Известия вузов. Математика
2013, №6, с. 60–69

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.И. ЯКОВЛЕВ

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ В НЕКОТОРЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация. Исследуется динамика гироскопических систем релятивистского типа с многозначным функционалом действия. Предполагается, что конфигурационные лоренцевы многообразия имеют структуру искривленного произведения. Ранее разрешимость двухточечной краевой задачи для таких систем была доказана только в ситуации, когда лоренцево расстояние от начальной до конечной точки ограничено. В настоящей работе получена новая теорема существования, согласно которой указанное расстояние до достижимых точек может принимать сколь угодно большие значения. Результат применяется к динамике заряженной пробной частицы во внешнем пространстве-времени черной дыры Рейсснера–Нордстрема.

Ключевые слова: лоренцево многообразие, риманово многообразие, гироскопическая система с многозначным функционалом действия, двухточечная краевая задача, пространство-время Рейсснера–Нордстрема.

УДК: 514.764

1. Постановка задачи

Пусть (M_1, g_1) — риманово многообразие, $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ — гладкая положительная функция, $M_0 = \mathbb{R}$ и $g_0 = dt^2$ – стандартная риманова метрика на M_0. Положим $M = M_0 \times M_1$, $f = f_1 \circ p_1$ и $g = -fp_0^*g_0 + p_1^*g_1$, где $p_0 : M \to M_0$ и $p_1 : M \to M_1$ — естественные проекции. Тогда (M, g) — лоренцево многообразие, являющееся искривленным произведением многообразий $(M_0, -g_0)$ и (M_1, g_1) с искривляющей функцией f_1 ([1], с. 59). Оно обладает естественной временной ориентацией — гладким векторным полем $\overline{X}_0$ на M с равенствами $dp_0(\overline{X}_0) = 1$ и $dp_1(\overline{X}_0) = 0$. Зафиксируем эту ориентацию.

Рассмотрим замкнутую 2-форму F_1 на M_1 и положим $F = p_1^*F_1$ и $u \equiv 1/2$. Согласно [2] и [3] четверка $\Gamma = (M, g, F, u)$ представляет собой гироскопическую систему релятивистского типа. Ее движениями являются направленные в будущее решения системы уравнений

$$\frac{\nabla}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = F'\left(\frac{dx}{ds}\right), \tag{1}$$

$$g\,(dx/ds,\, dx/ds) = -1, \tag{2}$$

где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в (M, g), а F' — поле линейных операторов на M, определенное формулой $g(F'(\overline{X}), \overline{Y}) = F(\overline{X}, \overline{Y})$.

Поступила 05.04.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00457-а, и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“, контракт № 14.B37.21.0361.

Нас интересуют движения $x : [0,\beta] \to M$, $\beta > 0$, системы $\mathit{\Gamma}$, удовлетворяющие равенствам

$$x(0) = v, \quad x(\beta) = w, \tag{3}$$

где v — произвольная точка многообразия M, а w — точка из ее хронологического будущего $I^+(v)$.

Заметим, что форма гироскопических сил F не обязана быть точной. Более того, в основной теореме 2 предполагаем существование кусочно-гладких сфероидов в M, интегралы по которым от F отличны от нуля. В такой ситуации функционал действия системы $\mathit{\Gamma}$ многозначен [4], [5].

Рассмотрим пример. Пусть m_1 — положительное действительное число, $\varkappa \in (-m_1, m_1)$ и $r_+ = m_1 + \sqrt{m_1^2 - \varkappa^2}$. Если S^2 — единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве, g_2 — индуцированная риманова метрика на S^2 и $M_1 = (r_+, +\infty) \times S^2$, то определены естественные проекции $r : M_1 \to (r_+, +\infty)$ и $q : M_1 \to S^2$. Положим

$$f_1 = 1 - \frac{2m_1}{r} + \frac{\varkappa^2}{r^2}, \quad g_1 = \frac{1}{f_1} dr \otimes dr + r^2 q^* g_2.$$

Пусть также F_2 — форма площади риманова многообразия (S^2, g_2), $e, m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ и $F_1 = (e/m)\varkappa q^* F_2$.

С точки зрения математической физики в этой ситуации (M, g) — внешнее пространство-время Рейсснера–Нордстрема, m_1 — масса черной дыры, $\varkappa$ — ее магнитный заряд ([6], с. 127), форма $(m/e)F$ описывает соответствующее магнитное поле, а система $\mathit{\Gamma}_{RN} = (M, g, F, u)$ — движения пробной частицы с массой m и электрическим зарядом e под действием гравитационного и магнитного полей указанной черной дыры. Для простоты здесь считается выбранной система единиц измерения, в которой скорость света в вакууме равна единице.

Ранее была доказана

Теорема ([2]). *Пусть $\varkappa \neq 0$, $h = (1/f_1)g_1$, $d_0 : M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ — функция расстояния риманова многообразия (M_1, h), $a, b \in M_1$ и $t_0 = d_0(a, b)$. Тогда*

- *если a и b не лежат на противоположных радиальных лучах многообразия $M_1 = (r_+, +\infty) \times S^2$, то найдется такое конечное число $t_1 > t_0$, что для произвольного числа t из интервала (t_0, t_1), точек $v = (0, a)$, $w = (t, b)$ и системы $\mathit{\Gamma}_{RN}$ существует решение двухточечной краевой задачи (1)–(3);*
- *если же содержащие точки a и b радиальные лучи $l_a = (r_+, +\infty) \times q(a)$ и $l_b = (r_+, +\infty) \times q(b)$ противоположны, то ни при каком $t \in \mathbb{R}$ для указанных точек $v = (0, a)$, $w = (t, b)$ и системы $\mathit{\Gamma}_{RN}$ задача (1)–(3) решений не имеет.*

В первом утверждении приведенной теоремы в силу неравенства $t < t_1$ лоренцево расстояние $d(v, w)$ от точки $v = (0, a)$ до точки $w = (t, b)$ в пространстве-времени (M, g) ограничено. Таким образом, эта теорема гарантирует достижимость только тех точек $w \in I^+(v)$, которые расположены в лоренцевом смысле не очень далеко от начальной точки v.

Целью данной работы является доказательство разрешимости задачи (1)–(3) в ситуациях, когда число $t \in (r_+, +\infty)$, а вместе с ним и лоренцево расстояние $d(v, w)$ могут принимать сколь угодно большие значения. Для ее достижения используются обнаруженная связь между движениями гироскопической системы релятивистского типа $\mathit{\Gamma}$ и некоторой натуральной гироскопической системы с конфигурационным многообразием M_1, а также построенные и изученные в [7] обобщенные функции расстояния римановых многообразий.

2. Редукция

Вернемся к общему случаю. Положим $h = (1/f_1)g_1$ и $u_1 = f_1/2$. Тогда h — риманова метрика, а u_1 — гладкая функция на многообразии M_1. При этом

$$g = f(-p_0^* g_0 + p_1^* h), \tag{4}$$

а четверка $\varGamma_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$ является натуральной механической системой с конфигурационным многообразием M_1, формой кинетической энергии $h/2$, потенциальной энергией u_1 и формой гироскопических сил F_1.

Для любого гладкого многообразия B и точки $b \in B$ символом $\varOmega_0(B, b)$ обозначим множество всех гладких кривых $x : [0, \varepsilon] \to B$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, с начальной точкой $x(0) = b$.

Выберем произвольное число $t_0 \in \mathbb{R} = M_0$, некоторую точку $a \in M_1$ и положим $v = (t_0, a)$. Тогда $v \in M = M_0 \times M_1$. Построим отображения, связывающие множества $\varOmega_0(M, v)$ и $\varOmega_0(M_1, a)$.

Если $x : [0, \beta] \to M$ — гладкая кривая и $x(0) = v$, то положим

$$\delta = \int_0^\beta \frac{ds}{f(x(s))}, \quad \tau = \mu(s) = \int_0^s \frac{d\widetilde{s}}{f(x(\widetilde{s}))} \quad \text{и} \quad y^x(\tau) = p_1 \circ x(\mu^{-1}(\tau)). \tag{5}$$

Этим определены действительное число $\delta > 0$, строго монотонно возрастающий гомеоморфизм $\mu : [0, \beta] \to [0, \delta]$ и гладкая кривая $y^x : [0, \delta] \to M_1$ с начальной точкой $y^x(0) = a$. Полагая $P(x) = y^x$, получим отображение $P : \varOmega_0(M, v) \to \varOmega_0(M_1, a)$.

Рассмотрим далее гладкую кривую $y : [0, \delta] \to M_1$ из $\varOmega_0(M_1, a)$. Положим

$$\mathcal{E}(y) = 2u_1(y) + h(dy/d\tau, dy/d\tau) \quad \text{и} \quad z_y(\tau) = \tau\sqrt{\mathcal{E}(y)(\tau)} + t_0 \tag{6}$$

для всех $\tau \in [0, \delta]$. Этим построены гладкая положительная функция $\mathcal{E}(y)$ на отрезке $[0, \delta]$ и гладкое отображение $z_y : [0, \delta] \to M_0$. Формулы

$$\beta = \int_0^\delta f_1(y(\tau))d\tau, \quad s = \nu(\tau) = \int_0^\tau f_1(y(\widetilde{\tau}))d\widetilde{\tau}, \quad x_y(s) = (z_y(\nu^{-1}(s)), y(\nu^{-1}(s))) \tag{7}$$

определяют число $\beta > 0$, строго монотонно возрастающий гомеоморфизм $\nu : [0, \delta] \to [0, \beta]$ и гладкую кривую $x_y : [0, \beta] \to M$. Поскольку $z_y(\nu^{-1}(0)) = z_y(0) = t_0$ и $y(\nu^{-1}(0)) = y(0) = a$, то $x_y \in \varOmega_0(M, v)$. Тем самым, полагая $Q(y) = x_y$, построим отображение $Q : \varOmega_0(M_1, a) \to \varOmega_0(M, v)$.

Легко видеть, что $P \circ Q = \mathrm{id}$, но $Q \circ P \neq \mathrm{id}$.

Отображения P и Q позволяют установить связь между движениями гироскопических систем $\varGamma$ и $\varGamma_1$.

Теорема 1. *Кривая $x \in \varOmega_0(M, v)$ является движением гироскопической системы релятивистского типа $\varGamma = (M, g, F, u)$ тогда и только тогда, когда ее образ $P(x) \in \varOmega_0(M_1, a)$ представляет собой движение натуральной гироскопической системы $\varGamma_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$ и имеет место равенство $x = Q \circ P(x)$.*

Доказательство. Для произвольной кривой $x : [0, \beta] \to M$ из множества $\varOmega_0(M, v)$ положим $x_0 = p_0 \circ x$ и $x_1 = p_1 \circ x$. Согласно (4) и формуле (121.14) из [8] в этих обозначениях система уравнений (1)–(2) приобретает вид

$$\frac{d^2x_0}{ds^2} + \frac{d\,(\ln f_1(x_1))}{ds}\frac{dx_0}{ds} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\nabla_1}{ds}\left(\frac{dx_1}{ds}\right) + \frac{\operatorname{grad} f_1(x_1)}{2f_1}\left(\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - h\left(\frac{dx_1}{ds},\frac{dx_1}{ds}\right)\right) + \frac{d\,(\ln f_1(x_1))}{ds}\frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{f_1}F_1'\left(\frac{dx_1}{ds}\right), \tag{9}$$

$$f_1(x_1)\big(-(dx_0/ds)^2 + h\,(dx_1/ds,\, dx_1ds)\,\big) = -1, \tag{10}$$

где ∇_1 — оператор ковариантного дифференцирования в римановом многообразии (M_1, h), а F_1' — поле линейных операторов на M_1, определенное формулой $h(F_1'(X), Y) = F_1(X, Y)$.

Очевидно, в полученной системе уравнение (9) можно заменить соотношением

$$\frac{\nabla_1}{ds}\left(\frac{dx_1}{ds}\right) + \frac{\operatorname{grad}(\ln f_1)(x_1)}{2f_1} + \frac{d\,(\ln f_1(x_1))}{ds}\frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{f_1}F_1'\left(\frac{dx_1}{ds}\right).$$

При этом, полагая $s = \mu^{-1}(\tau)$, $z(\tau) = x_0(\mu^{-1}(\tau))$ и $y(\tau) = x_1(\mu^{-1}(\tau))$, где функция μ определена в (5), из (8)–(10) получим систему

$$d^2z/d\tau^2 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\nabla_1}{d\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}\right) = F_1'\left(\frac{dy}{d\tau}\right) - \operatorname{grad} u_1(y), \tag{12}$$

$$(dz/d\tau)^2 = \mathcal{E}(y). \tag{13}$$

Выполненные преобразования обратимы, т. е. посредством обратной замены $x_0(s){=}z(\mu(s))$, $x_1(s) = y(\mu(s))$ система уравнений (11)–(13) приводится к виду (8)–(10). Полагая $x = (x_0, x_1)$ и используя (4), из (8)–(10) получим (1)–(2).

Предположим, что рассматриваемая кривая $x : [0,\beta] \to M$ представляет собой движение гироскопической системы $\mathit{\Gamma} = (M, g, F, u)$. Тогда она является решением системы уравнений (1)–(2). Согласно доказанному выше в такой ситуации функция $z : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ и кривая $y : [0,\delta] \to N$ удовлетворяют равенствам (11)–(13).

В силу (12) y — движение гироскопической системы $\mathit{\Gamma}_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$. При этом $y = y^x = P(x)$ по построению.

Согласно (4)

$$g\left(\frac{dx}{ds}, \overline{X}_0(x)\right) = f(x)\left(-\frac{dx_0}{ds}dp_0(\overline{X}_0(x)) + h\left(\frac{dx_1}{ds}, dp_1(\overline{X}_0(x))\right)\right).$$

Отсюда по построению векторного поля $\overline{X}_0$ и функции z, а также в силу (5) следуют равенства

$$g(dx/ds, \overline{X}_0(x)) = -f(x)dx_0/ds = -dz/d\tau.$$

Так как путь x направлен в будущее, то $g(dx/ds, \overline{X}_0(x)) < 0$ для всех $s \in [0,\beta]$. Это вместе с доказанным выше влечет за собой положительность функции $dz/d\tau$ на отрезке $\tau \in [0,\delta]$.

В силу (13) в такой ситуации $dz/d\tau = \sqrt{\mathcal{E}(y)}$, а согласно (11) $dz/d\tau$ — постоянная функция. Тогда $\mathcal{E}(y) \equiv \mathrm{const}$ и $z(\tau) = \tau\sqrt{\mathcal{E}(y)} + c_0$, где c_0 — некоторое действительное число. Но $z(0) = x_0(0) = t_0$. Следовательно, $c_0 = t_0$ и $z(\tau) = \tau\sqrt{\mathcal{E}(y)} + t_0 = z_y(\tau)$.

Итак, $x_y(s) = (z(\nu^{-1}(s)), y(\nu^{-1}(s)))$. Согласно (5) и (7) имеет место равенство $\nu \circ \mu = \mathrm{id}$. Поэтому $z(\nu^{-1}(s)) = x_0(\mu^{-1} \circ \nu^{-1}(s)) = x_0(s)$ и $y(\nu^{-1}(s)) = x_1(\mu^{-1} \circ \nu^{-1}(s)) = x_1(s)$. Таким образом, $Q \circ P(x) = Q(y) = x_y = (x_0, x_1) = x$.

Пусть далее дано, что кривая $y = y^x$ является движением натуральной гироскопической системы $\mathit{\Gamma}_1 = (M_1, g, F_1, u_1)$ и $x = Q(y) = Q \circ P(x)$.

Тогда, во-первых, y — решение дифференциального уравнения (12). Так как $\mathcal{E}(y)/2$ — интеграл энергии для $\mathit{\Gamma}_1$, то $\mathcal{E}(y) \equiv \mathrm{const}$ на $[0, \delta]$.

Во-вторых, в силу (6) и (7) равенство $x = Q(y)$ означает, что $z(\tau) = \tau\sqrt{\mathcal{E}(y)} + t_0$ для всех $\tau \in [0, \delta]$. При этом функция z удовлетворяет уравнениям (11) и (13).

Из результатов последних двух абзацев следует, что функция x_0 и кривая x_1 являются решениями системы уравнений (8)–(10), а кривая $x = (x_0, x_1)$ — решением системы (1)–(2). Осталось заметить, что в рассматриваемой ситуации

$$g(dx/ds, \overline{X}_0(x)) = -dz/d\tau = -\sqrt{\mathcal{E}(y)} < 0.$$

Поэтому кривая $x : [0, \beta] \to M$ направлена в будущее. □

3. Теорема существования

На произвольном гладком многообразии B рассмотрим замкнутую 2-форму $\mathit{\Phi}$ и ее когомологический класс $[\mathit{\Phi}]$. Для кусочно-гладкого цикла $c \in Z_2(B)$ положим

$$I_{[\mathit{\Phi}]}([c]) = \int_c \mathit{\Phi},$$

где $[c]$ — гомологический класс цикла c. Этим определен гомоморфизм $I_{[\mathit{\Phi}]}$ из группы целочисленных гомологий $H_2(B)$ в $\mathbb{R}$. Если $b \in B$ и $\chi_B : \pi_2(B, b) \to H_2(B)$ — гомоморфизм Гуревича, то положим $I^{\pi}_{[\mathit{\Phi}]} = I_{[\mathit{\Phi}]} \circ \chi_B$.

Для гладкого подмногообразия $C \subset B$ символом $\mathit{\Omega}(B, b, C)$ будем обозначать пространство кусочно-гладких путей $\gamma : I \to B$, $I = [0, 1]$, с началом $\gamma(0) = b$ и концом $\gamma(1) \in C$. В частности, C может представлять собой точку многообразия B.

Если $x : [0, \beta] \to B$ — кусочно-гладкая кривая, $\beta > 0$, то будем говорить, что она соответствует компоненте линейной связности D пространства $\mathit{\Omega}(B, b, C)$, если D содержит путь $\gamma : I \to B$, определенный формулой $\gamma(\sigma) = x(\sigma\beta)$.

Пусть теперь $a, b \in M_1$, $t_0 \in M_0$ и $v = (t_0, a)$. Положим $M^b_0 = M_0 \times \{b\}$. Тогда формула $p^{\mathit{\Omega}}_1(\gamma) = p_1 \circ \gamma$ определяет непрерывное отображение $p^{\mathit{\Omega}}_1 : \mathit{\Omega}(M, v, M^b_0) \to \mathit{\Omega}(M_1, a, b)$, которое, в частности, индуцирует биекцию $p^{\mathit{\Omega}}_{1*} : \pi_0(\mathit{\Omega}(M, v, M^b_0)) \to \pi_0(\mathit{\Omega}(M_1, a, b))$.

Для заданной компоненты $D \in \pi_0(\mathit{\Omega}(M, v, M^b_0))$ и произвольной точки $w \in M^b_0$ будем говорить, что w принадлежит хронологическому D-будущему точки v, если найдется направленный в будущее гладкий времениподобный путь $\gamma \in D$ с концом $\gamma(1) = w$. Множество всех таких точек обозначим символом $I^+_D(v)$. Подчеркнем, что по построению $I^+_D(v)$ лежит в фиксированном слое $M^b_0 \subset M$.

Пусть $L_1 : \mathit{\Omega}(M_1, a, b) \to \mathbb{R}$ — функционал длины риманова многообразия (M_1, h). Для $D_1 \in \pi_0(\mathit{\Omega}(M_1, a, b))$ через $d_{D_1}(a, b)$ обозначим точную нижнюю грань длин путей из D_1.

Если риманово многообразие (M_1, h) полно, то согласно лемме 2 из [3]

$$I^+_D(v) = (d_{D_1}(a, b) + t_0, +\infty) \times \{b\}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Предположим, что риманово многообразие (M_1, h) полно и для 2-формы F_1 на M_1 имеет место неравенство $I^{\pi}_{[F_1]} \neq 0$. Выберем произвольные точки $a, b \in M_1$, действительное число t_0 и компоненту линейной связности $D \in \pi_0(\mathit{\Omega}(M, v, M^b_0))$ для $v = (t_0, a)$. Положим $D_1 = p^{\mathit{\Omega}}_{1*}(D)$ и допустим, что точки a и b не сопряжены на геодезических из D_1. Тогда найдутся последовательности действительных чисел $\{t_{*n}\}$ и $\{t^*_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, обладающие свойствами*:

- ○ $t_{*n} \le t_n^* < t_{*n+1}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$,
- ○ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{*n} = +\infty$,
- ○ $J_n \times \{b\} \subset I_D^+(v)$ *для* $J_n = [t_{*n}, t_n^*]$ *и всех* $n \in \mathbb{N}$,
- ○ *для каждого номера* $n \in \mathbb{N}$ *и для любой точки* $w \in J_n \times \{b\}$ *существуют положительное число* $\beta \in \mathbb{R}$ *и соответствующее компоненте* D *решение* $x : [0,\beta] \to M$ *двухточечной краевой задачи* (1)–(3),
- ○ *если для некоторого* $n \in \mathbb{N}$ *отрезок* J_n *вырожден, т. е.* $t_{*n} = t_n^*$, *то найдется континуум движений гироскопической системы* $\varGamma = (M, g, F, u)$, *идущих из точки* $v = (t_0, a)$ *в точку* $w = (t_{*n}, b)$ *и соответствующих компоненте линейной связности* D *пространства* $\varOmega(M, v, M_0^b)$.

Доказательство. Пусть $p : \widehat{M_1} \to M_1$ — гладкое универсальное накрытие. Положим $\widehat{h} = p^*h$. Тогда риманово многообразие $(\widehat{M_1}, \widehat{h})$ полно, а $p : (\widehat{M_1}, \widehat{h}) \to (M_1, h)$ — изометрическое отображение.

Выберем произвольную точку $\widehat{a} \in \widehat{M_1}$, для которой $p(\widehat{a}) = a$. Для каждого $\gamma \in D_1$ имеется единственный накрывающий путь $\widehat{\gamma} : I \to \widehat{M_1}$ с началом $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{a}$. При этом концевая точка $\widehat{b} = \widehat{\gamma}(1)$ не зависит от выбора пути γ из D_1. Поэтому равенство $p^{\varOmega}(\widehat{\gamma}) = p \circ \widehat{\gamma}$ определяет биекцию $p^{\varOmega} : \varOmega(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b}) \to D_1$.

Рассмотрим функционал длины $\widehat{L}_1 : \varOmega(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b}) \to \mathbb{R}$ риманова многообразия $(\widehat{M_1}, \widehat{h})$. Если $H_k(\varOmega(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b})) \ne 0$ для некоторого $k \in 0 \cup \mathbb{N}$, то положим $H^* = H_k(\varOmega(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b})) \setminus \{0\}$. Формула

$$\widehat{d}_k(\widehat{a}, \widehat{b}) = \inf_{\lambda \in H^*} \inf_{c \in \lambda} \sup_{\widehat{y} \in |c|} \widehat{L}_1(\widehat{y}),$$

где $|c|$ — носитель сингулярного цикла c, определяет H_k-расстояние $\widehat{d}_k(\widehat{a}, \widehat{b})$ между точками $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ на $(\widehat{M_1}, \widehat{h})$ [7], причем $\widehat{d}_0(\widehat{a}, \widehat{b})$ — обычное расстояние.

Пусть $\widehat{F_1} = p^*F_1$, а $p_* : \pi_2(\widehat{M_1}, \widehat{a}) \to \pi_2(M_1, a)$ — гомоморфизм, индуцированный накрытием p. Тогда

$$I_{[\widehat{F_1}]} \circ \chi_{\widehat{M_1}} = I^{\pi}_{[\widehat{F_1}]} = I^{\pi}_{[F_1]} \circ p_*. \tag{15}$$

Так как $\chi_{\widehat{M_1}} : \pi_2(\widehat{M_1}, \widehat{a}) \to H_2(\widehat{M_1})$ и p_* — изоморфизмы, то из условия $I^{\pi}_{[F_1]} \ne 0$ и равенств (15) следует $I_{[\widehat{F_1}]} \ne 0$. При этом $\operatorname{rank} H_2(\widehat{M_1}) > 0$.

Выберем и зафиксируем некоторое положительное действительное число m. Согласно теореме 4 статьи [7] из полученного неравенства следует существование строго монотонно возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_n\}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, обладающей свойствами: $k_0 = 0$ и для всех $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$H_{k_n}(\varOmega(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b})) \ne 0 \quad \text{и} \quad \widehat{d}_{k_{n+1}}(\widehat{a}, \widehat{b}) > \widehat{d}_{k_n}(\widehat{a}, \widehat{b}) + 2m. \tag{16}$$

По теореме 2 из [7] для каждого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ найдется геодезическая $\widehat{\gamma}_n : I \to \widehat{M_1}$ риманова многообразия $(\widehat{M_1}, \widehat{h})$, принадлежащая пространству $\varOmega(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b})$ и имеющая длину $\widehat{L}_1(\widehat{\gamma}_n) = \widehat{d}_{k_n}(\widehat{a}, \widehat{b})$. Положим $\gamma_n = p \circ \widehat{\gamma}_n$. Тогда $\gamma_n : I \to M_1$ — геодезическая риманова многообразия (M_1, h), $\gamma_n \in D_1$ и $L_1(\gamma_n) = \widehat{L}_1(\widehat{\gamma}_n) = \widehat{d}_{k_n}(\widehat{a}, \widehat{b})$.

По условию точки a и b не сопряжены на γ_n, а уравнение геодезических многообразия (M_1, h) является предельной пульверизацией дифференциального уравнения (12) [9]. Согласно теореме 5 из [9] при этом найдется такая гладкая вариация $V : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ пути γ_n с закрепленными концами $V(0, (-\varepsilon, \varepsilon)) = a$ и $V(1, (-\varepsilon, \varepsilon)) = b$, что для каждого

$\delta \in (0, \varepsilon)$ формулы
$$\gamma_n^\delta(\sigma) = V(\sigma, \delta) \quad \text{и} \quad y_n^\delta(\tau) = \gamma_n^\delta(\tau/\delta) \tag{17}$$
определяют движение $y_n^\delta : [0, \delta] \to M_1$ гироскопической системы $\mathit{\Gamma}_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$.

Полагая
$$\Theta_n(\sigma, \delta) = 2\delta^2 u(V(\sigma, \delta)) + h\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}(\sigma, \delta), \frac{\partial V}{\partial \sigma}(\sigma, \delta)\right),$$
определим непрерывную функцию $\Theta_n : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Заметим, что $\Theta_n(\sigma, 0) = |d\gamma_n/d\sigma|^2$ и $\Theta_n(\sigma, \delta) = \delta^2 \mathcal{E}(y_n^\delta)(\sigma\delta)$ на $I \times (0, \varepsilon)$. Так как γ_n — геодезическая риманова многообразия (M_1, h), а $\mathcal{E}$ — интеграл энергии системы $\mathit{\Gamma}_1$, то из указанных равенств следует, что значения функции $\Theta_n : I \times [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ от аргумента $\sigma \in I$ не зависят. Поэтому формула $\theta_n(\delta) = \sqrt{\Theta_n(\sigma, \delta)} + t_0$ определяет непрерывное отображение $\theta_n : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$.

Выберем $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ так, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ и $|\theta_n(\delta) - \theta_n(0)| < m$ для всех $\delta \in [0, \varepsilon_1]$. Положим
$$t_{*n} = \min_{\delta \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]} \theta_n(\delta) \quad \text{и} \quad t_n^* = \max_{\delta \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]} \theta_n(\delta). \tag{18}$$

По построению $t_n^* < \theta_n(0) + m$ и $t_{*n+1} > \theta_{n+1}(0) - m$. Отсюда и из (16)
$$t_{*n+1} > \widehat{d}_{k_{n+1}}(\widehat{a}, \widehat{b}) + t_0 - m > \widehat{d}_{k_n}(\widehat{a}, \widehat{b}) + t_0 + m > t_n^*. \tag{19}$$

В силу (16) также $\widehat{d}_{k_n}(\widehat{a}, \widehat{b}) > \widehat{d}_0(\widehat{a}, \widehat{b}) + 2mn$. Поэтому согласно (19) имеет место неравенство $t_{*n} > \widehat{d}_0(\widehat{a}, \widehat{b}) + t_0 + m(2n-1)$. Следовательно,
$$\lim_{n \to +\infty} t_{*n} \geq \lim_{n \to +\infty} m(2n-1) = +\infty. \tag{20}$$

Поскольку $p^\Omega : \mathit{\Omega}(\widehat{M_1}, \widehat{a}, \widehat{b}) \to D_1$ — биекция, то $\widehat{d}_0(\widehat{a}, \widehat{b}) = d_{D_1}(a, b)$. Кроме того, $t_{*n} > \widehat{d}_0(\widehat{a}, \widehat{b}) + t_0$ при $n > 0$. Отсюда и из (14) для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение
$$J_n \times \{b\} = [t_{*n}, t_n^*] \times \{b\} \subset I_D^+(v). \tag{21}$$

Согласно (19)–(21) построенные последовательности $\{t_{*n}\}$ и $\{t_n^*\}$ обладают первыми тремя свойствами из утверждения теоремы 2. Для доказательства остальных свойств рассмотрим произвольное число t из отрезка $J_n = [t_{*n}, t_n^*]$ и положим $w = (t, b)$. В силу (18) и непрерывности функции θ_n найдется такое $\delta \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, что $\theta_n(\delta) = t$.

С помощью формул (17) построим гладкий путь $\gamma_n^\delta : I \to M_1$ и движение $y_n^\delta : [0, \delta] \to M_1$ натуральной гироскопической системы $\mathit{\Gamma}_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$. Поскольку V — вариация с закрепленными концами, то $y_n^\delta(0) = \gamma_n^\delta(0) = V(0, \delta) = a$ и $y_n^\delta(\delta) = \gamma_n^\delta(1) = V(1, \delta) = b$. Так как все пути вариации V гомотопны геодезической γ_n, то $\gamma_n^\delta \in D_1$. Кроме того, $\delta\sqrt{\mathcal{E}(y_n^\delta)} + t_0 = \theta_n(\delta) = t$.

Положим далее $y = y_n^\delta$ и посредством формул (6) и (7) определим число $\beta > 0$ и гладкую кривую $x = Q(y)$. Тогда $Q \circ P(x) = Q \circ P \circ Q(y) = Q(y) = x$ и по теореме 1 кривая $x : [0, \beta] \to M$ является движением гироскопической системы $\mathit{\Gamma} = (M, g, F, u)$. При этом $x(0) = (z_y(0), y(0)) = (t_0, a) = v$ и $x(\beta) = (z_y(\delta), y(\delta)) = (\delta\sqrt{\mathcal{E}(y)} + t_0, b) = (t, b) = w$. Следовательно, x — решение двухточечной краевой задачи (1)–(3).

Если $\gamma_x : I \to M$ — путь, определенный формулой $\gamma_x(\sigma) = x(\sigma\beta)$, то $p_1 \circ \gamma_x(\sigma) = p_1 \circ x(\sigma\beta) = y(\sigma\delta) = \gamma_n^\delta(\sigma)$. Отсюда и из включения $\gamma_n^\delta \in D_1 = p_{1*}^\Omega(D)$ следует $\gamma_x \in D$. Таким образом, движение x соответствует компоненте $D \in \pi_0(\mathit{\Omega}(M, v, M_0^b))$.

Если $t_{*n} = t_n^*$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $\theta_n(\delta) = t_{*n}$ для всех $\delta \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$. При этом все построенные указанным выше способом движения $x : [0, \beta] \to M$ системы $\mathit{\Gamma} = (M, g, F, u)$ будут удовлетворять равенству $x(\beta) = (t_{*n}, b)$. $\square$

Согласно лемме 3 из [3] точка $w_1 = (d_{D_1}(a,b)+t_0, b)$ принадлежит причинному будущему точки $v = (t_0, a)$. Для $t \in J_n$, $n \in \mathbb{N}$, определим гладкую кривую $z : [d_{D_1}(a,b) + t_0, t] \to M$, полагая $z(s) = (s, b)$ для всех $s \in [d_{D_1}(a,b) + t_0, t]$. В силу неравенств $t \geq t_{*n} > d_{D_1}(a,b) + t_0 + m(2n-1)$ она времениподобна, направлена в будущее, имеет начало $z(d_{D_1}(a,b) + t_0) = w_1$ и конец $w = (t, b)$. Значит, w принадлежит хронологическому будущему точки w_1. В таких условиях для лоренцевой функции расстояния $d : M \times M \to \mathbb{R}$ справедливо обратное неравенство треугольника $d(v,w) \geq d(v,w_1) + d(w_1,w)$ ([1], с. 84).

Кривая z имеет длину $L(z) = \sqrt{f_1(b)}(t - d_{D_1}(a,b) - t_0)$. Поэтому из определения функции d и неравенств предыдущего абзаца следует $d(v,w) \geq d(w_1,w) \geq L(z) > \sqrt{f(b)}m(2n-1)$. Таким образом, лоренцево расстояние от начальной точки v до точек $w \in I^+(v)$, для которых по теореме 2 задача (1)–(3) имеет решение, может принимать сколь угодно большие значения.

Отметим, что из условия $I^{\pi}_{[F_1]} \neq 0$ вытекает, что функционалы действия систем $\Gamma = (M, g, F, u)$ и $\Gamma_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$ многозначны [5], [4]. В более простой ситуации, когда $I^{\pi}_{[F_1]} = 0$, по теореме 3 из [3] для произвольных $v = (t_0, a)$, $D \in \pi_0(\Omega(M, v, M_0^b))$ и почти любой точки $w = (t, b) \in (d_{D_1}(a,b) + t_0, +\infty) \times \{b\}$ двухточечная краевая задача (1)–(3) имеет соответствующее D решение. Поэтому данный случай здесь не рассматривается.

4. Примеры и приложения

Пример 1. Рассмотрим гироскопическую систему $\Gamma_{RN} = (M, g, F, u)$ из раздела 1, описывающую движения электрически заряженной пробной частицы в гравитационном и электромагнитном полях черной дыры Рейсснера–Нордстрема с магнитным зарядом $\varkappa$.

В этой ситуации риманово многообразие (M_1, h) полно [3], гомоморфизм Гуревича $\chi_{M_1} : \pi_2(M_1, a) \to H_2(M_1)$ является изоморфизмом и $H_2(M_1) \cong \mathbb{Z}$. Так как F_2 — форма площади единичной сферы и $F_1 = (e/m)\varkappa q^* F_2$, то из предыдущего следует $\operatorname{im} I^{\pi}_{[F_1]} = \operatorname{im} I_{[F_1]} = (e/m)\varkappa 4\pi\mathbb{Z}$. Таким образом, $I^{\pi}_{[F_1]} \neq 0$.

В силу односвязности многообразия M_1 для любых точек $a, b \in M_1$ и числа $t_0 \in \mathbb{R}$ пространства $\Omega(M_1, a, b)$ и $\Omega(M, v, M_0^b)$ линейно связны. Поэтому можно полагать $D_1 = \Omega(M_1, a, b)$ и $D = \Omega(M, v, M_0^b)$.

Для точек $a, b \in M_1$ определены радиальные лучи $l_a = (r_+, +\infty) \times q(a)$ и $l_b = (r_+, +\infty) \times q(b)$, где $q : M_1 \to S^2$ — естественная проекция. Если эти лучи не совпадают и не являются диаметрально противоположными, то точки a и b не сопряжены на геодезических риманова многообразия (M_1, h) [3].

Из указанных свойств системы $\Gamma_{RN} = (M, g, F, u)$ вытекает

Следствие. Если $\varkappa \neq 0$ и содержащие точки $a, b \in M_1$ радиальные лучи l_a и l_b не совпадают и не диаметрально противоположны, то для любого числа $t_0 \in \mathbb{R}$, точки $v = (t_0, a)$ и единственной компоненты $D = \Omega(M, v, M_0^b)$ существуют последовательности действительных чисел $\{t_{*n}\}$ и $\{t_n^*\}$, $n \in \mathbb{N}$, обладающие всеми свойствами из утверждения теоремы 2 по отношению к гироскопической системе $\Gamma = \Gamma_{RN}$.

Пример 2. Пусть числа $e, m, \varkappa \in \mathbb{R}$, $m > 0$, удовлетворяют равенству $e\varkappa/m = 1$, $F_1 = F_2$ — форма площади единичной сферы $(M_1, h) = (S^2, g_2)$ с центром в точке $O = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, а функция f_1 на M_1 тождественно равна единице. Тогда соответствующие системы $\Gamma_1 = (M_1, h, F_1, u_1)$ и $\Gamma_{\mathrm{Dir}} = (M, g, F, u)$ описывают динамику пробной частицы с электрическим зарядом e и массой m по поверхности M_1 под действием магнитного поля монополя Дирака с магнитным зарядом $\varkappa$, расположенного в точке O. В этом случае имеется возможность явно найти решения двухточечной краевой задачи (1)–(3) и сопоставить полученные результаты с утверждениями теоремы 2.

Траекториями движений системы Γ_1 являются плоские сечения поверхности $M_1 \subset \mathbb{R}^3$. Для каждого такого сечения T можно выбрать систему координат в $\mathbb{R}^3$ и параметризацию $r(\varphi, \psi) = (\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi)$ сферы S^2, относительно которой T описывается уравнением $\varphi = const$. В координатах (φ, ψ) уравнение (12) превращается в систему

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \cos\varphi\sin\varphi(\frac{d\psi}{d\tau})^2 = -\cos\varphi\frac{d\psi}{d\tau},$$
$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} - 2\operatorname{tg}\varphi\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Отсюда при $\varphi = \mathrm{const}$ следует $d\psi/d\tau = -1/\sin\varphi$. Поэтому скорость соответствующего движения $r(\tau)$ постоянна и равна $v = |dr/d\tau| = \operatorname{ctg}\varphi$.

Для точек $a, b \in M_1$ обозначим буквой c половину длины отрезка $[ab] \subset \mathbb{R}^3$, символом P_0 — плоскость в $\mathbb{R}^3$, содержащую a, b и O, а символом P_α — плоскость, полученную из P_0 поворотом вокруг прямой, проходящей через a и b, на угол $\alpha \in [0, \pi]$ в направлении, определяемом вектором $\vec{ab}$. При этом для траектории $T_\alpha = P_\alpha \cap M_1$ имеет место равенство $\varphi = \arcsin(\sqrt{1-c^2}\sin\alpha)$.

Пусть $y_{n\alpha}$ — движение частицы из a в b вдоль траектории T_α, совершающее n полных оборотов вокруг T_α. Тогда согласно доказанному $\mathcal{E}(y_{n\alpha}) = 1 + v^2 = 1/\sin^2\varphi$. Вычислив длину $L_1(y_{n\alpha})$ и время $\delta = L_1(y_{n\alpha})/v$, нетрудно убедиться, что величина $\theta_{n\alpha} = \delta\sqrt{\mathcal{E}(y_{n\alpha})}$ удовлетворяет равенству

$$\theta_{n\alpha} = \begin{cases} 2\pi - 2\arcsin(c/\cos\varphi) + 2\pi n & \text{при} \quad \alpha \in (0, \pi/2]; \\ 2\arcsin(c/\cos\varphi) + 2\pi n & \text{при} \quad \alpha \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Но тогда

$$\theta_{*n} = \inf_{\alpha\in(0,\pi)} \theta_{n\alpha} = 2\arcsin c + 2\pi n \quad \text{и} \quad \theta_n^* = \sup_{\alpha\in(0,\pi)} \theta_{n\alpha} = 2\pi - 2\arcsin c + 2\pi n. \tag{22}$$

Выберем $t_0 \in \mathbb{R}$ и положим $v = (t_0, a)$ и $x_{n\alpha} = Q(y_{n\alpha})$. По теореме 1 построенная кривая $x_{n\alpha} : [0, \beta] \to M$ является движением гироскопической системы релятивистского типа Γ_{Dir}. Согласно (6) и (7) это движение из точки $x_{n\alpha}(0) = (z_{y_{n\alpha}}(0), y_{n\alpha}(0)) = (t_0, a) = v$ в точку $x_{n\alpha}(\beta) = (z_{y_{n\alpha}}(\delta), y_{n\alpha}(\delta)) = (\theta_{n\alpha} + t_0, b)$. В силу (22) число $\theta_{n\alpha} + t_0$ лежит в интервале $(\theta_{*n} + t_0, \theta_n^* + t_0)$. Таким образом, любые последовательности $\{t_{*n}\}$ и $\{t_n^*\}$, удовлетворяющие неравенствам $\theta_{*n} + t_0 < t_{*n} < t_n^* < \theta_n^* + t_0$, обладают первыми четырьмя свойствами из утверждения теоремы 2.

Из (22) также следует, что при увеличении расстояния между точками a и b на сфере (M_1, h) интервалы $(\theta_{*n} + t_0, \theta_n^* + t_0)$ уменьшаются. При $c \to 1$ они стремятся к пустым множествам. Поэтому если точки a и b диаметрально противоположны, то при любом $t \in \mathbb{R}$ для точки $w = (t, b)$ и системы Γ_{Dir} задача (1)–(3) не имеет решений.

Литература

[1] Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия* (Мир, М., 1985).

[2] Яковлев Е.И. *Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике*, Матем. заметки **59** (3), 437–449 (1996).

[3] Яковлев Е.И. *О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа*, Алгебра и анализ **9** (2), 256–271 (1997).

[4] Новиков С.П. *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса*, УМН **37** (5), 3–49 (1982).

[5] Яковлев Е.И. *Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами*, Современ. матем. Фундамент. направления **22**, 100–126 (2007).
[6] Новиков И.Д., Фролов В.П. *Физика черных дыр* (Наука, М., 1986).
[7] Ершов Ю.В., Яковлев Е.И. *Обобщенные функции расстояния римановых многообразий и движения гироскопических систем*, Сиб. матем. журн. **49** (1), 87–100 (2008).
[8] Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ* (Наука, М., 1967).
[9] Яковлев Е.И. *Некоторые двухточечные краевые задачи для дифференциальных уравнений* 2-*го порядка с предельными пульверизациями*, Дифференц. и интеграл. уравнения: Межвуз. сб., Горький, ГГУ, 19–22 (1988).

Е.И. Яковлев

профессор, кафедра геометрии и высшей алгебры,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, г. Н. Новгород, 603950, Россия,

e-mail: yei@uic.nnov.ru

E.I. Yakovlev

Two-point boundary value problem for gyroscopic systems in some Lorentzian manifolds

Abstract. We investigate dynamics of gyroscopic systems of a relativistic type with multivalued action functionals. We suppose that configuration Lorentzian manifolds have the structure of the twisted product. Earlier solvability of the two-point boundary value problem for such systems was proved only in the situation when the Lorentzian distance from the initial point to the final point was limited. In this work we obtain a new theorem of the existence. According to this theorem the specified distance to achievable points may be arbitrary large. The result is applied to the dynamics of a charged test particle in the external space-time of the Reissner–Nordström black hole.

Keywords: Lorentzian manifold, Riemannian manifold, gyroscopic system with multivalued action functional, two-point boundary value problem, Reissner–Nordström space-time.

E.I. Yakovlev

Professor, Chair of Geometry and Higher Algebra,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., N. Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: yei@uic.nnov.ru