Выпуклость и монотонная линейная связность чебышёвских множеств и солнц

А. Р. Алимов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

Международная конференция «Алгебра, анализ и геометрия»
(г. Казань, 23–27 августа 2021 г.)

В XIX веке возникла необходимость решения важной практической задачи, относящейся к проблемам усовершенствования конструкции паровой машины – знаменитого параллелограмма Уатта, использовавшегося для превращения прямолинейного движения поршня во вращательное движение коромысла паровой машины. Схема паровой машины сейчас кажется удивительно простой, однако понадобились усилия многих инженеров, прежде чем эта схема обрела свой окончательный вид. Именно в связи с этой задачей в середине XIX века П. Л. Чебышёв ввел в науку важное понятие наилучшего приближения (а именно, наилучшего приближения относительно равномерной нормы) и систематически применял его в приложениях. В дальнейшем понятия величины и элемента наилучшего приближения были перенесены на случай общих линейных нормированных пространств и стали исходным пунктом геометрической теории приближений.

Величиной наилучшего приближения, или *расстоянием* от заданного элемента x действительного линейного нормированного пространства X с нормой $\| \cdot \|$ до заданного непустого множества $M \subset X$, называется величина

$$\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения, в частности, свойства существования, единственности, устойчивости элементов наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*. Прежде всего, таким является *понятие элемента наилучшего приближения*, или *ближайшей точки*. Это есть (для заданного $x \in X$) такая точка $y \in M$, для которой $\|x - y\| = \rho(x, M)$. Множество всех ближайших точек (элементов наилучшего приближения, или, кратко, наилучших приближений) в M для заданного x обозначается $P_M x$. Иными словами,

$$P_M x := \big\{ y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\| \big\}.$$

Оператор P_M называется оператором наилучшего приближения или *метрической проекцией* на множество M.

Всюду ниже X – действительное линейное нормированное пространство.

Множество $M \neq \varnothing$ называется *множеством существования* (*единственности*), если для каждого $x \in X$ множество ближайших точек $P_M x$ непусто (пусто или одноточечно). Множества существования также называют *проксиминальными*.

Множество M называется *чебышёвским множеством*, если оно есть множество существования и множество единственности, т.е. если для каждого $x \in X$ $P_M x$ одноточечно.

Классические примеры чебышёвских множеств в $C[a, b]$:

- $\mathscr{P}_n$ – подпространство многочленов, степени не выше n;
- Множество дробно-рациональных функций

$$\mathscr{R}_{m,n} := \{p/q \mid p \in \mathscr{P}_n, \quad q \in \mathscr{P}_m, \quad q \neq 0\}$$

- Множество *экспоненциальных сумм с неотрицательными коэффициентами*

$$E_n^+ := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{t_j x} \;\middle|\; \alpha_j \geqslant 0, \ t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Сечения единичного шара пространств $C(Q)$ и $L^1(\mu)$

Дается ответ на следующий вопрос. Существует ли собственное подпространство L пространства $C(Q)$ такое, что пересечение любого его сдвига $L+x$, $x \in B$, с единичным шаром B пространства $C(Q)$ всегда является негладким множеством?

Теорема. *Для любого конечного $n \geqslant 2$ в пространстве $C(Q)$ (Q – хаусдорфов компакт, $\operatorname{card} Q > n$) существует n-мерное подпространство, любой сдвиг которого на вектор p, $\|p\| < 1$, пересекает шар B пространства $C(Q)$ по негладкому телу.*

Следующая теорема показывает, что сечение единичного шара пространства $L^1(Q)$ (с неатомарной мерой) произвольным конечномерным подпространством "почти всегда" дают гладкие множества.

Теорема. *Пусть ℓ_0 – произвольное конечномерное подпространство в $L^1(Q)$, $\dim \ell_0 \geqslant 2$. Тогда существует всюду плотное в единичном шаре $B \subset L^1(Q)$ множество его сдвигов, пересекающих сферу S по точкам ее гладкости.*

Конечномерность подпространства в этой теореме существенна. Именно, существует бесконечномерное подпространство пространства $L^1[0,1]$, любые сдвиги которого дают негладкие сечения единичного шара.

Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0 \tag{1}$$

(это геометрически означает, что из точки y исходит "солнечный" луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если же для $x \in X \setminus M$ условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (при этом, в отличие от точки строгой солнечности, ближайшая точка y к x не обязана существовать).

Замкнутое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности.

Понятие "солнце" было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1960-х годах. Понятие солнца (строгого солнца) тесно связано с понятием множества Колмогорова – такие множества

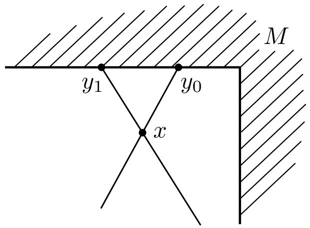


Рис. 1: На рисунке показано солнце M, не являющееся строгим солнцем в пространстве ℓ^∞_2 (единичный шар – “квадратик”). Здесь y_0 – точка светимости для x; точка y_1 принадлежит $P_M x$, но не является точкой светимости

удовлетворяют известному критерию Колмогорова ближайшего элемента, хорошо известному для выпуклых множеств и, в частности, для подпространств. Иными словами, точка, не принадлежащая солнцу, строго отделяется от него посредством выпуклого открытого опорного конуса.

“Солнца” обладают важными характеристическими признаками. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса. Эти свойства стоят в одном ряду с известными свойствами отделимости выпуклых множеств посредством полупространств (гиперплоскостей).

Множество $\mathscr{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций является чебышёвскими солнцем в $C[a,b]$.

Множество обобщенно-рациональных функций

$$\mathscr{R}_{V,W} = \{p/q \mid p \in V, \quad q \in W, \quad q(t) > 0, \quad t \in Q\}$$

является строгим протосолнцем в пространстве $C(Q)$; здесь V, W – произвольные выпуклые подмножества в действительном или комплексном $C(Q)$, Q – хаусдорфов компакт. В отличие от классического случая $\mathscr{R}_{m,n}$ при приближении обобщенными дробями $\mathscr{R}_{V,W}$ наилучшее приближение может не существовать или не быть единственным.

Одна из самых известных проблем (*проблема Ефимова–Стечкина–Кли*) геометрической теории приближений — вопрос о выпуклости чебышёвских множеств в гильбертовых пространствах – формулируется следующим образом:

> всякое ли чебышёвское множество выпукло в бесконечномерном гильбертовом пространства?

Некоторые примеры. Множество *экспоненциальных сумм с неотрицательными коэффициентами*

$$E_n^+ := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{t_j x} \;\middle|\; \alpha_j \geqslant 0,\ t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

является чебышёвским солнцем в $C[a,b]$.

Множество *экспоненциальных сумм*

$$E_n := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{t_j x} \;\middle|\; \alpha_j, t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

является множеством Колмогорова и, следовательно, строгим протосолнцем.

Выпуклость чебышёвских множеств в конечномерных пространствах

Теорема (Л. Бунт, Т. Моцкин, Г. Манн) *Чебышёвское множество на нормированной (несимметрично нормированной) плоскости X выпукло тогда и только тогда, когда X гладко.*

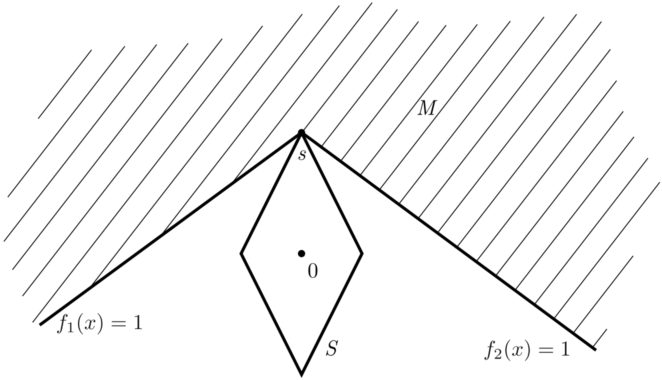
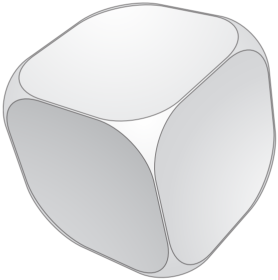


Рис. 2: Невыпуклое чебышёвское множество M в пространстве с негладкой достижимой точкой s.

Теорема (А. Брондстед, В. И. Бердышев, А. Л. Браун). *Пусть X – нормированное (несимметрично нормированное) пространство размерности* 3 *или* 4. *Каждое чебышёвское множество в X выпукло если и только если каждая достижимая точка единичного шара пространства X является точкой гладкости.*

Пример. Единичный шар негладкого пространства, в котором любое чебышёвское множество выпукло.



Открытый вопрос. Охарактеризовать конечномерные пространства размерности $\geqslant 5$, в которых любое чебышёвское множество выпукло.

∘ Царьков охарактеризовал конечномерные пространства, в которых любое *ограниченное* чебышёвское множество выпукло.

Выпуклость чебышёвских множеств и солнц по касательным направлениям

Для точки $y \in S$ через Λ_y обозначим множество предельных точек выражения $(y-z)/\|y-z\|$ при $z \to y$, $z \in S$ (т. е. Λ_y — *множество полукасательных направлений* к сфере S в точке y).

Направление d называется (глобально) *касательным направлением* для сферы S, если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления d в точке y влечет, что $d \in \Lambda_y$, т. е. направление d является касательным в точке y.

Множество M называется *выпуклым по направлению* d, если из того, что $x, y \in M$, $(y-x) \parallel d$, вытекает, что $[x, y] \subset M$.

Теорема (Алимов – Щепин). *В нормированном пространстве солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.*

Следствие. *В конечномерном пространстве чебышёвское множество выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.*

В этой теореме важным является условие, что направление, по которому исследуется выпуклость чебышёвского множества, является касательным для *всей* сферы.

Выпуклость конечномерных солнц в $L^1(\mu)$

М. Г. Крейн показал, что в пространстве $L^1[0,1]$ не существует конечномерного чебышёвского подпространства ненулевой размерности. В общих пространствах $L^1(Q,\Sigma,\mu)$ аналогичный результат получили Р. Фелпс и Г. Дай, Р. Моруни, а также А. Пинкус.

Более сильный результат получен А. Л. Гаркави в 1964 г.: пусть пространство (Q,Σ,μ) не имеет атомов, тогда для любого n-мерного подпространства $L_n \subset L^1(Q,\Sigma,\mu)$ существует элемент $x \in L^1(Q,\Sigma,\mu)$, для которого множество ближайших элементов в подпространстве L_n имеет размерность n. Более того, пусть мера μ не имеет атомов и L_n – n-мерное подпространство в $L^1(Q,\Sigma,\mu)$, то $\{x \mid \dim P_{L_n}x = n\}$ всюду плотно в пространстве $L^1(Q,\Sigma,\mu)$.

П. Орно (P. Ørno), Ю. А. Брудный, Е. А. Горин установили, что в $L^1[0,1]$ любое чебышёвское множество или одноточечно или бесконечномерно.

Теорема (Алимов, Царьков). *В $L^1[0,1]$ любое конечномерное солнце выпукло.*

Пусть $\mathscr{A}(D)$ – множество вещественно-аналитических функций на связном открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$

Ниже $L^1(D) = (L^1(D), \mu)$ – пространство суммируемых функций на области $D \subset \mathbb{R}^n$ с σ-конечной мерой μ.

Теорема (Алимов, Царьков). *Любое солнце $M \subset \mathscr{A}(D)$ в $L^1(D)$ выпукло.*

Монотонно линейно связные множества и их свойства

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$.

Множество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$.

Монотонная линейная связность является более сильным свойством, чем линейная связность и более слабым, чем выпуклость. К примеру, единичная окружность на плоскости ℓ_2^∞ линейно связна, но не монотонно линейно связна. Координатный крест в пространстве ℓ_2^∞ монотонно линейно связен, но не является выпуклым.

Примеры монотонно линейно связных множеств

1. Классическим примером монотонно линейно связного множества является множество (обобщенных) дробно-рациональных функций $\mathscr{R}_{V,W}$ в пространстве $C(Q)$ с чебышёвской нормой.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $K > 0$, $a < b$. Через $S(n,K) = S(n,K,[a,b])$ обозначим множество всех *n-звенных K-липшицевых ломаных*, т.е. функций $s \in C[a,b]$, для которых найдется такое разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^{k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, отрезка $[a,b]$, что $s|_{\Delta_j} = A_j t + B_j$, где $\Delta_j = [t_{j-1}, t_j]$ – невырожденные отрезки разбиения и $A_j, B_j \in \mathbb{R}$ такие, что $|A_j| \leqslant K$, $j = 1, \dots, k$.

Множество $S(n,K)$ монотонно линейно связно в пространстве $C[a,b]$. (И. Г. Царьков)

Монотонная линейная связность чебышёвских множеств и солнц

Отправной точкой при исследовании монотонной связности в теории приближений служит теорема Д. Браесса, утверждающая (в наших терминах) монотонную линейную связность строгих солнц в пространстве ℓ^∞_n, а также следующий результат Х. Беренса и Л. Хетцельта (также формулируемый в наших терминах).

• Непустое подмножество пространства ℓ^∞_n является солнцем тогда и только тогда, когда оно замкнуто и монотонно линейно связно.

Аналогичный результат верен для так называемых конечномерных (BM)-пространств.

• В двумерном пространстве любое солнце (а, следовательно, чебышёвское множество) монотонно линейно связно.

• Произвольное солнце в пространстве c_0 монотонно линейно связно. Обратно, монотонно линейно связное аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем. При этом пространство c_0 содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся δ-солнцем.

Теорема. *В нормированном пространстве монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем.*

Теорема. *Пусть M – аппроксимативно компактное и монотонно линейно связное подмножество банахова пространства. Тогда на M существует непрерывная аддитивная (мультипликативная) ε-выборка для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема. *Пусть M – монотонно линейно связно и ограниченно компактно. Тогда M P- и B-клеточноподобно, P- и B-ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем.*

Если X конечномерно, то M P- и B-стягиваемо.

Теорема (Алимов – Царьков). *В пространстве $C(Q)$ ограниченно компактное множество является солнцем если и только если оно монотонно линейно связно.*

Теорема (Алимов – Беднов). *В трехмерном нормированном пространстве X любое чебышёвское множество монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий:*

1) *любая достижимая точка единичной сферы пространства X является точкой гладкости* ($\exp S \subset \operatorname{sm} S$);

2) *пространство X имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$.*

Теорема. *В трехмерном нормированном пространстве X любое замкнутое множество с полунепрерывной снизу (непрерывной) метрической проекцией монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий:*

1) *пространство X гладко*;

2) *пространство X имеет цилиндрическую норму, т. е.* $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, $\dim Y = 2$.

Аналогичный результат верен для строгих солнц. Соответствующий вопрос для солнц открыт.

• Чебышёвское множество в ℓ^∞_n является экстремально чебышёвским, т.е. если Π – брус в ℓ^∞_n, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri} \Pi = \varnothing$, то пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.

1. Охарактеризовать n-мерные нормированные пространства ($n \geqslant 5$), в которых любое чебышёвское множество выпукло.

2. Охарактеризовать n-мерные нормированные пространства ($n \geqslant 4$), в которых любое ограниченное солнце выпукло.

3. (С. Б. Стечкин) Существует ли бесконечномерное пространство, в котором любое чебышёвское множество выпукло?

4. Верно ли, что в гладком пространстве чебышёвское множество с непрерывной метрической проекции выпукло?

5. (Л. П. Власов) В каких пространствах любое чебышёвское множество компактно?

6. (Л. П. Власов) В каких пространствах любое чебышёвское множество имеет непрерывную метрическую проекцию?

7. (П. А. Бородин) В любом ли бесконечномерном банаховом пространстве существует аппроксимативно компактное, но не ограниченно компактное множество?

8. (Д. Кёльцов) Существует ли невыпуклое чебышёвское множество в *любом* неполном бесконечномерном предгильбертовом пространстве?

9. Верно ли, что в трехмерном пространстве солнце имеет связные пересечения с шарами? Охарактеризовать конечномерные пространства, в которых любое солнце обладает таким свойством.

10. Верно ли, что любое строгое солнце имеет связные пересечения с шарами? Ответа в этой задаче нет даже для чебышёвских солнц.

11. (И. Г. Царьков) Верно ли, то ограниченно слабо компактное строгое солнце в неатомарном $L^1(\mu)$ выпукло?

12. Охарактеризовать пространства, в которых любое чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем. В частности, в каких пространствах аппроксимативно компактное чебышёвское множество является солнцем? Ответ здесь не известен даже для пространств Ефимова–Стечкина.

13. Является ли слабо компактное чебышёвское множество в банаховом пространстве солнцем?

14. Охарактеризовать n-мерные нормированные пространства $(n \geqslant 4)$, в которых любое чебышёвское множество монотонно линейно связно.

15. Верно ли, что слабо компактное(ограниченно слабо компактное) монотонно линейно связное множество в $C(Q)$ является солнцем?

16. Существует ли сепарабельное банахово пространство без нетривиальных чебышёвских подпространств?

17. При каких условиях множество обобщенных дробно-рациональных функций $\mathscr{R}_{V,W}$ аппроксимативно компактно в L^p? Когда это множество является множеством существования в $C(Q)$, в L^p?

Литература:

А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, “ Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения”, УМН, 74:5(449) (2019), 3–82.

А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, “Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения”, УМН, 71:1(427) (2016), 3–84.

A. R. Alimov, I. G. Tsar’kov, Geometric Approximation Theory (Springer, 2022).