УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 552–568 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.958:532 doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.552-568

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе доказывается обобщенная разрешимость задачи, описывающей процесс нестационарной насыщенно-ненасыщенной фильтрации жидкости в пористой среде с условием односторонней проницаемости на части границы. Следует отметить, что возникающее при этом вариационное неравенство является вариационным неравенством переменного типа: в зоне насыщенной фильтрации – эллиптического и параболического – в противном случае. При обобщенной формулировке рассматриваемой задачи используется ставший уже классическим переход с помощью преобразования Кирхгофа к эквивалентной, более удобной для исследования, вариационной задаче. Кроме того, рассматривается наиболее интересный с точки зрения приложений случай, когда преобразование Кирхгофа отображает вещественную ось в ограниченную снизу полуось $[-\gamma,+\infty)$. При этом полагается, что значение преобразования Кирхгофа в точке $-\gamma$ равно нулю. Наряду с исходной задачей с ограничением $u(x,t)\geq-\gamma$, рассматривается так называемая «доопределенная» задача без ограничений, при формулировке которой функция, порождаемая преобразованием Кирхгофа, продолжается нулем на $(-\infty,-\gamma)$. Приводятся определения обобщенных решений этих задач в виде вариационных неравенств. Доказательство теоремы существования обобщенного решения «доопределенной» задачи проводится с помощью методов полудискретизации, метода Галеркина и штрафа. В заключение доказывается, что решение «доопределенной» задачи является решением исходной.

Ключевые слова: фильтрация, вариационное неравенство, преобразование Кирхгофа, метод полудискретизации со штрафом, метод Галеркина

Введение

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [1], где доказано существование обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения нелинейной нестационарной фильтрации вида (см. [2, с. 95])

$$m\,\frac{\partial s(p(x,t))}{\partial t}-\operatorname{div}\big(b(s(p(x,t)))(\nabla p(x,t)-\rho g)\big)=f(s(p(x,t))). \tag{1}$$

Здесь $x\in\Omega$, Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n>1$, искомая функция p – давление, $s(p)$ – насыщенность, $b(s(p))$ – относительная фазовая проницаемость, m – пористость среды, $\rho=\mathrm{const}>0$ – плотность жидкости, g – вектор ускорения свободного падения, t – время.

При исследовании разрешимости начально-краевых задач для уравнения (1) часто с помощью преобразования Кирхгофа

$$\vartheta(p)=\int\limits_0^p b(s(\xi))\,d\xi \tag{2}$$

переходят от неизвестной функции $p(x,t)$ к функции $u(x,t) = \vartheta(p(x,t))$, удовлетворяющей следующему уравнению:

$$m\,\frac{\partial\widetilde{\varphi}(u)}{\partial t} - \operatorname{div}\bigl(\nabla u - b(\widetilde{\varphi}(u))\rho g\bigr) = f(\widetilde{\varphi}(u)), \quad \widetilde{\varphi}(u) = s(\vartheta^{(-1)}(u)). \tag{3}$$

Разрешимость начально-краевой задачи для уравнения (3) при условии, что область значений преобразования Кирхгофа есть вся числовая ось, нетрудно получить, используя методику работы [3]. В [1] этот результат обобщается на случай, когда преобразование Кирхгофа осуществляет отображение вещественной оси $\mathbb{R}$ на полуось вида $[-\gamma,+\infty)$.

С точки зрения приложений такое отображение естественно, поскольку для весьма широкого класса функций s и b интеграл

$$\vartheta(-\infty) = \int\limits_0^{-\infty} b(s(\xi))\,d\xi, \tag{4}$$

является сходящимся. Например, при

$$s(p) = \begin{pmatrix} (1-p)^{-\alpha}, & p<0 \\ 1, & p\ge 0, \end{pmatrix} \quad b(s) = s^{\beta}, \quad \alpha>0, \quad \beta>0, \quad \alpha\,\beta>1, \tag{5}$$

преобразование Кихгофа отображает $\mathbb{R}$ на полуось вида $[-\gamma,+\infty)$, где

$$\gamma = \int\limits_{-\infty}^{0} b(s(\xi))\,d\xi = (\alpha\beta-1)^{-1}.$$

Подчеркнем, что в задачах теории фильтрации величина γ называется макроскопической капиллярной длиной. В работе [4] установлено, что она ограничена.

Цель настоящей работы – доказать существование обобщенного решения вариационного неравенства, возникающего при описании задачи нелинейной нестационарной фильтрации жидкости в пористой среде с условием односторонней проницаемости на части границы.

Коротко о близких по тематике работах. Задача насыщенно-ненасыщенной фильтрации была объектом исследования многих авторов. Большая часть опубликованных работ по этой тематике посвящена построению приближенных методов решения этой задачи и обсуждению результатов численных экспериментов (см., например, [5–10]. Публикации теоретического характера, посвященные исследованию вопросов существования, единственности решения, изучению его свойств, немногочисленны. Среди них упомянутая выше работа [3], а также работы [11, 12], в которых исследуется единственность решения задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрации. Авторы работ [13, 14] рассматривали случай, когда область значений функции ϑ – полуось $[-\gamma,+\infty)$. В [13] доказана теорема существования слабого решения (без предположения о существовании $\partial s(p)/\partial t$) для одномерной задачи. В работе [14] рассматривается задача насыщенно-ненасыщенной фильтрации при $b(s)=0$, если $s\le\widehat{s}$, где $\widehat{s}$ – так называемая минимальная влажность грунта. Авторы этой работы доказывают существование решения некоторой регуляризованной задачи. Отметим также работы [15, 16], посвященные исследованию разрешимости задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации.

1. Постановка задачи

Уравнение (1) будем рассматривать в ограниченной области Ω пространства $R^n, n \geq 1$, с липшицевой границей $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_1 \bigcup \overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$, предполагая, что при $t \in (0,T]$ выполнены следующие краевые условия

$$p(x,t)q_\nu(x,t) = 0, \quad p(x,t) \leq 0, \quad q_\nu(x,t) \geq 0 \quad x \in \Gamma_1; \quad p(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_2. \tag{6}$$

Здесь $q = -b(s(p))(\nabla p - \rho g)$, $q_\nu(x,t) = q \cdot \nu$, $q \cdot \nu$ – стандартное скалярное произведение векторов q и ν в пространстве R^n, ν – внешняя единичная нормаль к Γ. Начальные условия задаются в виде

$$s\big(p(x,0)\big) = s\big(p_0(x)\big), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

где p_0 – заданная функция. Используя (6), (7), нетрудно убедиться в том, что для функции $u(x,t) = \vartheta(p(x,t))$ справедливы следующие граничные и начальные условия:

$$u(x,y)\widetilde{q}_\nu(x,t) = 0, \quad u(x,t) \leq 0, \quad \widetilde{q}_\nu(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T]; \tag{8}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T]; \tag{9}$$

$$\widetilde{\varphi}\big(u(x,0)\big) = \widetilde{\varphi}\big(u_0(x)\big), \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

где $\widetilde{q} = -(\nabla u - b(\widetilde{\varphi}(u))\rho g)$, $u_0 = \vartheta(p_0)$.

Пусть V – подпространство функций пространства $W_2^1(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_2,

$$K = \big\{u \in V : u(x) \leq 0 \ \text{ п. вс. на } \ \Gamma_1\big\}.$$

Норму в пространстве V определим соотношением

$$\|v\|_1^2 = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 dx.$$

В дальнейшем будут использоваться обозначения функциональных пространств такие же, как и в монографии [14].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (3), (8)–(10) назовем функцию u из $L_2(0,T;K)$, для которой справедливы следующие условия:

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}(u)}{\partial t} \in L_2(0,T;V^*), \quad u(x,t) \geq -\gamma \ \text{ п. вс. в } \ Q_T,$$

$$\widetilde{\varphi}\big(u(x,0)\big) = \widetilde{\varphi}\big(u_0(x)\big) \ \text{ п. вс. в } \ \Omega,$$

и для любой функции $z \in L_2(0,T;K)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^T \Big\langle m\frac{\partial\widetilde{\varphi}(u)}{\partial t}, z-u\Big\rangle dt + \int\limits_{Q_T} \nabla u \cdot \nabla(z-u)\,dxdt \geq$$
$$\geq \int\limits_{Q_T} \Big\{b(\widetilde{\varphi}(u))\big(\rho g \cdot \nabla(z-u)\big) + f(\widetilde{\varphi}(u))(z-u)\Big\}\,dxdt. \tag{11}$$

Здесь $Q_T = (0,T) \times \Omega$, V^* – пространство, сопряженное к V, $\langle v,z\rangle$ – значение функционала $v \in V^*$ на элементе $z \in V$.

Определение 2. Функцию p, определенную в Q_T, назовем обобщенным решением задачи (1), (6), (7), если

$$\vartheta(p) \in L_2(0,T;K), \quad \frac{\partial s(p)}{\partial t} \in L_2(0,T;V^*), \quad s\bigl(p(x,0)\bigr) = s\bigl(p_0(x)\bigr) \text{ п. вс. в } \Omega,$$

и для любой функции $z \in L_2(0,T;K)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^T \Bigl\langle m\frac{\partial s(p)}{\partial t}, z-\vartheta(p)\Bigr\rangle\,dt + \\ + \int\limits_{Q_T} b(s(p))(\nabla p - \rho g)\cdot\nabla\bigl(z-\vartheta(p)\bigr)\,dxdt \ge \int\limits_{Q_T} f(s(p))\bigl(z-\vartheta(p)\bigr)\,dxdt. \tag{12}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для функций s, b выполнены следующие условия.

$\mathbf{A_1}$. Функция $s:\mathbb{R}\to(0,1]$ – неубывающая непрерывная и такая, что $s(p)=1$ для любого $p\ge 0$, $\lim\limits_{p\to-\infty} s(p) = 0$.

$\mathbf{A_2}$. Функция $b:[0,1]\to[0,1]$ – неубывающая непрерывная и удовлетворяет условиям $b(0)=0$, $b(1)=1$.

$\mathbf{A_3}$. Отображение $\vartheta:\mathbb{R}\to[-\gamma,+\infty)$, $-\infty<-\gamma<0$, определенное формулой (2), взаимно однозначно, где величина $-\gamma=\vartheta(-\infty)$ определена равенством (4).

2. Теоремы существования

Теорема 1. *Пусть функции s, b и ϑ удовлетворяют условиям $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, функция $f(\xi)$ непрерывна на $[0,1]$ и $f(0)=0$. Тогда при любой функции $u_0\in K$ существует хотя бы одно обобщенное решение задачи* (3), (8)–(10).

Доказательство. Отметим прежде всего свойства функции $\widetilde{\varphi}$, вытекающие из условий $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$: область определения этой функции – множество $[-\gamma,+\infty)$; $\widetilde{\varphi}(-\gamma)=0$; $\widetilde{\varphi}(\xi)=1$ при неотрицательных ξ; $\widetilde{\varphi}(\xi)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция на отрезке $[-\gamma,0]$.

Пусть, далее,

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}(\xi), & -\gamma\le\xi<\infty, \\ 0, & -\infty<\xi<-\gamma. \end{cases} \tag{13}$$

Наряду с (3), (8)–(10) будем рассматривать задачу, называемую в дальнейшем «доопределенной», обобщенное решение которой определим с помощью следующих соотношений:

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}\in L_2(0,T;V^*), \quad u\in L_2(0,T;K), \quad \varphi\bigl(u(x,0)\bigr)=\varphi\bigl(u_0(x)\bigr) \text{ п. вс. в } \Omega,$$

и для любой функции $z\in L_2(0,T;K)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^T \Bigl\langle m\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}, z-u\Bigr\rangle\,dt + \int\limits_{Q_T}\nabla u\cdot\nabla(z-u)\,dxdt \ge \\ \ge \int\limits_{Q_T}\Bigl\{b(\varphi(u))\bigl(\rho g\cdot\nabla(z-u)\bigr) + f(\varphi(u))(z-u)\Bigr\}\,dxdt. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что если функция u является решением «доопределенной» задачи и, кроме того, $u(x,t)\ge-\gamma$ для почти всех $(x,t)\in Q_T$, то u – решение задачи (3), (8)–(10).

Доказательство существования обобщенного решения «доопределенной» задачи проведем с помощью метода полудискретизации со штрафом.

Пусть $\bar{\omega}_\tau = \{t = k\tau, k = 0, 1, \ldots, M, M\tau = T\}$ – сетка на отрезке $[0, T]$, $\omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}$. Функцию $u_\tau(t)$ назовем полудискретным решением «доопределенной» задачи, если $u_\tau(t) \in V$ для любого $t \in \omega_\tau$, $\varphi(u_\tau(x, 0)) = \varphi(u_0(x))$ почти всюду в области Ω и для любой функции $z \in V$ выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega m\frac{\varphi(\widehat{u}_\tau) - \varphi(u_\tau)}{\tau} z\,dx + \int\limits_\Omega \nabla\widehat{u}_\tau \cdot \nabla z\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_1} \widehat{u}_\tau^+ z\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega \Big\{ b(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(\rho g \cdot \nabla z) + f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,z \Big\}\,dx. \quad (15)$$

Здесь $\widehat{u}_\tau = u_\tau(t+\tau)$, $\widehat{u}_\tau^+ = (|\widehat{u}_\tau| + \widehat{u}_\tau)/2$.

Дальнейшее доказательство теоремы 1 для удобства представим в виде этапов 1–5.

1. *Существует хотя бы одно решение полудискретной задачи.*

Доказательство этого утверждения проведем с помощью метода Галеркина. Очевидно, достаточно установить при любом $t \in \omega_\tau$ существование функции $\widehat{u}_\tau$, удовлетворяющей (15), в предположении, что u_τ известна. Пусть $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – линейно независимая система базисных функций в пространстве V. Приближенные по методу Галеркина решения будем искать в виде

$$\widehat{u}_\tau^N = \sum_{k=1}^N \zeta_k\,\psi_k.$$

Неизвестные коэффициенты ζ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, определим из системы уравнений

$$m\int\limits_\Omega (\varphi(\widehat{u}_\tau^N) - \varphi(u_\tau))\psi_k\,dx + \int\limits_\Omega \tau(\nabla\widehat{u}_\tau^N \cdot \nabla\psi_k)\,dx + \frac{\tau}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_1} (\widehat{u}_\tau^N)^+\psi_k\,dx =$$
$$= \tau\int\limits_\Omega \Big\{ b(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))(\rho g \cdot \nabla\psi_k) + f(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))\psi_k \Big\}\,dx. \quad (16)$$

Докажем, что система (16) разрешима. Пусть $\mathbf{H} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ – нелинейный оператор такой, что k-я компонента вектора $\mathbf{H}(\zeta)$ определяется равенством

$$\{\mathbf{H}(\zeta)\}_k = m\int\limits_\Omega (\varphi(\widehat{u}_\tau^N) - \varphi(u_\tau))\psi_k\,dx + \int\limits_\Omega \tau(\nabla\widehat{u}_\tau^N \cdot \nabla\psi_k)\,dx + \frac{\tau}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_1} (\widehat{u}_\tau^N)^+\psi_k\,dx -$$
$$- \tau\int\limits_\Omega \Big\{ b(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))(\rho g \cdot \nabla\psi_k) + f(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))\psi_k \Big\}\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Очевидно, что $\mathbf{H}$ – непрерывный оператор и равенство $\mathbf{H}(\zeta) = 0$ эквивалентно системе (16). В силу топологической леммы (см., например, [17, с. 66]) для доказательства существования решения системы Галеркина достаточно убедиться в том, что $\mathbf{H}(\zeta) \cdot \zeta \ge 0$ на сфере достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Имеем

$$\mathbf{H}(\zeta) \cdot \zeta = m\int\limits_\Omega (\varphi(\widehat{u}_\tau^N) - \varphi(u_\tau))\widehat{u}_\tau^N\,dx + \tau\|\widehat{u}_\tau^N\|_1^2 + \frac{\tau}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_1} (\widehat{u}_\tau^N)^+\,\widehat{u}_\tau^N\,dx -$$
$$- \tau\int\limits_\Omega b(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))\,(\rho g \cdot \nabla\widehat{u}_\tau^N)\,dx - \tau\int\limits_\Omega f(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))\widehat{u}_\tau^N\,dx. \quad (17)$$

Для оценки первого, четвертого и пятого слагаемых в правой части равенства (17) воспользуемся ограниченностью функций f, φ, b, а также неравенствами Коши–Буняковского, Коши с ε и Фридрихса. В результате получим

$$\left| m \int\limits_\Omega (\varphi(\widehat{u}_\tau^N) - \varphi(u_\tau))\, \widehat{u}_\tau^N \, dx \right| \le 2m \int\limits_\Omega \left| u_\tau^N \right| \, dx \le \widetilde{\delta} \|\widehat{u}_\tau^N\|_1^2 + \frac{1}{\widetilde{\delta}}\, m^2 C_F^2;$$

$$\tau \left| \int\limits_\Omega b(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))(\rho g \cdot \nabla \widehat{u}_\tau^N)\, dx \right| \le \tau c \sum_{i=0}^n \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial \widehat{u}_\tau^N}{\partial x_i} \right| \, dx \le \widetilde{\delta} \|\widehat{u}_\tau^N\|_1^2 + \frac{\tau^2}{4\widetilde{\delta}}\, c^2;$$

$$\tau \left| \int\limits_\Omega f(\varphi(\widehat{u}_\tau^N))\, \widehat{u}_\tau^N \, dx \right| \le \widetilde{\delta} \|\widehat{u}_\tau^N\|_1^2 + \frac{\tau^2}{4\widetilde{\delta}}\, c^2 C_F^2.$$

Здесь $\widetilde{\delta}$ – произвольное положительное число, C_F – постоянная Фридрихса, $c = \max\Big\{ \max\limits_{\xi \in [0,1]} |f(\xi)|, \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\rho g_i| \Big\}$.

Для третьего слагаемого правой части равенства (17) справедливо неравенство

$$\frac{\tau}{\varepsilon} \int\limits_{\Gamma_1} (\widehat{u}_\tau^N)^+ \widehat{u}_\tau^N \, dx = \frac{\tau}{\varepsilon} \int\limits_{\Gamma_1} (\widehat{u}_\tau^N)^+ \left((\widehat{u}_\tau^N)^+ - (\widehat{u}_\tau^N)^- \right) dx \ge 0. \tag{18}$$

Из полученных оценок, неравенства (18) и представления (17) следует, что

$$\mathbf{H}(\zeta) \cdot \zeta \ge (\tau - 3\,\widetilde{\delta}) \|\widehat{u}_\tau^N\|_1^2 - \frac{1}{\widetilde{\delta}}\, \widetilde{\theta}, \tag{19}$$

где $\widetilde{\theta} = m^2 C_F^2 + \dfrac{\tau^2 c^2}{4}\,(1 + C_F^2)$. Очевидно, что можно указать число $\delta^* > 0$, при котором справедливо неравенство $\tau - 3\delta^* \ge \beta = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, существует сфера $S \subset \mathbb{R}^N$ с центром в начале координат, на которой правая часть неравенства (19) при $\widetilde{\delta} = \delta^*$ неотрицательна. Внутри этой сферы существует хотя бы одно решение системы Галеркина, и для него справедлива оценка

$$\|\widehat{u}_\tau^N\|_1^2 \le C, \tag{20}$$

где $C = \widetilde{\theta}/(\delta^* \beta)$.

Из (20) и слабой компактности ограниченного множества в пространстве $W_2^1(\Omega)$ следует существование подпоследовательности последовательности $\{\widehat{u}_\tau^N\}$, слабо сходящейся в этом пространстве к функции $\widehat{u}_\tau$ при $N \to \infty$. В дальнейшем ради сокращения записей подпоследовательность по обозначению отождествим со всей последовательностью.

Докажем, что функция $\widehat{u}_\tau$ является решением полудискретной задачи. Для этого в равенстве (16), зафиксировав k, перейдем к пределу при $N \to \infty$. При этом учтем, что по теореме Реллиха из слабой сходимости $\widehat{u}_\tau^N$ к $\widehat{u}_\tau$ в V вытекает, что

$$\widehat{u}_\tau^N \to \widehat{u}_\tau \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_2(\Omega),$$

и, следовательно,

$$\widehat{u}_\tau^N \to \widehat{u}_\tau \quad \text{п. вс. в} \quad \Omega. \tag{21}$$

Учитывая очевидное неравенство

$$\int\limits_\Omega \left(\left(\widehat{u}_\tau^N\right)^+ - \left(\widehat{u}_\tau\right)^+ \right)^2 dx \le \int\limits_\Omega \left(\widehat{u}_\tau^N - \widehat{u}_\tau\right)^2 dx$$

и соотношение (21), имеем $(\widehat{u}_\tau^N)^+ \to \widehat{u}_\tau^+$ в $L_2(\Omega)$. Вышесказанное позволяет выполнить предельный переход во всех слагаемых в равенствах (16) и доказать, что предельная функция является решением уравнения (15).

2. *Для решения полудискретной задачи* (15) *справедлива оценка*

$$u_\tau(x,t) \geq -\gamma \quad \textit{п. вс. в} \;\; \Omega \quad \forall t \in \omega_\tau. \tag{22}$$

Для доказательства (22) выберем в равенстве (15) $z = (\gamma + \widehat{u}_\tau)^-$ и запишем его в виде

$$\frac{m}{\tau}\int\limits_\Omega \varphi(\widehat{u}_\tau)(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\,dx - \frac{m}{\tau}\int\limits_\Omega \varphi(u_\tau)(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\,dx + \\ + \int\limits_\Omega \nabla\widehat{u}_\tau\cdot\nabla(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_1}(\widehat{u}_\tau)^+\,(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\,dx = \\ = \int\limits_\Omega \Big\{ b(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(\rho g\cdot\nabla(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-) + f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-)\Big\}\,dx. \tag{23}$$

Здесь $\xi^- = (|\xi| - \xi)/2$. Поскольку (см. определение (13)) $\varphi(\zeta) = 0$ при $\zeta \leq -\gamma$, а равенство $\psi(\zeta) = 0$ для функции $\psi(\zeta) = (\gamma+\zeta)^-$ выполняется для $\zeta \geq -\gamma$, то $\varphi(\zeta)\,\psi(\zeta) \equiv \varphi(\zeta)\,(\gamma+\zeta)^- = 0$ при любых значениях ζ. Аналогично, имеем $\zeta^+ = 0$ при $\zeta \leq 0$, поэтому произведение $\zeta^+\,(\gamma+\zeta)^-$ равно нулю при любых ζ. Следовательно, первое и четвертое слагаемые в левой части равенства (23) равны нулю. Правая часть равенства (23) также равна нулю так, как $\nabla(\gamma+\widehat{u}_\tau)^- = 0$ в тех точках, где $(\gamma+\widehat{u}_\tau)^- = 0$ (см., например, [18, с. 45], [19, с. 150]), а из условий $b(0) = 0$ и $f(0) = 0$ следует, что $b(\varphi(\zeta))$ и $f(\varphi(\zeta))$ не равны нулю только тогда, когда $\zeta > -\gamma$.

Преобразуем третье слагаемое в левой части равенства (23):

$$\int\limits_\Omega \nabla\widehat{u}_\tau\cdot\nabla(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\,dx = -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma+\widehat{u}_\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\,dx = -\parallel(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\parallel_1^2. \tag{24}$$

Учитывая вышесказанное, равенство (23) запишем в виде

$$-\parallel(\gamma+\widehat{u}_\tau)^-\parallel_1^2 - \frac{m}{\tau}\int\limits_\Omega \varphi(u_\tau)\,(\gamma+\widehat{u}_\tau)^- dx = 0. \tag{25}$$

Оба слагаемых в левой части равенства (25) неположительны, а правая часть равна нулю, поэтому из (25) следует, что $\big(\gamma+\widehat{u}_\tau(x,t)\big)^- = 0$ почти всюду в Ω при всех $t \in \omega_\tau$. Оценка (22) доказана.

3. *Для решения полудискретной задачи* (15) *справедливы следующие априорные оценки*[1]

$$\int\limits_\Omega \Phi\,(u_\tau(t'))\,dx \leq C, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{u}_\tau(t)\|_1^2 \leq C, \quad \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{u}_\tau^+(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq C \quad \forall\, t' \in \omega_\tau, \tag{26}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\varphi_t\big(u_\tau(t)\big)\|_* \leq C \quad \forall\, t' \in \omega_\tau, \tag{27}$$

[1] Здесь и в дальнейшем буквой C будут обозначаться постоянные (возможно различные), зависящие лишь от исходных данных исследуемой задачи.

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int\limits_{\Omega}\big(\varphi(u_\tau(t+k\tau))-\varphi(u_\tau(t))\big)\big(u_\tau(t+k\tau)-u_\tau(t)\big)\,dx\le C, \tag{28}$$

где $\Phi(\xi)=\int\limits_0^\xi\big(\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)\big)\,d\zeta,\ \xi\in\mathbb{R},\ \|u\|_*$ – норма в пространстве V^*.

Для доказательства (26) выберем в (15) $z=\widehat{u}_\tau$, просуммируем почленно полученные равенства по $t\in\omega_\tau$ от 0 до $t'-\tau,\ t'\in\omega_\tau$. В результате будем иметь

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int\limits_\Omega m\,\frac{\varphi(\widehat{u}_\tau)-\varphi(u_\tau)}{\tau}\,\widehat{u}_\tau\,dx+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\,\|\widehat{u}_\tau\|_1^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int\limits_{\Gamma_1}\widehat{u}_\tau^+\widehat{u}_\tau\,dx=$$
$$=\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int\limits_\Omega\Big\{b(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(\rho g\cdot\nabla\widehat{u}_\tau)+f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,\widehat{u}_\tau\Big\}\,dx. \tag{29}$$

Правую часть равенства (29) обозначим через I, первое слагаемое в левой части оценим, используя неравенство (см. [3])

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int\limits_\Omega\frac{\varphi(\widehat{u}_\tau)-\varphi(u_\tau)}{\tau}\widehat{u}_\tau\,dx\ge\int\limits_\Omega\Phi\left(u_\tau(t')\right)\,dx-\int\limits_\Omega\Phi\left(u_0\right)\,dx. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{u}_\tau(t)\|_1^2+\int\limits_\Omega\Phi(u_\tau(t'))\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{u}_\tau^+\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\le\int\limits_\Omega\Phi(u_0)\,dx+\big|I\big|. \tag{31}$$

Учитывая ограниченность функций b и f, для I с помощью неравенств Коши–Буняковского, Коши с ε и Фридрихса нетрудно показать, что

$$\big|I\big|\le\widetilde{\delta}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{u}_\tau\|_1^2+\frac{C}{\widetilde{\delta}}, \tag{32}$$

где $\widetilde{\delta}=\mathrm{const}>0$. Неравенства (31) и (32) обеспечивают справедливость оценок (26).

Для доказательства (27) перепишем равенство (15) в следующем виде:

$$\left|\int\limits_\Omega\frac{\varphi(\widehat{u}_\tau)-\varphi(u_\tau)}{\tau}\,z\,dx\right|=$$
$$=\frac{1}{m}\left|\int\limits_\Omega\Big(b(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(\rho g\cdot\nabla z)+f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,z-\nabla\widehat{u}_\tau\cdot\nabla z\Big)\,dx-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_1}\widehat{u}_\tau^+z\,dx\right|. \tag{33}$$

Оценим правую часть равенства (33), используя ограниченность функций f, b, неравенства Коши–Буняковского, Фридрихса и неравенство вложения (см., например, [18, с. 51])

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\le C\|u\|_1^2, \tag{34}$$

в результате получим

$$\left|\int\limits_\Omega\frac{\varphi(\widehat{u}_\tau)-\varphi(u_\tau)}{\tau}\,z\,dx\right|\le C\|z(t)\|_1\left\{\|\widehat{u}_\tau(t)\|_1^2+\frac{1}{\varepsilon}\,\|\widehat{u}_\tau^+(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2+1\right\}. \tag{35}$$

Просуммируем неравенство (35) по $t\in\omega_\tau$ от 0 до $t'-\tau,\ t'\in\omega_\tau$. Результат, записанный с использованием нормы в сопряженном пространстве V^*, будет иметь вид

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\varphi_t\big(u_\tau(t)\big)\|_* \le C \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \Big(\|\widehat{u}_\tau(t)\|_1^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\widehat{u}_\tau^+(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 1 \Big). \tag{36}$$

Оценка (27) следует из соотношений (26) и (36).

Для доказательства (28) просуммируем обе части равенства (15) $t \in \omega_\tau$ от t' до $t' + (k-1)\tau$, в итоге будем иметь

$$\frac{m}{\tau} \int\limits_\Omega \big(\varphi(u_\tau(t'+k\tau)) - \varphi(u_\tau(t')) \big)\, z\, dx =$$
$$= \sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau} \Bigg\{ \int\limits_\Omega \Big(b(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(\rho g \cdot \nabla z) + f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\, z -$$
$$- \nabla \widehat{u}_\tau \cdot \nabla z \Big)\, dx - \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Gamma_1} \widehat{u}_\tau^+\, z\, dx \Bigg\}. \tag{37}$$

Положим в (37) $z = u_\tau(t'+k\tau) - u_\tau(t')$ и обозначим

$$J = \sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau} \Bigg\{ \int\limits_\Omega \Big(b(\varphi(\widehat{u}_\tau))(\rho g \cdot \nabla (u_\tau(t'+k\tau) - u_\tau(t'))) +$$
$$+ f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,(u_\tau(t'+k\tau) - u_\tau(t')) - \nabla \widehat{u}_\tau \cdot \nabla (u_\tau(t'+k\tau) - u_\tau(t')) \Big)\, dx -$$
$$- \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Gamma_1} \widehat{u}_\tau^+\, (u_\tau(t'+k\tau) - u_\tau(t'))\, dx \Bigg\}.$$

Оценим величину J, используя ограниченность функций f, φ, b, неравенство (34), Коши–Буняковского, Фридрихса, в результате получим

$$|J| \le C \sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau} \Big\{ \big(\|u_\tau(t'+k\tau)\|_1 + \|u_\tau(t')\|_1 \big) + \|\widehat{u}_\tau(t)\|_1 \big(\|u_\tau(t'+k\tau)\|_1 + \|u_\tau(t')\|_1 \big) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \|\widehat{u}_\tau^+\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \big(\|u_\tau(t'+k\tau)\|_1 + \|u_\tau(t')\|_1 \Big\} \le$$
$$\le C \left(\|u_\tau(t'+k\tau)\|_1 + \|u_\tau(t')\|_1 \right) \sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau} \big\{ \|\widehat{u}_\tau(t)\|_1 + \frac{1}{\varepsilon} \|\widehat{u}_\tau^+\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 1 \big\}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\tau} \sum_{t'=0}^{T-k\tau} \tau \int\limits_\Omega \big(\varphi(u_\tau(t'+k\tau)) - \varphi(u_\tau(t')) \big) \big(u_\tau(t'+k\tau) - u_\tau(t') \big)\, dx =$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{t'=0}^{T-k\tau} \tau J \le C \sum_{t'=0}^{T-k\tau} \tau \big(\|u_\tau(t'+k\tau)\|_1 + \|u_\tau(t')\|_1 \big) \times$$
$$\times \sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau} \big\{ \|\widehat{u}_\tau(t)\|_1 + \frac{1}{\varepsilon} \|\widehat{u}_\tau^+\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 1 \big\} \le$$
$$\le kC \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \big\{ \|\widehat{u}_\tau(t)\|_1^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\widehat{u}_\tau^+\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 1 \big\}.$$

Из последнего неравенства и оценок (26) следует (28).

4. *Существуют удовлетворяющая неравенству*

$$u(x,t) \geq -\gamma \quad \textit{п. вс. в} \quad Q_T \tag{38}$$

функция $u \in L_2(0,T;V)$ *и последовательности шагов* $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$ *такие, что при* $\tau \to 0$, $\varepsilon \to 0$

$$\Pi u_\tau \rightharpoonup u \;\text{ в }\; L_2(0,T;V), \tag{39}$$

$$\Pi\Phi(u_\tau) = \Phi(\Pi u_\tau) \to \Phi(u) \;\text{ п. в. в }\; Q_T, \tag{40}$$

$$\Pi u_\tau^- \to u^-, \quad \varphi(\Pi u_\tau) \to \varphi(u) \;\text{ п. в. в }\; Q_T, \tag{41}$$

$$\Pi u_\tau^+ \rightharpoonup u^+ \;\text{ в }\; L_2(0,T;V), \quad \Pi u_\tau^- \rightharpoonup u^- \;\text{ в }\; L_2(0,T;V), \tag{42}$$

$$\Pi\varphi_t(u_\tau) \rightharpoonup \frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} \;\text{ в }\; L_2(0,T;V^*). \tag{43}$$

Здесь символом $\rightharpoonup$ *обозначена слабая сходимость,* Πz *– кусочно-постоянное восполнение* z: $\Pi z(t) = \{z(k\tau) :\ k\tau \leq t < (k+1)\tau\}$.

Справедливость соотношения (39) следует из априорных оценок (26) и слабой компактности ограниченного множества в рефлексивном банаховом пространстве. Докажем, что функция u, определенная (39), удовлетворяет неравенству (38). Предположим обратное: пусть $Q' = \{(x,t) \in Q_T : u(x,t) < -\gamma\}$, $\operatorname{mes} Q' = \alpha_0 > 0$, $h_{Q'}$ – характеристическая функция Q'. Имеем

$$\gamma\alpha_0 < \int\limits_{Q'} (-u(x,t))\,dxdt = \int\limits_{Q_T} (-u(x,t))h_{Q'}(x,t)\,dxdt =$$

$$= \lim_{\tau,\varepsilon\to 0} \int\limits_{Q_T} (-u_\tau)h_{Q'}(x,t)\,dxdt \leq \gamma\alpha_0. \tag{44}$$

При получении последней оценки в (44) использовалось неравенство (22). Полученное противоречие доказывает, что (38) выполнено.

Утверждение (40) следует из (39), оценок (26), (28) и леммы 1.9 из [3]. Убедимся в справедливости соотношений (41). Заметим, что $\Phi(\xi) = 0$ для всех $\xi \geq 0$, поэтому $\Phi(u_\tau) = \Phi(-u_\tau^-)$, а $\Phi(u) = \Phi(-u^-)$, и, следовательно,

$$\Pi\Phi(-u_\tau^-) \to \Phi(-u^-) \;\text{ п. вс. в }\; Q_T \;\text{ при }\; \tau \to 0. \tag{45}$$

На $(-\gamma, 0]$ функция Φ монотонно возрастает и непрерывна, поэтому из (45) и (38) следует, что $\Pi u_\tau^- \to u^-$ п. вс. в Q_T. Из этого соотношения, равенства $\varphi(u_\tau) = \varphi(-u_\tau^-)$ и непрерывности функции φ следует (41). Убедимся в справедливости (42). Заметим, что из оценки (26) вытекает равномерная ограниченность последовательностей $\Pi\widehat{u}_\tau^-$ и $\Pi\widehat{u}_\tau^+$ по норме пространства $L_2(0,T;V)$. Значит, найдутся последовательность $\{\tau'\} \subset \{\tau\}$ и элементы z_1 и z_2 из $L_2(0,T;V)$ такие, что $\Pi u_{\tau'}^- \rightharpoonup z_1$ в $L_2(0,T;V)$, $\Pi u_{\tau'}^+ \rightharpoonup z_2$ в $L_2(0,T;V)$. Из равенства слабого предела и предела почти всюду (см. [20, с. 39]) следует, что $z_1 = u^-$. Переходя к пределу в равенстве $\Pi\, u_{\tau'}^+ = \Pi u_{\tau'} + \Pi u_{\tau'}^-$, нетрудно убедиться в том, что $z_2 = u^+$.

Заметим, что оценка (27) влечет существование подпоследовательности, для которой

$$\Pi\varphi_t(u_\tau) \rightharpoonup \xi \;\text{ в }\; L_2(0,T;V^*). \tag{46}$$

Докажем, что

$$\xi = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}. \tag{47}$$

Пусть $\bar z \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$, $\bar z(x,T)=0$, z – снос функции $\bar z$ в точки сетки $\bar\omega_\tau$. Воспользовавшись формулой суммирования по частям, запишем равенство

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_\Omega \varphi_t(u_\tau)\widehat z\,dx = -\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_\Omega \varphi(\widehat u_\tau)z_t\,dx - \int\limits_\Omega \varphi\big(u_0(x)\big)z(x,0)\,dx,$$

или

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Pi\varphi_t(u_\tau)\Pi\widehat z\,dxdt = -\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Pi\varphi(\widehat u_\tau)\Pi z_t\,dxdt - \int\limits_\Omega \varphi\big(u_0(x)\big)z(x,0)\,dx, \tag{48}$$

Учитывая (46), в равенстве (48) совершим предельный переход при $\tau,\varepsilon\to 0$. Тогда

$$\int\limits_0^T\langle\xi,\bar z\rangle\,dt = -\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \varphi(u)\frac{\partial\bar z}{\partial t}\,dxdt - \int\limits_\Omega \varphi\big(u_0(x)\big)\bar z(x,0)\,dx. \tag{49}$$

Из (49) нетрудно получить, во-первых, соотношение (43) и, во-вторых, равенство

$$\int\limits_\Omega \varphi\big(u(x,0)\big)\bar z(x,0)\,dx = \int\limits_\Omega \varphi\big(u_0(x)\big)\bar z(x,0)\,dx. \tag{50}$$

Из (50), очевидно, имеем, что $u(x,0)=u_0(x)$ почти всюду в Ω. Утверждения (39)–(43) доказаны.

5. *Функция u, удовлетворяющая соотношениям* (39)–(43), является обобщенным решением «доопределенной» задачи.

Сначала докажем включение $u\in L_2(0,T;K)$. Для этого запишем очевидное равенство

$$\int\limits_{Q_T}\frac{\partial\Pi u_\tau^+}{\partial x_2}\,z\,dx = -\int\limits_{Q_T}\Pi u_\tau^+\frac{\partial z}{\partial x_2}\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_1}\Pi u_\tau^+ z\,dx, \tag{51}$$

в котором z – произвольная гладкая, определенная в Q_T функция, обращающаяся в нуль в точках $(\Gamma\setminus\Gamma_1)\times[0,T]$. В силу (26)

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_1}\Pi u_\tau^+ z\,dx\right| \le \|\Pi u_\tau^+\|_{L_2(\Gamma_1)}\|z\|_{L_2(\Gamma_1)} \le C\sqrt{\varepsilon}\|z\|_{L_2(\Gamma_1)}\to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0.$$

Поэтому в результате предельного перехода в (51) при $\tau\to 0$ и $\varepsilon\to 0$ получим равенство

$$\int\limits_{Q_T}\frac{\partial u^+}{\partial x_2}\,z\,dx = -\int\limits_{Q_T}u^+\frac{\partial z}{\partial x_2}\,dx,$$

из которого следует, что предел последовательности следов Πu_τ^+ на Γ_1 равен нулю почти всюду, то есть $u\in L_2(0,T;K)$.

Пусть функция u удовлетворяет соотношениям (39)–(43), докажем, что u удовлетворяет тождеству (14). Для этого в (15) выберем $z=z_\tau$, где

$$z_\tau(x,t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau}\widetilde z(x,\xi)\,d\xi,$$

$\widetilde{z}$ – произвольная функция из $C^\infty(Q_T)$ такая, что $\widetilde{z}(x,t)=0$, если $x\in\Gamma_2$ или при $t=T$, след $\widetilde{z}$ на $\Gamma_1\times[0,T]$ неположителен. Полученное равенство умножим на τ и просуммируем по t от 0 до $T-\tau$. Результат, записанный с использованием восполнения Π, будет иметь вид

$$\int\limits_{Q_T}\Big\{m\varphi_t(\Pi\widehat{u}_\tau)\Pi(z_\tau)+\nabla\Pi\widehat{u}_\tau\cdot\nabla\Pi z_\tau\Big\}\,dxdt\ \geq$$
$$\geq\int\limits_{Q_T}\Big\{b(\varphi(\Pi\widehat{u}_\tau))(\rho g\cdot\nabla\Pi z_\tau)+f(\varphi(\Pi\widehat{u}_\tau))\,\Pi z_\tau\Big\}\,dxdt. \quad (52)$$

В неравенстве (52) перейдем к пределу при $\tau\to 0$, получим

$$\int\limits_0^T\Big\langle m\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t},\widetilde{z}\Big\rangle\,dt+\int\limits_{Q_T}\nabla u\cdot\nabla\widetilde{z}\,dxdt\ \geq$$
$$\geq\int\limits_{Q_T}\Big\{b(\varphi(u))\rho(g\cdot\nabla\widetilde{z})+f(\varphi(u))\widetilde{z}\Big\}\,dxdt. \quad (53)$$

Неравенство (53) справедливо для любой функции $\widetilde{z}\in C^\infty(Q_T)$, имеющей неположительный след на $\Gamma_1\times[0,T]$. Ясно, что это неравенство выполнено и для любой функции $\widetilde{z}\in L_2(0,T;K)$, в частности, и при $\widetilde{z}=z-u^+$, где z – произвольная функция из $L_2(0,T;K)$.

Далее, умножим равенство (15) при $z=-\widehat{u}_\tau^-$ на τ и просуммируем затем по t от 0 до $T-\tau$, тогда

$$m\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_\Omega\varphi_t\big(u_\tau\big)\big(-\widehat{u}_\tau^-\big)dx+\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_\Omega\nabla\widehat{u}_\tau\cdot\nabla\left(-\widehat{u}_\tau^-\right)\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_{\Gamma_1}\widehat{u}_\tau^+\big(-\widehat{u}_\tau^-\big)\,dx=$$
$$=\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int\limits_\Omega\Big\{b(\varphi(\widehat{u}_\tau))\big(\rho g\cdot\nabla\big(-\widehat{u}_\tau\big)\big)+f(\varphi(\widehat{u}_\tau))\,\big(-\widehat{u}_\tau\big)\Big\}\,dx. \quad (54)$$

Результат, используя восполнение Π и учитывая, что $\widehat{u}_\tau^+\widehat{u}_\tau^-=0$, запишем в виде

$$m\int\limits_0^T\varphi_t\big(\Pi u_\tau\big)\big(-\Pi\widehat{u}_\tau^-\big)\,dx+\int\limits_{Q_T}(\nabla\Pi u_\tau^-)^2\,dxdt=$$
$$=\int\limits_\Omega\Big\{b(\varphi(\Pi\widehat{u}_\tau))\big(\rho g\cdot\nabla\big(-\Pi\widehat{u}_\tau^-\big)\big)+f(\varphi(\Pi\widehat{u}_\tau))\,\big(-\Pi\widehat{u}_\tau^-\big)\Big\}\,dxdt. \quad (55)$$

В равенстве (55) совершим предельный переход при $\tau,\varepsilon\to 0$, учитывая соотношения (39)–(43):

$$\int\limits_0^T\Big\langle m\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t},-u^-\Big\rangle\,dt+\varliminf_{\tau\to 0}\int\limits_{Q_T}(\nabla\Pi u_\tau^-)^2\,dxdt=$$
$$=\int\limits_\Omega\Big\{b(\varphi(u))\Big(\rho g\cdot\nabla\big(-u^-\big)\Big)+f(\varphi(u))\big(-u^-\big)\Big\}\,dxdt. \quad (56)$$

В силу слабой полунепрерывности снизу нормы (см. [20, с. 20])

$$\varliminf_{\tau\to 0}\int\limits_{Q_T}(\nabla\Pi u_\tau^-)^2\,dxdt \ge \int\limits_0^T \|u^-\|_1^2\,dt = \int\limits_{Q_T}\nabla u\cdot\nabla(-u^-)dxdt.$$

Поэтому из (56) вытекает, что

$$\int\limits_0^T\Big\langle m\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t}, -u^-\Big\rangle dt + \int\limits_{Q_T}\nabla u\cdot\nabla(-u^-)\,dxdt \le$$

$$\le \int\limits_\Omega\Big\{b(\varphi(u))\Big(\rho g\cdot\nabla\big(-u^-\big)\Big) + f(\varphi(u))\big(-u^-\big)\Big\}\,dxdt. \quad (57)$$

Вычитая из (53) при $\widetilde{z} = z - u^+$ неравенство (57), приходим к (14). Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть функции* s, b *и* ϑ *удовлетворяют условиям* $\mathbf{A_1}$–$\mathbf{A_3}$, *функция* f *непрерывна на* $[0,1]$ *и* $f(0)=0$. *Тогда при любой функции* p_0 *такой, что* $\vartheta(p_0)\in V$,[2] *существует хотя бы одно обобщенное решение задачи* (1), (6), (7).

Доказательство. Пусть u – обобщенное решение задачи (3), (8), (10). Докажем, что функция $p=\vartheta^{-1}(u)$ есть обобщенное решение задачи (1), (6), (7).

Заметим, что по определению

$$s(p(x,t)) = \widetilde{\varphi}(u(x,t)) \quad \text{п. вс. в} \quad Q_T. \quad (58)$$

Далее, из принадлежности функции u пространству $L_2(0,T;K)$ и равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) = b(s(p(x,t)))\,\frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t) \;\; \text{п. вс. в} \;\; Q_T$$

следует, что

$$b(s(p))\,\frac{\partial p}{\partial x_i}\in L_2(Q_T) \qquad i=1,2,\dots n,. \quad (59)$$

Используя (58), (59) нетрудно убедиться в том, что функция $p=\vartheta^{-1}(u)$ удовлетворяет интегральному тождеству (12). Справедливость равенства

$$s\big(p(x,0)\big) = s\big(p_0(x)\big) \;\; \text{п. вс. в} \;\; \Omega$$

очевидна. Теорема 2 доказана. □

Литература

1. *Pavlova M.F, Rung E.V.* On the existence of a generalized solution of the saturated-unsaturated filtration problem // Differ. Equations. – 2018. – V. 54, No 3. – P. 352–362. – doi: 10.1134/S0012266118030072.

[2] Заметим, что это условие будет выполнено, например, если функция p_0 непрерывна в области Ω, равна нулю на Γ_2, интегрируема с квадратом на Ω, дифференцируема п. вс. в Ω, и причем для любых $i=1,2,\dots,n$ функции $b(s(p_0))\dfrac{\partial p_0}{\partial x_i}$ принадлежат $L_2(\Omega)$.

2. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 352 с.
3. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – V. 183, No 8. – P. 311–341. – doi: 10.1007/BF01176474.
4. *Morel-Seytoux H.J., Meyer P.D., Nachabe M., Touma J., van Genuchten M.T., Lenhard R.J.* Parameter equivalence for the Brooks–Corey and van Genuchten soil characteristics: Preserving the effective capillary drive // Water Resour. Res. – 1996.– V. 32, No 58. – P. 1251–1258. – doi: 10.1029/96WR00069.
5. *Pop I.S., Yong W.-A.* A numerical approach to degenerate parabolic equations // Numer. Math. – 2002. – V. 92. – P. 357–381. – doi: 10.1007/s002110100330.
6. *Diersch H.-J.G., Perrochet P.* On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows // Adv. Water Resour. – 1999. – V. 23, No 3. – P. 271–301. – doi: 10.1016/S0309-1708(98)00057-8.
7. *Radu F., Pop I.S., Knabner P.* order of convergence estimates in time and space for an implicit Euler, mixed finite element discretization of Richard's equation by equivalence of mixed and conformal approach // Proc. Conf. Algoritmy 2002 / Eds. A. Handlovicova, Z. Kriva, K. Mikula, D. Sevcovic. – 2002. – P. 58–65.
8. *Ахтареев А.А., Даутов Р.З.* Метод смешанной переменной для моделирования насыщенно-ненасыщенных течений // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2007. – Т. 149, кн. 4. – С. 58–72.
9. *Williams G.A., Miller C.T., Kelley C.T.* Transformation approaches for simulating flow in variably saturated porous media // Water Res. Resear. – 2000. – V. 36, No 4. – P. 923–934. – doi: 10.1029/1999WR900349.
10. *Berninger H.* Domain decomposition methods for elliptic problems with jumping nonlinearities and application to the Richards equation: Dissertation. – Berlin: Freie Univ., 2008. – 272 S. – doi: 10.17169/refubium-16502.
11. *Otto F.* L^1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations // J. Differ. Equations. – 1996. – V. 131, No 1. – P. 20–38. – doi: 10.1006/jdeq.1996.0155.
12. *Otto F.* L^1-contraction and uniqueness for unstationary saturated-unsaturated porous media flow // Adv. Math. Sci. Appl. – 1997. – V. 7, No 2. – P. 537–553.
13. *Van Duyn C.J., Peletier L.A.* Nonstationary filtration in partially saturated porous media // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1982. – V. 78, No 2. – P. 173–198. – doi: 10.1007/BF00250838.
14. *Alt H.W., Luckhaus S., Visintin A.* On nonstationary flow through porous media // Ann. Mat. Pura ed Appl. – 1984. – V. 136. – P. 303–316. – doi: 10.1007/BF01773387.
15. *Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В.* О существовании слабого решения одной задачи ненасыщенной фильтрационной консолидации // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 10. – С. 58–68.
16. *Павлова М.Ф.* Исследование корректности задачи фильтрационной консолидации // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 965–974.
17. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
18. *Карчевский М.М., Павлова М.Ф.* Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – СПб.: Лань, 2016. – 276 с.
19. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию
20.08.19

Павлова Мария Филипповна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *M.F.Pavlova@mail.ru*

Рунг Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *HelenRung@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 552–568

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.552-568

On the Solvability of a Variational Inequality in the Filtration Theory

*M.F. Pavlova**, *E.V. Rung***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **M.F.Pavlova@mail.ru*, ***HelenRung@mail.ru*

Received August 20, 2019

Abstract

In this paper, we proved the generalized solvability of a problem describing the process of unsteady saturated-unsaturated fluid filtration in a porous medium with the condition of unilateral permeability to parts of the boundary. It should be noted that the variational inequality that arises in this case is a variational inequality of a variable type: in the saturated filtration zone – elliptical and parabolic – otherwise. In the generalized formulation of the problem under consideration, a classical transition based on the Kirchhoff transform to an equivalent variational problem that is more convenient for research was used. In this paper, we considered the most interesting case, from the point of applications, when the Kirchhoff transform maps the real axis into a semi-axis bounded below: $[-\gamma, +\infty)$. It is assumed that the value of the Kirchhoff transform at a point $-\gamma$ is zero. Along with the original problem with restriction, we considered the so-called "predefined problem" without restrictions $u(x,t) \geq -\gamma$, the solution of which on the set $(-\infty, -\gamma)$ is assumed to be zero. Definitions of generalized solutions to these problems in the form of variational inequalities were given. The proof of the existence theorem for a generalized solution of the "predefined problem" was carried out using the methods of half-sampling and penalty. In conclusion, it was proved that the solution to the "predetermined problem" is the solution to the original one.

Keywords: filtration, variational inequality, Kirchhoff transform, penalty half-sampling method, Galerkin method

References

1. Pavlova M.F., Rung E.V. On the existence of a generalized solution of the saturated-unsaturated filtration problem. *Differ. Equations*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 352–362. doi: 10.1134/S0012266118030072.
2. Collins R. *Flow of Fluids through Porous Materials.* New York, Van Nostrand, 1961. 352 p.
3. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 1983, vol. 183, no. 8, pp. 311–341. doi: 10.1007/BF01176474.
4. Morel-Seytoux H.J., Meyer P.D., Nachabe M., Touma J., van Genuchten M.T., Lenhard R.J. Parameter equivalence for the Brooks-Corey and van Genuchten soil characteristics: Preserving the effective capillary drive. *Water Resour. Res.*, 1996, vol. 32, no. 58, pp. 1251–1258. doi: 10.1029/96WR00069.
5. Pop I.S., Yong W.-A. A numerical approach to degenerate parabolic equations. *Numer. Math.*, 2002, vol. 92, pp. 357–381. doi: 10.1007/s002110100330.
6. Diersch H.-J.G., Perrochet P. On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows. *Adv. Water Resour.*, 1999, vol. 23, no. 3, pp. 271–301. doi: 10.1016/S0309-1708(98)00057-8.
7. Radu F., Pop I.S., Knabner P. Order of convergence estimates in time and space for an implicit Euler, mixed finite element discretization of Richard's equation by equivalence of mixed and conformal approach. *Proc. Conf. Algoritmy 2002.* Handlovicova A., Kriva Z., Mikula K., Sevcovic D. (Eds.), 2002, pp. 58–65.
8. Akhtareev A.A., Dautov R.Z. Mixed variable method for simulating saturated-unsaturated flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2007, vol. 149, no. 4, pp. 58–72. (In Russian)
9. Williams G.A., Miller C.T., Kelley C.T. Transformation approaches for simulating flow in variably saturated porous media. *Water Resour. Res.*, 2000, vol. 36, no. 4, pp. 923–934. doi: 10.1029/1999WR900349.
10. Berninger H. Domain decomposition methods for elliptic problems with jumping nonlinearities and application to the Richards equation. *Dissertation.* Berlin, Freie Univ., 2008. 272 p. doi: 10.17169/refubium-16502.
11. Otto F. L^1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations. *J. Differ. Equations*, 1996, vol. 131, no. 1, pp. 20–38. doi: 10.1006/jdeq.1996.0155.
12. Otto F., L^1-contraction and uniqueness for unstationary saturated-unsaturated porous media flow. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 1997, vol. 7, no. 2, pp. 537–553.
13. Van Duyn C.J., Peletier L.A. Nonstationary filtration in partially saturated porous media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1982, vol. 78, no. 2, pp. 173–198. doi: 10.1007/BF00250838.
14. Alt H.W., Luckhaus S., Visintin A. On nonstationary flow through porous media. *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, 1984, vol. 136, pp. 303–316. doi: 10.1007/BF01773387.
15. Pavlova M.F., Shemuranova Ye.V. Existence of a weak solution for a problem of unsaturated filtration consolidation. *Russ. Math.*, 2001, vol. 45, no. 10, pp. 54–64.
16. Pavlova M.F. Investigation of the well-posedness of a filtration consolidation problem with incomplete saturation. *Differ. Equations*, 1998, vol. 34, no. 7, pp. 967–976.

17. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*. Paris, Dunod, 1969. 554 p. (In French)

18. Karchevskii M.M., Pavlova M.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Dopolnitel'nye glavy* [Equations of Mathematical Physics. Additional Chapters]. St. Petersburg, Lan', 2016. 276 p. (In Russian)

19. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, Springer, 1983. 464 p.

20. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Berlin, Akademie-Verlag, 1974. 281 S. (In German)

⟨ ***Для цитирования*:** *Павлова М.Ф., Рунг Е.В.* О разрешимости одного вариационного неравенства теории фильтрации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 552–568. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.552-568. ⟩

⟨ ***For citation*:** Pavlova M.F., Rung E.V. On the solvability of a variational inequality in the filtration theory. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 552–568. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.552-568. (In Russian) ⟩