛЯЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТИПА НАЧАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Д.В. Христич, Д.А. Сухоруков, М.Ю. Соколова

Тульский государственный университет, г. Тула, 300012, Россия

Аннотация

Введено понятие канонических осей анизотропии материала, в которых наибольшее число элементов тензора упругих податливостей обращается в нуль. Разработана программа экспериментов, позволяющая определить тип анизотропного материала без нахождения всех компонент тензора упругих податливостей в произвольной лабораторной системе координат и одновременно установить положение канонических осей анизотропии в материале. Предложена программа механических экспериментов для идентификации типа начальной упругой анизотропии материала по результатам опытов в канонических осях анизотропии в случае, когда они совпадают с осями лабораторной системы координат. Выполнено компьютерное численное моделирование экспериментов. Исследовано влияние погрешностей экспериментальных измерений на результаты идентификации. Показано, что разработанные критерии идентификации типа материала применимы при наличии погрешностей измерений.

Ключевые слова: анизотропные материалы, упругие свойства, идентификация, программа экспериментов

Введение

Анизотропия свойств присуща большому числу конструкционных материалов, использующихся в современном машиностроении, строительстве, медицине и других отраслях. Для разных материалов анизотропия может быть как естественной, например, в древесине, грунтах, биологических тканях, так и созданной преднамеренно, например, в композитах и полимерах. В любом случае для разработки экспериментальных программ по конкретизации материальных констант и функций, которые входят в определяющие соотношения, требуется знать тип начальной упругой анизотропии материала, так как число материальных констант или функций различно для разных типов материала. Обычно тип анизотропии материала связывают с точечной группой симметрии, присущей упругим свойствам этого материала. В таком случае материалы разделяются по кристаллографическим системам на триклинные, моноклинные, ромбические, тетрагональные, тригональные, гексагональные, кубические, а также на изотропные [1, 2].

При бесконечно малых деформациях и постоянной температуре нелинейные определяющие соотношения асимптотически стремятся к закону Гука, который выражает линейную зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\mathbf{C}$ – постоянный тензор упругих податливостей четвертого ранга, $\mathbf{S}$ – тензор напряжений.

Известно [1–3], что в общем случае тензор $\mathbf{C}$ обладает внутренней симметрией: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$, и поэтому имеет 21 независимую компоненту. За счет специального выбора ориентации системы координат относительно лабораторной системы, который определяется тремя независимыми параметрами – углами ориентации, число независимых компонент тензора $\mathbf{C}$ можно уменьшить до 18. Если материал обладает элементами симметрии, то число независимых компонент тензора $\mathbf{C}$ сокращается и может быть равно от 2 для изотропного и гиротропного материалов до 13 для моноклинного [2]. Для каждого типа анизотропного материала характерна своя структура тензора упругих податливостей $\mathbf{C}$. Поэтому тип начальной упругой анизотропии материала можно определить из экспериментов при малых деформациях.

Во многих работах [4–7] для установления типа анизотропного материала требуется знать 21 компоненту тензора упругости или тензора упругих податливостей в некоторой системе координат. В статье [8] предложен подход к определению принадлежности упругих свойств анизотропных материалов к различным классам симметрии с использованием понятия оптимального симметрийного приближения для тензора упругих констант.

Предлагаемый в статьях [2, 9–15] подход к решению проблемы идентификации типа анизотропии материала состоит в разработке программы экспериментов, с помощью которой можно перед определением упругих констант провести классификацию материалов по кристаллографическим системам, если симметрия свойств некоторого анизотропного материала априори неизвестна.

1. Программа экспериментов по определению типа начальной упругой анизотропии материала

Базовым в программе является эксперимент по определению положения главных осей анизотропии в материале. Показано, что главные оси анизотропии материала можно определить как главные оси тензора деформаций, возникающих в материале при гидростатическом сжатии. Предложено определять главные оси анизотропии из трех экспериментов на сжатие вдоль каждой из осей некоторой фиксированной (лабораторной) декартовой системы координат $Ox'y'z'$ с базисом $\vec{e}^{\,1}$, $\vec{e}^{\,2}$, $\vec{e}^{\,3}$.

В этих экспериментах тензоры напряжений имеют вид

$$\mathbf{S}_1 = -t\vec{e}^{\,1}\vec{e}^{\,1}, \quad \mathbf{S}_2 = -t\vec{e}^{\,2}\vec{e}^{\,2}, \quad \mathbf{S}_3 = -t\vec{e}^{\,3}\vec{e}^{\,3}.$$

В каждом таком эксперименте деформации описываются тензорами $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$: $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{S}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{S}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{S}_3$.

В силу линейности закона Гука по результатам трех экспериментов определяется тензор деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{C}\cdot\cdot(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3). \tag{2}$$

Главные оси $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ являются главными осями анизотропии материала.

В силу симметрии тензора деформаций возможны три случая:

1) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ – произвольный ортогональный триэдр, материал изотропный или кубический;

2) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, вектор $\vec{a}^{\,3}$ определен, векторы $\vec{a}^{\,1}$ и $\vec{a}^{\,2}$ ортогональны и расположены в плоскости, перпендикулярной $\vec{a}^{\,3}$, материал тетрагональный, тригональный или гексагональный;

3) $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ – оси эллипсоида деформаций, материал ромбический, моноклинный или триклинный.

Для одноосных кристаллов (тетрагональный, тригональный и гексагональный материалы) и кубического материала ориентация главных осей анизотропии $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ определяется неоднозначно.

Оси системы координат, связанной с элементами симметрии свойств материала, названы каноническими осями анизотропии материала. Связанные с ними базисные векторы обозначим $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$, $\vec{k}^3$. Канонические оси анизотропии – это оси декартовой системы координат, в которой тензоры, описывающие свойства материала, имеют наименьшее число ненулевых компонент.

Если два из трех собственных значений тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ равны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \neq \varepsilon_3$), то однозначно определена только одна главная ось анизотропии – главная поворотная ось $\vec{a}^{\,3}$. Базисные векторы $\vec{a}^{\,1}$ и $\vec{a}^{\,2}$ могут быть выбраны произвольно, а базисные векторы $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$ необходимо связать с боковой поворотной осью. Вектор $\vec{k}^3 = \vec{a}^{\,3}$. Базисы $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ и $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$, $\vec{k}^3$ связаны ортогональным тензором поворота

$$\mathbf{Q}_3 = \cos\varphi\left(\vec{k}^1\vec{k}^1 + \vec{k}^2\vec{k}^2\right) + \sin\varphi\left(\vec{k}^1\vec{k}^2 - \vec{k}^2\vec{k}^1\right) + \vec{k}^3\vec{k}^3,$$

так что $\vec{a}^{\,i} = \vec{k}^i \cdot \mathbf{Q}_3$, $i = 1, 2, 3$.

Для нахождения одного параметра (угла φ) и идентификации типа одноосного кристалла требуется провести два эксперимента: растяжение-сжатие вдоль векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ и сдвиг в плоскости этих векторов.

Для нахождения угла φ в случае тригонального материала необходимо провести один эксперимент: двухосное растяжение-сжатие вдоль векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$. В этом опыте тензор напряжений имеет вид $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,1} - \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,2}\right)$, а измеряемые компоненты тензора деформаций

$$\begin{gathered}\bar{\varepsilon}_{11} = -\bar{\varepsilon}_{22} = t_4(C_{1111} - C_{1122}), \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \bar{\varepsilon}_{12} = 0,\\ \bar{\varepsilon}_{13} = 2t_4 C_{1123}\sin 3\varphi, \quad \bar{\varepsilon}_{23} = 2t_4 C_{1123}\cos 3\varphi.\end{gathered} \tag{3}$$

Из выражений (3) угол φ для тригонального материала определяется по формуле

$$\varphi^{(tr)} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\bar{\varepsilon}_{13}}{\bar{\varepsilon}_{23}}. \tag{4}$$

Для определения угла φ в случае тетрагонального материала требуется провести два эксперимента: растяжение-сжатие вдоль векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ и сдвиг в плоскости этих векторов, который можно осуществить, выполняя растяжение-сжатие под углом 45° к направлениям $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$. В первом из этих экспериментов тензор напряжений $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,1} - \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,2}\right)$, а измеряемые компоненты тензора деформаций

$$\begin{gathered}\bar{\varepsilon}_{11} = -\bar{\varepsilon}_{22} = t_4\left[(C_{1111} - C_{1122})\cos^2 2\varphi + 2C_{1212}\sin^2 2\varphi\right],\\ \bar{\varepsilon}_{12} = t_4\left[2C_{1212} - (C_{1111} - C_{1122})\right]\sin 2\varphi\cos 2\varphi, \quad \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{23} = \bar{\varepsilon}_{33} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Во втором опыте тензор напряжений имеет вид $\mathbf{S}_5 = t_5\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,1}\right)$, а измеряемые деформации

$$\begin{gathered}\bar{\bar{\varepsilon}}_{11} = -\bar{\bar{\varepsilon}}_{22} = t_5\left[2C_{1212} - (C_{1111} - C_{1122})\right]\sin 2\varphi\cos 2\varphi,\\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{12} = t_5\left[(C_{1111} - C_{1122})\sin^2 2\varphi + 2C_{1212}\cos^2 2\varphi\right], \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{13} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{23} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{33} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Из выражений (5), (6) угол φ для тетрагонального материала определяется по формулам

$$\varphi^{(t)} = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\bar{\varepsilon}_{12}t_5}{\bar{\varepsilon}_{11}t_5 - \bar{\bar{\varepsilon}}_{12}t_4} \quad \text{или} \quad \varphi^{(t)} = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\bar{\bar{\varepsilon}}_{11}t_4}{\bar{\varepsilon}_{11}t_5 - \bar{\bar{\varepsilon}}_{12}t_4}. \tag{7}$$

Если в обоих экспериментах величины нагрузок одинаковы $(t_4 = t_5)$, то выражения (7) для угла φ упрощаются:

$$\varphi^{(t)} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\bar{\varepsilon}_{12}}{\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\bar{\varepsilon}}_{12}} \quad \text{или} \quad \varphi^{(t)} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\bar{\bar{\varepsilon}}_{11}}{\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\bar{\varepsilon}}_{12}}. \tag{8}$$

Ориентация канонических осей анизотропии относительно лабораторной системы координат определяется по найденному углу φ из соотношений

$$\vec{k}^1 = \vec{a}^{\,1}\cos\varphi - \vec{a}^{\,2}\sin\varphi, \quad \vec{k}^2 = \vec{a}^{\,1}\sin\varphi + \vec{a}^{\,2}\cos\varphi, \quad \vec{k}^3 = \vec{a}^{\,3}. \tag{9}$$

Упругие свойства гексагонального материала инвариантны относительно любых поворотов вокруг вектора $\vec{k}^3 = \vec{a}^{\,3}$ [2]. Поэтому для гексагонального материала при действии напряжений $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,1} - \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,2}\right)$ измеряемые компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\bar{\varepsilon}_{11} = -\bar{\varepsilon}_{22} = t_4(C_{1111} - C_{1122}), \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{23} = \bar{\varepsilon}_{33} = 0,$$

так как для этого материала

$$C_{1212} = \frac{1}{2}\,(C_{1111} - C_{1122}).$$

При действии напряжений $\mathbf{S}_5 = t_5\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,1}\right)$ измеряемые деформации для гексагонального материала определяются по формулам

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{12} = t_5(C_{1111} - C_{1122}), \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{11} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{22} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{13} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{23} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{33} = 0.$$

Если в результате эксперимента по определению положения главных осей анизотропии оказывается, что главные значения тензора деформаций (2) равны $(\varepsilon_1 = = \varepsilon_2 = \varepsilon_3)$, то в качестве главных осей анизотропии $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ выбираются оси лабораторной системы координат, в которой проводился эксперимент. Такой выбор векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ позволяет использовать данные экспериментов по одноосному сжатию для определения положения канонических осей анизотропии $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$, $\vec{k}^3$ в кубическом материале. Взаимная ориентация векторных базисов $\vec{a}^i$ и $\vec{k}^i$ определяется ортогональным тензором поворота $\mathbf{Q} = q_{ij}\vec{k}^i\vec{k}^j$: $\vec{a}^{\,i} = \vec{k}^i \cdot \mathbf{Q}$, $i = 1, 2, 3$.

В случае, когда базисы $\vec{a}^{\,i}$ и $\vec{k}^i$ совпадают, для того чтобы отличить изотропный материал от кубического, требуется провести эксперимент на двухосное растяжение-сжатие по направлениям векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ с тензором напряжений $\mathbf{S}_4$ и эксперимент на сдвиг в этой плоскости с тензором напряжений $\mathbf{S}_5$.

В качестве реакции на напряжения $\mathbf{S}_4$ и в изотропном, и в кубическом материалах в соответствии с представлениями их тензоров податливостей $\mathbf{C}$ [2] возникнут деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4^{(\mathrm{is})} = \boldsymbol{\varepsilon}_4^{(c)} = t_4(C_{1111} - C_{1122})\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,1} - \vec{a}^2\vec{a}^{\,2}\right) = (C_{1111} - C_{1122})\mathbf{S}_4. \tag{10}$$

В опыте на сдвиг при напряжениях $\mathbf{S}_5$ в изотропном материале возникнут деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(\mathrm{is})} = 2t_5C_{1212}\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,1}\right) = t_5(C_{1111} - C_{1122})\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,1}\right) = (C_{1111} - C_{1122})\mathbf{S}_5,$$

тогда

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(4)}}{t_4} = \frac{\varepsilon_{12}^{(5)}}{t_5}, \tag{11}$$

так как для изотропного материала $C_{1212} = C_{2323} = C_{1313} = \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right)$ [2].

В кубическом материале при сдвиге $\mathbf{S}_5$ в плоскости векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ возникают деформации, описываемые тензором

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(c)} = 2t_5 C_{1212}\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,1}\right) = 2C_{1212}\mathbf{S}_5. \tag{12}$$

Для компонент тензора упругих податливостей кубического материала $C_{1212} = C_{2323} = C_{1313} \neq \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right)$ [2], поэтому

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5^{(c)} = 2C_{1212}\mathbf{S}_5 \neq (C_{1111} - C_{1122})\mathbf{S}_5. \tag{13}$$

Из выражений (10), (12), (13) следует, что для кубического материала выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(4)}}{t_4} \neq \frac{\varepsilon_{12}^{(5)}}{t_5}. \tag{14}$$

При определении ориентации канонических осей анизотропии относительно лабораторной системы координат можно идентифицировать тригональный, тетрагональный и кубический материалы по наличию характерных для каждого типа материала ненулевых компонент тензора деформаций в определенных экспериментах.

Исследовано влияние возможных погрешностей экспериментальных измерений на практическую применимость теоретических критериев идентификации типов материалов. Получены оценки в виде двойных неравенств для величин, характеризующих отклики материалов на приложение нагрузок в экспериментах на двухосное растяжение-сжатие и сдвиг. Выполнение или невыполнение этих неравенств позволяет отличить изотропный материал от кубического, а гексагональный от тетрагонального.

2. Компьютерное моделирование программы экспериментов

Для моделирования экспериментов разработана компьютерная программа, которая осуществляет расчет и визуализацию деформаций материального образца при различных видах нагружений, предусмотренных в экспериментах. Ориентация канонических осей анизотропии относительно лабораторной системы координат и компоненты тензора упругих податливостей для анизотропных материалов различных типов задаются в программе, но считаются «неизвестными» для пользователя. Результатом работы программы является тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, который определяется по заданным напряжениям на гранях куба из закона Гука (1). В программе предусмотрено, что приложенные нагрузки и вызванные ими деформации измеряются с некоторой погрешностью.

Приведем примеры моделирования экспериментов по идентификации типа начальной упругой анизотропии материала. В этих примерах под «опытами» понимаем численное моделирование отклика материала на «приложенные» напряжения. Последние задаются с некоторым отклонением от номинального значения, что связано с погрешностью измерений величин в реальном эксперименте. Результатом численного моделирования являются значения деформаций, определяемые с погрешностью $\Delta\varepsilon = 0.01 \cdot 10^{-4}$, которые будем называть «измеренными».

3. Пример по идентификации кубического материала

Рассматривается кубический образец, ребра которого направлены вдоль лабораторной системы координат с базисом $\vec{e}^{\,1}$, $\vec{e}^{\,2}$, $\vec{e}^{\,3}$. Проводятся три опыта на одноосное сжатие образца по программе базового эксперимента (2). Предполагается, что при сжатии вдоль трех различных осей лабораторной системы координат действуют равные по номинальным значениям напряжения.

Опыт 1: сжатие вдоль оси $\vec{e}^1$. Измеренные значения приложенных напряжений $S_{11}^{(1)} = -0.9918 \cdot 10^8$ Па. Измеренные в опыте деформации оказались равными

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Опыт 2: сжатие вдоль оси $\vec{e}^2$. Измеренные значения приложенных напряжений $S_{22}^{(2)} = -1.0016 \cdot 10^8$ Па. Измеренные в опыте деформации оказались равными

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Опыт 3: сжатие вдоль оси $\vec{e}^3$. Измеренные значения приложенных напряжений $S_{33}^{(3)} = -0.9957 \cdot 10^8$ Па. Измеренные в опыте деформации оказались равными

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.46 & 0 & 0 \\ 0 & 0.46 & 0 \\ 0 & 0 & -1.13 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (2) являются откликом материала на всестороннее сжатие

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.21 & 0 & 0 \\ 0 & -0.22 & 0 \\ 0 & 0 & -0.21 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}. \qquad (15)$$

Главные значения тензора деформаций (10) равны $\varepsilon_1 = -0.21 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -0.22 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = -0.21 \cdot 10^{-4}$. С точностью 5% их можно считать равными, при таком условии исследуемый материал следует отнести к кубическому или изотропному. При этом главные оси анизотропии с достаточной степенью точности можно считать совпадающими с лабораторными осями координат. При сжатии одинаковыми напряжениями вдоль различных лабораторных осей являются осевые, при этом поперечные деформации одинаковы с точностью до погрешности измерений, а сдвиговые деформации меньше $\Delta\varepsilon$. В этом случае, как показано в п. 1, канонические оси анизотропии материала совпадают с главными осями анизотропии и лабораторными осями координат.

Для определения типа материала в соответствии с критериями (11), (14) проводятся эксперименты на двухосное растяжение-сжатие в направлении канонических осей анизотропии $\vec{k}^1 = \vec{e}^1$, $\vec{k}^2 = \vec{e}^2$ и на сдвиг в этой плоскости, который можно реализовать как растяжение-сжатие под углом 45° к этим осям.

Опыт 4: растяжение-сжатие вдоль осей $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$. Номинальный тензор напряжений $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\vec{e}^1\vec{e}^1 - \vec{e}^2\vec{e}^2\right)$, $t_4 = 10^8$ Па. Измеренные напряжения: $S_{11}^{(4)} = 1.0061 \cdot 10^8$ Па, $S_{22}^{(4)} = -0.9996 \cdot 10^8$ Па. Измеренные деформации:

$$\varepsilon_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.59 & 0 & 0 \\ 0 & -1.59 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Опыт 5: сдвиг в плоскости осей $\vec{e}^{\,1}$, $\vec{e}^{\,2}$. Номинальный тензор напряжений $\mathbf{S}_5 = t_5\left(\vec{e}^{\,1}\vec{e}^{\,2} + \vec{e}^{\,2}\vec{e}^{\,1}\right)$, $t_5 = 10^8$ Па. Измеренные напряжения: $S_{12}^{(5)} = 0.9997 \cdot 10^8$ Па. Измеренные деформации равны

$$\varepsilon_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

В соответствии с критерием (14) имеем $\dfrac{1.59 \cdot 10^{-4}}{1.0061 \cdot 10^8} \neq \dfrac{0.75 \cdot 10^{-4}}{0.9997 \cdot 10^8}$, поэтому исследуемый материал является кубическим.

4. Пример по идентификации тетрагонального материала

Как и в п. 3, рассматривается кубический образец, ребра которого направлены вдоль лабораторной системы координат с базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Проводятся три опыта на одноосное сжатие образца по программе базового эксперимента (2). Предполагается, что при сжатии вдоль трех различных осей лабораторной системы координат действуют равные по номинальным значениям напряжения. Опыты 1–3 повторяют опыты, проведенные с кубическим материалом, но «измеренные» в этих опытах деформации соответственно равны

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -8.93 & -0.18 & 1.22 \\ -0.18 & 2.03 & 0.73 \\ 1.22 & 0.73 & 1.03 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.05 & -0.22 & -0.96 \\ -0.22 & -8.94 & -1.06 \\ -0.96 & -1.06 & 1.27 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.03 & -0.78 & 0.16 \\ -0.78 & 1.26 & -0.18 \\ 0.16 & -0.18 & -9.02 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ являются откликом материала на всестороннее сжатие:

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} -5.85 & -1.18 & 0.42 \\ -1.18 & -5.65 & -0.51 \\ 0.42 & -0.51 & -6.72 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}. \tag{16}$$

Главные значения тензора деформаций (16) $\varepsilon_1 = -6.88 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -6.96 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = -4.39 \cdot 10^{-4}$. Ориентация главных векторов тензора деформаций (16) относительно базиса лабораторной системы координат определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{a}^{\,1} &= -0.599\,\vec{e}^{\,1} - 0.259\,\vec{e}^{\,2} + 0.758\,\vec{e}^{\,3}, \\ \vec{a}^{\,2} &= -0.468\,\vec{e}^{\,1} - 0.655\,\vec{e}^{\,2} - 0.593\,\vec{e}^{\,3}, \\ \vec{a}^{\,3} &= 0.650\,\vec{e}^{\,1} - 0.710\,\vec{e}^{\,2} + 0.271\,\vec{e}^{\,3}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, исследуемый материал является тригональным, тетрагональным или гексагональным. Главная поворотная ось материала совпадает с $\vec{a}^{\,3}$. Базисы главных осей тензора деформаций (16) $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$ и канонических осей $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$, $\vec{k}^3$ связаны соотношениями (9), в которые входит угол поворота φ.

Для определения угла поворота φ канонических осей анизотропии $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$ относительно главных осей анизотропии $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ выполним эксперименты на двухосное растяжение-сжатие вдоль осей $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ и на сдвиг в плоскости этих осей. Для этого рассмотрим кубический образец, ребра которого ориентированы вдоль векторов $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$, $\vec{a}^{\,3}$.

Опыт 4: двухосное растяжение-сжатие вдоль осей $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$. Номинальный тензор напряжений $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,1} - \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,2}\right)$, $t_4 = 10^7$ Па. Измеренные напряжения: $S_{11}^{(4)} = 1.0058 \cdot 10^7$ Па, $S_{22}^{(4)} = -1.0063 \cdot 10^7$ Па. Измеренные деформации равны

$$\varepsilon_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 2.08 & 0.270 & 0 \\ 0.270 & -2.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Так как компоненты тензора деформаций $\bar{\varepsilon}_{13} = 0$, материал не является тригональным.

Опыт 5: сдвиг в плоскости $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$. Номинальный тензор напряжений $\mathbf{S}_5 = t_5\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,1}\right)$, $t_5 = 10^7$ Па. Измеренные напряжения: $S_{12}^{(5)} = 1.0074 \cdot 10^7$ Па. Измеренные деформации оказались равными

$$\varepsilon_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.261 & 1.011 & 0 \\ 1.011 & -0.261 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Так как компоненты тензора деформаций $\bar{\bar{\varepsilon}}_{11} \neq 0$, $\bar{\bar{\varepsilon}}_{22} \neq 0$, $\bar{\bar{\varepsilon}}_{13} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{23} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{33} = 0$, материал не является гексагональным, следовательно, исследуемый материал является тетрагональным.

Угол φ для тетрагонального материала определяется по формулам (8). По результатам вычислений $\varphi \approx -6.70^\circ$, следовательно, базис канонической системы координат $\vec{k}^i$ связан с базисом $\vec{a}^{\,i}$ соотношениями

$$\vec{k}^1 = 0.993\vec{a}^{\,1} - 0.117\vec{a}^{\,2}, \quad \vec{k}^2 = 0.117\vec{a}^{\,1} + 0.993\vec{a}^{\,2}, \quad \vec{k}^3 = \vec{a}^{\,3}. \tag{17}$$

5. Пример по идентификации тригонального материала

Рассмотрим три опыта с кубическим образцом, ребра которого ориентированы вдоль лабораторной системы координат. Опыты заключаются в сжатии по трем направлениям, как это подробно описано в п. 3. В опытах 1–3 номинальные сжимающие напряжения равны $t = 10^8$ Па, а измеренные деформации имеют компоненты

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -9.92 & 1.57 & -2.04 \\ 1.57 & -0.95 & -0.37 \\ -2.04 & -0.37 & 1.23 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.96 & -1.59 & 2.07 \\ -1.59 & -10.06 & 0.37 \\ 2.07 & 0.37 & 1.25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.235 & 0 & 0 \\ 0 & 1.235 & 0 \\ 0 & 0 & -9.673 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ являются откликом материала на всестороннее сжатие:

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} -9.64 & -0.02 & 0.03 \\ -0.02 & -9.77 & 0 \\ 0.03 & 0 & -7.20 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}. \tag{18}$$

Главные значения тензора деформаций (18) $\varepsilon_1 = -9.64 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -9.772 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = -7.196 \cdot 10^{-4}$. Так как $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, то исследуемый материал является тригональным, тетрагональным или гексагональным. Определяется положение главной поворотной оси $\vec{k}^3 = \vec{a}^{\,3} = \vec{e}^{\,3}$ (см. матрицу тензора $\varepsilon_{ij}^{(3)}$). Направления главных осей анизотропии в перпендикулярной плоскости совпадают с направлениями лабораторной системы координат: $\vec{a}^{\,1} = \vec{e}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2} = \vec{e}^{\,2}$.

Для определения угла поворота φ канонических осей анизотропии $\vec{k}^1$, $\vec{k}^2$ относительно главных осей анизотропии $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ выполним эксперименты на двухосное растяжение-сжатие вдоль осей $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$ и на сдвиг в плоскости этих осей.

Опыт 4: двухосное растяжение-сжатие вдоль осей $\vec{a}^{\,1}$, $\vec{a}^{\,2}$. Номинальный тензор напряжений $\mathbf{S}_4 = t_4\left(\vec{a}^{\,1}\vec{a}^{\,1} - \vec{a}^{\,2}\vec{a}^{\,2}\right)$, $t_4 = 10^7$ Па. Измеренные напряжения: $S_{11}^{(4)} = 1.0058 \cdot 10^7$ Па, $S_{22}^{(4)} = -1.0063 \cdot 10^7$ Па. Измеренные деформации равны

$$\varepsilon_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.962 & -0.721 & 0.513 \\ -0.721 & -0.963 & -0.061 \\ 0.513 & -0.061 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Компоненты тензора деформаций имеют вид $\bar{\varepsilon}_{13} \neq 0$, $\bar{\varepsilon}_{23} \neq 0$, следовательно, материал является тригональным.

Угол φ для тригонального материала определяется по формуле (4): $\varphi \approx 62.28^\circ$.

Таким образом, из проведенных экспериментов определен тип анизотропии материала – тригональный, а также найдена ориентация канонических осей анизотропии относительно лабораторной системы координат.

Проведенная численная симуляция экспериментов по идентификации типа начальной упругой анизотропии материала показывает, что разработанные программы экспериментов позволяют при доступной точности измерений правильно определять тип анизотропного материала.

Литература

1. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 131–151.
2. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.
3. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 640 с.
4. *Цвелодуб И.Ю.* К определению упругих характеристик однородных анизотропных тел // Прикл. механика и техн. физика. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 145–149.
5. *Hayes M.A.* A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media // J. Mater. Sci. – 1969. – V. 4, No 1. – P. 10–14. – doi: 10.1007/BF00555041.
6. *Jarić J.P.* On the conditions for the existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic material // Mech. Res. Commun. – 1994. – V. 21, No 2. – P. 153–174. – doi: 10.1016/0093-6413(94)90088-4.
7. *Norris A.N.* On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1989. – V. 42, No 3. – P. 413–426. – doi: 10.1093/qjmam/42.3.413.
8. *Остапович К.В., Трусов П.В.* Об анизотропии упругих материалов: идентификация симметрийных свойств // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 69–84.
9. *Sokolova M.Yu., Khristich D.V.* Program of experiments to determine the type of initial elastic anisotropy of material // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2015. – V. 56, No 5. – P. 913–919. – doi: 10.1134/S0021894415050193.

10. *Khristich D., Toan N.S., Sukhorukov D.* Determining the type of initial anisotropy of elastic material from a series of experiments // IOP Conf. Ser.: J. Phys. – 2020. – V. 1479, No 1. – Art. 012139, P. 1–12. – doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012139.

11. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации изотропного и кубического материалов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2012. – № 3. – С. 110–118.

12. *Христич Д.В., Каюмов Р.А., Мухамедова И.З.* Программа экспериментов по определению главных осей анизотропии материала // Изв. Казан. гос. архит.-строит. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 216–224.

13. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации ромбического, моноклинного и триклинного материалов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2013. – № 3. – С. 166–178.

14. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации гексагонального, тригонального и тетрагонального материалов // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. – 2013. – № 2. – С. 67–72.

15. *Христич Д.В.* К вопросу об определении главных осей анизотропии материала // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2014. – № 2. – С. 203–213.

Поступила в редакцию
12.03.2021

Христич Дмитрий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика»

Тульский государственный университет
пр. Ленина, д. 92, г. Тула, 300012, Россия
E-mail: *dmitrykhristich@rambler.ru*

Сухоруков Дмитрий Александрович, ассистент кафедры «Вычислительная механика и математика»

Тульский государственный университет
пр. Ленина, д. 92, г. Тула, 300012, Россия
E-mail: *kvantildim@mail.ru*

Соколова Марина Юрьевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика»

Тульский государственный университет
пр. Ленина, д. 92, г. Тула, 300012, Россия
E-mail: *m.u.sokolova@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2021, vol. 163, no. 2, pp. 214–225

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.214-225

Numerical Simulation of Experiments on Determining the Type of Initial Anisotropy of an Elastic Material

D.V. Khristich, D.A. Sukhorukov**, M.Yu. Sokolova****

Tula State University, Tula, 300012 Russia
E-mail: **dmitrykhristich@rambler.ru*, ***kvantildim@mail.ru*, ****m.u.sokolova@gmail.com*

Received March 12, 2021

Abstract

The concept of canonical axes of anisotropy of the material, in which the largest number of elements of the elastic compliance tensor is equal to zero, is introduced. A program of experiments that allows one to determine the type of an anisotropic material without finding all the components of the elastic compliance tensor in an arbitrary laboratory coordinate system and, simultaneously, to detect the position of the canonical axes of anisotropy in the material is developed. A program of mechanical experiments is proposed to identify the type of initial elastic anisotropy of a material based on the results of experiments in the canonical axes of anisotropy for the case when they coincide with the axes of the laboratory coordinate system. Computer numerical simulation of the experiments is performed. The influence of experimental measurement errors on the identification results is investigated. It is shown that the developed criteria for identifying the type of material are applicable in the presence of measurement errors.

Keywords: anisotropic materials, elastic properties, identification, program of experiments

References

1. Annin B.D., Ostrosablin N.I. Anisotropy of elastic properties of materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 998–1014. doi: 10.1007/s10808-008-0124-1.
2. Markin A.A., Sokolova M.Yu. *Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya* [Thermomechanics of Elastoplastic Deformation]. Moscow, FIZMATLIT, 2013. 320 p. (In Russian)
3. Sirotin Yu.I., Shaskol'skaya M.P. *Osnovy kristallofiziki* [Fundamentals of Crystal Physics]. Moscow, Nauka, 1979. 640 p. (In Russian)
4. Tsvelodub I.Yu. Determining the elastic characteristics of homogenous anisotropic bodies. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1994, vol. 35, no. 3, pp. 455–458. doi: 10.1007/bf02369887.
5. Hayes M.A. A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media. *J. Mater. Sci.*, 1969, vol. 4, no. 1, pp. 10–14. doi: 10.1007/BF00555041.

6. Jarić J.P. On the conditions for the existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic material. *Mech. Res. Commun.*, 1994, vol. 21, no. 2, pp. 153–174. doi: 10.1016/0093-6413(94)90088-4.

7. Norris A.N. On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1989, vol. 42, no. 3, pp. 413–426. doi: 10.1093/qjmam/42.3.413.

8. Ostapovich K.V., Trusov P.V. On elastic anisotropy: Symmetry identification. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 69–84. (In Russian)

9. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. Program of experiments to determine the type of initial elastic anisotropy of material. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 913–919. doi: 10.1134/S0021894415050193.

10. Khristich D., Toan N.S., Sukhorukov D. Determining the type of initial anisotropy of elastic material from a series of experiments. *IOP Conf. Ser.: J. Phys.*, 2020, vol. 1479, no. 1, art. 012139, pp. 1–12. doi: 10.1088/1742-6596/1479/1/012139.

11. Khristich D.V. A criterion for experimental identification of isotropic and cubic materials. *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 110–118. (In Russian)

12. Khristich D.V., Kayumov R.A., Mukhamedova I.Z. A program of experiments for determination of the main axes of anisotropy in a material. *Izv. Kazan. Gos. Arkhit.-Stroit. Univ.*, 2012, no. 3, pp. 216–224. (In Russian)

13. Khristich D.V. A criterion for experimental identification of rhombic, monoclinic, and triclinic materials. *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, 2013, no. 3, pp. 166–178. (In Russian)

14. Khristich D.V. A criterion for experimental identification of hexagonal, trigonal, and tetragonal materials. *Vestn. Kazan. Gos. Tekh. Univ. im. A.N. Tupoleva*, 2013, no. 2, pp. 67–72. (In Russian)

15. Khristich D.V. On the problem of identification of the main axes of anisotropy in a material. *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, 2014, no. 2, pp. 203–213. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования:*** *Христич Д.В., Сухоруков Д.А., Соколова М.Ю.* Численная симуляция экспериментов по определению типа начальной анизотропии упругого материала // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 2. – С. 214–225. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.214-225. ⟩

⟨ ***For citation:*** Khristich D.V., Sukhorukov D.A., Sokolova M.Yu. Numerical simulation of experiments on determining the type of initial anisotropy of an elastic material. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 214–225. doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.214-225. (In Russian) ⟩