ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

В.В. ВИШНЕВСКИЙ

ВКЛАД БОЯИ, ГАУССА И ЛОБАЧЕВСКОГО В ОТКРЫТИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ (*К 200-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЯНОША БОЯИ*)

В связи с приближающимся 200-летием со дня рождения Яноша Бояи математики из Клуж-Напока и Тыргу-Муреш (Румыния) интересуются, было ли известно что-либо Лобачевскому о работах Я. Бояи и каково было его отношение к этим работам. Прошедшее недавно 200-летие со дня рождения Н.И. Лобачевского позволило, в частности, ответить и на эти вопросы, поэтому мы, пользуясь как ранее опубликованным сборником [1], изданным по инициативе А.П. Нордена, так и новыми материалами, увидевшими свет при подготовке к этому юбилею, возвращаемся к анализу вклада трех основателей неевклидовой геометрии в ее открытие.

Замечательный венгерский математик Янош Бояи родился 15 декабря 1802 г. в трансильванском городе Коложвар (ныне Клуж-Напока) в семье известного математика Фаркаша Бояи (1775–1856), который был близким другом и однокашником по Геттингенскому университету Карла Ф. Гаусса (1777–1855). По возвращении на родину Ф. Бояи был почти 50 лет профессором математики и одновременно с преподаванием увлекался поэзией, музыкой, сельским хозяйством и особенно проблемами оснований математики. Он дважды направлял свои изыскания с попытками доказательства евклидова постулата о параллельных Гауссу, и тот в ответ на второе сообщение поведал в 1804 г. о своих воззрениях на такого рода попытки и сомнениях в возможности этого доказательства. Младший Бояи получил образование под руководством отца и, несомненно, от него воспринял интерес к проблеме евклидова постулата, уже в ранние годы проявив математическое дарование. Отец лелеял мечту, чтобы сын продолжил учебу в Геттингене у Гаусса, но Гаусс не пожелал взять на себя эту заботу и даже не удостоил своего друга ответом на такую просьбу. Янош Бояи был вынужден продолжить образование за казенный счет в Военно-инженерной академии в Вене и стать таким образом на долгие годы (1823–1833) офицером захолустных трансильванских гарнизонов. Обладая довольно неуживчивым характером, он часто конфликтовал с сослуживцами, и дело подчас доходило до дуэлей. Не располагая в те годы информацией о проблемах, которые занимали математический мир, он все усилия своего математического интеллекта направил на теорию параллельных линий. Уже в 1820 г. он пишет отцу о своей попытке доказать евклидов постулат, чем повергает его в ужас. И в дальнейшем отец неоднократно в своих письмах призывает Яноша отказаться от попыток одолеть эту проблему: “Этот беспросветный мрак может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон...” Наставления отца оказались тщетными, и в 1832 г. Янош Бояи публикует свой главный труд “Аппендикс” в виде приложения к первому тому учебника по математике своего отца “Тентамен...” [2]. Полное название “Аппендикса” в переводе с латыни — “Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)”. Русский перевод содержится в ([1], с. 71–100).

Этот первый и по существу единственный труд Я. Бояи по неевклидовой геометрии стоит того, чтобы провести его краткий анализ. Он компактен, занимая менее трех десятков страниц убористого текста без абзацев у параграфов и отступов у формул, поскольку издание осуществлялось за счет авторов и требовало экономии места. По этой же причине автор вводит ряд необычных обозначений и символов, сокращающих изложение, но и затрудняющих понимание сути. В первых 10 параграфах изучаются свойства неевклидовых параллелей (в составленном позднее немецком тексте "Аппендикса" Я. Бояи называет их асимптотами, в оригинале же употребляет для пары таких прямых $\mathfrak{an}$ и $\mathfrak{bm}$ символ $\mathfrak{an}|||\mathfrak{bm}$). По отношению к ним определяются геометрические образы F и L (у Лобачевского — орисфера и орицикл). Если для одной тройки прямых на плоскости выполнен постулат Евклида или его отрицание, то это справедливо для всех таких троек прямых, и возникают две геометрические системы: Σ (евклидова геометрия) и S (неевклидова геометрия). На орисфере F выполнена аксиома Евклида, а отношение дуг L-линий, заключенных между двумя их общими осями, является показательной функцией отрезка оси, заключенного между этими линиями. Все утверждения, справедливые как в Σ, так и в S, названы абсолютными (так в дальнейшем возникло понятие абсолютной геометрии как общей части систем Σ и S); сюда относится, например, сферическая тригонометрия. В системе S находится дуга эквидистанты (сам термин введен позднее), длина окружности, связь между углом и отрезком параллельности, показывается существование некоторого постоянного отрезка i, характеризующего систему S (это радиус кривизны неевклидовой плоскости). Выводятся формулы тригонометрии в системе S (в частности, аналог теоремы Пифагора). Решаются в S некоторые задачи дифференциальной геометрии: находится элемент длины плоской кривой, площадь четырехугольника, образованного дугой эквидистанты, ее базой и двумя перпендикулярами к ней, площадь круга, поверхность и объем шара, площади и объемы, образованные орициклами и эквидистантами. В заключительных параграфах разбираются некоторые задачи на построение и отмечается важнейшее свойство площади треугольника в системе S быть пропорциональной его угловому дефекту. К тексту "Аппендикса" приложено 26 чертежей.

Поскольку у Я. Бояи с отцом продолжался научный спор, то "Аппендикс" решено было направить Гауссу, и от него вскоре был получен ответ, в котором утверждалось, что он не может хвалить эту работу, поскольку это значило бы хвалить самого себя: содержание сочинения, путь, которым шел автор, и результаты почти сплошь совпадают с собственными достижениями Гаусса за последние 35 лет. Болезненно восприняв этот ответ, Я. Бояи уходит в отставку и предпринимает попытку составить новый обстоятельный труд "Учение о пространстве", выдержки из которого сохранились в его архиве. Написание этого труда было прервано участием Я. Бояи в соискании премии Лейпцигского ученого общества имени Яблоновского по геометрической теории комплексных чисел. Представленная им работа, крайне сжатая и к тому же содержавшая ссылки на малоизвестный "Аппендикс", не была удостоена премии. Такая же судьба постигла и его отца, также участвовавшего в конкурсе, и на этой основе у них возникли распри, продолжавшиеся вплоть до кончины Ф. Бояи. Новым ударом для Я. Бояи было получение от отца в 1841 г. книги Лобачевского, изданной в Германии на немецком языке [8]. Она вызвала бурю в его душе, следы которой содержатся в его собственных примечаниях к этой книге. Первоначально он подозревал, что никакого Лобачевского не существует и что это жадный Гаусс под русским псевдонимом опубликовал собственные идеи Я. Бояи. Однако потом он с достаточной объективностью высказывает высокую оценку этого мастерского произведения, а вывод формул сферической тригонометрии, сделанный Лобачевским, по выражению Я. Бояи, несет на себе печать гения. Принципиальное значение имеют и соображения Я. Бояи относительно логической строгости неевклидовой геометрии. Он утверждает, что им найдено доказательство ее непротиворечивости, однако никаких следов такого доказательства и подходов к решению этой проблемы в его записках не содержится.

Таким образом, главный труд Я. Бояи — "Аппендикс" — продолжал оставаться неизвестным, поскольку был написан по-латыни и изложен весьма сжато и схематично. К тому же и сам "Тентамен", тоже написанный по-латыни, был дорогостоящим изданием, не получившим широкого распространения. Непризнание трудов Я. Бояи отразилось на его психике, и остаток дней этот опередивший свое время талантливый математик провел в состоянии сильных душевных переживаний.

А что же Гаусс, как он на деле относился к работе Я. Бояи и вообще к попыткам прояснить теорию параллелей? Известно, что он ни в одной из своих работ не коснулся этого вопроса и ни однажды не высказал публично каких-либо суждений в адрес авторов, занимавшихся этой проблемой. Как предполагает А.П. Норден [3], причиной служило мировоззрение Гаусса, который был ярым сторонником философской системы Канта, провозглашавшей человеческое сознание a priori способным познавать геометрию реального мира как единственно возможную. Поэтому признание допустимости другой геометрической системы (неевклидовой, как стали именовать такие системы, следуя Гауссу) вызвало бы сильнейшее противодействие научной общественности (крики "беотийцев"), чего Гаусс, даже при его высочайшем авторитете "короля европейской математики", допустить не мог. Однако в неофициальной переписке он высказывался откровеннее. Так, в письме к Герлингу в 1832 г. Гаусс так характеризует "Аппендикс" ([1], с. 112): "На днях я получил из Венгрии небольшую брошюру о неевклидовой геометрии, в которой я нахожу все мои собственные идеи и результаты, которые изложены с большим изяществом... Я считаю этого молодого геометра фон Бояи гением первой величины". А вот выдержка из его письма 1846 г. к Шумахеру ([1], с. 120), в которой он отзывается об уже упомянутой книге Лобачевского: "Вы знаете, что уже 54 года с 1792 г. я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашел для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шел я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение". Хотя по инициативе Гаусса в 1843 г. состоялось избрание Лобачевского в члены-корреспонденты Геттингенского королевского научного общества ([1], с. 119) (это несомненно означает, что работы Лобачевского Гаусс оценивал весьма высоко), он все-таки остался верен себе и нигде официально не отозвался о его сочинениях, хотя, несомненно, Лобачевский в моральной поддержке Гаусса весьма нуждался, как, впрочем, и молодой Бояи. Кроме писем Гаусса, частично цитированных, в которых содержатся утверждения о том, что его уже с конца XVIII столетия занимают проблемы теории параллельных, известны опубликованные посмертно черновые наброски Гаусса от 1831 г., содержащие неевклидову теорию параллельных ([1], с. 108–112). Они свидетельствуют о том, что Гаусс действительно открыл для себя неевклидову геометрию, но к числу ее первооткрывателей его отнести никак нельзя, поскольку открыть нечто в науке — значит сделать это нечто достоянием общества, чему он никак не способствовал, находясь в отношении авторов работ по неевклидовой геометрии в позиции молчаливого соглашателя.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) в сравнении с Я. Бояи происходил из еще менее обеспеченной семьи разночинца-землемера, но в отличие от венгерского коллеги обучался в гимназии и только что открытом Казанском университете, где имел доступ к наиболее известным трудам европейских математиков. На одаренного юношу обратили внимание западные профессора, приглашенные в университет, и прежде всего Бартельс (1769–1836), ранее бывший домашним учителем у К. Гаусса. Однако не Бартельс способствовал развитию у Лобачевского интереса к проблеме пятого постулата, поскольку известно, что он к работам Лобачевского по неевклидовой геометрии относился неодобрительно. Вероятно, этот интерес у молодого геометра возник в результате работы над учебником по геометрии, в процессе которой он имел возможность воочию убедиться в бесперспективности попыток доказательства постулата о параллельных и, следовательно, в существовании геометрической системы, отличной от евклидовой. Эту геометрию Лобачевский назвал "воображаемой" в противоположность привычной "употребительной" геометрии. Первое сообщение о своем открытии Лобачевский сделал 11 (23) февраля 1826 г., представив отделению физико-математических наук письменный доклад на французском языке "Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных", который был направлен на отзыв профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману и далее бесследно исчез. Независимо от того, состоялось ли тогда устное зачтение доклада (споры на этот счет продолжаются), он явился первым официальным сообщением об открытии новой, отличной от евклидовой геометрической системы. Содержание доклада составило примерно треть первой публикации по геометрии Лобачевского [4], за которой последовала еще более содержательная работа, переведенная автором на французский язык и опубликованная в журнале Крелля [5]. Лобачевский настоятельно ищет подтверждения непротиворечивости своей геометрической системы, искусно подсчитывая в следующей своей работе [6] значения определенных интегралов, измеряющих объемы и поверхности тел в неевклидовом пространстве. Оказалось, что вычисленные им значения ряда интегралов тождественны известным, но многие были новыми. Так, в популярном справочнике [10] содержится 41 интеграл и 17 специальных функций, значения которых найдены Лобачевским. Совпадение интегральных формул свидетельствовало о том, что развитая Лобачевским теория приводит к правильным выводам, но это, конечно, не могло служить доказательством ее непротиворечивости, которая была установлена лишь во второй половине XIX столетия работами Ф. Клейна. За этой работой Лобачевского следует новая [7] и уже упомянутая брошюра [8], изданная в Берлине, и, наконец, "Пангеометрия" [9], венчавшая собой череду работ Лобачевского по неевклидовой геометрии. Наряду с ними перу Лобачевского принадлежат еще 12 публикаций, не относящихся к геометрии ([11], с. 492–493), некоторые из которых оставили заметный след в теории рядов, приближенном вычислении корней и в механике.

Предсказанные Гауссом гонения сполна выпали на долю Лобачевского. Это и отрицательная рецензия Остроградского на работу Лобачевского, и пасквиль анонимного автора, опубликованный в журнале "Сын отечества" ([11], с. 245–250), и непонимание коллег. Кстати, имя анонима теперь можно считать установленным в результате кропотливого анализа архивных материалов Б.В.Федоренко ([12], с. 341-349). В связи с 200-летием Н.И. Лобачевского [13] появились и другие новые материалы о его биографии. Д.А. Гудков исследовал детские годы Лобачевского [14], а Б.Л. Лаптев проанализировал книги, которые Лобачевский брал в университетской библиотеке для домашнего чтения [15]. Из этого анализа следовало, что по каким-то причинам Лобачевский не взял для прочтения номера журнала Крелля с 18 по 21, а именно в № 20 содержалась статья Ф. Миндинга 1840 г. ([1], с. 176–179) о кратчайших линиях на кривых поверхностях, в которой утверждалось, что для поверхностей постоянной отрицательной кривизны формулы соотношений между сторонами и углами геодезического треугольника получаются из формул сферической тригонометрии простой заменой тригонометрических функций гиперболическими. Но этот факт был известен Лобачевскому для неевклидовой плоскости, так что прочтение статьи, наверное, навело бы его на мысль, что его геометрия локально реализуется на псевдосфере и тем самым перестает быть воображаемой. По той же причине Лобачевскому не стала известна и предыдущая работа Миндинга ([1], с. 166–176) в № 19 журнала Крелля, в которой установлена наложимость поверхностей одинаковой постоянной кривизны. Из нее вытекает, что кусок плоскости Лобачевского наложим на псевдосферу. Заметим, что Лобачевскому ничего не было известно о работах Бояи: в списке книг, взятых им для прочтения, "Тентамен" не значится, поскольку его не было в университетской библиотеке.

Итак, сопоставляя вклад в открытие неевклидовой геометрии, сделанный тремя выдающимися математиками XIX столетия Я. Бояи, К. Гауссом и Н.И. Лобачевским, мы отдаем несомненный приоритет нашему соотечественнику по следующим мотивам:

1. Лобачевский первым опубликовал свои результаты, опередив Бояи на 3 года.

2. Он не ограничился одной публикацией, а в течение всей жизни развивал и углублял свои исследования, опубликовав в общей сложности шесть содержательных работ по неевклидовой геометрии.

3. Им была построена не только синтетическая теория неевклидова пространства, но и развиты аналитические и дифференциальные методы исследования, т. е. неевклидова геометрия

достигает в его работах примерно такой степени совершенства, какова была присуща евклидовой геометрии.

Литература

1. Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. – 526 с.
2. Bolyai W. *Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huie propria introducendi*; *cum appendice triplici.* – Maros-Vásárhelyini, 1832.
3. Норден А.П. *Гаусс и Лобачевский.* – Ист.-матем. исслед. – 1956. – Т. 9. – С. 145–168.
4. Лобачевский Н.И. *О началах геометрии* // Казанский вестник. – 1829–1830. – Ч. 25. – кн. II–III. – С. 178–187, кн. IV. – С. 228–241; Ч. 27. кн. XI–XII. – С. 227–243; Ч. 28. – кн. III–IV. – С. 251–283; Ч. 29. – кн. VII-VIII. – С. 571–636.
5. Лобачевский Н.И. *Воображаемая геометрия* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1835. – кн. 1. – С. 3–33. Франц. перевод, сделанный автором: "Géométrie imaginaire". Journal der reine und angew. Math. – Bd. 17. – H. 4. – S. 295–320.
6. Лобачевский Н.И. *Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1836. – Т. 1. – С. 3–166.
7. Лобачевский Н.И. *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных прямых* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1835. – Т. III. – С. 3–48; 1836. – Т. II. – С.3–98; 1836. – Т. III. – С. 3-50; 1837. – Т. 1. – С. 3-97; 1838. – Т. 1. – С. 3–124, Т. III. – С. 3–65.
8. Lobatschewsky N. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* – Berlin: Fincke, 1840.
9. Лобачевский Н.И. *Пангеометрия* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1855. – кн.1. – С. 1–56.
10. Рыжик И.М., Градштейн И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 464 с.
11. Каган В.Ф. *Лобачевский.* – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 506 с.
12. *Новые материалы к биографии Н.И. Лобачевского* / Сер. "Научное наследство". Т. 12. – Л.: Наука, 1988. – 384 с.
13. Вишневский В.В. 200-*летие Н.И. Лобачевского, его итоги и уроки* // Тр. геометрич. семин. – Изд-во Казанск. ун-та. – 1997. – Вып. 23. – С. 23–32.
14. Гудков Д.А. *Н.И. Лобачевский. Загадки биографии.* – Изд-во Нижегородск. ун-та, 1992. – 241 с.
15. Каримуллин А.Г., Лаптев Б.Л. *Что читал Н.И. Лобачевский.* – Изд-во Казанск. ун-та, 1979. – 127 с.

Казанский государственный университет

Поступила
08.04.2002