

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 01.03.01 «Математика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

«ОГИБАЮЩИЕ»

Работа завершена: "___" _____ 2015г.

Студент группы 05-103 Бикмуллина Альсина Рахимулловна _____

Работа допущена к защите: "___" _____ 2015г.

Научный руководитель:

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Шурыгин Вадим Васильевич _____

Заведующий кафедрой:

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Шурыгин Вадим Васильевич _____

Рецензент:

Дата, время защиты: _____ Оценка защиты: _____

Казань 2015

Содержание

Введение	2
1 Огибающая семейства плоских кривых	4
2 Эволюта плоской кривой как огибающая нормалей	11
3 Огибающая семейства соприкасающихся окружностей кривой	15
4 Предел пересечения соседних кривых семейства	17
5 Параллели плоских кривых, их ортотомики и каустики	23
Приложение	29
Список литературы	34

Введение

Если на плоскости задано семейство кривых, дифференцируемо зависящее от одного вещественного параметра, то огибающей этого семейства называется кривая, которая касается каждой кривой семейства. Семейства кривых и прямых линий естественно появляются при изучении геометрии кривых. Примерами могут служить семейства нормалей кривой или семейство лучей, возникающее при отражении от кривой пучка прямых.

Целью работы является изучение свойств огибающих и некоторых других множеств точек, естественно связанных с огибающими и применение теории огибающих в некоторых задачах, возникающих в дифференциальной геометрии кривых на плоскости, а также построение огибающих и иллюстрация полученных результатов с помощью пакета программ Mathematica.

Основным теоретическим источником при написании работы являлась книга Д. Бруса и П. Джиблина «Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей.» М.: Мир, 1988.

В первом параграфе вводится понятие огибающей и дискриминантного множества \mathcal{D} семейства плоских кривых. С помощью пакета Mathematica были построены огибающие для различных семейств.

§2 посвящен изучению эволюты кривой как огибающей семейства ее нормалей. В этом параграфе изучается также связь геометрии кривой и геометрии ее эволюты, осуществляется построение эволют некоторых кривых.

В §3 изучается дискриминантное множество семейства соприкасающихся окружностей заданной кривой. Стационарными кривыми этого семейства, входящими в дискриминантное множество, оказываются соприкасающиеся окружности в вершинах данной кривой.

В четвертом параграфе рассматривается подход к определению оги-

бающей как пределу пересечения соседних кривых семейства. Это множество \mathcal{E}_1 , как и огибающая, является частью дискриминантного множества. Показано, что для семейства соприкасающихся окружностей множество \mathcal{E}_1 является пустым множеством.

Заключительный пятый параграф посвящен рассмотрению примеров огибающих: параллельных кривых, ортотомических кривых и каустик.

В приложении приводятся программы в пакете Wolfram Mathematica, с помощью которых осуществляется построение огибающих изучаемых семейств кривых.

1 Огибающая семейства плоских кривых

Параметризованной кривой на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 называется гладкое отображение

$$\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где I — некоторый открытый интервал вещественной прямой \mathbb{R} .

Вектор

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left\{ \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt} \right\} = \{\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)\} \quad (2)$$

называется *касательным вектором* или *вектором скорости* кривой (1) в точке t или в точке $\gamma(t)$.

Параметризованная кривая (1) называется *регулярной*, если ни в одной точке $t \in I$ касательный вектор не обращается в нуль, то есть $(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 \neq 0$ при $t \in I$.

Кривой на плоскости \mathbb{R}^2 называют множество точек на \mathbb{R}^2 , которое локально (то есть в окрестности каждой своей точки) может быть задано как образ регулярной параметризованной кривой.

Будем считать, что у кривой могут иметься точки, в которых вышеуказанное требование нарушается. Говоря точнее, в этом случае будем говорить о кривых с особыми точками.

Кривая на плоскости может быть задана как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x_1, x_2) = 0$. При этом вектор

$$\{\partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2\}$$

является нормальным вектором кривой $F(x_1, x_2) = 0$.

Действительно, пусть $\alpha(t)$ — это параметризация кривой, заданной уравнением $F(x_1, x_2) = 0$, в окрестности рассматриваемой точки. Тогда

$$F(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \equiv 0 \quad \implies \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{d\alpha_2}{dt} = 0$$

$$\iff \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} \perp \left\{ \frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt} \right\}.$$

Последнее равенство означает, что вектор $N = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\}$ перпендикулярен касательному вектору $T = \left\{ \frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt} \right\}$ параметризованной кривой α .

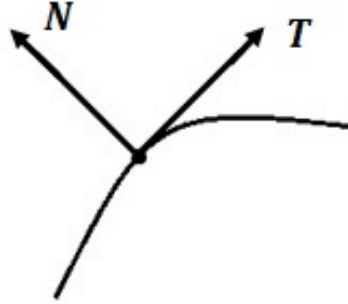


Рис. 1. Касательная и нормаль кривой, заданной неявным уравнением.

Пусть теперь даны кривая $F(x_1, x_2) = 0$ и параметризованная кривая $\gamma(t)$, и пусть $\gamma(t_0)$ — общая точка рассматриваемых кривых, то есть выполняется

$$F(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) = 0.$$

Выясним, при каких условиях эти две кривые касаются в точке $\gamma(t_0)$. Используя параметризацию $\alpha(t)$ кривой $F(x_1, x_2) = 0$, условие касания можно представить в виде коллинеарности векторов

$$\left\{ \frac{d\gamma_1}{dt}(t_0), \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0) \right\} \parallel \left\{ \frac{d\alpha_1}{dt}(t_0), \frac{d\alpha_2}{dt}(t_0) \right\}.$$

Поскольку

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} \perp \left\{ \frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt} \right\},$$

то условие касания $F(x_1, x_2) = 0$ и $\gamma(t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{d\gamma_2}{dt} = 0. \quad (3)$$

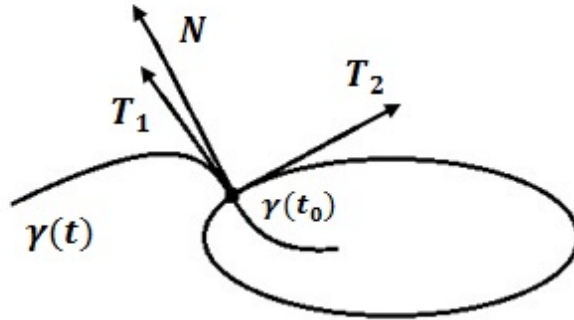


Рис. 2. Общая точка двух кривых.

Если семейство кривых C_t , $t \in I$, допускает существование регулярной кривой $\gamma(t)$, которая в каждой своей точке t касается кривой семейства C_t , то такую кривую $\gamma(t)$ называют *огibaющей* данного семейства кривых.

Точка касания огibaющей и кривой семейства называется характеристической точкой кривой семейства.

Предположим, что семейство кривых, определенное уравнением

$$F(x_1, x_2, t) = 0, \quad (4)$$

левая часть которого является гладкой функцией трех переменных, имеет огibaющую $\gamma(t)$. Так как всякая точка огibaющей принадлежит соответствующей кривой семейства, то

$$F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \equiv 0, \quad t \in I. \quad (5)$$

Дифференцируя соотношение (5) по t , получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Сумму первых двух слагаемых в левой части получившегося соотноше-

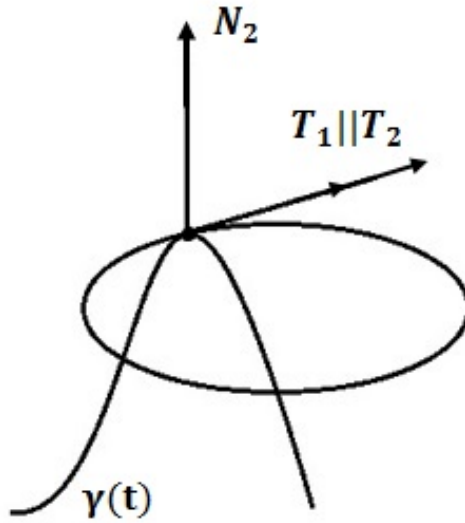


Рис. 3. Касание двух кривых.

ния (6) можно рассматривать как скалярное произведение вектора

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\},$$

являющегося нормальным вектором кривой C_t семейства (4), и касательного вектора вектора

$$\left\{ \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt} \right\}$$

огнивающей $\gamma(t)$. Поскольку кривые касаются, указанные векторы должны быть ортогональны:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} \perp \left\{ \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt} \right\},$$

и их произведение поэтому равно нулю (3):

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d\gamma_2}{dt} = 0.$$

Учитывая это, из равенства (6) получаем соотношение

$$\partial F / \partial t(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0, \tag{7}$$

справедливое при всяком значении t .

Таким образом, огибающую следует искать, решая совместно уравнения

$$F(x_1, x_2, t) = 0, \quad \partial F / \partial t(x_1, x_2, t) = 0$$

и, исключая t , представлять решение этого уравнения в виде (1):

$$x_1 = \gamma_1(t), \quad x_2 = \gamma_2(t).$$

Определение. Дискриминантным множеством семейства (4) называется следующее множество

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in \mathbb{R}, \text{ такое что } F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\}.$$

Если $x \in \mathcal{D}$ и $F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$, тогда t соответствует x . Таким образом, данному x соответствует по меньшей мере одно значение t .

Разрешая эти уравнения, мы определим x и y в функции параметра t и найдем дискриминантную кривую данного семейства. Огибающая, если она существует, должна входить в состав дискриминантной кривой, которая может иметь несколько ветвей (рис. 4, рис. 5).

Примеры.

1. Пусть семейство прямых на плоскости задано уравнением $F(t, x_1, x_2) = 0$, где

$$F(t, x) = x_1 \cos t + x_2 \sin t - \cos t \sin t, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

Поставим задачу найти огибающую этого семейства.

Решение.

Имеем:

$$\begin{cases} F(t, x_1, x_2) = x_1 \cos t + x_2 \sin t - \cos t \sin t, \\ F'_t(t, x_1, x_2) = -x_1 \sin t + x_2 \cos t - \cos 2t. \end{cases}$$

Тогда огибающая находится из следующих уравнений:

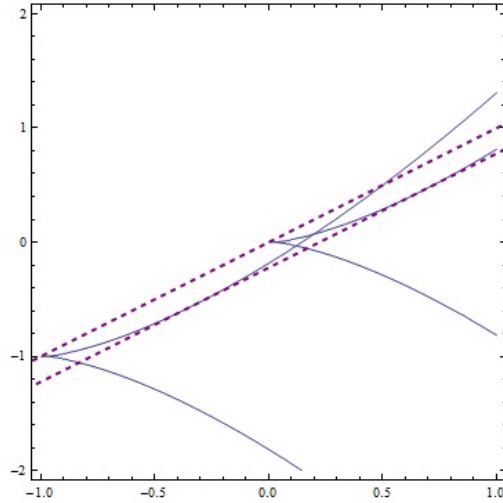


Рис. 4. Дискриминантная кривая и огибающая семейства полукубических парабол, заданная уравнением

$$3(x_2 - t)^2 - 2(x_1 - t)^3 = 0.$$

$$\begin{cases} x_1 \cos t + x_2 \sin t - \cos t \sin t = 0, \\ -x_1 \sin t + x_2 \cos t - \cos 2t = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \cos t + x_2 \sin t = \cos t \sin t, \\ -x_1 \sin t + x_2 \cos t = \cos 2t. \end{cases} \quad (9)$$

Используя метод Крамера, решаем систему линейных уравнений (9). Вычисляем определители. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \cos t \sin t & \sin t \\ \cos 2t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t - \sin t \cos 2t \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos t & \cos t \sin t \\ -\sin t & \cos 2t \end{vmatrix} = \cos 2t \cos t + \sin^2 t \cos t \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие уравнения огибающей:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos^2 t - \sin t \cos 2t, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \cos 2t \cos t + \sin^2 t \cos t.$$

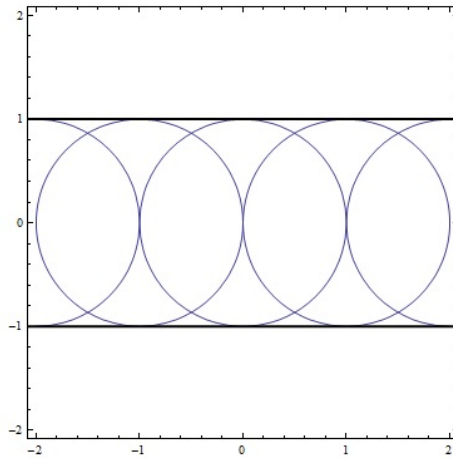


Рис. 5. Огибающая семейства окружностей, заданная уравнением

$$(x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Используя пакет Wolfram Mathematica, мы можем построить огибающую этого семейства (рис. 6).

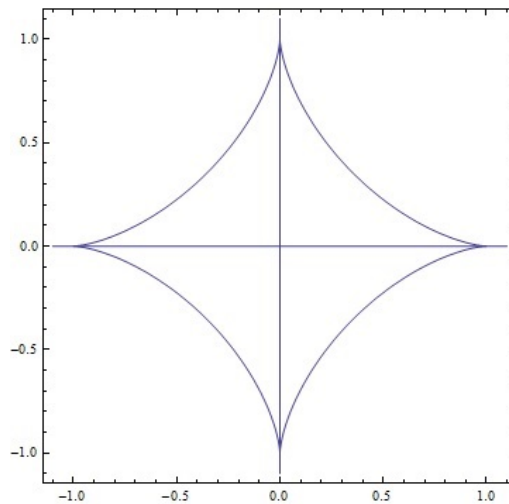


Рис. 6. Огибающая семейства прямых (8).

2. Пусть $F(t, x_1, x_2) = 0$, где

$$F(t, x) = x_1(\sin 2t - \sin t) + x_2(\cos t - \cos 2t) - \sin t, 0 < t < 2\pi. \quad (10)$$

Найти огибающую этого семейства.

Решение.

$$\begin{cases} F(t, x_1, x_2) = x_1(\sin 2t - \sin t) + x_2(\cos t - \cos 2t) - \sin t, \\ F'_t(t, x_1, x_2) = x_1(2 \cos 2t - \cos t) + x_2(-\sin t + 2 \sin 2t) - \cos t. \end{cases}$$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений для нахождения огибающей:

$$\begin{cases} x_1(\sin 2t - \sin t) + x_2(\cos t - \cos 2t) - \sin t = 0, \\ x_1(2 \cos 2t - \cos t) + x_2(-\sin t + 2 \sin 2t) - \cos t = 0. \end{cases} \quad (11)$$

С помощью пакета Wolfram Mathematica находим следующие уравнения огибающей семейства кривых:

$$x_1 = \frac{-\cos t \cos 2t - 2 \sin t \sin 2t}{-3 \cos t \cos 2t + 2 \cos^2 2t - 3 \sin t \sin 2t + 2 \sin^2 2t},$$

$$x_2 = \frac{2 \cos 2t \sin t - \cos t \sin 2t}{-3 \cos t \cos 2t + 2 \cos^2 2t - 3 \sin t \sin 2t + 2 \sin^2 2t}.$$

На рис. 7 приведено изображение этой огибающей, построенное с помощью пакета Wolfram Mathematica.

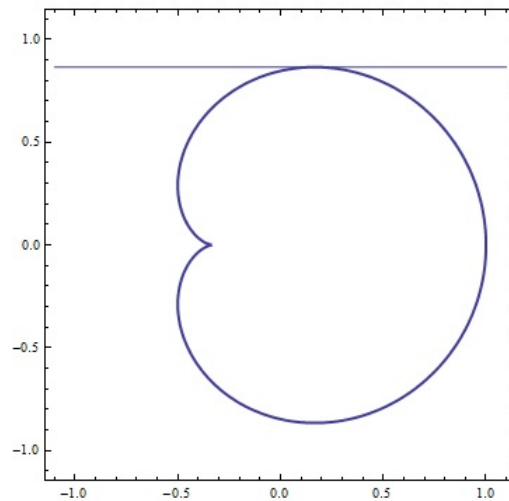


Рис. 7. Огибающая семейства (10).

2 Эволюта плоской кривой как огибающая нормалей

Для кривой γ рассмотрим множество центров кривизны. Это множе-

ство образует кривую

$$\varepsilon(t) = \gamma(t) + \frac{N(t)}{\varkappa(t)}, \quad (12)$$

называемую *эволютой* кривой γ [1].

Эволюта ε состоит из центров соприкасающихся окружностей.

В координатах уравнение (12) принимает вид

$$X = x(t) - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (13)$$

$$Y = y(t) + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (14)$$

Покажем, что эволюта кривой γ является огибающей семейства нормалей этой кривой.

Для этого запишем уравнение семейства нормалей

$$x'(X - x(t)) + y'(Y - y(t)) = 0.$$

Далее продифференцируем это уравнение по t :

$$x''(X - x(t)) + y''(Y - y(t)) = (x')^2 + (y')^2$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x'(X - x(t)) + y'(Y - y(t)) = 0, \\ x''(X - x(t)) + y''(Y - y(t)) = (x')^2 + (y')^2. \end{cases}$$

Из этой системы найдем X и Y методом Крамера. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y'$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y' \\ (x')^2 + (y')^2 & y'' \end{vmatrix} = -y'((x')^2 + (y')^2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x' & 0 \\ x'' & (x')^2 + (y')^2 \end{vmatrix} = x''((x')^2 + (y')^2)$$

Откуда

$$X - x(t) = \frac{-y'((x')^2 + (y')^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y - y(t) = \frac{x'((x')^2 + (y')^2)}{x'y'' - x''y'},$$

что совпадает с уравнениями эволюты (13) и (14).

Эвольвентой кривой $\alpha(t)$ называется ортогональная траектория семейства касательных прямых кривой $\alpha(t)$, то есть кривая, нормаль которой в каждой точке является касательной к $\alpha(t)$.

Из этого определения следует, что любая кривая α является эвольвентой по отношению к своей эволюте.

Пусть теперь кривая $\varepsilon(t)$ является эволютой кривой $\gamma(t)$, и пусть s — натуральный параметр на эволюте. Будем предполагать в последующих рассуждениях, что кривая ε задана уравнением $\varepsilon(s)$ и поставим задачу найти эвольвенту кривой $\varepsilon(s)$. При этом $\varepsilon'(s) = T(s)$ — это единичный касательный вектор к кривой $\varepsilon(s)$ и $T'(s) = \kappa(s)N(s)$, где $\kappa(s)$ — кривизна кривой $\varepsilon(s)$, а $N(s)$ — единичный вектор главной нормали, $N \perp T$ [1], [2].

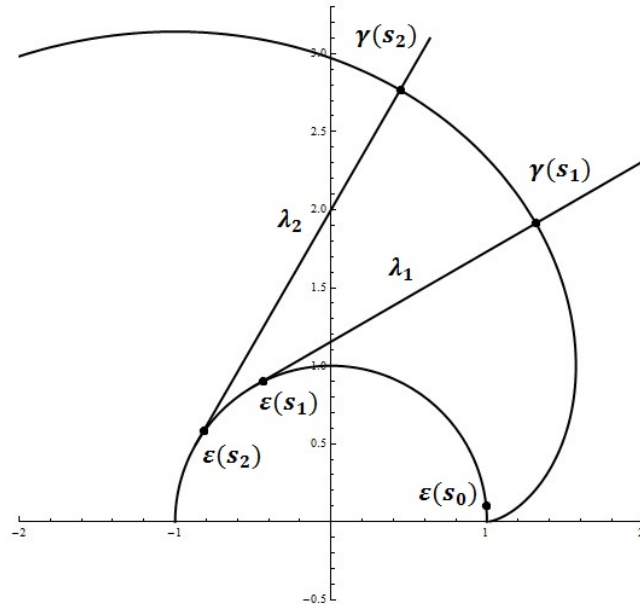


Рис. 8.

Пусть $\tilde{\gamma}(s)$ — точка на эвольвенте, соответствующая точке $\varepsilon(s)$. Таким образом в качестве параметра на эвольвенте будем рассматривать

длину дуги эволюты. Для вывода уравнения эвольвенты $\tilde{\gamma}(s)$ запишем ее уравнение в следующем виде:

$$\tilde{\gamma}(s) = \varepsilon(s) + \lambda T(s), \quad (15)$$

где $\lambda = \lambda(s)$ — неизвестная функция. Поскольку $\tilde{\gamma}(s)$ — ортогональная траектория касательных, наша задача состоит в том, чтобы найти такую функцию λ , чтобы выполнялось

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \perp T(s). \quad (16)$$

Продифференцируем (15) для нахождения касательного вектора к $\tilde{\gamma}$. В результате получаем:

$$\gamma'(s) = \varepsilon'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s). \quad (17)$$

Из уравнения (16) следует, что $\gamma'(s)T(s) = 0$.

Поскольку $T' \perp T$ (действительно, из $T \cdot T = 1$ следует $2T \cdot T' = 0$), то умножая (17) скалярно на T , получим

$$0 = 1 + \lambda'(s). \quad (18)$$

Решая дифференциальное уравнение (18), находим λ :

$$\lambda' = -1 \quad \implies \quad \lambda = -s + s_0,$$

где s_0 — постоянная интегрирования, представляющая собой значение параметра s , соответствующее некоторой точке $\varepsilon(s_0)$ кривой $\varepsilon(s)$.

Подставляя найденную функцию $\lambda(s)$ в уравнение (15), получаем уравнение произвольной эвольвенты кривой ε , которая является эволютой исходной кривой γ :

$$\tilde{\gamma}(s) = \varepsilon(s) + (-s + s_0)T(s).$$

В частности, и уравнение кривой γ имеет такой же вид

$$\gamma(s) = \varepsilon(s) + (-s + s_1)T(s) \quad (19)$$

для некоторого s_1 . Из уравнения (19) следует, что модуль разности $\gamma(s) = \varepsilon(s)$ равен длине дуги эволюты, отсчитанной от точки $\varepsilon(s_1)$. Отсюда получаем следующее предложение.

Предложение. Разность длин двух нормалей кривой γ , измеряемых от точки кривой $\gamma(s)$ до ее эволюты $\varepsilon(s)$, взятых для двух различных значений параметра $s = s_1$ и $s = s_2$, равно модулю разности $|s_2 - s_1|$, то есть расстоянию между точками $\varepsilon(s_1)$ и $\varepsilon(s_2)$ вдоль эволюты.

3 Огибающая семейства соприкасающихся окружностей кривой

Соприкасающейся окружностью кривой $\gamma(t)$ в точке $\gamma(t_0)$ (или окружностью кривизны) называется окружность, проходящая через эту точку и имеющая не менее чем второй порядок касания с кривой $\gamma(t)$ в данной точке.

Соприкасающаяся окружность существует в каждой точке $\gamma(t_0)$ кривой, в которой кривизна отлична от нуля [1], [4]. Центр соприкасающейся окружности лежит на главной нормали кривой. Радиус соприкасающейся окружности равен $\frac{1}{\varkappa(t)}$, где $\varkappa(t)$ — кривизна кривой в точке, поэтому центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны*, а ее радиус — *радиусом кривизны* кривой (рис. 9).

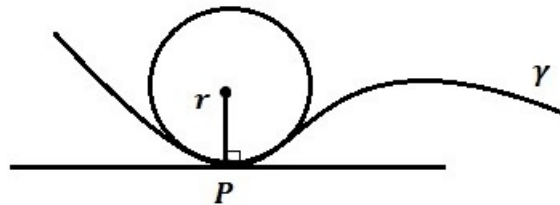


Рис. 9. Соприкасающаяся окружность.

В этом параграфе рассматривается семейство F соприкасающихся окружностей кривой γ и находится дискриминантная кривая \mathcal{D}_F этого семейства.

Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кривая единичной скорости, кривизна которой не обращается в нуль.

Центр соприкасающейся окружности кривой γ в точке $\gamma(s)$ расположен в точке $\gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$, ее радиус равен $\frac{1}{\kappa(s)}$.

Поэтому уравнение семейства соприкасающихся окружностей имеет вид

$$\left(\sigma - \gamma(s) - \frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right)^2 - \frac{1}{\kappa(s)^2} = 0, \quad (20)$$

где s — параметр семейства, а σ — произвольная точка плоскости с координатами x и y . Для нахождения дискриминантной кривой продифференцируем по s уравнение (20). Имеем:

$$2 \left(\sigma - \gamma(s) - \frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right) \times \left(-\gamma'(s) - \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' N(s) - \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) N'(s)\right) - \left(\frac{1}{\kappa(s)^2}\right)' = 0 \quad (21)$$

Применяя формулы Серре-Френе

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T,$$

приведем уравнение (21) к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\left(\sigma - \gamma(s) - \frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right) \left(-T(s) + T(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}N(s)\right) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^3} = 0 \\ \iff &\left(\sigma - \gamma(s) - \frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right) \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}N(s)\right) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^3} = 0. \end{aligned}$$

Вынесем κ' за скобки и получим:

$$\kappa'(s) \left[\left(\sigma - \gamma(s) - \frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right) \cdot \frac{N(s)}{\kappa(s)^2} + \frac{1}{\kappa(s)^3} \right] = 0.$$

Учитывая, что $N^2 = 1$, получим:

$$\varkappa'(s)(\sigma - \gamma(s)) \frac{N(s)}{\varkappa(s)^2} = 0. \quad (22)$$

Подставляя $\sigma(s) = \gamma(s)$ в уравнение (22), убеждаемся, что кривая $\gamma(s)$ входит в дискриминантное множество.

Если в некоторой точке s_0 выполняется $\varkappa'(s_0) = 0$, то уравнение (22) обращается в тождество. Это означает, что соприкасающаяся окружность кривой $\gamma(s)$ в точке $s = s_0$ входит целиком в дискриминантное множество.

Если $\varkappa'(s_0) = 0$, а $\varkappa(s_0) \neq 0$, то точка $\gamma(s_0)$ является вершиной кривой γ [1]. Таким образом, дискриминантное множество содержит соприкасающиеся окружности в вершинах кривой γ (рис. 10).

В общем случае, кривые семейства F_t , соответствующие значениям t_0 при которых $F'_t(t_0) \equiv 0$, называются стационарными кривыми семейства [4].

Предложение. Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая, кривизна которой не обращается в нуль. Тогда дискриминантное множество семейства соприкасающихся окружностей кривой γ состоит из самой кривой (образа кривой) и окружностей семейства, соответствующих вершинам кривой γ .

4 Предел пересечения соседних кривых семейства

В книге [1] приводится следующее альтернативное определение огибающей.

Определение. Огибающая \mathcal{E}_1 семейства кривых C_t — это предел пересечения соседних кривых C_t .

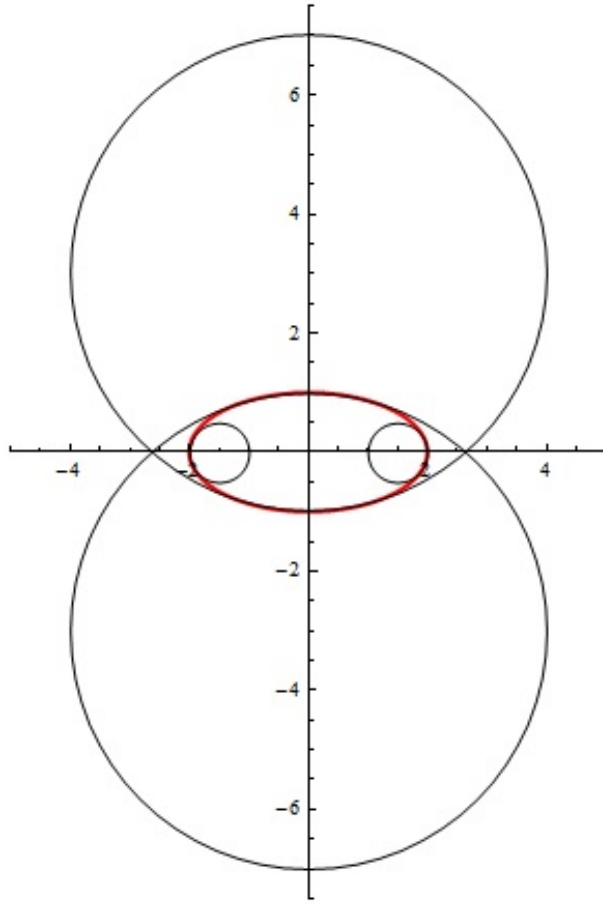


Рис. 10. Соприкасающиеся окружности, которые берутся в вершинах.

Пусть $\mathcal{E}_1 \subset \mathbb{R}^2$ — это множество всех x , для которых существуют последовательность (x_n) в \mathbb{R}^2 , а также последовательности $(t_n), (t'_n)$ в \mathbb{R} , удовлетворяющие следующим условиям (здесь $x_n = (x_{1n}, x_{2n})$ — это точка в \mathbb{R}^2):

1) для всех n требуем, чтобы $t_n \neq t'_n$ и $F(t_n, x_n) = F(t'_n, x_n) = 0$, так что $x_n \in C_{t_n} \cap C_{t'_n}$.

2) также мы требуем, чтобы при $n \rightarrow \infty$: $t_n \rightarrow t$ и $t'_n \rightarrow t$ для некоторого t , а $x_n \rightarrow x$, где t, x — это точка из области определения функции F . Устремляя n к бесконечности в равенстве $F(t_n, x_n) = 0$, получаем $F(t, x) = 0$. Пусть $f(t) = F(t, x_n)$ для достаточно большого фиксированного n . Тогда $f(t_n) = f(t'_n) = 0$. Существует такое τ_n , заключенное между t_n и t'_n , такое что $f'(\tau_n) = 0$. Действительно, для всех больших n замкнутый промежуток от t_n до t'_n будет лежать в области определения

функции F , поскольку последовательности (t_n) и (t'_n) имеют один и тот же предел t . Значит,

$$\partial F / \partial t(\tau_n, x_n) = 0.$$

Устремляя n к бесконечности, получаем

$$\partial F / \partial t(t, x) = 0.$$

Следовательно, огибающая

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{D}. \quad (23)$$

Не трудно привести пример семейства кривых, для которого множество \mathcal{E}_1 совпадает с огибающей. Таким примером может служить огибающая семейства окружностей, заданная уравнением $(x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0$ из §1 (см. рис. 5). Оставшаяся часть этого параграфа посвящена построению примера семейства кривых, для которого множество \mathcal{E}_1 оказывается пустым. Этим примером является семейство соприкасающихся окружностей кривой.

Рассмотрим участок кривой $\gamma : t \in (a, b)$, на котором кривизна не обращается в нуль и производная от кривизны тоже не обращается в нуль. Тогда на этом участке радиусы кривизны во всех точках различны и соответственно различны радиусы соприкасающихся окружностей.

Предложение. При выполнении указанных выше условий соприкасающиеся окружности образуют семейство вложенных друг в друга не пересекающихся окружностей.

Доказательство. Сначала докажем вспомогательное утверждение. Пусть даны две окружности ω_1 и ω_2 радиусов R_1 и R_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно, и пусть $R_1 > R_2$. Тогда окружность ω_2 лежит внутри окружности ω_1 тогда и только тогда, когда

$$(R_1 - R_2) > O_1O_2. \quad (24)$$

Действительно, пусть линия центров O_1O_2 пересекает окружности ω_1 и ω_2 соответственно в точках B и C . И пусть A — произвольная точка окружности ω_2 . Покажем, что точка A содержится внутри ω_1 .

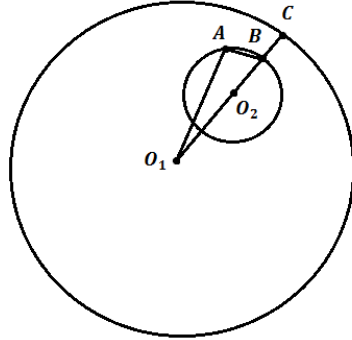


Рис. 11.

Имеем (см. рис. 11):

$$O_1A \leq O_2A + O_1O_2 = O_2B + O_1O_2 = O_1B.$$

Точка B принадлежит окружности ω_1 тогда и только тогда, когда

$$O_1B < O_1C \iff O_1O_2 + R_2 < R_1 \iff O_1O_2 < (R_1 - R_2),$$

откуда и следует, что произвольная точка A окружности ω_2 лежит внутри окружности ω_1 тогда и только тогда, когда выполняется условие (24).

Пусть теперь O_1 и O_2 — это две точки на эволюте $\varepsilon(s)$ кривой $\gamma(s)$ (как и ранее, s — это длина дуги на эволюте), соответствующие значениям s_1 и s_2 параметра s . Поскольку и кривизна $\kappa(s)$ и производная $\kappa'(s)$ не обращаются в нуль, то кривизна кривой при возрастании параметра s или монотонно возрастает или монотонно убывает и поэтому различна во всех точках. Пусть для определенности $\kappa(s_1) < \kappa(s_2)$, тогда радиусы R_1 и R_2 соприкасающихся окружностей в точках $\gamma(s_1)$ и $\gamma(s_2)$ удовлетворяют соотношению $R_1 > R_2$ и имеют соответственно вид

$$R_1 = |\varepsilon(s_1) - \gamma(s_1)|, \quad R_2 = |\varepsilon(s_2) - \gamma(s_2)|.$$

При этом, как было показано при рассмотрении эволюты,

$$R_1 - R_2 = |s_1 - s_2|.$$

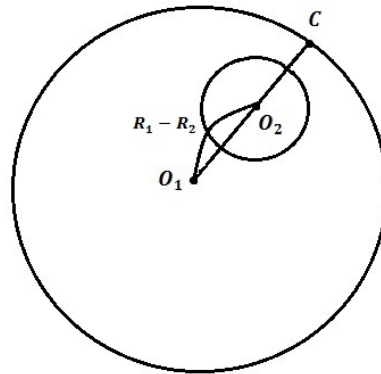


Рис. 12.

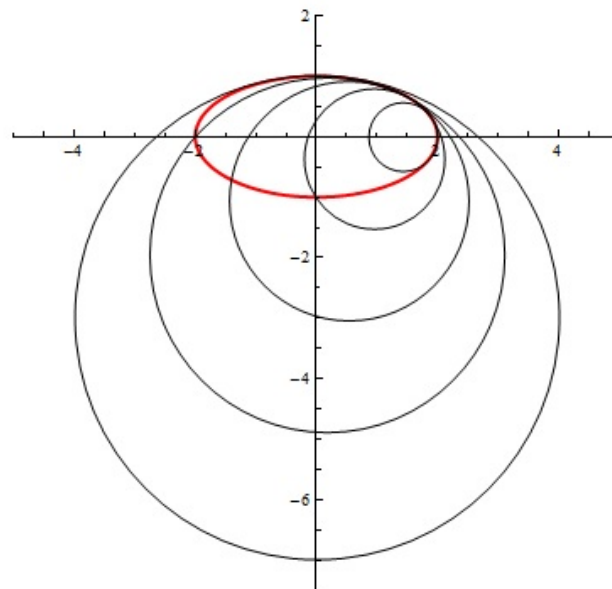


Рис. 13. Соприкасающиеся окружности эллипса.

Тогда, поскольку длина отрезка прямой, соединяющего точки O_1 и O_2 , меньше длины $|s_1 - s_2|$ отрезка эволюты (см. рис. 12), соединяющего

эти точки, то

$$O_1O_2 < |s_1 - s_2| = R_1 - R_2,$$

что и доказывает предложение. \square

Если $\kappa(s) \neq 0$, то существует единственная соприкасающаяся окружность.

В качестве иллюстрации построим эволюту эллипса и ее соприкасающиеся окружности с помощью пакета Mathematica (см. рис. 14).

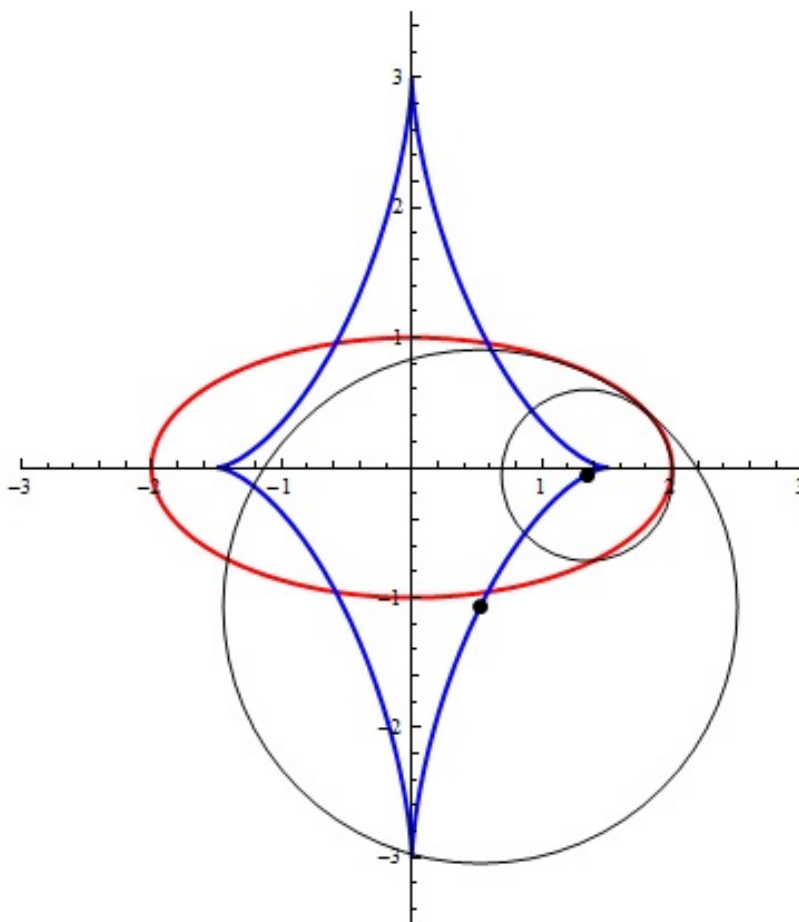


Рис. 14. Эволюта эллипса и ее соприкасающиеся окружности.

5 Параллели плоских кривых, их ортотомики и каустики

Параллели.

Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ — кривая единичной скорости. Рассмотрим семейство окружностей фиксированного радиуса $r > 0$ с центрами на $\gamma(I)$. Огибающая этого семейства называется кривой, *параллельной* кривой γ на расстоянии r .

Составим уравнение рассматриваемого семейства:

$$F(t, x) = (x - \gamma(t))(x - \gamma(t)) - r^2 = 0. \quad (25)$$

Для нахождения огибающей продифференцируем функцию (25) по t . Имеем:

$$F'(t, x) = -2\gamma'(t)(x - \gamma(t)).$$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений для нахождения огибающей:

$$(x - \gamma(t))(x - \gamma(t)) - r^2 = 0, \quad \gamma'(t)(x - \gamma(t)) = 0.$$

Введем замену $(x - \gamma(t)) = y$. Тогда система примет вид

$$y^2 = r^2, \quad y\gamma'(t) = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $y = \lambda N(t)$, а из первого тогда получим $\lambda^2 = r^2$. Следовательно, $y = \pm rN(t)$, а

$$x = \gamma(t) \pm rN(t).$$

Построим некоторые параллели кривых с помощью пакета Mathematica (рис. 15).

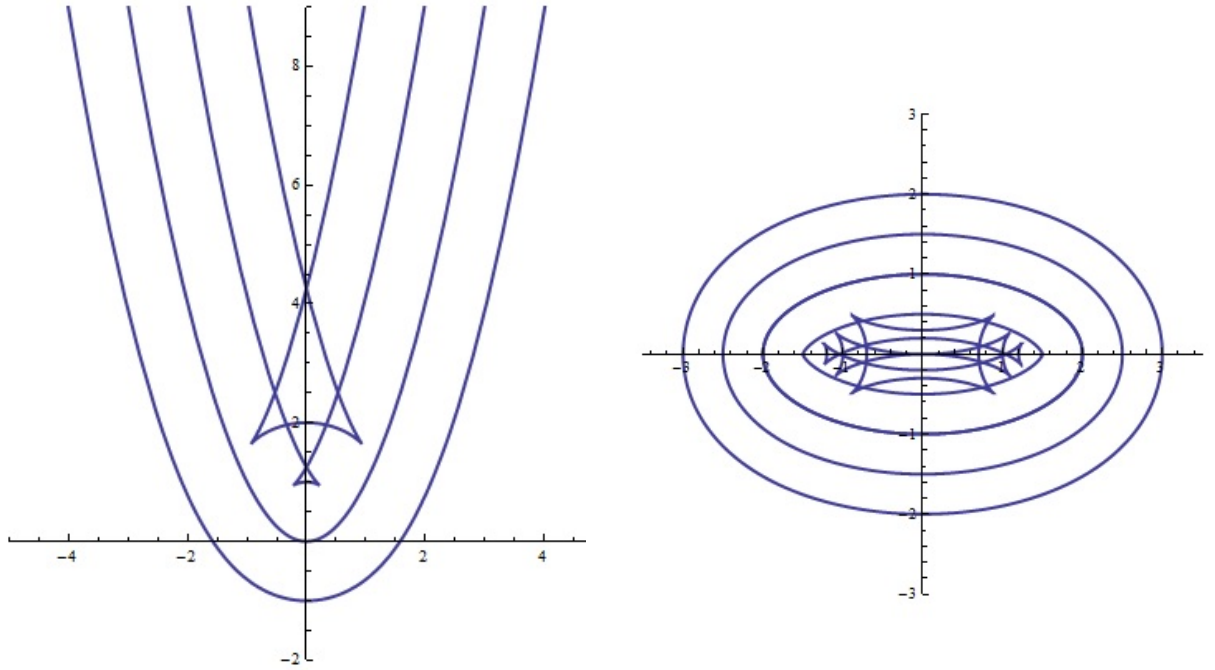


Рис. 15. Некоторые параллели к параболе и эллипсу.

Ортотомики.

Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кривая единичной скорости и

$$F(t, x) = (x - \gamma(t))^2 - \gamma(t)^2 = 0 \quad (26)$$

— уравнение семейства окружностей C_t с центрами на $\gamma(t)$, проходящих через точку O (начало координат). Будем предполагать, что начало координат не принадлежит образу γ , то есть что $\gamma(t)$ никогда не обращается в 0 . Найдем огибающую этого семейства.

Продифференцируем уравнение (26), тогда получим

$$\partial F / \partial t = -2\gamma'(x - \gamma) - 2\gamma\gamma' = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) эквивалентно следующему

$$\gamma'x = 0,$$

откуда следует, что

$$x = \lambda(t)N(t). \quad (28)$$

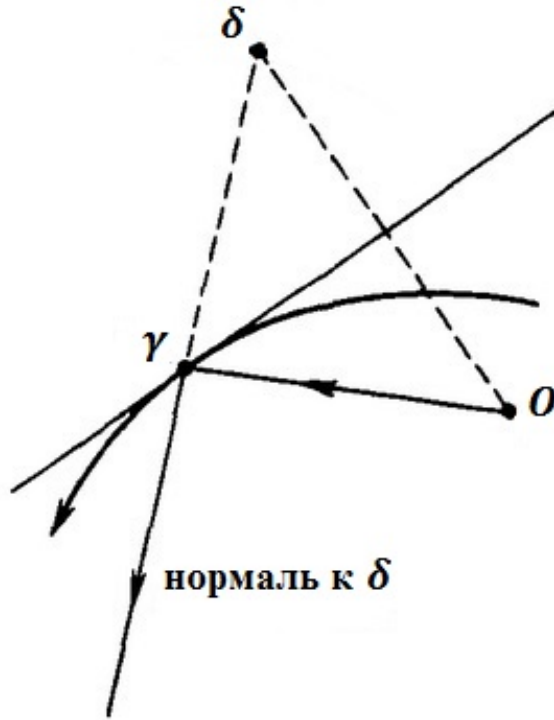


Рис. 16.

Подставляя (28) в (26), получим

$$(\lambda N - \gamma)^2 - \gamma^2 = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\lambda^2 - 2\lambda(N\gamma) + \gamma^2 - \gamma^2 = 0 \quad \text{или}$$

$$\lambda(\lambda - 2(N\gamma)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \lambda = 2(N\gamma). \quad (29)$$

Таким образом, дискриминантная кривая семейства (26) состоит из точки O и множества точек, заданных уравнением

$$\delta = 2(\gamma, N)N, \quad t \in I. \quad (30)$$

Поскольку $(\gamma(t), N)$ — расстояние от точки O до касательной к $\gamma(t)$, то $\delta(t)$ — это точка, симметричная точке O относительно касательной к γ (рис. 16 и 17).

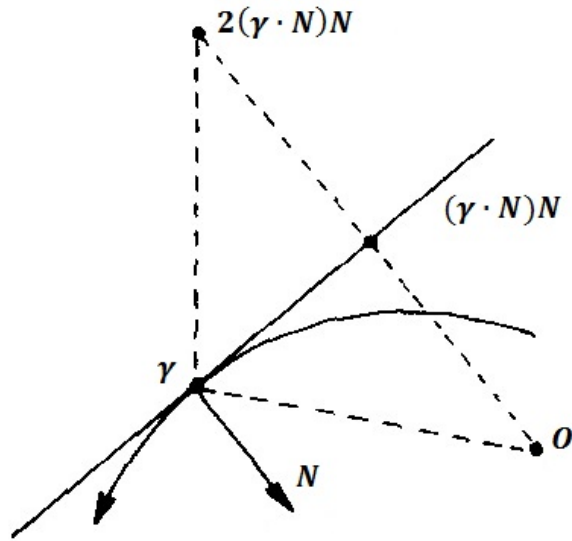


Рис. 17.

Параметризованную кривую, заданную уравнением (30), называют *ортотомической кривой* или *ортотомикой* кривой γ .

На рис. 18 с помощью пакета Mathematica построена ортотомика кривой

$$\gamma(t) = (2.8 \cos t + \cos 2t + 1, \quad 2.8 \sin t + \sin 2t).$$

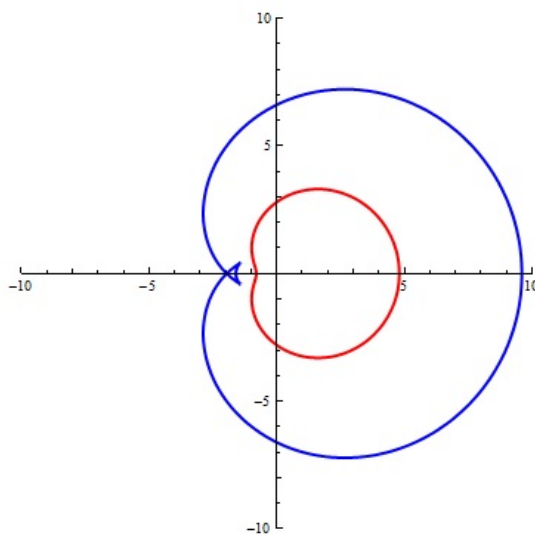


Рис. 18. Ортотомика улитки Паскаля.

Каустики.

Определение. Огибающая лучей, выходящих из точки O и отраженных от кривой γ называется *каустикой при отражении* для кривой γ относительно точки O .

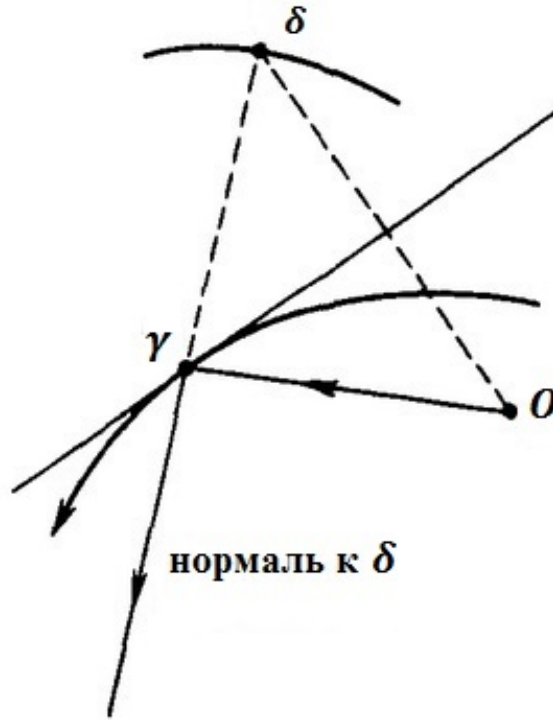


Рис. 19. Отраженный луч.

Предложение. Каустика кривой γ при отражении для лучей, выходящих из точки O , совпадает с эволютой ортотомики кривой γ относительно точки O .

Доказательство. Надо доказать, что $\delta' \perp \delta - \gamma \iff \delta'(\delta - \gamma) = 0$.

Из формулы (30) мы знаем, что

$$\delta = 2(\gamma, N)N.$$

Теперь продифференцируем это уравнение и получим

$$\begin{aligned} \delta' = 2[(\gamma'N) + \gamma N']N + 2(\gamma N)N' = 2[-\kappa(\gamma T)N + \kappa(\gamma N)T] = \\ - 2\kappa[(\gamma T)N - (\gamma N)T]. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь вычислим $(\delta - \gamma)$ и получим

$$(\delta - \gamma) = 2(\gamma N)N - \gamma.$$

Перемножим скалярно δ' и $(\delta - \gamma)$. Имеем:

$$\begin{aligned} [(\gamma T)N + (\gamma N)T][2(\gamma N)N - \gamma] = \\ 2(\gamma T)(\gamma N)N^2 + (\gamma N)^2 TN - (\gamma T)(\gamma N) - (\gamma N)(\gamma T) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из уравнения (32) следует, что вектор $\gamma - \delta$ направлен перпендикулярно ортотомике. Следовательно, луч отраженный от кривой γ направлен по нормали к ортотомике. \square

На рис. 20 приведено изображение каустики, построенное с помощью пакета Wolfram Mathematica.

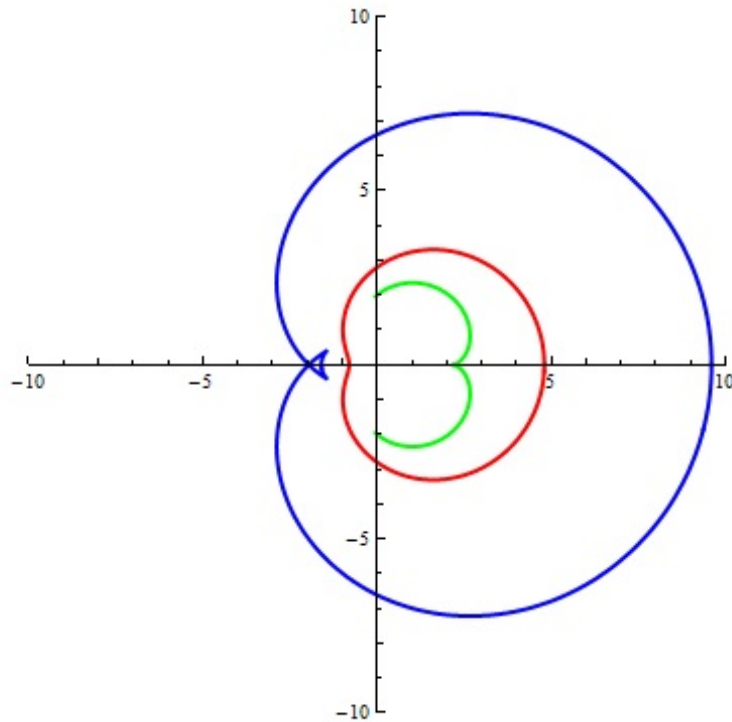


Рис. 20. Каустика улитки Паскаля.

Приложение

Построение огибающей семейства окружностей

```
Implicit[x_, y_, c_] := (x - c)^2 + y^2 - 1;
tv[A_][c_] := D[Implicit[x, y, c], c]
Ogib = Solve[{Implicit[x, y, c] == 0,
  D[Implicit[x, y, c], c] == 0}, {x, y}]
Implicit1[x_, y_, c_] := (x - 0)^2 + y^2 - 1
Implicit2[x_, y_, c_] := (x + 1)^2 + y^2 - 1
Implicit3[x_, y_, c_] := (x - 1)^2 + y^2 - 1
Implicit4[x_, y_, c_] := (x - 2)^2 + y^2 - 1
Implicit5[x_, y_, c_] := (x + 2)^2 + y^2 - 1
plot1 = ContourPlot[Implicit1[x, y, c] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  DisplayFunction -> Identity];
plot2 = ContourPlot[Implicit2[x, y, c] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  DisplayFunction -> Identity];
plot3 = ContourPlot[Implicit3[x, y, c] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  DisplayFunction -> Identity];
plot4 = ContourPlot[Implicit4[x, y, c] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  DisplayFunction -> Identity];
plot5 = ContourPlot[Implicit5[x, y, c] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
plot6 = ParametricPlot[{{x, y} /. Ogib}, {c, -100, 100},
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0], Thick}];
Show[{plot1, plot2, plot3, plot4, plot5, plot6},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Построение эволюты эллипса и ее соприкасающихся окружностей

```
x[t_] = 2*Cos[t];
y[t_] = Sin[t];
f[t_] = x[t] -
  D[y[t], t]*(D[x[t], t]^2 +
    D[y[t], t]^2)/(D[x[t], t]*D[y[t], {t, 2}] -
    D[y[t], t]*D[x[t], {t, 2}]);
g[t_] = y[t] +
  D[x[t], t]*(D[x[t], t]^2 +
    D[y[t], t]^2)/(D[x[t], t]*D[y[t], {t, 2}] -
    D[y[t], t]*D[x[t], {t, 2}]);
w[t_] = (3/2) Cos[t]^3;
q[t_] = -3 Sin[t]^3;
u[t_] = (3 Sqrt[2]/8) + (Sqrt[250]/8) Cos[t];
v[t_] = (-3 Sqrt[2]/4) + (Sqrt[250]/8) Sin[t];
plot1 = ParametricPlot[{u[t], v[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-3, 3}, {-3.5, 3.5}}, PlotStyle -> {Orange, Thick}];
plot2 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-3, 3}, {-3.5, 3.5}}, PlotStyle -> {Red, Thick}];
plot3 = ParametricPlot[{w[t], q[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-3, 3}, {-3.5, 3.5}}, PlotStyle -> {Blue, Thick}];
okr[t_] = \[Sqrt]((2*Cos[t] - 3/2 Cos[t]^3)^2 + (Sin[t] +
  3*Sin[t]^3)^2);
ok[t_] = \[Sqrt]((2*Cos[t] - 3/2 Cos[t]^3)^2 + (Sin[t] +
  3*Sin[t]^3)^2);
plot5 = Graphics[Circle[{w[Pi/4], q[Pi/4]}, okr[Pi/4]]];
plot4 = Graphics[{PointSize[.02], Point[{w[Pi/4], q[Pi/4]}]}];
plot6 = Graphics[Circle[{w[Pi/12], q[Pi/12]}, ok[Pi/12]]];
plot7 = Graphics[{PointSize[.02], Point[{w[Pi/12], q[Pi/12]}]}];
Show[{plot2, plot3, plot4, plot5, plot6, plot7}]
```

Построение параллельных кривых для параболы

```
x[t_] = t;
y[t_] = t^2;
plot = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -6, 6},
  PlotRange -> {{-5, 5}, {-2, 9}},
  PlotStyle -> Thick];
a = -2;
f1[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g1[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot1 = ParametricPlot[{f1[t], g1[t]}, {t, -6, 6},
  PlotStyle -> Thick];
a2 = -1;
f2[t_] = x[t] + a2*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g2[t_] = y[t] - a2*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot2 = ParametricPlot[{f2[t], g2[t]}, {t, -6, 6},
  PlotStyle -> Thick];
a = 1;
f3[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g3[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot3 = ParametricPlot[{f3[t], g3[t]}, {t, -6, 6},
  PlotStyle -> Thick];
Show[{plot, plot1, plot2, plot3}, AspectRatio -> Automatic]
```

Построение параллельных кривых для эллипса

```
x[t_] = 2 Cos[t];
y[t_] = Sin[t];
plot = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -50, 50},
  PlotRange -> {{-3.5, 3.5}, {-3, 3}}, PlotStyle -> Thick];
a = -1.3;
```



```

f1[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g1[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot1 = ParametricPlot[{f1[t], g1[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a2 = -1;
f2[t_] = x[t] + a2*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g2[t_] = y[t] - a2*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot2 = ParametricPlot[{f2[t], g2[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a3 = -0.5;
f3[t_] = x[t] + a3*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g3[t_] = y[t] - a3*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot3 = ParametricPlot[{f3[t], g3[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a4 = -0.8;
f4[t_] = x[t] + a4*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g4[t_] = y[t] - a4*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot4 = ParametricPlot[{f4[t], g4[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a = 1;
f5[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g5[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot5 = ParametricPlot[{f5[t], g5[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a = 0.5;
f6[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g6[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot6 = ParametricPlot[{f6[t], g6[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a = 0.2;
f7[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g7[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
plot7 = ParametricPlot[{f7[t], g7[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
a = 0.0;
f8[t_] = x[t] + a*D[y[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];
g8[t_] = y[t] - a*D[x[t], t]/Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2];

```

```

plot7=ParametricPlot[{f8[t], g8[t]}, {t, -50, 50},
  PlotStyle -> Thick];
Show[{plot, plot1, plot2, plot3, plot4, plot5, plot6, plot7},
  AspectRatio -> Automatic]

```

Ортогомика улитки Паскаля

```

x[t_] = 2.8 Cos[t] + Cos[2 t] + 1;
y[t_] = 2.8 Sin[t] + Sin[2 t];
f[t_] = (-2 D[y[t], t]) (-x[t]*D[y[t], t] +
  y[t]*D[x[t], t])/(D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2);
g[t_] = (2 D[x[t], t]) (-x[t]*D[y[t], t] +
  y[t]*D[x[t], t])/(D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2);
plot1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}, PlotStyle -> Thick];
plot2 = ParametricPlot[{f[t], g[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}, PlotStyle -> Thick];
Show[{plot1, plot2}]

```

Каустика улитки Паскаля

```

x[t_] = 2.8 Cos[t] + Cos[2 t] + 1;
y[t_] = 2.8 Sin[t] + Sin[2 t];
f[t_] = (-2 D[y[t], t]) (-x[t]*D[y[t], t] +
  y[t]*D[x[t], t])/(D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2);
g[t_] = (2 D[x[t], t]) (-x[t]*D[y[t], t] +
  y[t]*D[x[t], t])/(D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2);
u[t_] = f[t] -
  D[g[t], t]*(D[f[t], t]^2 +
  D[g[t], t]^2)/(D[f[t], t]*D[g[t], t], {t, 2}] -

```

```

      D[g[t], t]*D[f[t], {t, 2}]);
v[t_] = g[t] +
      D[f[t], t]*(D[f[t], t]^2 +
      D[g[t], t]^2)/(D[f[t], t]*D[g[t], {t, 2}] -
      D[g[t], t]*D[f[t], {t, 2}]);
plot1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi},
      PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}, PlotStyle -> {Red, Thick}];
plot2 = ParametricPlot[{f[t], g[t]}, {t, 0, 2 Pi},
      PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}, PlotStyle -> {Blue, Thick}];
plot3 = ParametricPlot[{u[t], v[t]}, {t, -(3/4) Pi, (3/4) Pi},
      PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}, PlotStyle -> {Green, Thick}];
Show[{plot1, plot2, plot3}]

```

Список литературы

- [1] Брус Д., Джиблин П. *Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей*. М.: Мир, 1988. 262 с.
- [2] Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. М.: Изд. Лань, 2010.
- [3] Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии*. М., 1958. 244 с.
- [4] Фавар Ж. *Курс локальной дифференциальной геометрии*. М., 1960. 558 с.
- [5] Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory.*: Cambridge University Press, 1992.
- [6] Gray A., Abbena E., Salamon S. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*; Champman & Hall-CRC, 2006. 984p.
- [7] *Toponogov V. A. Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Birkhäuser, Boston, 2006.