Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Цупак Алексей Александрович

Задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов

Специальность 01.01.07 — Вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ПЕНЗА – 2021

Работа выполнена на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный университет».

Научный консультант	доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» **Смирнов Юрий Геннадьевич**
Официальные оппоненты	**Ильинский Анатолий Серафимович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры «Математическая физика», заведующий лабораторией вычислительной электродинамики
	Самохин Александр Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО МИРЭА – Российский технологический университет», профессор кафедры «Прикладная математика»
	Алексеев Геннадий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт прикладной математики» Дальневосточного отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией «Лаборатория вычислительной аэрогидродинамики»
Ведущая организация	Институт вычислительной математики (ИВМ) РАН (г. Москва)

Защита состоится «____» _____________ 20__ г. в ?? часов ?? минут на заседании диссертационного совета КФУ.01.01 ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: г. Казань, ??????????????????????

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки КФУ (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д.35) и на сайте https://kpfu.ru.

Автореферат разослан «__» ___________ 20__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент Бандеров Виктор Викторович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах и неоднородных объемных диэлектриках возникают в радиолокации, микроволновой томографии и т.д. Моделирование СВЧ-техники, печатных антенн, а также исследование рассеивателей сложной конструкции приводит к необходимости решения более сложных задач дифракции, в которых рассеиватель представляет собой систему объемных тел и бесконечно тонких экранов, а также частично экранированных тел.

Актуальность разработки и теоретического обоснования численных методов для решения этого нового класса задач дифракции связана с невозможностью получения аналитических решений, за исключением случаев, когда рассеиватель имеет простейшую форму (например, тело вращения) и характеризуется постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Для приближенного решения задач дифракции применяются такие методы, как метод конечных элементов, разностные методы, метод моментов, методы, использующие разложение решений в ряды по специальным функциям и т.д. Однако применяются они по большей части для решения задач с простейшей геометрией; зачастую отсутствует и доказательство сходимости численных методов.

Таким образом, в последние десятилетия в области задач рассеяния электромагнитных волн на системах экранов и тел сложилась ситуация, когда для численного решения таких задач используются различные приближенные методы, при этом не построена теория разрешимости этих задач и не проведено строгое обоснование численных методов.

Доказательство сходимости численных методов (в частности, проекционных) затрудняется прежде всего отсутствием результатов о разрешимости задач дифракции на системах тел и экранов, а их практическое применение для широкого круга рассеивателей – сложностью в построении расчетных сеток на препятствиях различной размерности; в случае частично экранированных тел для использования некоторых методов требуется также согласование сеток на теле и экране.

Эффективным подходом к решению этих проблем является применение метода интегральных уравнений.[1]

[1]**Колтон Д., Кресс Р.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – Москва : Мир, 1987. **Costabel M., Darrigrand E., and Koné E. H.** *Jour. of Comp. and App. Mathematics.* – Vol. 234, № 6.

В работах А. Б. Самохина[2] определен матричный символ интегро-дифференциального оператора задачи дифракции на анизотропном неоднородном теле, получены результаты об эллиптичности этого оператора и разрешимости системы интегро-дифференциальных уравнений задачи дифракции. Существование и единственность решения задачи дифракции на анизотропном неоднородном теле доказана в статьях А. Б. Самохина и Ю. Г. Смирнова.[3]

Для исследования задач дифракции на идеально проводящих экранах эффективными оказываются методы теории псевдодифференциальных операторов. Развитие этих методов и их применение к исследованию задач дифракции на тонких экранах отражено в работах А. С. Ильинского и Ю. Г. Смирнова,[4] в которых исчисление символов ПДО позволило получить фундаментальные результаты о фредгольмовости оператора на экране, а при некоторых ограничениях доказать его эллиптичность.

Теории разрешимости задач дифракции на частично экранированных телах, системах тел и экранов до последнего времени разработано не было. Построение единой теории разрешимости скалярных и векторных задач рассеяния электромагнитных волн на системах тел и экранов – одна из важных задач данной работы. Исследование краевых задач и систем интегро-дифференциальных уравнений в подходящих пространствах позволяет доказать существование и единственность решения задач дифракции для широкого класса тел и экранов.

Следующая актуальная задача – разработка численного метода решения задач дифракции, получение конкретных результатов, необходимых для его теоретического обоснования. Эллиптичность и непрерывная обратимость оператора задачи позволяют применить классические результаты о сходимости метода Галеркина[5] при условии, что базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве решений задачи.

Применение методов теории псевдодифференциальных операторов в соболевских пространствах позволяет доказать эллиптичность матричного оператора системы интегро-дифференциальных уравнений при некоторых практически значимых ограничениях на свойства рассеивателей и среды. Построение полной системы базисных функций – еще одна актуальная

---

[2]**Самохин А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. – Москва : Радио и Связь, 1998.
Самохин А. Б. *Дифференциальные уравнения.* – 2014. – Т. 50, № 9.

[3]**Самохин А. Б., Смирнов Ю. Г.** *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2021. – Т. 61, № 1. **Самохин А. Б., Смирнов Ю. Г.** *Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления.* – 2021. – Т. 496.

[4]**Смирнов Ю. Г.** *Дифференциальные уравнения.* – 1992. – Т. – 28, № 1. **Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – Москва : ИПРЖР, 1996. **Smirnov Yu. G.** *Journal of Communications Technology and Electronics.* – 2000. – Vol. 45, № 2.

[5]**Kress R.** Linear integral equations : Springer Verlag New York Inc., 1989.

проблема. Наиболее сложным является определение подходящих базисных функций на неплоских тонких экранах. Для случая плоских экранов в литературе описаны различные системы функций: функции RWG и roof-top,[6] финитные функции высокого порядка,[7] глобальные системы базисных функций в барицентрических координатах.[8] Методика использования базисных функций на криволинейных экранах не так развита (отметим работу [9], где определены функции на неплоских поверхностях); в частности, не доказано свойство аппроксимации в подходящих пространствах сечений векторных расслоений.

Распространенный подход к численному решению задач на криволинейных экранах состоит в приближении таких экранов кусочно-плоскими; для последних вводятся стандартные базисные функции (типа RWG, roof-top и т.д.).[10] Такой подход удобен с практической точки зрения, но затрудняет теоретическое обоснование проекционного метода, так как поверхность экрана заменяется другой поверхностью.

В диссертации описаны конкретные базисные функции на объемном рассеивателе, предложен способ построения скалярных и векторных базисных функций на гладких параметризуемых неплоских экранах и доказано свойство аппроксимации в пространствах решений задач дифракции. Полученные в работе результаты позволяют утверждать, что для решении скалярных и векторных задач дифракции на частично экранированных телах методом Галеркина не требуется согласования расчетных сеток на двух- и трехмерных препятствиях, что значительно расширяет круг применимости метода и упрощает его конкретную программную реализацию.

Таким образом, тема исследования, рассматриваемые в диссертации задачи являются актуальными, а полученные результаты – теоретически и практически значимыми.

Цель работы

Цель диссертации – теоретическое обоснование метода Галеркина для решения систем векторных и скалярных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на многообразиях с краем размерности 2 и 3, возникающих при исследовании векторных и скалярных задач дифракции

[6] **Raviart P.-A. and Thomas J.-M.** *Lecture Notes in Math.* Vol. 606. Springer, Berlin, 1977.
Rao S. M., Wilton D. R., and Glisson A. W. *IEEE Trans. Antennas and Propagation.* – 1982. – Vol. AP-30, № 3.

[7] **Nédélec J.-C.** *Numer. Math.* – 1980. – Vol. 35.

[8] **Ильинский А.С. и др.** Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2020. – Т. 23, № 3.

[9] **Wandzura S.** *Electromagnetics.* – 1992. – Vol. 12.

[10] **Сетуха А.В., Семенова А.В.** *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2019. – Т. 59, № 6.

сторонних монохроматических волн на частично экранированных неоднородных телах, а также системах тел и экранов.

Методы исследования

Для обоснования проекционного метода решения скалярных и векторных задач дифракции в работе применен единый подход, который заключается в исследовании краевых задач и интегро-дифференциальных уравнений на многообразиях с краем различной размерности. Исследование задач дифракции опирается на классические результаты теории потенциала и теории краевых задач, методы теории псевдодифференциальных операторов, действующих в соболевских пространствах, методы функционального анализа и дифференциальной геометрии, а также классические результаты о сходимости проекционных методов.

Научная новизна работы

В диссертации разработан и теоретически обоснован численный метод (метод Галеркина) для решения задач дифракции электромагнитных волн на частично экранированных неоднородных телах, а также системах тел и экранов. Впервые рассмотрен новый класс краевых задач дифракции на неоднородных телах, в которых на одной части границы раздела сред формулируются условия сопряжения, а на другой – граничные условия, отвечающие условиям для поля на экране. При этом при переходе через границу области неоднородности ее диэлектрические характеристики (проницаемость или волновое число) меняются скачкообразно. В работе получены новые результаты о разрешимости таких задач дифракции.

Метод Галеркина сформулирован для систем интегро-дифференциальных уравнений на двух- и трехмерных многообразиях с краем, к которым сводятся краевые задачи дифракции. Показано, что при некоторых ограничениях на параметры среды и объемных рассеивателей матричный интегро-дифференциальный оператор является непрерывно обратимым и эллиптическим, а метод Галеркина сходится для этого оператора.

В работе описано построение финитных базисных функций на двух- и трехмерных рассеивателях; предложен способ определения векторных базисных функций на неплоских параметрически заданных экранах. Показано, что построенные базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации, необходимому для сходимости метода Галеркина. В частности, доказано, что базисные функции на экране, определенные на основе функций RWG, удовлетворяют условию аппроксимации в подходящем пространстве Соболева сечений векторных расслоений.

Из полученных результатов о сходимости проекционного метода следует вывод, важный с точки зрения реализации метода Галеркина в задаче дифракции на частично экранированных телах: для сходимости метода не требуется согласования расчетных сеток на трехмерном рассеивателе и двумерном экране, принадлежащем границе объемного тела.

Основные результаты диссертации

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения систем интегро-дифференциальных уравнений на ограниченных многообразиях с краем размерности 2 и 3, возникающих в задачах дифракции на частично экранированных телах и системах тел и экранов. Для обоснования метода Галеркина проведено аналитическое исследование задач дифракции и получены следующие результаты:

   - доказана единственность решения краевых задач для системы уравнений Максвелла и уравнения Гельмгольца в случае, когда диэлектрическая проницаемость или коэффициент преломления имеет разрыв на границе области неоднородности;
   - краевые задачи дифракции сведены к системам интегро-дифференциальных уравнений по ограниченным многообразиям с краем размерности 2 и 3, причем двумерное многообразие может принадлежать краю трехмерного многообразия или не пересекаться с ним;
   - доказаны теоремы о гладкости решений интегро-дифференциальных уравнений при условии гладкости их правых частей;
   - доказаны теоремы об эквивалентности исходных краевых задач и систем интегро-дифференциальных уравнений;
   - при некоторых ограничениях на диэлектрические свойства рассеивателей и среды доказаны теоремы о непрерывной обратимости и эллиптичности матричных операторов систем интегро-дифференциальных уравнений в выбранных пространствах Соболева на многообразиях с краем размерности 2 и 3;
   - на многообразиях с краем размерности 2 и 3 введены скалярные и векторные базисные функции; доказано, что введенные базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах Соболева (сечений векторных расслоений на многообразиях с краем), необходимому для сходимости метода Галеркина;

- доказаны теоремы о сходимости метода Галеркина для систем интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева.

2. Предложен алгоритм реализации метода Галеркина для систем интегро-дифференциальных уравнений в скалярной и векторной задачах дифракции на системе тел и экранов:

   - описан алгоритм построения расчетных сеток и определения базисных функций для широкого класса тел и (в общем случае, неплоских) экранов, удовлетворяющих условию аппроксимации;
   - представлены формулы для определения матричных элементов в системах линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач дифракции методом Галеркина;
   - установлено, что в задачах дифракции на частично экранированном теле не требуется согласованности расчетных сеток на многообразиях различной размерности.

Теоретическая и практическая значимость исследований

Работа носит теоретический характер; в ней впервые рассмотрены в строгой математической постановке задачи дифракции электромагнитных волн на частично экранированных телах и системах тел и экранов, проведено исследование таких задач и теоретически обоснован метод Галеркина для их приближенного решения.

Практическая значимость результатов состоит в разработке аналитических и численных методов исследования задач дифракции на частично экранированных телах, системах тел и экранов; возможности их использования для создания эффективных вычислительных алгоритмов и программных комплексов для решения задач, возникающих в радиолокации, при разработке сложных СВЧ-устройств. Полученные в диссертации теоретические результаты также могут быть использованы при исследовании обратных задач дифракции на препятствиях сложной структуры.

Обоснованность и достоверность результатов

Обоснованность и достоверность результатов, описанных в диссертации, обеспечена строгой постановкой задач, корректным использованием современных математических методов, строгим доказательством теоретических результатов, их непротиворечивостью и сопоставлением их с результатами вычислительных экспериментов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации представлены на следующих международных конференциях:

- Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS2007 in Prague, Czech Republic, 27-30 August, 2007;
- Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS2009 in Moscow, Russia, August 18–21, 2009;
- 2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, 7th–11th September, 2015, Turin, Italy;
- 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications, (MMMA-2015), 2015, August 24-28, Skolkovo, Russia;
- Days on Diffraction (DD 2015), May 25–29, St.Petersburg, Russia, 2015;
- URSI Asia-Pacific Radio Science Conference, Seoul, Korea, 21-25 Aug. 2016;
- International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2016),Espoo, Finland, 14–18 August 2016;
- 2016 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), Cairns, QLD, Australia, 19-23 Sept. 2016;
- Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS 2017 in Singapore, Singapore, 19-22 November, 2017;
- Международная конференция, посвященная 90-летию Владимира Александровича Ильина, Москва, 2–6 мая 2018;
- Пятая Международная конференция, посвященная 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева, Москва, 26–29 ноября 2018;
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего, Москва, 13–15 мая 2019;
- Международная конференция «Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения», Пенза, 23 – 27 сентября 2019;

- XX Международная конференция и молодежная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» – Нижний Новгород, 23 – 27 ноября 2020.

Работа была частично поддержана грантами РФФИ (проекты № 18-01-00219 А, № 21-57-53001 ГФЕН_а), РНФ (№14-11-00344, 2014-2016), ФЦП (проект №2.1.1/10252 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», проект №2.1.1/1647 аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», Министерством науки и высшего образования РФ (проект №1.2.10, 2011-2013; соглашение №1.894.2017/4.6, 2017-2019).

Публикации. Личное участие

Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 45 работах, включая 26 работ в изданиях из перечня ВАК (из них 6 работ без соавторов), 16 работ, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 2 монографии (монографии прошли рецензирование). Все изложенные в диссертации основные результаты получены автором лично. Автор принимал активное участие в постановке исследуемых задач, методов их исследования, обсуждении, интерпретации и приложениях полученных теоретических результатов. В совместных публикациях Ю.Г. Смирнову принадлежит первоначальная постановка задач; Д.В. Валовику и Ю.Г. Смирнову – частичное доказательство эллиптичности ПДО в области неоднородности; М.Ю. Медведику, Е.Д. Деревянчук, Е.Ю. Смолькину, М.А. Москалевой, А.Н. Черенкову, Д.А. Миронову, Н. В. Романовой – частичная программная реализация численных методов; А.А. Цупаку – конкретные постановки задач дифракции, разработка численного метода решения задач дифракции и получение конкретных результатов, необходимых для его теоретического обоснования.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка цитируемой литературы (105 наименований), списка авторских публикаций из 45 наименований, в том числе 26 работ в изданиях из перечня ВАК (из них 6 работ без соавторов), 16 работ, индексируемых в базах данных Web of Science или Scopus, 2 монографии. Общий объем диссертации составляет 223 страницы, включая 15 рисунков и 4 таблицы, 14 страниц цитируемой и авторской литературы.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулирована ее цель и дан обзор основных публикаций по теме исследований, изложено краткое содержание диссертации и сформулированы ее основные результаты.

В **главе 1** проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения скалярной задачи дифракции плоской монохроматической волны на системе непересекающихся двух- и трехмерных рассеивателей.

Двумерный рассеиватель образован системами Ω_1 и Ω_2 попарно непересекающихся гладких экранов. Экраны – ориентируемые незамкнутые двумерные параметризуемые поверхности класса C^∞ с гладким краем.

Трехмерный рассеиватель – это ограниченная область Q (возможно, многосвязная, $Q = \cup_j Q_j$) с кусочно-гладкой ориентируемой границей, состоящей из конечного числа поверхностей класса C^∞. Предполагается также, что область Q является липшицевой[11] и удовлетворяет условию конуса. [12] Область Q неоднородна и характеризуется системой гладких функций $k_j(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$, имеющих ограниченные в $\overline{Q}_j$ производные произвольного порядка. Неоднородность среды описывается функцией

$$k(x) = \begin{cases} k_j(x), & x \in Q_j, \\ k_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

При этом при переходе через границу области Q функция $k(x)$ изменяется *скачкообразно,* т.е. $k(x) \neq k_e$ на ∂Q. Всюду в $\mathbb{R}^3$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} k(x) > 0,\ \operatorname{Im} k(x) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Постановка задачи дифракции. Полное, падающее и рассеянное поле являются монохроматическими:

$$U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}, \quad U_0(x,t) = u_0(x)e^{-i\omega t}, \quad U_s(x,t) = u_s(x)e^{-i\omega t}. \tag{1.2}$$

Падающее поле определяется заданной гладкой в $\mathbb{R}^3$ функцией $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$; $u_s = u - u_0$ – *рассеянное поле.*

Требуется определить комплекснозначную функцию $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$, удовлетворяющую в классическом смысле вне экранов и границы тела однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left(\partial Q \cup \overline{\Omega}\right), \tag{1.3}$$

условиям сопряжения на границе ∂Q области неоднородности

$$[u]|_{\partial Q} = 0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]\Big|_{\partial Q'} = 0, \tag{1.4}$$

[11] **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. of Math. Analysis. – 1988. – Vol. 19, №3.

[12] **Adams R. A. and Fournier J. F.** Sobolev Spaces. 2nd edition. – Amsterdam: Academic Press, 2003.

условиям Дирихле и Неймана во внутренних точках экранов Ω_1 и Ω_2 соответственно,

$$u\,|_{\Omega_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Omega_2} = 0, \tag{1.5}$$

условию конечности энергии в произвольной ограниченной области

$$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{1.6}$$

и условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_e u_s + o\left(r^{-1}\right) && \text{при } \operatorname{Im} k_e = 0, \\ &u_s(r) = O\left(r^{-2}\right) && \text{при } \operatorname{Im} k_e > 0, \quad r := |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям гладкости

$$\begin{aligned} &u \in C^2(Q) \bigcap C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q} \cup \overline{\Omega})\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial\Omega_{1,\delta})\right) \\ &\bigcap_{\delta>0} C(\overline{M}_+ \setminus \partial\Omega_{2,\delta}) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{M}_- \setminus \partial\Omega_{2,\delta}), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $M \supset \Omega_2$ – произвольная гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, а M_-, M_+ – внешняя и внутренняя области по отношению к M; $\partial\Omega_{l,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_l) < \delta\}$ – трубчатые окрестности края l-го экрана.

Определение 1.1. *Решение $u(x)$ задачи* (1.3)–(1.7)*, удовлетворяющее условиям* (1.8)*, называется* ***квазиклассическим****.*

Единственность квазиклассического решения краевой задачи дифракции устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть объемный рассеиватель Q характеризуется гладким показателем преломления $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, а всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия* $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. *Пусть $u(x)$ — квазиклассическое решение задачи дифракции* (1.3)–(1.7)*. Тогда это решение единственно.*

Задача (1.3)–(1.7) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений по ограниченным рассеивателям различной размерности

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (\mathcal{I} - \mathcal{A})u & - & \mathcal{K}_{12}\varphi_1 & + & \mathcal{K}_{13}\varphi_2 & = & u_0|_Q \\ -\mathcal{K}_{21}u & - & \mathcal{S}_1\varphi_1 & + & \mathcal{K}_{23}\varphi_2 & = & u_0|_{\Omega_1} \\ -\mathcal{K}_{31}u & - & \mathcal{K}_{32}\varphi_1 & - & \mathcal{S}_2\varphi_2 & = & u_{0,\mathbf{n}_x}|_{\Omega_2} \end{array} \right. . \tag{1.9}$$

Операторы в (1.9) определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}u &= \int\limits_Q \tilde{k}(y)G(x,y)u(y)dy : L_2(Q) \to L_2(Q),\\
\mathcal{K}_{12}\varphi_1 &= \int\limits_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y)ds_y : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \to L_2(Q),\\
\mathcal{K}_{13}\varphi_2 &= \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds_y : \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2) \to L_2(Q),\\
\mathcal{K}_{21}u &= \int\limits_Q \tilde{k}(y)G(x,y)u(y)dy : L_2(Q) \to H^{1/2}(\Omega_1),\\
\mathcal{S}_1\varphi_1 &= \int\limits_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y)ds_y : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \to H^{1/2}(\Omega_1),\\
\mathcal{K}_{23}\varphi_2 &= \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds : \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2) \to H^{1/2}(\Omega_1),\\
\mathcal{K}_{31}u &= \int\limits_Q \tilde{k}(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_x}u(y)dy : L_2(Q) \to H^{-1/2}(\Omega_2),\\
\mathcal{K}_{32}\varphi_1 &= \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_x}\varphi_1(y)ds_y : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \to H^{-1/2}(\Omega_2),\\
\mathcal{S}_2\varphi_2 &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\Big(\int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds_y\Big) : \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2) \to H^{-1/2}(\Omega_2).
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$\mathcal{I} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ – тождественный оператор.

Кроме того, выписывается представление поля вне рассеивателей

$$
\begin{aligned}
u(x) = u_0(x) + \int\limits_Q \tilde{k}(y)G(x,y)u(y)dy + \int\limits_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y)ds_y -\\
- \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q} \cup \overline{\Omega}).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Здесь $G(x,y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, а $\tilde{k}(y) = k^2(y) - k_e^2$.

Рассматриваются пространства Соболева на многообразиях с краем[13]

$$\begin{aligned} H^{\pm 1/2}\left(\Omega_k\right) &= \{\varphi|_{\Omega_k} : \varphi \in H^{\pm 1/2}(M_k)\}, \\ \tilde{H}^{\pm 1/2}\left(\overline{\Omega}_k\right) &= \{\varphi \in H^{\pm 1/2}(M_k) : supp\, \varphi \in \overline{\Omega}_k\}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Вводится матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.9):

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 - \widehat{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{K}_{12} & -\mathcal{K}_{13} \\ \mathcal{K}_{21} & 0 & -\mathcal{K}_{23} \\ \mathcal{K}_{31} & \mathcal{K}_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Окончательно, система (1.9) переписывается в виде

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{u} = (u, \varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathbf{X}, \quad \mathbf{u}_0 = (u_0|_Q, u_0|_{\Omega_1}, u_{0,\mathbf{n}}|_{\Omega_2})^T \in \mathbf{X}'.$$

Здесь $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ – области определения и прибытия оператора $\widehat{\mathcal{L}}$,

$\mathbf{X} := L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right)$, $\mathbf{X}' = L_2(Q) \times H^{1/2}\left(\Omega_1\right) \times H^{-1/2}\left(\Omega_2\right)$.

Определение 1.2. *Тройка* $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$, *удовлетворяющая* (1.14), *называется **решением** системы интегро-дифференциальных уравнений.*

Получены следующие основные теоретические результаты.

Теорема 1.2. *Пусть объемный рассеиватель Q характеризуется гладким показателем преломления: $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, а всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия* $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. *Тогда матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является эллиптическим.*

Следствие 1.1. *Оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является фредгольмовым оператором (с нулевым индексом).*

Доказана теорема о гладкости решения системы (1.14).

Теорема 1.3. *Пусть падающее поле задается функцией $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, а система* (1.9) *(или* (1.14)*) имеет решение*

$$(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right).$$

Тогда для поверхностных плотностей φ_1, φ_2 верно включение $\varphi_i \in C^\infty(\Omega_i)$, а полное поле $u(x)$, продолженное по формуле (1.11), *удовлетворяет условиям гладкости* (1.8).

Установлена эквивалентность дифференциальной и интегральной формулировок задачи дифракции.

[13] **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – Москва : Мир, 1980.

Теорема 1.4. *Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям:* $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^3$, *а падающее поле является всюду гладким:* $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. *Тогда задача дифракции в дифференциальной формулировке* $(\mathcal{P}_1)$ *эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений* $(\mathcal{P}_2)$. *Подробнее, если* $u(x)$ *является квазиклассическим решением задачи* $(\mathcal{P}_1)$, *то* $(u, \varphi_1, \varphi_2)$ *удовлетворяет системе* (1.14) *и верно интегральное представление* (1.11). *Обратно, если тройка* $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right)$ *есть решение системы* (1.14) *при* $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *то функция* $u(x)$, *продолженная в* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{(Q \cup \Omega)}$ *по формуле* (1.11), *является квазиклассическим решением задачи дифракции.*

Теорема 1.5. *Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям:* $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^3$. *Тогда оператор* $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ *непрерывно обратим.*

Формулировка метода Галеркина для уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \tag{1.15}$$

с непрерывно обратимым оператором $\widehat{\mathcal{L}}$, действующим из гильбертова пространства $\mathbf{X}$ в антидвойственное пространство $\mathbf{X}'$ имеет вид

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_m. \tag{1.16}$$

Здесь $\mathbf{X}_m$ – конечномерные подпространства $\mathbf{X}$, определенные при каждом $m \in \mathbb{N}$ и удовлетворяющие *условию предельной плотности* (*условию аппроксимации*)

$$\forall\, u \in \mathbf{X} \inf_{u_m \in \mathbf{X}_m} \|u - u_m\|_{\mathbf{X}} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{1.17}$$

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена полуторалинейная форма, определяющая антидвойственное спаривание пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$.

Пространства $\mathbf{X}_m$ представляют собой линейные оболочки линейно независимых (базисных) функций $\mathbf{v}_k^{(m)}$, $k = 1, \ldots, m$,

$$\mathbf{X}_m = span\{\mathbf{v}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{v}_m^{(m)}\}, \tag{1.18}$$

а приближенное решение $\mathbf{u}_m$ записывается в виде линейной комбинации

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \mathbf{v}_k^{(m)} \tag{1.19}$$

функций $\mathbf{v}_k^{(m)}$ с неизвестными коэффициентами $c_k^{(m)}$, которые находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{v}_k^{(m)}, \mathbf{v}_l^{(m)} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_l^{(m)} \rangle \quad \forall\, l = 1, \ldots, m. \tag{1.20}$$

Пространства $H^{1/2}(\Omega_1)$, $H^{-1/2}(\Omega_2)$ и $L_2(Q) = H^0(Q)$ антидвойственны, соответственно, к $\tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right)$, $\tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right)$ и $L_2(Q)$ относительно форм

$$\langle \phi_1, \varphi_1 \rangle_1 = \int\limits_{\Omega_1} \phi_1 \overline{\varphi}_1 ds, \quad \langle \phi_2, \varphi_2 \rangle_2 = \int\limits_{\Omega_2} \phi_2 \overline{\varphi}_2 ds, \quad \langle w, u \rangle_0 = \int\limits_{Q} w \overline{u}\, dv. \tag{1.21}$$

Таким образом, для $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}$ соотношение антидвойственности обозначается через $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$, причем для $\mathbf{f} = (u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$ и $\mathbf{g} = (w, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{X}'$

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \langle w, u \rangle_0 + \langle \phi_1, \varphi_1 \rangle_1 + \langle \phi_2, \varphi_2 \rangle_2. \tag{1.22}$$

Через $v_k^{(1)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_1)$, $v_k^{(2)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ и $v_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_0)$ обозначаются базисные функции на экранах Ω_1, Ω_2 и в области неоднородности Q соответственно.

Согласно формулировке (1.16) метода Галеркина приближенные решения $\mathbf{u}_m = (u_{m_0}, \varphi_{1,m_1}, \varphi_{2,m_2})$ уравнения (1.15) ищутся в виде $\mathbf{u}_m = \sum \mathbf{c}_k \mathbf{v}_k$ или в развернутой покомпонентной форме записи:

$$\begin{gathered} u_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^{(0)} v_k^{(0)}(x),\ x \in Q, \\ \varphi_{1,m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} v_k^{(1)}(x),\ x \in \Omega_1,\ \varphi_{2,m_2}(x) = \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} v_k^{(2)}(x),\ x \in \Omega_2. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Система линейных алгебраических уравнений (1.20) принимает вид

$$\begin{cases} \langle u_{m_0} - A u_{m_0} - K_{12} \varphi_{1,m_1} - K_{13} \varphi_{2,m_2}, v_{i_0}^{(0)} \rangle_0 = & \langle u_0|_Q, v_{i_0}^0 \rangle_0 \\ \langle -K_{21} u_{m_0} - S_1 \varphi_{1,m_1} - K_{23} \varphi_{2,m_2}, v_{i_1}^{(1)} \rangle_1 = & \langle u_0|_{\Omega_1}, v_{i_1}^1 \rangle_1 \\ \langle -K_{31} u_{m_0} - K_{32} \varphi_{1,m_1} - S_2 \varphi_{2,m_2}, v_{i_2}^{(2)} \rangle_2 = & \langle \dfrac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Omega_2}, v_{i_2}^{(2)} \rangle_2 \end{cases}, \tag{1.24}$$

где $i_l = 1, \ldots, m_l$. Систему (1.24) можно переписать в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \tag{1.25}$$

где $\mathbf{c}$ – набор неизвестных коэффициентов, $\mathbf{A}$ – основная матрица, $\mathbf{b}$ – столбец правой части системы. Матрица $\mathbf{A}$ и столбец $\mathbf{b}$ записываются в блочном виде с учетом системы (1.24):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

В работе определены конкретные базисные функции на двух- и трехмерных рассеивателях, удовлетворяющие свойству аппроксимации.

Для задания базисных функций $v_i^{(0)}$ на неоднородном объемном теле Q сначала вводится равномерная сетка на параллелепипеде

$$Q' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2,\ b_1 < x_2 < b_2,\ c_1 < x_3 < c_2 \right\} \supset Q,$$

$$x_{1,i_1} = a_1 + h_1 i_1,\ x_{2,i_2} = b_1 + h_2 i_2,\ x_{3,i_3} = c_1 + h_3 i_3, \quad i_k = 0, ..., n_k, \quad (1.27)$$
$$h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}, h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n_2}, h_3 = \frac{c_2 - c_1}{n_3},\ n_k \in \mathbb{N}.$$
В Q' вводятся конечные элементы
$$Q'_{i_1 i_2 i_3} = \{x : x_{k,i_k - 1} < x_k < x_{k,i_k}, k = 1, 2, 3,\ i_k = 1, \dots, n_k - 1\}. \quad (1.28)$$
В области Q сложной формы с кусочно-гладкой границей определяются элементы $Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}$ и базисные функции $v_i^{(0)}$ с носителями, имеющими положительный объем:
$$v_i^{(0)}(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^{(0)}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0,\ x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{array} \right. \quad (1.29)$$
Подпространства функций $v_i^{(0)}(x)$ обозначены через $X_{m_0}^0$.

Леммма 1.1. *Финитные кусочно-постоянные функции $v_i^{(0)}$ (1.29) удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве $L_2(Q)$.*

Для построения базисных функций на плоском экране Ω_1 вводится прямоугольник $D = \left\{t \in \mathbb{R}^2 : a_1 < t_1 < a_2,\ b_1 < t_2 < b_2\right\} \supset \Omega_1$, на котором определяются конечные элементы
$$\begin{array}{l} D_j = D_{j_1 j_2} = \{t : t_{1,j_1} < t_1 < t_{1,j_1+1},\ t_{2,j_2} < t_2 < t_{2,j_2+1}\}, \\ t_{1,j_1} = a_1 + h_1 j_1,\ t_{2,j_2} = b_1 + h_2 i_2, \end{array}$$
где $j_k = 0, ..., n_k - 1$, $h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}, h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n_2}$, $m_1 = n_1 n_2$. Вводятся финитные кусочно-постоянные функции
$$\psi_j = \psi_{j_1,j_2} = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ x \in \overline{D}_{j_1 j_2}, \\ 0,\ x \notin \overline{D}_{j_1 j_2}, \quad j_k = 0, \dots, n_k - 1. \end{array} \right. \quad (1.30)$$
Для определения базисных функций на неплоском экране Ω_1 вводятся конечные элементы $\omega_{1,j}$ $(j = 1, \dots, m_1)$, пересекающиеся по кусочно-гладким кривым, и такие, что $\overline{\Omega}_1 = \bigcup\limits_i \overline{\omega}_{1,j}$. Требуется выполнения условия
$$\lim_{m_1 \to \infty} \max_j diam(\omega_{1,j}) = 0, \quad (1.31)$$
где $diam M = \sup\limits_{x_1, x_2 \in M} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^3}$.

Рассмотрен случай параметризуемой гладкой поверхности Ω_1,
$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2),\ i = 1, 2, 3\},\ (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.32)$$
где D – ограниченная двумерная область, а функции $x_i \in C^\infty(\overline{D})$. Область параметров D разбивается на конечные элементы D_i такие, что $\lim\limits_{m_1 \to \infty} \max\limits_i diam(D_i) = 0$. Определяются финитные базисные функции
$$v_j^{(1)}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ x \in \overline{\omega}_{1,j}, \\ 0,\ x \notin \overline{\omega}_{1,j}. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Здесь $\omega_{1,j}$ – образы прямоугольников $D_j \subset D$ при параметризации (1.32). Так как $x_i(t_1, t_2)$ – гладкие функции, то условие (1.31) удовлетворено.

Подпространства функций $v_j^{(1)}(x)$ на экране Ω_1 обозначены через $X^1_{m_1}$.

Леммма 1.2. *Кусочно-постоянные финитные базисные функции* $v_j^{(1)}$ (1.33) *на экране удовлетворяют условию аппроксимации в* $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1)$.

На плоском экране Ω_2 рассматриваются финитные кусочно-линейные функции с шестиугольным носителем.[14] На прямоугольнике $D := \{x : x_1 \in (a_1, b_1), x_2 \in (a_2, b_2), x_3 = 0\}$, $\Omega_2 \subset D$, вводятся прямоугольные конечные элементы D_i, которые делятся пополам диагоналями одинакового направления. Носитель базисной функции определяется как объединение шести треугольников с общей точкой (x_{1,k_1}, x_{2,k_2}); сама же функция имеет вид

$$v^{(2)}_{k_1,k_2}(x_1, x_2) = \zeta((x_1 - a_1)/h_1 - k_1,\, (x_2 - a_2)/h_2 - k_2), \tag{1.34}$$

где

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], \quad y \in [0, x], \\ 1 - y, & x \in [0, 1], \quad y \in [x, 1], \\ 1 + x - y, & x \in [-1, 0], \ y \in [0, x + 1], \\ 1 + x, & x \in [-1, 0], \ y \in [x, 0], \\ 1 + y, & x \in [-1, 0], \ y \in [-1, x], \\ 1 - x + y, & x \in [0, 1], \quad y \in [x - 1, 0]. \end{cases} \tag{1.35}$$

Подпространства, отвечающие этим функциям, обозначены через $X^2_{m_2}$.

Леммма 1.3. *Кусочно-линейные базисные функции* $v_i^{(2)}$ *на экране* Ω_2 (1.34)-(1.35) *удовлетворяют условию аппроксимации в* $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$.

В работе определены базисные функции на гладких (класса C^∞) двумерных ориентируемых поверхностях с краем. Экран Ω_2 рассматривается как гладкое компактное ориентируемое двумерное многообразие с гладким краем $\partial\Omega_2$; поверхность Ω_2 покрывается конечным числом окрестностей $\{U_\alpha\}$, которые отображаются гладкими диффеоморфизмами $\kappa_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ в $\mathbb{R}^2$. Образы V_α окрестностей внутренних точек x экрана Ω_2 диффеоморфны отрытым множествам в $\mathbb{R}^2$ (например, кругам с центром в точках $t = \kappa_\alpha(x)$), а образы окрестностей точек границы – открытым множествам в $\mathbb{R}^2_+$ (например, полукругам). Предполагается также, что для покрытия U координатными окрестностями задано также подчиненное U разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$.

[14] **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва : Наука, 1981.

Норма в пространстве Соболева $H^s(M)$ на замкнутом многообразии M определяется следующим образом:[15]

$$\|u\|_{H^s(M)} = \sum_\alpha \|u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \qquad (1.36)$$

В работе предполагается, что экран Ω_2 задается параметрически,

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2),\ i = 1, 2, 3\},\ (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \qquad (1.37)$$

где D – прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям $0t_1$, $0t_2$, например, $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$. Предполагается, что отображение $x(t) : D \to \Omega_2$ есть диффеоморфизм класса C^∞: $x \in C^\infty(\overline{D})$, $x^{-1} = \kappa \in C^\infty(\overline{\Omega}_2)$. Диффеоморфность отображения $x : D \to \Omega_2$ означает, что в каждой точке $(t_1, t_2) \in D$ матрица Якоби $x'_t = \frac{\partial x}{\partial t}$ имеет ранг 2.

На прямоугольнике D рассматриваются кусочно-линейные функции $v_i^{(2)}(t_1, t_2)$ с шестиугольным носителем, которые далее обозначаются символом $v_i^{(2,0)}(t_1, t_2)$. В качестве базисных функций $v_i^{(2)}(x)$ на гладком параметризуемом экране рассматриваются функции

$$v_i^{(2)}(x) = v_i^{(2,0)}(\kappa(x)),\ x \in \Omega_2. \qquad (1.38)$$

Имеет место теорема о полноте системы функций $v_i^{(2)}(x)$ в $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$.

Теорема 1.6. *Функции $v_i^{(2)}(x)$ на гладком (класса C^∞) ориентируемом параметрически заданном экране Ω_2 удовлетворяют условию аппроксимации в $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$.*

В работе приведены примеры построения базисных функций на конкретных неплоских параметрически заданных экранах.

Введены конечномерные подпространства $\mathbf{X}_m$ гильбертова пространства решений $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m &= X^0_{m_0} \times X^1_{m_1} \times X^2_{m_2} = \\ &= span\{v_1^{(0)}, \ldots, v_{m_0}^{(0)}\} \times span\{v_1^{(1)}, \ldots, v_{m_1}^{(1)}\} \times span\{v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}\}. \end{aligned} \qquad (1.39)$$

Из лемм 1.1–1.3, теоремы 1.6 и определения пространства $\mathbf{X}$ вытекает условие предельной плотности подпространств $\mathbf{X}_m$ в $\mathbf{X}$.

Теорема 1.7. *Векторные базисные функции $(v_{i_1}^{(0)}, v_{i_2}^{(1)}, v_{i_3}^{(2)})$ удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве* $\mathbf{X}$.

Метод Галеркина (1.16) называется *сходящимся,* если при всех $m \in \mathbb{N}$, больших некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$, система (1.24) однозначно разрешима, и приближенные решения $\mathbf{u}_m$ сходятся при $m \to \infty$ к единственному решению $\mathbf{u}$ уравнения (1.15) по норме пространства $\mathbf{X}$.

[15] **Агранович М. С.** Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. – Москва : МЦНМО, 2013.

Доказана теорема о сходимости численного метода.

Теорема 1.8. *Пусть Q – область с кусочно-гладкой границей, параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям:* $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^3$, *а* Ω_1, Ω_2 *– ориентируемые гладкие (класса* C^∞*) незамкнутые параметрически заданные поверхности. Пусть базисные функции* $(v_{i_0}^{(0)}, v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)})$ *удовлетворяют условию аппроксимации* (1.17).

Тогда метод Галеркина (1.16) *является сходящимся для оператора* $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$: *приближенные решения* $\mathbf{u}_m$ *сходятся к единственному решению* $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ *уравнения* (1.14) *и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{1.40}$$

В **главе 2** проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения скалярной задачи дифракции плоской монохроматической волны на частично экранированных объемных неоднородных телах.

Рассмотрена система неоднородных тел Q_j, расположенных в трехмерном однородном пространстве, характеризующихся функциями

$$k_j(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j). \tag{2.1}$$

Неоднородность среды описывается кусочно-гладкой функцией

$$k(x) = \begin{cases} k_j(x), & x \in \overline{Q}_j, \\ k_e, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

Предполагается, что при переходе через границу области Q функция $k(x)$ *изменяется скачкообразно,* т.е.

$$k(x) \neq k_e, \text{ на } \partial Q. \tag{2.2}$$

Всюду в $\mathbb{R}^3$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} k(x) > 0, \ \operatorname{Im} k(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \tag{2.3}$$

Рассмотрены незамкнутые ориентируемые параметризуемые ограниченные поверхности Ω_1, Ω_2 класса C^∞, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \varnothing$. Предполагается, что края поверхностей $\partial\Omega_i = \overline{\Omega}_i \setminus \Omega_i$ – кривые класса C^∞ без точек самопересечения. Вводится поверхность $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и трубчатые окрестности $\partial\Omega_{i,\delta}$ края $i-$го экрана, $\partial\Omega_{i,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_i) < \delta\}$.

В задаче дифракции на *частично экранированном теле* предполагается, что экраны лежат на гладкой части границы области неоднородности:

$$\Omega_1, \Omega_2 \subset \partial Q, \quad mes\big(\partial Q \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)\big) > 0, \tag{2.4}$$

$\partial Q \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ – открытое множество на поверхности ∂Q.

Постановка задачи дифракции. Требуется определить комплексно-значную функцию $u = u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$, удовлетворяющую в классическом смысле вне границы тела однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial Q, \tag{2.5}$$

условиям сопряжения на «неэкранированной» части границы области Q

$$[u]|_{\partial Q\setminus\overline{\Omega}} = 0, \quad \left.\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]\right|_{\partial Q\setminus\overline{\Omega}} = 0, \tag{2.6}$$

краевым условиям Дирихле на экране Ω_1 и условиям Неймана на Ω_2

$$u|_{\Omega_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Omega_2} = 0, \tag{2.7}$$

условиям ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства

$$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{2.8}$$

и условиям излучения на бесконечности для рассеянного поля u_s

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_e u_s + o\left(\frac{1}{r}\right) && \text{при } \operatorname{Im} k_e = 0, \\ &u_s(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) && \text{при } \operatorname{Im} k_e > 0, \quad r := |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Искомая функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям гладкости

$$\begin{aligned} &u \in C^2(Q)\bigcap C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q\right)\bigcap C^1\left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}\right)\bigcap_{\delta>0} C\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega}_2 \cup \Omega_{1,\delta})\right) \\ &\bigcap_{\delta>0} C^1\left((\overline{M}_+ \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \partial\Omega_{2,\delta})) \cup (\overline{M}_- \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \partial\Omega_{2,\delta}))\right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где M – произвольная гладкая замкнутая ориентируемая поверхность, $\Omega \subset M$, а M_-, M_+ – внешняя и внутренняя области по отношению к M.

Определение 2.1. *Решение $u(x)$ задачи* (2.5)–(2.9), *удовлетворяющее условиям* (2.10), *называется **квазиклассическим**.*

Теорема 2.1. *Пусть объемный рассеиватель Q характеризуется гладким показателем преломления $k(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$, а всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. Пусть $u(x)$ – квазиклассическое решение задачи дифракции* (2.5)-(2.9). *Тогда это решение единственно.*

Задача (2.5)–(2.9) сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\widehat{\mathcal{L}}\left((u, \varphi_1, \varphi_2)^T\right) = (u_0|_Q, u_0|_{\Omega_1}, \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Omega_2})^T. \tag{2.11}$$

Матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ системы имеет вид

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} - \mathcal{A} & -\mathcal{K}_{12} & \mathcal{K}_{13} \\ -\mathcal{K}_{21} & -\mathcal{S}_1 & \mathcal{K}_{23} \\ -\mathcal{K}_{31} & -\mathcal{K}_{32} & -\mathcal{S}_2 \end{pmatrix}; \tag{2.12}$$

операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}_i$ и $\mathcal{K}_{ij}$ определяются соотношениями (1.10). Также рассматривается представление полного поля вне рассеивателя

$$\begin{aligned} u(x) = u_0(x) + \int\limits_Q \tilde{k}(y)G(x,y)u(y)dy + \int\limits_{\Omega_1} G(x,y)\varphi_1(y)ds_y - \\ - \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi_2(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ рассматривается как отображение в пространствах Соболева на многообразиях с краем:

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathbf{X} \;\to\; \mathbf{X}',$$

$$\mathbf{X} = L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1) \times \tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2),\ \mathbf{X}' = L_2(Q) \times H^{1/2}(\Omega_1) \times H^{-1/2}(\Omega_2).$$

Определение 2.2. ***Решением*** *системы уравнений* (2.11) *называется тройка* $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}$, *удовлетворяющая уравнению* (2.11).

Получены следующие основные теоретические результаты.

Теорема 2.2. *Пусть рассеиватель Q характеризуется показателем преломления $k(x) \in C^\infty(\overline{Q}_j)$ и всюду в $\mathbb{R}^3$ выполнены условия $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является эллиптическим.*

Следствие 2.2. *Оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является фредгольмовым оператором (с нулевым индексом).*

Теорема 2.3. *Пусть падающее поле задается функцией $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, а система уравнений* (2.11) *имеет решение*

$$(u, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{X}.$$

Тогда для поверхностных плотностей φ_1, φ_2 верно включение $\varphi_i \in C^\infty(\Omega_i)$, а полное поле $u(x)$, продолженное вне Q согласно (2.13), *удовлетворяет условиям гладкости* (2.10) *и* (2.8).

Теорема 2.4. *Пусть параметры среды и неоднородного рассеивателя удовлетворяют условиям $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^3$, а падающее поле всюду является гладким, $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда задача дифракции в дифференциальной формулировке $(\mathcal{P}_1)$ эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений $(\mathcal{P}_2)$. Подробнее, если $u(x)$ является квазиклассическим решением задачи $(\mathcal{P}_1)$, то $(u, \varphi_1, \varphi_2)$ удовлетворяет* *системе* (2.11) *и верно интегральное представление* (2.13). *Обратно, если тройка* $(u, \varphi_1, \varphi_2) \in L_2(Q) \times \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}_1\right) \times \tilde{H}^{1/2}\left(\overline{\Omega}_2\right)$ *есть решение системы* (2.11) *при* $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *то функция* $u(x)$, *продолженная в* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ *по формуле* (2.13), *является квазиклассическим решением задачи дифракции.*

Теорема 2.5. *Пусть параметры среды и рассеивателей удовлетворяют условиям:* $k(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, $\operatorname{Re} k(x) > 0$, $\operatorname{Im} k(x) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^3$. *Тогда оператор* $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ *непрерывно обратим.*

Формулировка метода Галеркина для задачи дифракции на частично экранированном теле аналогична формулировке проекционного метода в задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов.

Рассматривается уравнение

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'. \tag{2.14}$$

Вводятся обозначения для базисных функций на теле и экранах:

- $v_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_0)$ – базисные функции в области Q,
- $v_k^{(1)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_1)$ – базисные функции на экране Ω_1,
- $v_k^{(2)}(x)$ $(k = 1, \ldots, m_2)$ – базисные функции на экране Ω_2.

Приближенные решения $\mathbf{u}_m = (u_{m_0}, \varphi_{1,m_1}, \varphi_{2,m_2})$ уравнения (2.14) ищутся согласно формулировке (1.16) метода Галеркина, $\mathbf{u}_m = \sum \mathbf{c}_k \mathbf{v}_k$, или в развернутой покомпонентной форме записи

$$\begin{gathered} u_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^{(0)} v_k^{(0)}(x),\ x \in Q, \\ \varphi_{1,m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} v_k^{(1)}(x),\ x \in \Omega_1,\ \varphi_{2,m_2}(x) = \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} v_k^{(2)}(x),\ x \in \Omega_2. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Коэффициенты $c_k^{(i)}$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \langle u_{m_0} - Au_{m_0} - K_{12}\varphi_{1,m_1} - K_{13}\varphi_{2,m_2}, v_{i_0}^{(0)}\rangle_0 = & \langle u_0|_Q, v_{i_0}^{(0)}\rangle_0 \\ \langle -K_{21}u_{m_0} - S_1\varphi_{1,m_1} - K_{23}\varphi_{2,m_2}, v_{i_1}^{(1)}\rangle_1 = & \langle u_0|_{\Omega_1}, v_{i_1}^{(1)}\rangle_1 \\ \langle -K_{31}u_{m_0} - K_{32}\varphi_{1,m_1} - S_2\varphi_{2,m_2}, v_{i_2}^{(2)}\rangle_2 = & \langle \dfrac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Omega_2}, v_{i_2}^{(2)}\rangle_2 \end{cases}, \tag{2.16}$$

где $i_l = 1, \ldots, m_l$.

Доказана сходимость метода Галеркина в скалярной задаче дифракции на частично экранированном теле.

Теорема 2.6. *Пусть область Q с кусочно-гладкой границей характеризуется заданной комплекснозначной функцией $k(x)$, параметры объемного рассеивателя и среды в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ удовлетворяют условиям*

$$k(x) \in C^\infty(\overline{Q}),\ \operatorname{Re} k(x) > 0,\ \operatorname{Im} k(x) \geqslant 0; \quad \operatorname{Re} k_e > 0,\ \operatorname{Im} k_e \geqslant 0, \tag{2.17}$$

а Ω_1, Ω_2 – ориентируемые гладкие (класса C^∞) незамкнутые параметрически заданные поверхности. Пусть для любых $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ в области Q и на экранах Ω_1, Ω_2 определены произвольным образом базисные функции $v_{i_0}^{(0)}$, $v_{i_1}^{(1)}$ и $v_{i_2}^{(2)}$, удовлетворяющие условию аппроксимации (1.17) *в пространствах $L_2(Q)$, $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}_1)$ и $\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_2)$ соответственно.*

Тогда метод Галеркина (2.14) *является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$: приближенные решения $\mathbf{u}_m$ сходятся к единственному решению $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ уравнения* (2.14) *и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{2.18}$$

В работе исследована проблема согласованности расчетных сеток на двух- и трехмерных рассеивателях в задаче дифракции на частично экранированных телах.

Теорема 2.6 о сходимости метода Галеркина позволяет ввести минимальные ограничения на расчетные сетки, необходимые для выполнения условия аппроксимации на этих сетках – это условие (1.31). В частности, при выполнении этого условия никакого согласования сеток в объемной области неоднородности Q и экранах Ω_i, лежащих на границе области, $\Omega_i \subset \partial Q$, не требуется. Это позволяет рассматривать расчетные сетки и определять базисные функции только из соображений удобства использования на рассеивателях заданной формы; произвольно и независимо выбирать количественные параметры сеток (число носителей, размеры носителей вдоль разных измерений и т.д.), что обеспечивает большую свободу в определении блочной матрицы СЛАУ в методе Галеркина.

Базисные функции определяются так же, как и в задаче на системе непересекающихся тел и экранов. Показано, что эти базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации. Доказано утверждение о предельной плотности подпространств $\mathbf{X}_m$ в $\mathbf{X}$.

Теорема 2.7. *Векторные базисные функции $(u_{i_1}^{(0)}, u_{i_2}^{(1)}, u_{i_3}^{(2)})$ удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве $\mathbf{X}$.*

В **главе 3** проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения векторной задачи дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся двух- и трехмерных рассеивателей.

Рассматривается задача дифракции электромагнитной монохроматической волны с круговой частотой $\omega > 0$ на системе рассеивателей, расположенных в изотропной однородной среде $\mathbb{R}^3$, характеризующейся заданными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей ε_e, μ_e,

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{3.1}$$

Волновые число $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}k_e > 0,\ \operatorname{Im}k_e \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Двумерные рассеиватели представляют собой бесконечно тонкие идеально проводящие экраны Ω_i, не пересекающиеся друг с другом. Экран Ω_i определяется как незамкнутое двумерное многообразие с краем класса C^∞. Край $\partial\Omega_i$ каждого экрана – объединение конечного числа кривых класса C^∞ без точек самопересечения, сходящихся под углами, отличными от нулевого. Вводятся обозначения $\Omega = \cup\Omega_i$ и $\partial\Omega = \bigcup\partial\Omega_i$.

Вводятся трубчатые δ-окрестности края i-го экрана:

$$\partial\Omega_{i,\delta} := \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \partial\Omega_i) < \delta\}, \quad \delta > 0. \tag{3.3}$$

В качестве трехмерного рассеивателя рассматривается объемное неоднородное анизотропное тело Q – ограниченная трехмерная область с гладкой границей ∂Q класса C^∞ (Q может быть многосвязной, $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$). Области Q_k гомеоморфны шару и $\overline{Q}_k \cap \overline{Q}_{k'} = \varnothing$ при $k \neq k'$, являются диэлектрически неоднородными и анизотропными. Область Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_e и тензор-функцией $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ диэлектрической проницаемости с гладкими компонентами: $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$.

Вводится тензор относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$, такой, что при каждом $x \in \overline{Q}$ существует тензор

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{3.4}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор. Предполагается, что для для $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ в области $\overline{Q}$ выполнено одно из следующих условий:

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 \neq 0 \tag{3.6}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$.

Постановка задачи. Рассматривается задача дифракции стороннего электромагнитного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e\mathbf{H}_0, \tag{3.7}$$

на системе непересекающихся тел и экранов: $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \varnothing$.

Требуется определить всюду в $\mathbb{R}^3$ за исключением краев экрана $\partial\Omega$ полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, удовлетворяющее условиям гладкости (ниже P^+, P^- – произвольные области, «внешняя» и «внутренняя» по отношению к Ω, и такие, что $\Omega \subset \partial P^{\pm}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \overline{\Omega})\right) \bigcap C(\overline{Q}) \bigcap C(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \overline{\Omega}) \\ \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{P^+} \setminus \partial\Omega_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{P^-} \setminus \partial\Omega_\delta), \end{aligned} \tag{3.8}$$

удовлетворяющее в классическом смысле системе уравнений Максвелла всюду вне границы ∂Q области неоднородности и экрана $\overline{\Omega}$,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_e\mathbf{H}, \tag{3.9}$$

условиям непрерывности касательных компонент поля при переходе через границу области неоднородности

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \tag{3.10}$$

краевым условиям для касательных компонент электрического поля во внутренних точках *идеально проводящего* экрана Ω

$$\mathbf{E}_\tau\,|_{\Omega} = 0, \tag{3.11}$$

условиям конечности энергии в любой ограниченной области пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{3.12}$$

и условиям излучения Сильвера-Мюллера для рассеянного поля

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = o(1/r), & \operatorname{Im} k_e > 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s = o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s = o(1/r), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = O(1/r), & \operatorname{Im} k_e = 0 \end{array} \tag{3.13}$$

при $r \to \infty$. Здесь $r = |x|,\ x \in \mathbb{R}^3$.

Определение 3.1. *Решение* $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ *задачи* (3.9)–(3.13)*, удовлетворяющее условиям* (3.8)*, называется* ***квазиклассическим****.*

Теорема 3.1. *Пусть свободное от рассеивателей трехмерное пространство характеризуется постоянными значениями проницаемостей* ε_e, μ_e, *удовлетворяющих условиям* (3.1) *и* (3.2)*. Диэлектрическая проницаемость в* $\overline{Q}$ *удовлетворяет одному из условий:*

- *если* $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(x) \neq 0$*, то тензор* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ *удовлетворяет условиям* (3.4)–(3.6) *и является симметрическим;*

- *если* $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$ *в* Q*, то* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$.

Тогда если квазиклассическое решение задачи (3.9)–(3.13) *существует, то оно единственно.*

Задача дифракции на системе тел и экранов, сформулированная в неограниченном трехмерном пространстве, сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений по области неоднородных тел и поверхности идеально проводящих экранов. Выводится представление полного электрического поля вне экрана и границы области неоднородности

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) =&(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_Q G(x,y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy + \\ &+(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y + \mathbf{E}_0(x),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega} \cup \partial Q)\end{aligned} \tag{3.14}$$

и система интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) =&(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy + \\ &+(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y + \mathbf{E}_0(x),\ x \in Q, \\ &\Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy - \\ &-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau = \mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x \in \Omega.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь $\mathbf{J} = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}$ – неизвестный вектор тока поляризации в Q, $\mathbf{u}$ – неизвестная поверхностная плотность тока на Ω, а $(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r - \widehat{\mathbf{I}})^{-1} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathbf{E} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}$. Через $(\bullet)_\tau$ обозначена операция вычисления касательной компоненты вектор-функций $\mathbf{v}$ во внутренних точках экрана Ω:

$$(\mathbf{v})_\tau = \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}),$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – поле единичных нормалей на Ω.

Магнитное поле $\mathbf{H}$ определяется через решение $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(Q)$ формулой

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}_0(x) - i\omega\varepsilon_e \operatorname{rot} \int\limits_Q G(x,y)(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.16}$$

где $\mathbf{H}_0(x) = \frac{1}{i\omega\mu_e}\operatorname{rot}\mathbf{E}_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Вводятся операторы

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} &:= \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy,\ x\in Q,\\
\widehat{\mathcal{S}}\mathbf{u} &:= \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau,\ x\in\Omega,\\
\widehat{\mathcal{K}}_1\mathbf{u} &:= -(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y,\ x\in Q,\\
\widehat{\mathcal{K}}_2\mathbf{J} &:= \Big(-(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy\Big)_\tau,\ x\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

и матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix}$ с отображениями $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{S}}$ и $\widehat{\mathcal{K}}_i$, действующими в следующих пространствах:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} &:= \mathbf{L}_2(Q)\to\mathbf{L}_2(Q), \quad \widehat{\mathcal{K}}_1\mathbf{u} := W(\overline{\Omega})\to\mathbf{L}_2(Q)\\
\widehat{\mathcal{K}}_2\mathbf{J} &:= \mathbf{L}_2(Q)\to W'(\Omega), \quad \widehat{\mathcal{S}}\mathbf{u} := W(\overline{\Omega})\to W'(\Omega).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Гильбертово пространство $W = W(\overline{\Omega})$ определено[16] как пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ гладких сечений по норме

$$
\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{-1/2}^2.
$$

Введены обозначения $\mathbf{L}_2(Q)\times W(\overline{\Omega}) =: \mathbf{X}$ и $\mathbf{L}_2(Q)\times W' =: \mathbf{X}'$; пространство $\mathbf{X}'$ является антидвойственным к $\mathbf{X}$.

Окончательно, система уравнений записывается в виде

$$
\widehat{\mathcal{L}}(\mathbf{J},\mathbf{u}) = \mathbf{f}. \tag{3.19}
$$

Вектор правой части имеет вид $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$, где $\mathbf{E}_{0,Q}$ – сужение гладкого падающего поля на Q, а $\mathbf{E}_{0,\tau}$ – его касательная составляющая на Ω.

Определение 3.2. ***Решением уравнения*** (3.19) *называется удовлетворяющая системе* (3.15) *пара векторов* $(\mathbf{J},\mathbf{u})$ *из пространства* $\mathbf{X}$.

Матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ представлен в виде

$$
\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_2 := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_1 & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.20}
$$

Здесь операторы $\widehat{\mathcal{S}}$, $\widehat{\mathcal{K}}_1$ и $\widehat{\mathcal{K}}_2$ определены так же, как и выше. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}_0$, $\widehat{\mathcal{A}}_1$ определяются аналогично интегро-дифференциальному оператору

[16] **Ильинский, А.С., Смирнов, Ю.Г.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – Москва : ИПРЖР, 1996.

$\widehat{\mathcal{A}}$, при этом их ядра G_0 и G_1 имеют вид

$$G_0(x,y) = \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad G_1(x,y) = G(x,y) - G_0(x,y). \tag{3.21}$$

Введены обозначения для оператора типа потенциала и матричного дифференциального оператора $k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}$:

$$\widehat{\mathcal{T}}\mathbf{v} = \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{v}(y)dy, \quad \widehat{\mathcal{D}}\mathbf{v} = (k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\mathbf{v}(y).$$

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}_0$ выражается через оператор умножения на обратимый гладкий тензор $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$, а также композицию операторов $\widehat{\mathcal{D}}$ и $\widehat{\mathcal{T}}$:

$$\widehat{\mathcal{A}}_0\mathbf{J} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J} - (\widehat{\mathcal{D}} \circ \widehat{\mathcal{T}})\mathbf{J}. \tag{3.22}$$

Доказаны следующие основные теоретические результаты.

Леммма 3.1. *Оператор $\widehat{\mathcal{L}}_2 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ компактен.*

Леммма 3.2. *Оператор $\widehat{\mathcal{A}}_0$ может быть представлен в виде ПДО*

$$\widehat{\mathcal{A}}\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\left(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) - \widehat{\mathbf{td}}(\xi)\right)\mathbf{J}(y)dyd\xi, \tag{3.23}$$

где символ $\widehat{\mathbf{td}}(\xi)$ определяется равенством

$$\widehat{\mathbf{td}}(\xi) = \frac{-1}{1+|\xi|^2}\cdot\begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_e^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 - k_e^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 - k_e^2 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Теорема 3.2. *Пусть в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{3.25}$$

Пусть в $\overline{Q}$ тензор относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ таков, что в $x \in \overline{Q}$ существует ограниченный тензор

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{3.26}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор. Пусть для $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ в $\overline{Q}$ выполнено хотя бы одно из условий

$$\operatorname{Re}\bigl(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\bigr) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{3.27}$$

$$\operatorname{Im}\bigl(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\bigr) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 \neq 0, \tag{3.28}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$.

Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}_0 : \mathbf{L}_2(Q) \to \mathbf{L}_2(Q)$, определенный по формуле (3.22), является эллиптическим.

Теорема 3.3. *Пусть тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям: $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$, причем $\varepsilon(x) \in C^\infty(\overline{Q})$ и $\varepsilon_r(x) > 1$ для всех*

$x \in \overline{Q}$. Пусть $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{X}$ – решение системы (3.15), отвечающее падающему полю $\mathbf{E}_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда вектор-функции $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, определенные согласно (3.14),(3.16), удовлетворяют условиям (3.8). Кроме того, имеет место включение

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^{0,\alpha}(\overline{Q}) \cap C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^3 \setminus (Q \cup \Omega_\delta)\right), \tag{3.29}$$

где $0 < \alpha < 1/2$, а $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^3$ – произвольная открытая область, такая что $\Omega_\delta \supset \overline{\Omega}$.

Теорема 3.4. *Если задача дифракции (3.9)–(3.13) имеет квазиклассическое решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, то вектор-функции $\mathbf{E}, \mathbf{u}$ удовлетворяют системе (3.15). Обратно, если пара $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$ является решением системы (3.15) с гладкой правой частью ($\mathbf{E}_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$), то поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, определенное согласно (3.14)–(3.16), есть квазиклассическое решение исходной задачи (3.9)–(3.13).*

Теорема 3.5. *Пусть в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ выполнены условия (3.25), а для тензора относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ в $\overline{Q}$ выполнены условия (3.26), (3.27), (3.28). Пусть, кроме того, $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$, если $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij} = 0$. Тогда матричный оператор $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ является непрерывно обратимым, а задача дифракции имеет единственное решение.*

Рассмотрена формулировка метода Галеркина для системы

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U} = \mathbf{f}. \tag{3.30}$$

интегро-дифференциальных уравнений (см. также развернутую форму (3.15) системы) в векторной задаче дифракции на системе непересекающихся тел и экранов. В (3.30) $\mathbf{U} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})^T$ – искомое решение, $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$ – заданная правая часть уравнения, а $\widehat{\mathcal{L}}$ – матричный оператор системы,

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}} & \widehat{\mathcal{K}}_1 \\ \widehat{\mathcal{K}}_2 & \widehat{\mathcal{S}} \end{pmatrix} : \mathbf{X} = \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega}) \to \mathbf{X}' = \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega). \tag{3.31}$$

Приближенные решения уравнения (3.30) обозначены через $\mathbf{U}_m = (\mathbf{J}_{m_0}, \mathbf{u}_{m_1})^T$; их компоненты представлены в виде линейных комбинаций

$$\mathbf{J}_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^0 \mathbf{v}^{(0)}(x), \quad \mathbf{u}_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \mathbf{v}^{(1)}(x) \tag{3.32}$$

базисных функций. Можно также записать

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{v}_k(x), \quad c_k = c_k^0, \quad \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_k^{(0)}(x), 0)^T \text{ при } k \le m_0, \\ c_k = c^1_{k-m_0}, \mathbf{v}_k = (0, \mathbf{v}^{(1)}_{k-m_0}(x))^T \text{ при } k > m_0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Неизвестные коэффициенты находятся согласно формулировке (1.16) метода Галеркина из системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle \widehat{\mathcal{L}} \mathbf{U}_m, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_k \rangle \quad \forall\, \mathbf{v}_k \in \mathbf{X}_m. \tag{3.34}$$

Здесь $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$ – конечномерные подпространства:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m = \mathbf{X}^0_{m_0} \times \mathbf{X}^1_{m_1}, \quad \mathbf{X}^0_{m_0} &= span\{\mathbf{v}^{(0)}_1, \ldots, \mathbf{v}^{(0)}_{m_0}\} \subset \mathbf{L}_2(Q), \\ \mathbf{X}^1_{m_1} &= span\{\mathbf{v}^{(1)}_1, \ldots, \mathbf{v}^{(1)}_{m_1}\} \subset W(\overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в (3.34) обозначена полуторалинейная форма, определяющая антидвойственное спаривание пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$.

В работе построены конкретные базисные функции на двух- и трехмерных рассеивателях, удовлетворяющие свойству аппроксимации.

Пусть Q – область произвольной формы в $\mathbb{R}^3$. Вводится параллелепипед Q', содержащий Q, элементарные прямоугольники Q' (1.28) и подобласти

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}, \quad i_k = 1, \ldots, l_k.$$

Определяются функции

$$v^0_i(x) = v^0_{i_1 i_2 i_3}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, \ x \notin Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3} \end{cases} \tag{3.36}$$

с носителями, имеющими положительный объем. Приближение к решению $\mathbf{J}$ записывается в виде

$$\mathbf{J}_{m_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^1 \\ \mathbf{J}^2 \\ \mathbf{J}^3 \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{l} b^1_i v^0_i(x), \ \sum_{i'=1}^{l} b^2_{i'} v^0_{i'}(x); \ \sum_{i''=1}^{l} b^3_{i''} v^0_{i''}(x) \right]^T. \tag{3.37}$$

Иначе,

$$\mathbf{J}_{m_1} = \sum_{i=1}^{m_0} c^1_i \mathbf{v}^{(0)}_i(x), \tag{3.38}$$

где $m_0 = 3l$, а $\mathbf{v}^{(0)}_i(x)$ – базисные вектор-функции вида $(v^0_i(x), 0, 0)^T$, $(0, v^0_i(x), 0)^T$ и $(0, 0, v^0_i(x))^T$.

Леммма 3.3. *Финитные кусочно-постоянные функции* $\mathbf{v}^{(0)}_i$ *удовлетворяют условию аппроксимации в векторном пространстве* $\mathbf{L}_2(Q)$.

Введены кусочно-линейные базисные функции, более удобные с точки зрения вычисления матричных элементов в методе Галеркина. Эти функции также определяются на равномерной прямоугольной сетке. Вводятся обозначения

$$h^1 := |x_{1,i_1} - x_{1,i_1-1}|, \ h^2 := |x_{2,i_2} - x_{2,i_2-1}|, \ h^3 := |x_{3,i_3} - x_{3,i_3}| \tag{3.39}$$

и определяется три набора функций, кусочно-линейных по одной из декартовых координат и постоянных по двум другим:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^1_{i_1 i_2 i_3}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1}|x_1 - x_{1,i_1}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1+1,i_2,i_3}} \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1+1,i_2,i_3}} \end{cases}, \\ \tilde{v}^2_{i_1 i_2 i_3}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^2}|x_2 - x_{2,i_2}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1,i_2+1,i_3}} \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1,i_2+1,i_3}} \end{cases}, \\ \tilde{v}^3_{i_1 i_2 i_3}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^3}|x_3 - x_{3,i_3}|, & x \in Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1,i_2,i_3+1}} \\ 0, & x \notin Q \cap \overline{Q'_{i_1,i_2,i_3} \cup Q'_{i_1,i_2,i_3+1}} \end{cases}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

Компоненты приближенного решения $\mathbf{J}_{m_0}$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^1(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1-1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} b^1_{i_1 i_2 i_3} \tilde{v}^1_{i_1 i_2 i_3}(x), \\ \mathbf{J}^2(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2-1} \sum_{i_3=1}^{n_3} b^2_{i_1 i_2 i_3} \tilde{v}^2_{i_1 i_2 i_3}(x), \\ \mathbf{J}^3(x) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3-1} b^3_{i_1 i_2 i_3} \tilde{v}^3_{i_1 i_2 i_3}(x). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Представление векторного приближенного решения $\mathbf{J}_{m_0}$ имеет вид

$$\mathbf{J}_{m_0} = \sum_{i=1}^{m_0} c^1_i \mathbf{v}^{(0)}_i(x), \tag{3.42}$$

где $m_0 = l_1 + l_2 + l_3$, а $\mathbf{v}^{(0)}_i(x)$ – базисные вектор-функции вида $(\tilde{v}^1_{i_1,i_2,i_3}(x), 0, 0)^T$, $(0, \tilde{v}^2_{i_1,i_2,i_3}(x), 0)^T$ и $(0, 0, \tilde{v}^3_{i_1,i_2,i_3}(x))^T$.

Леммма 3.4. *Введенные финитные функции $\mathbf{v}^{(0)}_i$ удовлетворяют условию аппроксимации в векторном пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$.*

В работе решен вопрос об аппроксимации решения на идеально проводящих *плоских* экранах Ω вектор-функциями RWG. На прямоугольнике

$$\Omega = \left\{x' = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2,\ b_1 < x_2 < b_2\right\} \tag{3.43}$$

вводятся конечные элементы

$$\omega_j = \omega_{j_1 j_2} = \left\{x' : x_{k,j_k} < x_k < x_{k,j_k+1}\right\},\ k = 1, 2,\ j_k = 0, \ldots, n_k - 1, \tag{3.44}$$

где

$$x_{k,j_k} = a_k + h_k j_k,\ h_k = (b_k - a_k)/n_k,\ k = 1, 2, \tag{3.45}$$

а затем все ω_j разбиваются диагоналями фиксированного направления на пары треугольников. Рассматривается совокупность $\Gamma = \{\gamma_j\}$ всех ребер, не лежащих на границе $\partial\Omega$, и с каждым таким ребром связывается финитная вектор-функция $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ с носителем на паре смежных треугольников σ_j^+, σ_j^-, имеющих общее ребро γ_j. Длина ребра обозначена через γ_j, а площади треугольников $\sigma_j^\pm$ через $l(\gamma_j)$ и $s(\sigma_j^\pm)$ соответственно. Если точки $(x^+_{1,j_1}, x^+_{2,j_2}, 0) \in \sigma_j^+$ и $(x^-_{1,j_1}, x^-_{2,j_2}, 0) \in \sigma_j^-$ – вершины соответствующих треугольников, не лежащие на ребре γ_j, то функции RWG определяются следующим образом:

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x') = \begin{cases} (x_1 - x^+_{1,j_1}, x_2 - x^+_{2,j_2})\frac{l(\gamma_j)}{s(\sigma_j^+)}, & x' \in \sigma_j^+, \\ (x^-_{1,j_1} - x_1, x^-_{2,j_2} - x_2)\frac{l(\gamma_j)}{s(\sigma_j^-)}, & x' \in \sigma_j^-, \\ (0,0), & x' \notin \sigma_j^+ \cup \sigma_j^-. \end{cases} \tag{3.46}$$

Леммма 3.5. *Функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$ принадлежат пространству $W(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют условию аппроксимации.*

В работе описано построение и свойства базисных вектор-функций на *неплоских* ориентируемых гладких параметризуемых экранах.

Предполагается, что Ω – гладкая (класса C^∞) двумерная параметризуемая ориентируемая поверхность с краем. Ω понимается также как гладкое компактное ориентируемое двумерное многообразие с гладким краем $\partial\Omega$. Для Ω существует покрытие конечным числом окрестностей $\{U_\alpha\}$, которые отображаются гладкими диффеоморфизмами $\kappa_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ в $\mathbb{R}^2$, а образы V_α окрестностей внутренних точек экрана Ω диффеоморфны отрытым множествам в $\mathbb{R}^2$ (например, кругам с центром в точках $t = \kappa_\alpha(x)$), а образы окрестностей точек границы – открытым множествам в $\mathbb{R}^2_+$ (полукругам). Предполагается также, что для всякого покрытия U координатными окрестностями задано подчиненное U разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$.

Построены базисные вектор-функции на неплоских экранах, представляющих собой параметрически заданные поверхности в $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1, t_2),\ i = 1, 2, 3\},\ (t_1, t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.47}$$

Здесь D – прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям $0t_1$, $0t_2$, например, $D = \{(t_1, t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$. При этом отображение $x(t) : D \to \Omega$ есть диффеоморфизм класса C^∞: $x \in C^\infty(\overline{D})$, $x^{-1} = \kappa \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Так как параметризация поверхности описывается отображением из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, то диффеоморфность отображения $x : D \to \Omega$ подразумевает, что в точках $(t_1, t_2) \in D$ матрица Якоби x'_t имеет ранг 2.

Определены базисные вектор-функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ в пространстве $W = W(\overline{\Omega})$ сечений касательного расслоения поверхности Ω. В каждой (внутренней) точке $x \in \Omega$ определен вектор единичной нормали $\mathbf{n}_x$, причем поле нормалей на Ω является гладким. В каждой точке x определена касательная плоскость (точнее, пара "точка, плоскость") $T_x\Omega$ к поверхности Ω. Объединение $T_x\Omega$ по всем $x \in \Omega$ обозначено через $T\Omega$.

В рассматриваемой задаче дифракции $\mathbf{u}$ (см. уравнения (3.15)) представляет собой векторное поле, касательное к Ω, то есть является сечением $\Omega \to T\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Так как экран определяется отображением $x = x(t_1, t_2) : D \to \Omega$, то отображение касательных пространств определяется дифференциалом[17] вектор-функции $x(t_1, t_2)$,

$$Dx : TD \to T\Omega, \tag{3.48}$$

Всякому элементу $\mathbf{a}_t \in T_tD$ этим отображением ставится в соответствие элемент $\mathbf{a}_x \in T_x\Omega$ по правилу

$$\mathbf{a}_x = \frac{\partial x}{\partial t}\mathbf{a}_t. \tag{3.49}$$

В области параметров D вводятся функции RWG $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$ согласно (3.46), которые ниже обозначаются символом $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2)$. Базисные функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ в на неплоском экране определяются как образы функций RWG при отображении Dx с области D на Ω ,

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x(t)) = \frac{\partial x}{\partial t}\,\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1, t_2),\ x(t) \in \Omega. \tag{3.50}$$

Доказана теорема о полноте системы функций $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$.

Теорема 3.6. *Вектор-функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ на гладком (класса C^∞) незамкнутом ориентируемом параметрически заданном экране Ω удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве $W = W(\overline{\Omega})$.*

В работе приведены примеры приближения вектор-функций на неплоских параметрически заданных экранах Ω предложенными вектор-функциями. Примеры сопровождены графиками компонент заданных гладких касательных сечений на экране Ω и полученных приближений.

Доказана теорема о сходимости метода Галеркина для оператора $\widehat{\mathcal{L}}$, действующего из пространства $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}'$ при некоторых ограничениях на свойства среду и рассеивателей.

Теорема 3.7. *Пусть в $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im}\varepsilon_e > 0, \quad \operatorname{Re}\mu_e > 0,\ \operatorname{Im}\mu_e = 0. \tag{3.51}$$

Пусть в Q тензор относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ таков, что в $x \in \overline{Q}$ существует ограниченный тензор

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{3.52}$$

[17]**Зорич В. А.** Математический анализ. В 2 частях. Часть 2. – Москва : ФАЗИС, 1997.

где $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор. Пусть для $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ в $\overline{Q}$ выполнено хотя бы одно из условий

$$\mathrm{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ \textit{при некотором} } C_1 > 1, \tag{3.53}$$

$$\mathrm{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ \textit{при некотором} } C_2 \neq 0 \tag{3.54}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$. Кроме того, $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$, если $\mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij} = 0$.

Пусть базисные функции $\mathbf{v}_i^0(x)$ и $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ удовлетворяют условию аппроксимации в пространствах $\mathbf{L}_2(Q)$ и $W(\overline{\Omega})$ соответственно, причем Ω – ориентируемая гладкая (класса C^∞) незамкнутая параметрически заданная поверхность.

Тогда метод Галеркина (3.34) является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$: приближенные решения $\mathbf{u}_m$ сходятся к единственному решению $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ уравнения (3.30) и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}_m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{3.55}$$

В **главе 4** проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения векторной задачи дифракции электромагнитной волны на частично экранированном диэлектрическом теле.

Рассматривается ограниченная область Q с гладкой границей ∂Q, расположенная в однородном изотропном пространстве $\mathbb{R}^3$, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого удовлетворяют условиям

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon_e > 0,\ \mathrm{Im}\,\varepsilon_e \geqslant 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu_e > 0,\ \mathrm{Im}\,\mu_e = 0, \tag{4.1}$$

а волновое число $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$, определено выбором ветви квадратного корня так, что выполнены условия

$$\mathrm{Re}\,k_e > 0,\ \mathrm{Im}\,k_e \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Область Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_e и тензор-функцией $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ диэлектрической проницаемости с гладкими компонентами $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$. Для тензора относительной диэлектрической проницаемости $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$ выполнено условие

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1} \in C^\infty(\overline{Q}), \tag{4.3}$$

и одно из условий

$$\mathrm{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_1|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\big) \geqslant C_2|\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 \neq 0 \tag{4.5}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$.

Ω – конечная система попарно непересекающихся идеально проводящих экранов Ω_i $(i = 1, \ldots, n)$, $\Omega = \cup\Omega_i$, $\bar{\Omega} \subset \partial Q$. Край $\partial\Omega$ экрана Ω – гладкая кривая (или система кривых) класса C^∞ без точек самопересечения, $\partial\Omega_\delta$ – трубчатые окрестности края экрана, а $P^+ \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q})$, $P^- \subset Q$ – произвольные области, соответственно внешняя и внутренняя к экрану Ω и такие, что $\Omega \subset \partial P^\pm$; также $\partial Q' := \partial Q \setminus \overline{\Omega}$.

Условие частичного экранирования тела Q подразумевает, что Ω – подмножество гладкой части границы тела,

$$\overline{\Omega} \subset \partial Q, \quad mes(\partial Q \setminus \overline{\Omega}) > 0, \tag{4.6}$$

причем $\partial Q \setminus \overline{\Omega}$ – открытое множество на поверхности ∂Q.

Постановка задачи. В задаче дифракции стороннего электромагнитного поля $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющего уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_e \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_0, \tag{4.7}$$

на системе частично экранированных тел Q требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) + (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$, удовлетворяющее в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_e \mathbf{H}, \tag{4.8}$$

условиям непрерывности касательных компонент

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q'} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q'} = 0 \tag{4.9}$$

на неэкранированной части границы области неоднородности, условию

$$\mathbf{E}_\tau|_\Omega = 0 \tag{4.10}$$

во внутренних точках экрана Ω, условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \tag{4.11}$$

и условиям излучения Сильвера-Мюллера для рассеянного поля

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = o(1/r), & \operatorname{Im} k_e > 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s = o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s = o(1/r), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = O(1/r), & \operatorname{Im} k_e = 0 \end{array} \tag{4.12}$$

при $r \to \infty$. Здесь $r = |x|,\ x \in \mathbb{R}^3$.

Полное поле должно удовлетворять условиям гладкости

$$\begin{gathered} \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(Q) \bigcap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}) \bigcap C(\overline{Q} \setminus \overline{\Omega}) \bigcap C(\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{Q} \cup \overline{\Omega})) \\ \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{P^+} \setminus \partial\Omega_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{P^-} \setminus \partial\Omega_\delta). \end{gathered} \tag{4.13}$$

Определение 4.1. *Решение* $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ *задачи* (4.8)–(4.12), *удовлетворяющее условиям* (4.13), *называется* ***квазиклассическим решением*** *задачи дифракции в дифференциальной формулировке.*

Теорема 4.1. *Пусть свободное от рассеивателей трехмерное пространство характеризуется постоянными значениями проницаемостей* ε_e, μ_e, *удовлетворяющих условиям* (4.1) *и* (4.2). *Диэлектрическая проницаемость в* Q *удовлетворяет одному из условий:*

- $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(x) > 0$ *в* Q, *тензор* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ *удовлетворяет условиям* (4.3),(4.4) *и является симметрическим;*
- $\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(x) \equiv 0$ *в* Q *и* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$.

Тогда если квазиклассическое решение задачи (4.8)–(4.12) *существует, то оно единственно.*

Задача дифракции сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\overline{k}_e}\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{\overline{k}_e}(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy - \\
&\quad - \frac{1}{\overline{k}_e}(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y = \frac{1}{\overline{k}_e}\mathbf{E}_0(x),\ x \in Q, \\
&\Big(- \big(k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\big)\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy - \\
&\quad - \big(k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\big)\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau = \frac{1}{k_e}\mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x \in \Omega.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Функция Грина представлена в виде $G(x,y) = G_0(x,y) + G_1(x,y)$, где $G_0(x,y) = \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}$; определен матричный оператор системы (4.14):

$$
\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{K}}^1 + \widehat{\mathcal{K}}^2. \tag{4.15}
$$

Компоненты операторов в (4.15) определяются согласно системе (4.14):

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{A}}_{11}\mathbf{J}(x) = \frac{1}{\overline{k}_e}\hat{\xi}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{\overline{k}_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy,\ x \in Q, \\
&\widehat{\mathcal{A}}_{12}\mathbf{u}(x) = -\frac{1}{\overline{k}_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_\Omega G_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y,\ x \in Q, \\
&\widehat{\mathcal{A}}_{21}\mathbf{J}(x) = \Big(-\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\Big)_\tau,\ x \in \Omega, \\
&\widehat{\mathcal{A}}_{22}\mathbf{u}(x) = \Big((k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_\Omega G_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau,\ x \in \Omega,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{K}}_{11}^1\mathbf{J}(x) = -\frac{k_e^2}{\overline{k}_e}\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy,\ x\in Q,\\
&\widehat{\mathcal{K}}_{12}^1\mathbf{u}(x) = -\frac{k_e^2}{\overline{k}_e}\int\limits_\Omega G_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y,\ x\in Q,\\
&\widehat{\mathcal{K}}_{21}^1\mathbf{J}(x) = \Big(-k_e\int\limits_Q G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\Big)_\tau,\ x\in\Omega,\\
&\widehat{\mathcal{K}}_{22}^1\mathbf{u}(x) = \mathrm{O},\ x\in\Omega,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{K}}_{11}^2\mathbf{J}(x) = -\frac{1}{\overline{k}_e}(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div})\int\limits_Q G_1(x,y)\mathbf{J}(y)dy,\ x\in Q,\\
&\widehat{\mathcal{K}}_{12}^2\mathbf{u}(x) = -\frac{1}{\overline{k}_e}(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega G_1(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y,\ x\in Q,\\
&\widehat{\mathcal{K}}_{21}^2\mathbf{J}(x) = -\Big(\Big(k_e+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Big)\int\limits_Q G_1(x,y)\mathbf{J}(y)dy\Big)_\tau,\ x\in\Omega,\\
&\widehat{\mathcal{K}}_{22}^2\mathbf{u}(x) = -\Big(\Big(k_e+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\Big)\int\limits_\Omega G_1(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\Big)_\tau,\ x\in\Omega.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ рассматривается в пространствах Соболева на многообразиях с краем, введенных ранее,

$$\widehat{\mathcal{L}}:\mathbf{L}_2(Q)\times W(\overline{\Omega})\to\mathbf{L}_2(Q)\times W'(\Omega). \tag{4.19}$$

Пространство решений $(\mathbf{J},\mathbf{u})^T =: \mathbf{w}$ обозначено через $\mathbf{X}$, а $\mathbf{L}_2(Q)\times W'(\Omega) =: \mathbf{X}'$ – пространство, антидвойственное к $\mathbf{X}$.

В работе получены следующие теоретические результаты.

Теорема 4.2. *Пусть постоянные ε_e, μ_e удовлетворяют условиям* (4.1) *(причем $\operatorname{Im} k_e > 0$), а тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4) *или* (4.5). *Тогда квадратичная форма $\langle\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$ матричного оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ коэрцитивна, то есть найдется константа $\gamma>0$ и такой компактный оператор $\widehat{\mathcal{L}}^c:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$, что для всех $\mathbf{w}\in\mathbf{X}$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{Im}\langle(\widehat{\mathcal{L}}-\widehat{\mathcal{L}}^c)\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{X}} \geqslant \gamma\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}}^2. \tag{4.20}$$

Теорема 4.3. *Пусть постоянные ε_e, μ_e удовлетворяют условиям* (4.1) *(причем $\operatorname{Im} k_e > 0$), а тензор диэлектрической проницаемости удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4), *или* (4.5). *Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ является эллиптическим и фредгольмовым с нулевым индексом.*

Леммма 4.1. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}$, *определенная в ограниченной области* V *с гладкой границей* ∂V *принадлежит классу*

$$\mathbf{L}_2(V, \operatorname{div}) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(V) : \operatorname{div} \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(V)\},$$

а поверхность S *класса* C^∞ *с заданным полем нормалей* $\mathbf{n}$ *такова, что* $\overline{S} \subset V$. *Тогда на* S *выполняется равенство*

$$[\mathbf{f}_\mathbf{n}]|_S = 0. \tag{4.21}$$

Теорема 4.4. *Если система* (4.14) *имеет решение* $(\mathbf{E}, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$ *при* $\mathbf{E}_0 \equiv 0$, *то* $\mathbf{E} \equiv 0$ *и* $\mathbf{u} \equiv 0$.

Теорема 4.5. *Пусть постоянные* ε_e, μ_e *удовлетворяют условиям* (4.1), *причем* $\operatorname{Im} k_e > 0$. *Пусть тензор диэлектрической проницаемости* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$ *удовлетворяет условиям* (4.3)–(4.5). *Тогда оператор*

$$\hat{\mathcal{L}} : \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega}) \to \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega)$$

является непрерывно обратимым.

Формулировка метода Галеркина в задаче дифракции на частично экранированном теле аналогична формулировке метода в задаче дифракции на непересекающихся телах и экранах. Рассматривается уравнение

$$\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U} = \mathbf{f},\ \mathbf{U} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})^T, \tag{4.22}$$

с правой частью $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$ и матричным оператором

$$\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'. \tag{4.23}$$

Приближенные решения уравнения (4.22) обозначены символом $\mathbf{U}_m = (\mathbf{J}_{m_0}, \mathbf{u}_{m_1})^T$; компоненты решения $\mathbf{U}_m$ представляются в виде линейных комбинаций базисных функций

$$\mathbf{J}_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^0 \mathbf{v}^{(0)}(x), \quad \mathbf{u}_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \mathbf{v}^{(1)}(x), \tag{4.24}$$

или иначе,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{v}_k(x), \quad c_k = c_k^0, \quad & \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}^{(0)}(x), 0)^T \text{ при } k \le m_0, \\ c_k = c_{k-m_0}^1, & \mathbf{v}_k = (0, \mathbf{v}^{(1)}(x))^T \text{ при } k > m_0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Неизвестные коэффициенты находятся из СЛАУ

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}\mathbf{U}_m, \mathbf{v}_k \rangle_\mathbf{X} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i \rangle_\mathbf{X} \quad \forall\, \mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_m. \tag{4.26}$$

Здесь $\mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}$ – конечномерные подпространства,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_{m_0}^1 \times \mathbf{X}_{m_1}^2, \quad \mathbf{X}_{m_0}^1 &= span\{\mathbf{v}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{v}_{m_0}^{(0)}\} \subset \mathbf{L}_2(Q), \\ \mathbf{X}_{m_1}^2 &= span\{\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{m_1}^{(1)}\} \subset W(\overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{X}}$ в (4.26) обозначена полуторалинейная форма антидвойственного спаривания пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$.

В работе сформулирована и доказана теорема о сходимости метода Галеркина для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$.

Теорема 4.6. *Пусть в* $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ *выполнены условия*

$$\operatorname{Re} \varepsilon_e > 0,\ \operatorname{Im} \varepsilon_e > 0, \quad \operatorname{Re} \mu_e > 0,\ \operatorname{Im} \mu_e = 0. \tag{4.28}$$

Пусть в Q *тензор относительной диэлектрической проницаемости* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *таков, что в* $x \in \overline{Q}$ *существует ограниченный тензор*

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \widehat{\mathbf{I}})^{-1}, \tag{4.29}$$

где $\widehat{\mathbf{I}}$ *– единичный тензор. Пусть для* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)$ *в* $\overline{Q}$ *выполнены условия*

$$\operatorname{Re}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_1 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1, \tag{4.30}$$

$$\operatorname{Im}\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\big) \geqslant C_2 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 \neq 0 \tag{4.31}$$

для всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$, *и* $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\widehat{\mathbf{I}}$.

Пусть для любых $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ *в области* Q *и на экране* Ω *определены произвольным образом базисные функции* $\mathbf{v}_{i_1}^{(0)}$ *и* $\mathbf{v}_{i_2}^{(1)}$, *удовлетворяющие условию аппроксимации* (1.17) *в пространствах* $\mathbf{L}_2(Q)$ *и* $W(\overline{\Omega})$ *соответственно, причем* Ω *– ориентируемая гладкая (класса* C^∞*) незамкнутая параметрически заданная поверхность.*

Тогда метод Галеркина является сходящимся для оператора $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$: *приближенные решения* $\mathbf{U}_m$ *сходятся к единственному решению* $\mathbf{U} \in \mathbf{X}$ *уравнения* (4.22) *и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости*

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_m\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_m} \|\mathbf{U} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{4.32}$$

В работе исследована проблема согласованности расчетных сеток на рассеивателях различной размерности при решении задач дифракции на частично экранированных телах. В силу результата о сходимости метода Галеркина для эффективной реализации численного метода достаточно потребовать, чтобы базисные функции удовлетворяли условию аппроксимации. Если выполнено это условие, то согласования сеток на Q и $\Omega \subset \partial Q$ не требуется. Это позволяет рассматривать расчетные сетки и определять базисные функции только из соображений удобства использования на рассеивателях той или иной формы. Кроме того, допускается произвольный и независимый выбор количественных параметров сеток, что существенно упрощает программную реализацию метода Галеркина, в том числе и для проведения расетов на высокопроизводительных многопроцессорных системах. В качестве базисных функций предлагается использовать функции, описанные в **главе 3**.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

[1] **Валовик Д. В.** Существование и единственность решения задачи дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся тел и экранов / Д. В. Валовик, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 89–97.

[2] **Деревянчук, Е. Д.** Метод галеркина решения скалярной задачи рассеяния препятствием сложной формы / Е. Д. Деревянчук, Е. Ю. Смолькин, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 57–68.

[3] **Максимова, М. А.** Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел экранов / М. А. Максимова, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 114–133.

[4] **Медведик, М. Ю.** Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1319–1331.

[5] **Смирнов, Ю. Г.** Задача дифракции акустических волн на системе тел, экранов и антенн / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, А. А. Цупак, М А. Москалева // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 1. – С. 109–118.

[6] **Смирнов, Ю. Г.** Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 2004. – Т. 44, № 12. – С. 2264–2274.

[7] **Смирнов, Ю. Г.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на системе, состоящей из «мягкого» и «жесткого» экранов и неоднородного тела / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9 .– С. 1164–1174.

[8] **Смирнов, Ю. Г.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на частично экранированном неоднородном теле / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 9. – С. 1234–1244.

[9] **Смирнов, Ю. Г.** О единственности решения обратной задачи дифракции на неоднородном теле с кусочно-гельдеровым показателем преломления в специальном классе функций / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 485, № 5. – С. 545–547.

[10] **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле без потерь / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 4. – С. 702–709.

[11] **Смирнов, Ю. Г.** О фредгольмовости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объемном частично экранированном теле / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 9. – С. 1242–1251.

[12] **Смирнов, Ю. Г.** Существование и единственность решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче дифракции / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 9. – С. 1190–1197.

[13] **Цупак, А. А.** О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1. – С. 30–38.

[14] **Цупак, А. А.** О фредгольмовости интегро-дифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4. – С. 3–11.

[15] **Цупак, А. А.** Проекционный метод решения скалярной задачи дифракции на неплоском жестком экране / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 3–12. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-1.

[16] **Цупак, А. А.** Решение задачи дифракции акустической волны на системе жестких экранов методом Галеркина / А. А. Цупак, Н. В. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С.54–66.

[17] **Цупак, А. А.** Существование и единственность решения задачи дифракции акустической волны на объемном неоднородном теле, содержащем мягкий экран / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3. – С. 61–71.

[18] **Цупак, А. А.** Существование и единственность решения скалярной задачи дифракции на объемном неоднородном теле с кусочно-гладким показателем преломления / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3 (47). – С. 17–26.

[19] **Цупак, А. А.** Численный метод и параллельный алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на неплоском идеально проводящем экране / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 32–41. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-3.

[20] **Medvedik, M. Yu.** Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – Vol. 28, № 10, – P. 1474–1492. – DOI 10.1080/17415977.2020.1727466.

[21] **Medvedik, M. Y.** The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements / M. Y. Medvedik, Y. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 427–447. – DOI 10.1080/17415977.2019.1597872.

[22] **Medvedik, M. Yu.** Vector problem of electromagnetic wave diffraction by a system of inhomogeneous volume bodies, thin screens, and wire antennas / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik, A. A. Tsupak // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2016. – Vol. 30, № 8. – P. 1086–1100. – DOI 10.1080/09205071.2016.1172990.

[23] **Smirnov, Yu. G.** Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 8. – P. 1326–1341. – DOI 10.1080/09205071.2016.1172990.

[24] **Smirnov, Yu. G.** Integrodifferential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and Inhomogeneous Bodies / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Advances in Mathematical Physics, 2015. – Vol. 2015, Article ID 945965, 6 pages. – DOI 10.1155/2015/945965.

[25] **Smirnov, Yu. G.** Investigation Of Electromagnetic Wave Diffraction From An Inhomogeneous Partially Shielded Solid / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Applicable Analysis. – 2018. – Vol. 97, № 11. – P. 1881–1895. – DOI 10.1080/00036811.2017.1343467.

[26] **Smirnov, Yu. G.** On the volume singular integro-differential equation for the electromagnetic diffraction problem / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak, D. V. Valovik // Applicable Analysis. – 2017. – Vol. 96, № 2. – P. 173–189. – DOI 10.1080/00036811.2015.1115839.

Монографии:

[27] **Смирнов, Ю. Г.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : КноРус, 2016. – 224 p.

[28] **Smirnov, Yu. G.** Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak. – Moscow : Ru-Science, 2016. – 214 p.

Публикации, индексируемые в WoS или Scopus:

[29] **Medvedik, M. Yu.** Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 38th. Ser. "Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics - PIERS 2017". – 2018. – P. 83–92. – DOI 10.1007/978-3-319-94060-1_7.

[30] **Medvedik, M. Yu.** Electromagnetic wave diffraction by a system of non-intersecting obstacles of various dimensions / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, E. Yu. Smolkin, A. A. Tsupak // Proceedings of the 2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2015. – P. 1568–1571. – DOI: 10.1109/ICEAA.2015.7297389.

[31] **Medvedik, M. Yu.** Projection Method for Solving Scalar Problem of Diffraction of a Plane Wave on a System of Two- and Three-dimensional Obstacles / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak, D. V. Valovik // PIERS 2014 Guangzhou Proceedings, 2014. – P. 1986–1990.

[32] **Moskaleva, M. A.** Electromagnetic Wave Diffraction by a System Of Arbitrarily Located 1D, 2D, And 3D Scatterers / M. A. Moskaleva, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Proceedings of PIERS 2017, St Petersburg, Russia, May 22–25, 2017. – P. 913–919. – DOI 10.1109/PIERS.2017.8261874.

[33] **Smirnov, Y.** Ellipticity of the electric field integral equation in a problem of diffraction by a partially shielded body / Y. Smirnov, A. Tsupak, D. Valovik // 2016 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, EMTS 2016. – P. 23–26. – DOI 10.1109/URSI-EMTS.2016.7571301.

[34] **Smirnov, Yu. G.** Scalar problem of diffraction of a plane wave from a system of two- and three-dimensional scatterers / Yu. G. Smirnov, E. Yu. Smolkin, A. A. Tsupak // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (DD 2015). – 2015. – P. 313–317. – DOI : 10.1109/DD.2015.7354883.

[35] **Smirnov, Y.** Volume singular integro-differential equations in the electromagnetic diffraction problem / Y. Smirnov, A. Tsupak, D. Valovik // 2016 URSI Asia-Pacific Radio Science Conference, URSI AP-RASC, 2016. – P. 192-195. – DOI : 10.1109/URSIAP-RASC.2016.7601244.

[36] **Smolkin, E.** Galerkin method for solving scalar problems of diffraction by a partially shielded inhomogeneous body / E. Smolkin, A. A. Tsupak // 2016 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2016. – P. 360-363, DOI 10.1109/ICEAA.2016.7731398.

Прочие публикации:

[37] **Смирнов, Ю. Г.** Задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов / Ю. Г. Смирнов, А. А. Смирнов // В сборнике: Современные методы теории краевых задач материалы международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина. Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Воронежский государственный университет; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН; Вычислительный центр имени А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН. – Москва, 2018. – С. 213.

[38] **Цупак, А. А.** Существование и единственность решения задачи дифракции акустической волны на частично экранированном теле / А. А. Цупак // Тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящчнной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. – Москва : Изд-во РУДН, 2018. – С. 159–160.

[39] **Цупак, А. А.** Численное решение задачи дифракции акустической волны на объемном теле и непересекающемся с ним экране / А. А. Цупак, А. Н. Черенков // Сборник статей VIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (под редакцией И. В. Бойкова.). – Пенза, 2014. – С. 90–95.

[40] **Цупак, А. А.** Цупак А.А. Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитных волн на системе частично экранированных тел / А. А. Цупак // В книге: Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения (тезисы докладов Международной научной конференции) под ред. Ю.Г. Смирнова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. – С. 73–75.

[41] **Medvedik, M.** Parallel Computational Algorithm for Solving Problems of Diffraction by Plane Screen / M. Medvedik, A. Tsupak // PIERS Abstracts, Moscow, Russia, August 18–21, 2009. – P. 996.

[42] **Mironov, D.** Galerkin Method and Parallel Computational Algorithm for Solving Problems of Diffraction by Dielectric Bodies in Free Space / D. Mironov, A. Tsupak // PIERS Abstracts, Moscow, Russia, August 18–21, 2009. – P. 995.

[43] **Smirnov, Yu. G.** Analysis of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in Several Domains Using the Volume Singular Integral Equation / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Proceedings of PIERS 2007, Prague, Czech Republic, August 27-30, 2007. – P. 142.

[44] **Tsupak, A. A.** On The Problem Of Diffraction By An Inhomogeneous Solid Partially Covered By Soft And Hard Screens / A. A. Tsupak, Yu. G. Smirnov // Contemporary Problems Of Mathematics And Mechanics Proceedings Of The International Conference Dedicated To The 80Th Anniversary Of Academician V. A. Sadovnichy. – Moscow, 2019. – P. 213–215.

[45] **Tsupak, A. A.** Galerkin Method For Solving Hypersingular Integral Equation in the Problem of Acoustic Scattering From a Non-Planar Smooth Screen / A. A. Tsupak // В сборнике: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции под ред. проф. В.П. Гергеля. – Нижний Новгород, 2020. – С. 22–26.