

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.Р.Тимербаев

Численные методы

Приближение функций. Численное
интегрирование

Учебное пособие

Казань — 2015

Оглавление

Обозначения	7
ГЛАВА 1. Приближение функций	9
1. Интерполяция Лагранжа	9
1.1. Постановка задачи. Базис Лагранжа и его свойства	9
1.2. Интерполяционный полином в барицентрической форме	12
1.3. Интерполяционный полином в форме Ньютона. Разделенные разности	13
1.4. Погрешность интерполяции Лагранжа	17
1.4.1. Представление погрешности через разделенную разность	17
1.4.2. Представление погрешности через производную функции	18
1.4.3. Оценка погрешности интерполяции Лагранжа в случае равномерного распределения узлов	21
1.5. Полиномы Чебышева	23
1.5.1. Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля	25
1.5.2. Оценка погрешности интерполяции Лагранжа в случае чебышевского распределения узлов	26
1.5.3. Влияние возмущения входных данных на полином Лагранжа. Константа Лебега	27
2. Интерполяция Эрмита	29
2.1. Постановка задачи интерполяции с кратными узлами	29
2.2. Базисные функции Эрмита	30
2.3. Погрешность интерполяции Эрмита	31
3. Кусочно-полиномиальная интерполяция	33
3.1. Неравномерные сетки в кусочно-полиномиальной интерполяции	36
4. Интерполяция кубическими сплайнами	37
4.1. Краевые условия для определения кубического сплайна	38
4.2. Вывод основных уравнений для определения сплайна	38
4.3. Учет краевых условий в системе уравнений	40
4.4. Оценки погрешности кубической сплайн-интерполяции	41
ГЛАВА 2. Задачи наилучшего приближения в нормированных и евклидовых пространствах	45
1. Наилучшее приближение в нормированном пространстве	45
2. Полином наилучшего равномерного приближения	51
2.1. Примеры полиномов наилучшего равномерного приближения	52
2.2. Теорема Чебышева об альтернансе	53
2.3. Единственность полинома наилучшего равномерного приближения	55
3. Наилучшее приближение в евклидовом пространстве	57
3.1. Неравенство Коши-Шварца и его следствия	58

3.2.	Критерий наилучшего приближения в евклидовой норме . . .	59
3.3.	Сведение задачи наилучшего приближения в евклидовом пространстве к решению системы линейных алгебраических уравнений	61
4.	Примеры задач о наилучшем приближении в евклидовом пространстве	63
4.1.	Тригонометрический полином наилучшего среднеквадратического приближения	64
4.2.	Алгебраический полином наилучшего среднеквадратического приближения	65
4.3.	Наилучшее среднеквадратическое приближение на дискретном множестве точек	66
4.4.	Решение системы линейных уравнений с прямоугольной матрицей	67
5.	Ортогональные полиномы	68
ГЛАВА 3. Численное интегрирование		72
1.	Квадратурные формулы интерполяционного типа	72
1.1.	Определения и простейшие свойства	72
1.2.	Квадратуры интерполяционного типа	74
1.3.	Пример	75
2.	Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол	77
2.1.	Квадратура прямоугольников	78
2.2.	Квадратура трапеций	81
2.3.	Квадратура парабол (Симпсона)	84
3.	Квадратурные формулы Гаусса	87
3.1.	Квадратуры Гаусса для $n = 2$ и $n = 3$ в невесовом случае	87
3.2.	Существование и единственность квадратурной формулы Гаусса	88
3.3.	Основные свойства квадратуры Гаусса	90
3.4.	Представление погрешности квадратуры Гаусса	92
Литература		94

Предисловие

Учебное пособие написано на основе курса лекций, прочитанных автором для студентов Института вычислительной математики и информационных технологий.

Пособие состоит из трех глав. Первая глава посвящена вопросам приближения функций с использованием интерполяционных полиномов Лагранжа и Эрмита. Рассматриваются также вопросы приближения кусочными полиномами, в частности, кубическими сплайнами. Подробно излагаются вопросы, связанные с оценками погрешности интерполяции. Во второй главе рассматриваются вопросы наилучшего приближения в нормированных и евклидовых пространствах. Третья глава посвящена построению и исследованию приближенных методов вычисления интегралов.

Предполагается, что читатель знаком со стандартными курсами математического анализа и линейной алгебры.

Обозначения

$\text{card } M$ – число элементов множества M (мощность, или кардинальное число множества).

Запись вида $i = 1 : n$ означает, что индекс i пробегает значения от 1 до n .

\mathbb{R}^m – множество векторов (столбцов) вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$ (значок $'$ обозначает транспонирование). В некоторых случаях координаты будут нумероваться с нуля. В любом случае параметр m будет указывать на размерность пространства векторов. На этом пространстве векторов рассматриваются так называемые p -нормы для $p \in [1, \infty]$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{для } p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1:m} |x_i|.$$

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(a, b)$ – пространство алгебраических полиномов степени не выше n на интервале (a, b) , т.е. множество функций вида

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j,$$

где $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ – произвольный фиксированный вектор коэффициентов полинома. Пространство \mathbb{P}_n является линейным конечномерным пространством размерности $n + 1$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

$C[a, b]$ – пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, наделенное нормой равномерной сходимости

$$\|f\|_{\infty, [a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Если отрезок $[a, b]$ подразумевается из контекста, то он будет опускаться в обозначении нормы: $\|f\|_{\infty, [a, b]} = \|f\|_\infty$.

Для натурального m через $C^m[a, b]$ обозначается пространство m раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций.

Для интегрируемой на интервале (a, b) почти всюду положительной функции $\rho(x)$ через $L_{2, \rho}(a, b)$ будет обозначаться гильбертово про-

пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\rho} = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

которая порождается скалярным произведением

$$(f, g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то в обозначениях ρ опускается.

ГЛАВА 1
Приближение функций

1. Интерполяция Лагранжа

В этом разделе вводится понятие интерполяционного полинома Лагранжа, приводятся разные формы его записи и способы вычисления. Устанавливаются оценки погрешности лагранжевой интерполяции при различных наборах узлов интерполяции.

1.1. Постановка задачи. Базис Лагранжа и его свойства

Пусть задано множество $\Omega_n \subset [a, b]$, состоящее из $n+1$ различных точек $\Omega_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, которое мы будем называть множеством или сеткой *узлов лагранжевой интерполяции*.

Определение 1.1. *Интерполяционным полиномом Лагранжа* для заданного набора значений f_i ($i = 0 : n$), в узлах Ω_n называют такой полином $L_n \in \mathcal{P}_n$, что

$$L_n(x_i) = f_i \quad \forall i = 0 : n. \quad (1.1)$$

Во многих случаях в качестве значений f_i берутся значения некоторой функции $f(x)$ в узлах Ω_n , т.е. $f_i = f(x_i)$. Тогда уместно ставить вопрос о близости $f(x)$ и $L_n(x)$, или о погрешности интерполяции $f(x) - L_n(x)$ на некотором отрезке. На процедуру интерполяции в этом случае можно смотреть как на приближение более сложного объекта, некоторой функции $f(x)$, более простым – ее интерполяционным полиномом. Это используется, например, при построении удобных для вычисления формул численного дифференцирования с помощью замены производной $f'(x)$ на производную $L'_n(x)$, и численного интегрирования, когда интеграл $\int_a^b f(x) dx$ приближается интегралом $\int_a^b L_n(x) dx$.

В других ситуациях интерполяция часто выступает как процедура продолжения функции, заданной лишь своими значениями в точках Ω_n , на более широкое множество, например, на все \mathbb{R} . При этом, если интерполяционный полином $L_n(x)$ вычисляется в точках

x вне отрезка $[x_{min}, x_{max}]$, где $x_{min} = \min \Omega_n$, $x_{max} = \max \Omega_n$, то, желая подчеркнуть это обстоятельство, употребляют термин *экстраполяция*.

Мы покажем ниже, что интерполяционный полином L_n условием (1.1) определяется единственным образом и дадим формулы для вычисления значений этого полинома в любых точках. Один из способов вычисления $L_n(x)$ состоит в представлении этого полинома в виде линейной комбинации полиномов специального вида.

Определение 1.2. *Базисом Лагранжа* для набора узлов Ω_n называется семейство полиномов

$$\varphi_i(x) = c_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j), \quad \text{где } c_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}, \quad i = 0 : n. \quad (1.2)$$

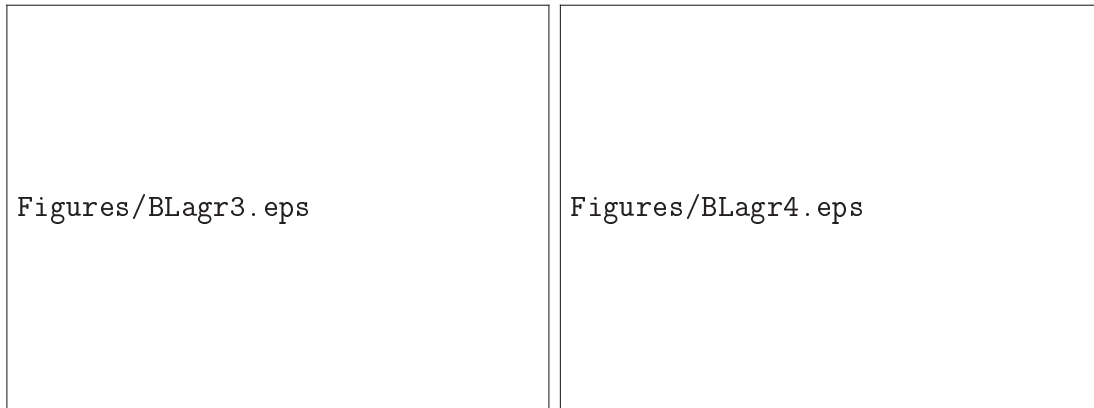


Рис. 1. Базисные функции Лагранжа для $n = 2$ и $n = 3$.

На рис.1 показаны графики базисных функций Лагранжа для 3-х и 4-х равномерно распределенных узлов на отрезке $[-1, 1]$, $\Omega_2 = \{\pm 1, 0\}$ и $\Omega_3 = \{\pm 1, \pm \frac{1}{3}\}$ соответственно.

Непосредственно из формулы следует, что каждый из $\varphi_i(x)$ является полиномом в точности степени n со старшим коэффициентом (т.е. коэффициентом при x^n) c_i . Нулями полинома с номером i являются узлы с номерами, отличными от i , т.е. множество $\Omega_n \setminus \{x_i\}$. Кроме того, коэффициент c_i подобран так, что $\varphi_i(x_i) = 1$. Таким образом, полиномы $\varphi_i \in \mathbb{P}_n$ обладают следующими замечательными свойствами:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 0 : n. \quad (1.3)$$

Из этого следует

Лемма 1.1. Семейство полиномов (1.2) образует базис пространства \mathbb{P}_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, эти функции образуют линейно независимую систему, поскольку ни одну из функций φ_i нельзя представить в виде линейной комбинации остальных

$$\varphi_i(x) = \sum_{j \neq i} y_j \varphi_j(x),$$

так как при подстановке в это представление $x = x_i$ мы получим в силу (1.3) абсурдное равенство $1 = 0$. А поскольку число этих функций совпадает с размерностью пространства $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, то множество $\{\varphi_i\}_{i=0:n}$ является базисом пространства \mathbb{P}_n . \square

Теперь просто доказывается основной результат этого пункта

Теорема 1.1. Интерполяционный полином Лагранжа, удовлетворяющий (1.1), определяется единственным образом и может быть представлен в виде линейной комбинации базисных функций Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \varphi_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.1 следует, что искомый полином L_n из (1.1) можно единственным образом представить в виде некоторой линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x).$$

Подставляя в это представление последовательно узлы x_j и учитывая свойство (1.3), получим, что коэффициенты этой линейной комбинации $y_j = f_j$. \square

Определение 1.3. Полином, вычисляемый по формуле (1.4) называется интерполяционным полиномом, записанным в форме Лагранжа.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. На формулу (1.4) полезно смотреть также, как на формулу разложения произвольного полинома $L_n \in \mathbb{P}_n$ по базису Лагранжа; при этом коэффициентами разложения выступают значения полинома $f_i = L_n(x_i)$ в узлах Ω_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Одну и ту же функцию можно вычислять, используя существенно различающиеся формулы. Например, полином L_n можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n z_i x^i.$$

Подставляя это разложение в (1.1), мы получим систему $Az = f$ линейных относительно z_i алгебраических уравнений с матрицей Вандермонда $A_{ij} = x_i^j$, $i, j = 0 : n$. Решение этой системы на компьютере даже при сравнительно небольших степенях n может привести к существенному искажению результата из-за ошибок округления при вычислениях.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Ниже будут даны другие употребительные способы вычисления $L_n(x)$. Выбор подходящей формулы для вычисления не всегда однозначен и в каждом конкретном случае может зависеть от многих факторов: от степени n , от взаимного расположения узлов Ω_n , от количества точек x , в которых требуется вычислить $L_n(x)$, от количества наборов f , для которых требуется вычислять соответствующие им интерполяционные полиномы, и т.п.

Из формулы (1.4) можно извлечь несколько полезных следствий. Взяв в качестве интерполируемой функции полином $f(x) = x^m$, где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, и вычислив $f_i = f(x_i) = x_i^m$, мы получим

$$\sum_{i=0}^n x_i^m \varphi_i(x) = x^m \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Дифференцируя это тождество по x , будем иметь для $m = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{i=0}^n x_i^m \varphi_i'(x) = mx^{m-1} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

в частности, при $m = 0$ получаются тождества

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(x) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^n \varphi_i'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Аналогичные формулы получаются и для производных более высокого порядка.

1.2. Интерполяционный полином в барицентрической форме

Если ввести полином $n + 1$ -ой степени $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, то можно записать для $x \neq x_i$

$$\varphi_i(x) = c_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_i}.$$

Поэтому формулу (1.4) можно переписать в виде

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{c_i f_i}{x - x_i}.$$

С другой стороны, из (1.5) для $m = 0$ имеем $1 = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{x-x_i}$. Поделив одно разложение на другое, получим

$$L_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{c_i f_i}{x-x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{c_i}{x-x_i}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_n. \quad (1.6)$$

Это представление называется *барицентрической формой* интерполяционного полинома. Несмотря на свой замысловатый вид (в левой части формулы – полином, справа – рациональная по своей форме функция), этот способ вычисления более экономичен и устойчив к ошибкам округления, по сравнению с формой Лагранжа (1.4), поскольку не требует вычисления всех базисных функций Лагранжа $\varphi_i(x)$ в заданных точках. Понятно, что перед вычислением $L_n(x)$ на заданном множестве точек $x \in X$ в барицентрической форме или в форме Лагранжа, предварительно следует вычислить нормирующие множители c_i .

1.3. Интерполяционный полином в форме Ньютона. Разделенные разности

Для эффективного вычисления интерполяционного полинома используют и другие наборы базисных функций. Установим общее свойство семейства полиномов образовывать базис.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы семейство полиномов $\Psi = \{\psi_j \in \mathbb{P}_n : j = 0 : n\}$ было базисом пространства \mathbb{P}_n , необходимо и достаточно, чтобы матрица A , составленная из коэффициентов*

$$a_{ij} = \psi_j(x_i) \text{ для } i, j = 0 : n, \quad (1.7)$$

была невырожденной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Предположим противное утверждению, т.е. что матрица (1.7) вырождена. Тогда, как известно, это равносильно существованию нетривиального решения $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ однородной системы $Ay = 0$. Определим полином

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \psi_j(x).$$

Равенство $Ay = 0$ означает, что множество нулей полинома n -ой степени $p(x)$ состоит из $n + 1$ точки Ω_n , что возможно лишь, если

$p(x) \equiv 0$. Таким образом, система полиномов

$$\Psi = \{\psi_j \in \mathbb{P}_n : j = 0 : n\}$$

является линейно зависимой и не образует базис. Полученное противоречие доказывает утверждение в части необходимости.

Достаточность. Пусть система полиномов $\{\psi_j \in \mathbb{P}_n : j = 0 : n\}$ такова, что матрица (1.7) невырождена. Возьмем произвольный полином $L_n \in \mathbb{P}_n$ и вычислим вектор-столбец $f \in \mathbb{R}^{n+1}$ значений этого полинома в узлах $\Omega_n : f_i = L_n(x_i), i = 0 : n$. Тогда система уравнений $Ay = f$ будет иметь единственное решение $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для полинома

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \psi_j(x).$$

равенство $Ay = f$ равносильно $p(x_i) = f_i = L_n(x_i)$ для всех $i = 0 : n$, т.е. два полинома степени n $p(x)$ и $L_n(x)$ совпадают в $n+1$ различной точке. Следовательно, они совпадают всюду и

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \psi_j(x).$$

Итак, любой полином $L_n \in \mathbb{P}_n$ может быть представлен в виде линейной комбинации системы $\{\psi_j \in \mathbb{P}_n : j = 0 : n\}$, а значит она является базисом пространства \mathbb{P}_n . \square

Свяжем с сеткой Ω_n следующий набор полиномов: $\omega_0(x) = 1$, $\omega_1(x) = x - x_0$, и вообще,

$$\omega_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

Очевидно, матрица (1.7) для этой системы является нижнетреугольной, причем элементы главной диагонали

$$a_{ii} = \prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k) \neq 0,$$

а потому $\det A = \prod_i a_{ii} \neq 0$. По теореме, семейство полиномов (1.8) является базисом пространства \mathbb{P}_n , следовательно, решение задачи (1.1) может быть записано в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \omega_j(x). \quad (1.9)$$

Коэффициенты y_j в этом разложении носят специальное название – *разделенные разности*, и могут быть вычислены по значениям f рекуррентно.

Определение 1.4. Значения $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \dots, f_n = f(x_n)$ называются разделенными разностями нулевого порядка. Разделенными разностями первого порядка $f(x_i, x_j), i \neq j$, называются величины

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Далее, если определены разделенные разности k -го порядка ($k < n$), то разделенной разностью $k+1$ -го порядка для набора из $k+2$ попарно различных узлов $\{z_0, z_1, \dots, z_{k+1}\} \subset \Omega_n$ называется величина

$$f(z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) = \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) - f(z_0, z_1, \dots, z_k)}{z_{k+1} - z_0}.$$

Теорема 1.3. *Справедлива формула*

$$f(z_0, z_1, \dots, z_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f(z_j)}{\prod_{l=0, l \neq j}^k (z_j - z_l)}.$$

Доказательство проведем индукцией по k . При $k = 0$ формула превращается в тривиальное тождество $f(z_0) = f(z_0)$. Пусть утверждение верно до некоторого порядка $k \geq 0$. Докажем формулу для $k + 1$. Используя определение разделенной разности $k + 1$ -го порядка и предположение индукции, имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (z_{k+1} - z_0)f(z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) &= f(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) - f(z_0, z_1, \dots, z_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{f(z_j)}{\prod_{l=1, l \neq j}^{k+1} (z_j - z_l)} - \sum_{j=0}^k \frac{f(z_j)}{\prod_{l=0, l \neq j}^k (z_j - z_l)} \\ &= \frac{f(z_{k+1})}{\prod_{l=1}^k (z_{k+1} - z_l)} - \frac{f(z_0)}{\prod_{l=1}^k (z_0 - z_l)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k f(z_j) \left(\frac{1}{\prod_{l=1, l \neq j}^{k+1} (z_j - z_l)} - \frac{1}{\prod_{l=0, l \neq j}^k (z_j - z_l)} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\prod_{l=1, l \neq j}^{k+1} (z_j - z_l)} - \frac{1}{\prod_{l=0, l \neq j}^k (z_j - z_l)} = \frac{z_{k+1} - z_0}{\prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} (z_j - z_l)},$$

то после деления на разность $z_{k+1} - z_0$, получим окончательно из равенств выписанных выше

$$\begin{aligned} f(z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) &= \frac{f(z_0)}{\prod_{l=1}^{k+1} (z_0 - z_l)} + \frac{f(z_{k+1})}{\prod_{l=0}^k (z_{k+1} - z_l)} \\ &+ \sum_{j=1}^k \frac{f(z_j)}{\prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} (z_j - z_l)} = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{f(z_j)}{\prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} (z_j - z_l)}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула верна и для разделенной разности порядка $k + 1$. \square

Следствие 1.1. *Разделенная разность является симметрической функцией своих аргументов, т.е. значение разделенной разности не меняется при любой перестановке ее аргументов.*

Это сразу вытекает из теоремы, поскольку при перестановке аргументов разделенной разности изменится лишь порядок следования слагаемых в сумме и сомножителей в произведении.

Теорема 1.4. *В формуле (1.9) коэффициенты y_j являются разделенными разностями $y_j = f(x_0, x_1, \dots, x_j)$. Таким образом,*

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)\omega_1(x) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)\omega_n(x). \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим принцип математической индукции. При $n = 0$ утверждение справедливо, поскольку $L_0(x) = f(x_0) = y_0\omega_0(x)$. Предположим, что утверждение верно до некоторой степени $n - 1 \geq 0$ включительно и докажем его для n . Поскольку $L_n(x) = L_{n-1}(x) + y_n\omega_n(x)$, то нужно показать, что $y_n = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Заметим, что y_n есть старший коэффициент интерполяционного полинома L_n (коэффициент при x^n). С другой стороны, для каждой базисной функции Лагранжа φ_i старшим коэффициентом является c_i . Поэтому из разложения (1.4)

$$y_n = \sum_{j=0}^n f_j c_j = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{l=0, l \neq j}^n (x_j - x_l)} = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

по формуле теоремы 1.3. \square

Представление (1.10) называется *формой Ньютона* интерполяционного полинома. Этот способ вычисления удобен, например, в тех случаях, когда узлы интерполяции x_j и значения $f(x_j)$ один за другим последовательно добавляются в ходе вычислений, поскольку при такой форме записи полином $L_j(x)$ выражается в виде $L_j(x) = L_{j-1}(x) + y_j \omega_j(x)$, а коэффициент $y_j = f(x_0, x_1, \dots, x_j)$ может быть вычислен по найденным ранее разделенным разностям $f(x_{j-1}), f(x_{j-2}, x_{j-1}), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ последовательным вычислением новых разделенных разностей

$$f(x_j), f(x_{j-1}, x_j), f(x_{j-2}, x_{j-1}, x_j), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_j).$$

Этот массив значений хранится для последующей генерации $L_{j+1}(x)$, и т.д.

1.4. Погрешность интерполяции Лагранжа

Далее предполагается, что $f(x)$ – некоторая достаточно гладкая функция на отрезке $[a, b]$ и $L_n(x)$ – интерполяционный полином, совпадающий с f в узлах $\Omega_n \subset [a, b]$. Погрешность интерполяции – это разность $f(x) - L_n(x)$. По построению, она обращается в нуль в точках Ω_n , но насколько она близка к нулю в остальных точках отрезка $[a, b]$? Для количественного анализа погрешности используют различные способы измерения отклонения (или "расстояния") одной функции от другой, например, часто используют для этих целей равномерную норму.

1.4.1. Представление погрешности через разделенную разность

Зафиксируем произвольную точку $x \in [a, b] \setminus \Omega_n$. Обозначим через L_{n+1} интерполяционный полином, совпадающий с f в точках $\Omega_n \cup \{x\}$. В силу (1.10) $f(x) = L_{n+1}(x) = L_n(x) + f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \omega_{n+1}(x)$, откуда

$$f(x) - L_n(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \omega_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \Omega_n. \quad (1.11)$$

Как из определения разделенной разности, так и непосредственно из (1.11) следует, что если непрерывна на $[a, b]$ функция f , то разделенная разность $f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ как функция переменной x также будет непрерывна в точках $[a, b] \setminus \Omega_n$. Будет ли сохранять непрерывность эта функция при переходе через узлы Ω_n ? Другими словами, можно ли продолжить эту разделенную разность до непрерывной функции на всем отрезке $[a, b]$? Справедлива следующая

Теорема 1.5. Для того, чтобы в узле $x_i \in \Omega_n$ существовал конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$, необходимо и достаточно, чтобы f была дифференцируема в этой точке. Если это условие выполнено, то $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = c_i(f'(x_i) - L'_n(x_i))$. Следовательно, если функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке $f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ непрерывна как функция переменной x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение немедленно следует из (1.11):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i} f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) &= \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} \\ &= \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - L_n(x)}{x - x_i} = c_i(f'(x_i) - L'_n(x_i)). \end{aligned}$$

В последнем равенстве было использовано равенство $f(x_i) = L_n(x_i)$. Теорема доказана.

Эта теорема дает условия для корректного определения разделенных разностей с кратными (повторяющимися) узлами, а именно, кратности 2. При соответствующей гладкости функции f понятно, как определяются разделенные разности с узлами кратности более высоких порядков. Из выкладок выше, например, получим для $n = 1$ $f(x_0, x_0, x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}$ как предел $f(x_0, y, x)$ при $x, y \rightarrow x_0$. С учетом сказанного, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.6. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке справедливо представление погрешности интерполяции Лагранжа

$$f(x) - L_n(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)\omega_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

1.4.2. Представление погрешности через производную функции

В этом подразделе мы получим другое представление погрешности интерполяционного полинома для достаточно гладкой функции. Докажем сначала лемму.

Лемма 1.2. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке t нулей ($t \geq 2$), то ее производная $f'(x)$ имеет на этом же отрезке $t - 1$ нулей, расположенных между нулями $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \leq z_1 < z_2 < \dots < z_m \leq b$, $f(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Поскольку для каждого $i = 1 : m - 1$ значения $f(z_i) = f(z_{i+1}) = 0$, то по теореме Ролля на интервале (z_i, z_{i+1}) найдется точка $w_i \in (z_i, z_{i+1})$, в которой $f'(w_i) = 0$. \square

Теорема 1.7. *Если функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то в любой точке $x \in [a, b]$ справедливо представление*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (1.12)$$

где $\xi_x \in (a, b)$ — некоторая точка, лежащая между точками множества $\Omega_n \cup \{x\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \Omega_n$, то равенство (1.12) превратится в тривиальное тождество $0 = 0$ для любой точки $\xi_x \in [a, b]$, в частности, можно взять $\xi_x = x$. Для $x \notin \Omega_n$ на отрезке $[a, b]$ рассмотрим вспомогательную функцию $g(t) = f(t) - L_n(t) - c\omega_{n+1}(t)$ переменной t , где

$$c = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}.$$

Тогда $g(t)$ обращается в нуль в $n + 2$ точках множества $\Omega_n \cup \{x\}$. По лемме 1.2 ее производная $g'(t)$ имеет $n + 1$ нулей, расположенных между точками множества $\Omega_n \cup \{x\}$. По этой же лемме вторая производная $g''(t)$ имеет n нулей, находящихся между нулями $g'(t)$, а значит и между точками $\Omega_n \cup \{x\}$. Продолжая рассуждения, мы получим, что существует по меньшей мере одна точка ξ_x между $\Omega_n \cup \{x\}$, что производная $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Так как $L_n^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ и $\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi_x) = (n+1)!$, то отсюда и из выбора c следует равенство (1.12). \square

Из теорем 1.6, 1.7 следует, между прочим, что для любого $x \in [a, b]$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

где ξ_x — точка из теоремы 1.7. Привлекая сюда еще теорему 1.5, получаем следующий немаловажный и неочевидный (ввиду неоднозначности выбора ξ_x) факт:

Следствие 1.2. *В контексте теоремы 1.7 функцию $x \rightarrow f^{(n+1)}(\xi_x)$ можно непрерывно продолжить с $[a, b] \setminus \Omega_n$ на весь отрезок $[a, b]$.*

Из (1.12) получаются поточечная оценка погрешности интерполяции

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad \forall x \in [a, b] \quad (1.13)$$

и оценка в равномерной норме

$$\|f - L_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (1.14)$$

Поведение величины $\|\omega_{n+1}\|_\infty$ существенно зависит от взаимного расположения узлов интерполяции Ω_n . Однако простой оценкой этой нормы в случае произвольного набора узлов Ω_n в силу неравенства $|x - x_i| \leq b - a$ для $x \in [a, b]$ является следующая:

$$\|\omega_{n+1}\|_{\infty, [a, b]} \leq (b - a)^{n+1},$$

откуда получим

$$\|f - L_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}. \quad (1.15)$$

Аналогично получается общая оценка для производных.

Теорема 1.8. *Если функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то имеют место оценки производных*

$$\|f^{(k)} - L_n^{(k)}\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1-k)!} (b - a)^{n+1-k} \quad \text{для } k = 0 : n. \quad (1.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 0$ оценка доказана выше. Докажем для $k = 1$. Без ограничения общности можем считать, что узлы интерполяции Ω_n занумерованы по возрастанию: $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Так как для разности $r(x) = f(x) - L_n(x)$ имеют место равенства $r(x_{i-1}) = r(x_i) = 0$, $i = 1 : n$, то по теореме Ролля найдутся точки $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такие, что

$$r'(z_i) = f'(z_i) - L_n'(z_i) = 0, \quad i = 1 : n.$$

Это означает, что полином $L_n'(x)$ степени $n - 1$ является интерполяционным полиномом Лагранжа для производной $f'(x)$ с узлами интерполяции z_i , $i = 1 : n$. Применяя общую оценку (1.15) с заменой числа

узлов интерполяции $n + 1$ на n и учитывая, что производная порядка n для интерполируемой функции $f'(x)$ совпадает с производной $f^{(n+1)}(x)$, получим

$$\|f' - L'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{n!} (b - a)^n.$$

Это доказывает оценку (1.16) для $k = 1$. Далее, повторяя теперь ровно те же рассуждения, но уже для разности $r'(x) = f'(x) - L'_n(x)$, получим оценку для $r''(x)$ с понижением порядка n до $n - 1$:

$$\|f'' - L''_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n - 1)!} (b - a)^{n-1},$$

что доказывает оценку (1.16) для $k = 2$, и т.д. \square

1.4.3. Оценка погрешности интерполяции Лагранжа в случае равномерного распределения узлов

Пусть $x_i = a + ih$, $i = 0 : n$, где шаг сетки $h = \frac{b - a}{n}$. Таким образом, узлы интерполяции равномерно распределены по отрезку $[a, b]$ с шагом h . Оценим в этом случае $\|\omega_{n+1}\|_{\infty}$. Для $i = 1 : n$ введем обозначение $e_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Лемма 1.3. *Для значений $x \in e_i = [x_{i-1}, x_i]$ справедлива оценка:*

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq \frac{i!(n + 1 - i)!}{4} h^{n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$|x - x_{i-1}| |x - x_i| \leq \frac{h^2}{4}.$$

Для $j < i - 1$ очевидна оценка $|x - x_j| \leq (i - j)h$, а для $j > i - 1$ $|x - x_j| \leq (j + 1 - i)h$. Учитывая все эти оценки, получим для $x \in e_i$

$$|\omega_{n+1}(x)| = \prod_{j=0}^n |x - x_j| \leq \frac{h^2}{4} i! h^{i-1} (n + 1 - i)! h^{n-i} \leq \frac{i!(n + 1 - i)!}{4} h^{n+1}.$$

Лемма доказана.

Теперь из леммы с учетом общей оценки (1.13) вытекает

Теорема 1.9. На отрезке e_i справедлива оценка погрешности лагранжевой интерполяции

$$\|f - L_n\|_{\infty, e_i} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, e_i}}{4C_{n+1}^i} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}, \quad (1.17)$$

где величина

$$C_{n+1}^i = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}$$

известна в комбинаторике, как число сочетаний из $n+1$ по i .

Лемма 1.4. На отрезке $[a, b]$ полином $\omega_{n+1}(x)$ для равномерно распределенных узлов свое максимальное по модулю значение принимает на крайних отрезках $[x_0, x_1]$ и $[x_{n-1}, x_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$ или $n = 2$, то лемма не нуждается в доказательстве. Пусть $n \geq 3$ и $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ обозначает номер внутреннего интервала. Для произвольной точки $x \in (x_{i-1}, x_i)$ построим симметричную относительно середины отрезка $[x_0, x_i]$ точку $y \in (x_0, x_1)$, т.е. возьмем $y = x_0 + x_i - x$. Тогда $|x - x_j| = |y - x_{i-j}|$ для всех $j = 0 : i$, так что $|\omega_{i+1}(y)| = |\omega_{i+1}(x)|$. Но $|y - x_j| > |x - x_j|$ для $j = i+1 : n$. Поэтому $|\omega_{n+1}(y)| > |\omega_{n+1}(x)|$. В силу произвольности $x \in (x_{i-1}, x_i)$ это означает, что максимальное по модулю значение ω_{n+1} на первом отрезке строго больше максимального значения $|\omega_{n+1}|$ на любом внутреннем. Наконец, осталось заметить, что в силу симметричного относительно середины отрезка $[x_0, x_n] = [a, b]$ расположения узлов, этот максимум достигается также на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$. \square

Теорема 1.10. Для равномерно распределенных узлов имеет место оценка

$$\|\omega_{n+1}\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{n!}{4} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\|f - L_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}. \quad (1.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 1.17 нужно применить оценку леммы 1.3 для $i = 1$. \square

Из (1.18) следует, что если $f \in C^\infty[a, b]$ и производные $f(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяют оценке $|f^{(m)}(x)| \leq ck^m$, $m = 1, 2, \dots$, для неко-

торых положительных постоянных c , k , то

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{c}{4(n+1)} \left(\frac{k(b-a)}{n} \right)^{n+1} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность интерполяционных полиномов для $f(x)$ в случае равномерного распределения узлов равномерно сходится на $[a, b]$ к $f(x)$. Однако, численные эксперименты даже для гладких функций показывают обратное: погрешность интерполяции с ростом n до определенного момента убывает, затем начинает возрастать, т.е. сходимость интерполяционного процесса разрушается (см. рис 2). Это связано с ошибками округления, которые при большом числе равномерно распределенных узлов оказывают все большее негативное влияние на результат. При большом числе узлов следует использовать другие наборы узлов интерполяции, являющиеся нулями *ортгональных полиномов*, например *полиномов Чебышева*, о которых пойдет речь далее. Равномерно распределенные узлы можно использовать лишь при сравнительно небольших n .

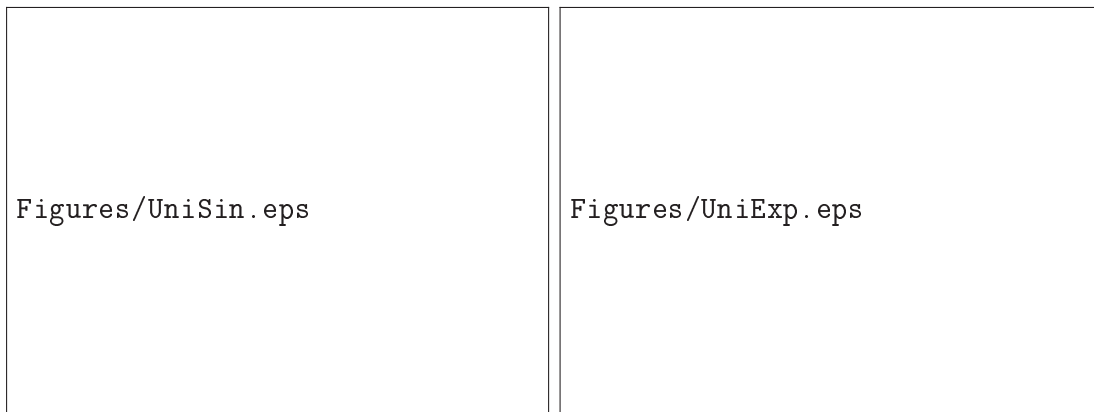


Рис. 2. Поведение $\log_{10} \|f - L_n\|_\infty$ для $f(x) = \sin^5 x$ и $f(x) = e^x$ на $[-3, 3]$ в случае равномерно распределенных узлов.

1.5. Полиномы Чебышева

На отрезке $[-1, 1]$ определим семейство *полиномов Чебышева* следующим образом. Положим $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Из этого определения следует, что $T_n(x)$ является полиномом степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1} . Кроме того, по индукции легко

устанавливается, что $T_n(x)$ является четной или нечетной функцией в зависимости от четности или нечетности n , поскольку умножение на нечетную функцию x меняет четность функции на противоположную. Покажем, что

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \forall x \in [-1, 1]. \quad (1.20)$$

Обозначим $\varphi_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $\theta = \arccos x$. Тригонометрическое тождество $2 \cos \theta \cos n\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$ при $n \geq 1$ можно переписать в виде $\varphi_{n+1}(x) = 2x\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$, т.е. для последовательности функций $\{\varphi_n\}_{n=0:\infty}$ справедливо то же рекуррентное соотношение, что и для полиномов T_n . Поскольку $T_n(x) = \varphi_n(x)$ для $n = 0, 1$, то и для последующих номеров $T_n(x) = \varphi_n(x) = \cos(n \arccos x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Установим важное свойство ортогональности полиномов Чебышева в весовом пространстве $L_{2,\rho}(-1, 1)$, где вес $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Действительно, для $m \neq n$

$$\begin{aligned} (T_m, T_n)_\rho &= \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(m \arccos x) \cos(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= [\text{замена переменной } x = \cos \theta] = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)\theta \Big|_0^\pi + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)\theta \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Используя (1.20), найдем нули полинома $T_n(x)$:

$$\cos(n \arccos x) = 0 \Leftrightarrow n \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда получаем n различных нулей, занумерованных по убыванию:

$$\bar{x}_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(при других значениях $k \in \mathbb{Z}$ \bar{x}_k циклически повторяются). Поскольку $T_n(x)$ является четной или нечетной функцией, то ее нули расположены симметрично относительно точки $x = 0$, так что

$\bar{x}_k = -\bar{x}_{n-1-k}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Полагая $x_k = -\bar{x}_k$, мы получим возрастающую последовательность нулей полинома Чебышева степени n :

$$x_k = -\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.21)$$

Из условия $|T_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| = 1$ находим точки экстремума

$$\xi_k = \cos \frac{\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.22)$$

1.5.1. Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля

Обозначим через $\mathbb{P}_{n,1}(a, b)$ множество полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным 1, и поставим задачу об отыскании в $\mathbb{P}_{n,1}(a, b)$ полинома, имеющего наименьшую равномерную норму на отрезке $[a, b]$. Полином, являющийся решением этой задачи называется полиномом, наименее уклоняющимся от нуля. Решим эту задачу сначала на отрезке $[-1, 1]$. Мы покажем, что единственным решением этой задачи является нормированный полином Чебышева $\bar{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$. Случай произвольного отрезка $[a, b]$ сведем к отрезку $[-1, 1]$ с помощью линейной замены переменных.

Теорема 1.11. *Для произвольного полинома $p \in \mathbb{P}_{n,1}(a, b)$ имеет место оценка*

$$\|p\|_{\infty, [a, b]} \geq \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}. \quad (1.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $[a, b] = [-1, 1]$. В этом случае оценка (1.23) примет вид

$$\|p\|_{\infty, [-1, 1]} \geq 2^{1-n},$$

причем для нормированного полинома Чебышева $\|\bar{T}_n\|_{\infty, [-1, 1]} = 2^{1-n}$, т.е. на этом полиноме нижняя оценка достигается. Предположим против утверждаемого, что найдется такой полином $p \in \mathbb{P}_{n,1}(-1, 1)$, что $\|p\|_{\infty, [-1, 1]} < 2^{1-n}$. Тогда полином $q = \bar{T}_n - p \in \mathbb{P}_{n-1}$ в точках экстремума (1.22) принимает значения $q(\xi_k) = (-1)^k 2^{1-n} - p(\xi_k)$, которые положительны при четных k и отрицательны при нечетных k . Таким образом, полином $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ $n+1$ раз меняет знак, т.е. имеет не менее n нулей, что может быть только в случае $q \equiv 0$, т.е. $p = \bar{T}_n$. Но это противоречит неравенству $\|p\|_{\infty, [-1, 1]} < 2^{1-n}$. Полученное противоречие доказывает теорему для отрезка $[a, b] = [-1, 1]$.

В случае произвольного отрезка сделаем аффинную замену переменных, которую часто будем использовать в дальнейшем:

$$x \in [a, b] \leftrightarrow t \in [-1, 1], \quad x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \equiv \psi(t). \quad (1.24)$$

Тогда произвольный полином $p \in \mathbb{P}_{n,1}(a, b)$ можно представить в виде

$$p(x) = x^n + p_{n-1}(x) = \psi(t)^n + p_{n-1}(\psi(t)) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \hat{p}(t),$$

где $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}(a, b)$, $\hat{p} \in \mathbb{P}_{n,1}(-1, 1)$. По доказанному выше,

$$\|p\|_{\infty, [a, b]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \|\hat{p}\|_{\infty, [-1, 1]} \geq 2^{1-n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^n = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}},$$

причем равенство в этой оценке достигается на (нормированном) полиноме Чебышева

$$p(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \bar{T}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \bar{T}_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right).$$

□

При доказательстве теоремы было установлено, что среди полиномов заданной степени n со старшим коэффициентом 1 наименьшую равномерную норму имеет нормированный полином Чебышева. Позднее, рассматривая вопрос о полиномах наилучшего равномерного приближения, мы покажем, что это единственный такой полином, т.е. в оценке (1.23) для всех других полиномов будет иметь строгое неравенство.

1.5.2. Оценка погрешности интерполяции Лагранжа в случае чебышевского распределения узлов

Оценку (1.14) можно оптимизировать, выбирая узлы интерполяции так, чтобы равномерная норма полинома ω_{n+1} была минимальна. Таким полиномом, как было показано в доказательстве теоремы 1.11, является нормированный полином Чебышева степени $n+1$ на отрезке $[a, b]$:

$$\omega_{n+1}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \bar{T}_{n+1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = \prod_{k=0}^{n+1} (x - x_k),$$

нулями которого являются точки

$$x_k = -\frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} + \frac{a+b}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.25)$$

которые, в свою очередь, являются образами нулей полинома Чебышева степени $n+1$ на отрезке $[-1, 1]$ при преобразовании (1.24).

Теорема 1.12. При чебышевском наборе узлов интерполяции (1.25) справедлива оценка погрешности

$$\|f - L_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]} (b-a)^{n+1}}{(n+1)! 2^{2n+1}}. \quad (1.26)$$

Доказательство немедленно следует из установленного выше факта, что для чебышевского набора узлов интерполяции по теореме 1.11 с заменой в ней n на $n+1$, имеем

$$\|\omega_{n+1}\|_{\infty, [a, b]} = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \quad \square$$

Покажем, что правая часть в оценке (1.26) с ростом числа узлов становится существенно меньше, чем правая часть в оценке (1.18) для равномерно распределенных узлов. Для этого поделим указанные оценки одну на другую и перейдем к пределу по $n \rightarrow \infty$. После сокращений, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{n+1}}{n! 2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{4}\right)^{n+1} = 0.$$

(В выкладках была использована асимптотическая формула Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^{n+1}$.) Это доказывает оптимальность выбора нулей полинома Чебышева в качестве узлов интерполяции. Кроме этого, имеется еще одно важнейшее с точки зрения вычислений на компьютере свойство чебышевских узлов: существенно большая устойчивость к ошибкам округления приближения интерполяционным полиномом с этим набором узлов (см. рис.3).

1.5.3. Влияние возмущения входных данных на полином Лагранжа. Константа Лебега

Предположим, что в узлах интерполяции $\Omega_n \subset [a, b]$ вместо точных значений $f_i = f(x_i)$ вычислены приближенные значения \tilde{f}_i с погрешностью, не превышающей величины $\delta > 0$: $|f_i - \tilde{f}_i| \leq \delta$. Таким образом, вместо интерполяционного полинома $L_n(x)$ будет построен возмущенный полином $\tilde{L}_n(x)$, отклонение которого от $L_n(x)$ можно

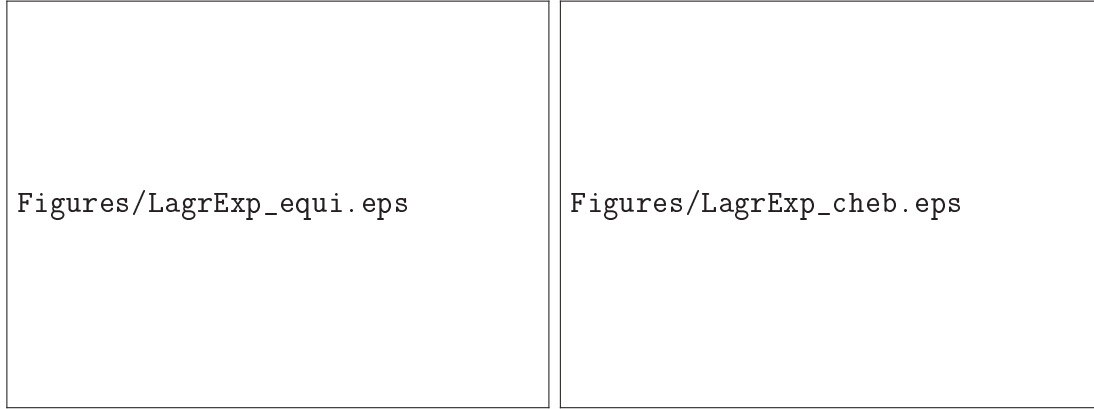


Рис. 3. Поведение погрешности $\|f - L_n\|_\infty$ для $f(x) = e^{x^2}$ на $[-2, 2]$ в случае равномерно распределенных узлов (слева) и чебышевских (справа).

оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |L_n(x) - \tilde{L}_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f_i - \tilde{f}_i) \varphi_i(x) \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^n |f_i - \tilde{f}_i| |\varphi_i(x)| \leq \delta \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\varphi_i(x)| = \delta \Lambda_n,
 \end{aligned}$$

где величина

$$\Lambda_n = \Lambda(\Omega_n) = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\varphi_i(x)| \quad (1.27)$$

называется *константой Лебега*. Эта величина показывает, во сколько раз возрастает погрешность вычисления интерполяционного полинома Лагранжа по сравнению с погрешностью вычисления функции.

Константа Лебега существенно зависит от взаимного расположения узлов интерполяции и ее поведение с увеличением n может иметь различный характер в зависимости от выбора Ω_n . Например, (см. [3, с.190-192]) для равномерно распределенных по отрезку узлов имеет место оценка снизу:

$$\Lambda_n > \frac{2^n}{(4n-2)\sqrt{n}} \quad (\text{при } n \geq 5).$$

Из этой оценки, в частности, следует, что при $n = 20$ погрешность вычисления полинома может увеличиться более, чем в 3000 раз, по сравнению с погрешностью вычисления узловых значений. В то время, как для узлов в нулях полинома Чебышева

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \ln(n+1).$$

В частности, при $n = 20$ для узлов Чебышева отклонение возмущенного полинома Лагранжа $\tilde{L}_n(x)$ от невозмущенного $L_n(x)$ может увеличиться не более, чем в 2 раза. Таким образом, в случае узлов интерполяции в нулях полиномов Чебышева не только минимизируется погрешность интерполяции, но и минимизируется влияние ошибок округления при вычислении значений f_i в этих узлах, практически не увеличивая эту погрешность.

2. Интерполяция Эрмита

В этом разделе вводится понятие интерполяционного полинома с кратными узлами интерполяции, или интерполяционного полинома Эрмита. Устанавливаются оценки погрешности эрмитовой интерполяции.

2.1. Постановка задачи интерполяции с кратными узлами

Пусть задано множество $\Omega_m \subset \mathbb{R}$, состоящее из m различных точек (узлов интерполяции) $\Omega_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и для каждого узла x_i задана его кратность $n_i \geq 1$ (натуральное число). Для набора узлов Ω_m и вектора кратностей $\mathbf{n} = [n_i]_{i=1:m}$ обозначим через $I_{m\mathbf{n}}$ множество пар целых неотрицательных индексов (i, k) таких, что $i = 1 : m, k = 0 : n_i - 1$.

Определение 1.5. *Интерполяционным полиномом Эрмита* для заданного набора значений $\{f_{ik} : i = 1 : m, k = 0 : n_i - 1\}$ в узлах Ω_m называют такой полином $H_n \in \mathbb{P}_n$, где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m - 1$, что

$$H_n^{(k)}(x_i) = f_{ik} \quad \forall i = 1 : m, \quad \forall k = 0 : n_i - 1. \quad (1.28)$$

Часто в качестве значений f_{ik} берутся значения производных некоторой достаточно гладкой функции: $f_{ik} = f^{(k)}(x_i)$. В этом случае можно дать такое

Определение 1.6. *Интерполяционным полиномом Эрмита* для данной функции f , узлов интерполяции Ω_m с кратностями \mathbf{n} в узлах Ω_m называют такой полином $H_n \in \mathbb{P}_n$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m - 1$, что

$$H_n^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad \forall i = 1 : m, \quad \forall k = 0 : n_i - 1. \quad (1.29)$$

Напомним

Определение 1.7. Точка z является нулем кратности l функции g , если $g^{(k)}(z) = 0$ для производных порядка $k = 0 : l-1$ и $g^{(l)}(z) \neq 0$.

Хорошо известно, что если z является нулем полинома $p_n \in \mathbb{P}_n$ кратности не менее l , то p_n нацело делится на $(x-z)^l$, т.е. его можно представить в виде $p_n(x) = (x-z)^l p_{n-l}(x)$, где $p_{n-l} \in \mathbb{P}_{n-l}$. Напомним также, что по основной теореме алгебры, полином степени n с ненулевым старшим коэффициентом имеет с учетом кратности в точности n комплексных нулей. Этот факт мы используем при доказательстве существования и единственности полинома Эрмита.

Теорема 1.13. *Интерполяционный полином Эрмита существует и определяется условиями (1.28) единственным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем искомый полином в виде разложения по степеням x

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j x^j$$

и подставим это разложение в уравнения (1.28). Очевидно, мы получим систему линейных относительно неизвестных y_j алгебраических уравнений $Ay = F$ с некоторой квадратной матрицей, поскольку число неизвестных совпадает с числом уравнений. Эта система разрешима единственным образом для любой правой части тогда и только тогда, когда однородная система имеет только нулевое решение. Таким образом, для доказательства теоремы нам нужно показать, что решением задачи

$$H_n \in \mathbb{P}_n, \quad H_n^{(k)}(x_i) = 0 \quad \forall i = 1 : m, \quad \forall k = 0 : n_i - 1 \quad (1.30)$$

может быть только тривиальный полином $H_n(x) \equiv 0$. По определению 1.7, равенства (1.30) означают, что каждый из узлов x_i является нулем полинома H_n кратности не менее n_i . Следовательно, полином H_n имеет с учетом кратности $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n + 1$ нулей, что может быть только в случае $H_n(x) \equiv 0$. \square

2.2. Базисные функции Эрмита

Определение 1.8. Базисом Эрмита для задачи (1.28) называется семейство полиномов $\{\varphi_{ik} : (i, k) \in I_{mn}\}$ такое, что

$$\varphi_{ik}^{(l)}(x_j) = 0 \text{ при } (i, k) \neq (j, l) \in I_{mn}, \text{ и } \varphi_{ik}^{(k)}(x_i) = 1.$$

Из определения базиса Эрмита непосредственно следует

Теорема 1.14. *Решение задачи (1.28) можно представить в виде*

$$H_n(x) = \sum_{(i,k) \in I_{mn}} f_{ik} \varphi_{ik}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} f_{ik} \varphi_{ik}(x).$$

2.3. Погрешность интерполяции Эрмита

В этом пункте предполагается, что функция $f(x)$ $n+1$ -раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $\Omega_m \subset [a, b]$ и H_n — полином Эрмита, удовлетворяющий (1.29). Здесь будет рассматриваться вопрос о погрешности эрмитовой интерполяции $f(x) - H_n(x)$.

Лемма 1.5. *Если функция g имеет на некотором отрезке $[a, b]$ с учетом кратности не менее n нулей, то ее производная g' имеет на этом же отрезке не менее $n - 1$ нулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если z является нулем кратности n функции g , то эта же точка z , очевидно, является нулем кратности $n - 1$ для производной. Если других нулей у g на $[a, b]$ нет, то лемма доказана.

Пусть $z_1 < z_2 < \dots < z_p$ ($p \geq 2$) — нули функции g на отрезке $[a, b]$, причем z_i является нулем g кратности n_i , $n = \sum_i n_i$. Тогда эти же точки являются нулями производной g' суммарной кратности не менее $n - p$. Так как $g(z_i) = g(z_{i+1}) = 0$ для всех $i = 1 : p - 1$, то по теореме Ролля найдутся точки $\xi_i \in (z_i, z_{i+1})$ такие, что $g'(\xi_i) = 0$ для $i = 1 : p - 1$. Таким образом, с учетом кратности у производной на отрезке $[a, b]$ не менее $n - p + p - 1 = n - 1$ нулей. \square

Теорема 1.15. *Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема и имеет на этом отрезке с учетом кратности $n + 1$ нулей $\Omega_m = \{x_i : i = 1 : m\}$, причем x_i — нуль кратности n_i , так что $n + 1 = n_1 + n_2 + \dots + n_m$, то для любой точки $x \in [a, b]$ найдется точка $\xi_x \in [a, b]$, лежащая между точками $\Omega_m \cup \{x\}$, такая, что*

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \text{где } \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{n_i}. \quad (1.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \Omega_m$, то равенство (1.31) превращается в тривиальное тождество $0 = 0$ для любой точки $\xi_x \in [a, b]$, в частности, можно взять $\xi_x = x$. Для фиксированной точки $x \notin \Omega_m$ на отрезке $[a, b]$ рассмотрим вспомогательную функцию

$g(t) = f(t) - c\omega_{n+1}(t)$ переменной t , где постоянная

$$c = \frac{f(x)}{\omega_{n+1}(x)}$$

выбрана так, что $g(x) = 0$. Тогда $g(t)$ имеет с учетом кратности не менее $n + 2$ нулей в точках множества $\Omega_m \cup \{x\}$. По лемме 1.5 ее производная $g'(t)$ имеет с учетом кратности не менее $n + 1$ нулей, расположенных между точками множества $\Omega_m \cup \{x\}$. По этой же лемме вторая производная $g''(t)$ имеет не менее n нулей, находящихся между нулями $g'(t)$, а значит и между точками $\Omega_m \cup \{x\}$. Продолжая рассуждения, мы получим, что существует по меньшей мере одна точка ξ_x между $\Omega_m \cup \{x\}$, что производная $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Так как $\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi_x) = (n + 1)!$, то отсюда и из выбора c следует равенство (1.31). \square

Теорема 1.16. *Если функция $f(x)$ $n + 1$ -раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $\Omega_m \subset [a, b]$, H_n — полином Эрмита, удовлетворяющий (1.29). Тогда для любой точки $x \in [a, b]$ найдется точка $\xi_x \in [a, b]$, лежащая между точками $\Omega_m \cup \{x\}$, такая, что*

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n + 1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (1.32)$$

где $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{n_i}$.

Для доказательства этой теоремы следует применить предыдущую теорему 1.15 к разности $f(x) - H_n(x)$ и учесть, что $H_n^{(n+1)}(x) = 0$. \square

Из (1.32) следуют поточечная оценка погрешности эрмитовой интерполяции

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

и оценка в равномерной норме

$$\|f - H_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n + 1)!} \|\omega_{n+1}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (1.33)$$

Рассмотрим функцию

$$c(x) = \frac{f(x) - H_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}.$$

Очевидно, эта функция непрерывна (и даже $n + 1$ -раз непрерывно дифференцируема) в точках множества $[a, b] \setminus \Omega_m$. Исследуем поведение этой функции при $x \rightarrow x_i \in \Omega_m$. Заметим, что x_i является нулем разности $f(x) - H_n(x)$ кратности n_i . Используя правило Лопиталья n_i раз, получим

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - H_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} = \frac{c_i}{n_i!} (f^{(n_i)}(x_i) - H_n^{(n_i)}(x_i)), \text{ где } c_i = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-n_j}.$$

Отсюда и из представления (1.32) непосредственно вытекает

Следствие 1.3. В контексте теоремы 1.16 функцию $x \rightarrow f^{(n+1)}(\xi_x)$ можно непрерывно продолжить с $[a, b] \setminus \Omega_m$ на весь отрезок $[a, b]$.

3. Кусочно-полиномиальная интерполяция

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками разбиения $\Omega_n = \{x_i : i = 1 : n + 1\}$: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$ и введем обозначения $e_k = [x_k, x_{k+1}]$, $h_k = x_{k+1} - x_k$ — длина отрезка e_k , $h = \max h_k$ — максимальная из длин всех отрезков разбиения, $x_{k+1/2} = (x_k + x_{k+1})/2$ — середина отрезка e_k .

Определение 1.9. Для натурального m и разбиения Ω_n пространством (непрерывных) кусочных полиномов степени m называется пространство функций

$$S_h^m = \{u \in C[a, b] : u|_{e_k} \in \mathbb{P}_m(e_k), k = 1 : n\}.$$

Заметим, что пространство S_h^m конечномерное и его размерность $N = \dim S_h^m = mn + 1$ (доказать). Выберем на каждом отрезке e_k (локальное) множество узлов интерполяции $\{x_{ki} : i = 1 : m + 1\}$, включающее в себя концы $x_k = x_{k1}$, $x_{k+1} = x_{k+1, m+1}$, так что их объединение $\Omega_{nm} = \{x_{ki} : i = 1 : m + 1, k = 1 : n + 1\}$ содержит ровно N точек.

Определение 1.10. Для непрерывной функции $f \in C[a, b]$ и множества узлов Ω_{nm} S_h^m -интерполянт называется функция $f_h \in S_h^m$, удовлетворяющая равенствам

$$f_h(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega_{nm}. \quad (1.34)$$

По определению, интерполянт $f_h(x)$ на каждом отрезке e_k является полиномом Лагранжа, построенным по значениям $f(x_{ki})$ в узлах

x_{ki} . Следовательно, используя оценку погрешности интерполяции Лагранжа (1.14), с. 20, мы получим локальную оценку погрешности

$$\|f - f_h\|_{\infty, e_k} \leq \frac{\|f^{(m+1)}\|_{\infty, e_k}}{(m+1)!} \|\omega_{k, m+1}\|_{\infty, e_k}, \quad (1.35)$$

где

$$\omega_{k, m+1} = \prod_{i=1}^{m+1} (x - x_{ki}).$$

Таким образом, погрешность интерполяции существенно зависит от выбора узлов на каждом e_k . Для эффективного вычисления $f_h(x)$ их следует выбирать единообразно. Для этого на базисном отрезке $[-1, 1]$ зафиксируем $m+1$ узлов: $-1 = t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1} = 1$ и положим $x_{ki} = \psi_k(t_i)$, $k = 1 : n+1$, $i = 1 : m+1$, где

$$\psi_k(t) = \frac{h_k}{2}t + x_{k+1/2}$$

есть аффинное отображение базисного отрезка $[-1, 1]$ на отрезок e_k . Например, в качестве узлов на базисном отрезке можно взять равномерно распределенный набор узлов

$$t_i = -1 + \frac{2(i-1)}{m}, \quad i = 1 : m+1, \quad (1.36)$$

или чебышевское распределение внутренних узлов (при $m \geq 2$)

$$t_1 = -1, \quad t_{m+1} = 1, \quad t_i = -\cos \frac{(2i-3)\pi}{2(m-1)}, \quad i = 2 : m. \quad (1.37)$$

Теорема 1.17. Пусть $f \in C^{m+1}[a, b]$. Тогда для узлов $x_{ki} = \psi_k(t_i)$, $k = 1 : n$, $i = 1 : m+1$, имеет место оценка погрешности кусочно-полиномиальной интерполяции

$$\|f - f_h\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon_m \max_{k=1:n} \left(\|f^{(m+1)}\|_{\infty, e_k} h_k^{m+1} \right), \quad (1.38)$$

где

$$\varepsilon_m = \frac{1}{4(m+1)m^{m+1}}$$

в случае равномерно распределенных узлов (1.36), и

$$\varepsilon_m = \frac{2}{4^m(m+1)!}$$

в случае чебышевских узлов (1.37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае узлов (1.36) по теореме 1.10, с. 22, справедлива оценка

$$\|\omega_{k,m+1}\|_{\infty,e_k} \leq \frac{m!}{4} \left(\frac{h_k}{m}\right)^{m+1}, \quad k = 1 : n.$$

Подставляя в (1.35), получим

$$\|f - f_h\|_{\infty,e_k} \leq \frac{1}{4(m+1)m^{m+1}} \|f^{(m+1)}\|_{\infty,e_k} h_k^{m+1},$$

откуда следует (1.38) в случае равномерно распределенных узлов.

Для узлов (1.37) с учетом оценки (1.23), с. 25 (с заменой в ней n на $m-1$), получим для $x \in e_k$

$$|\omega_{k,m+1}(x)| \leq \frac{h_k^2}{4} \frac{h_k^{m-1}}{2^{2(m-1)-1}} = \frac{2h_k^{m+1}}{4^m},$$

откуда из (1.35) получим (1.38). \square

Из доказанной теоремы, учитывая неравенства

$$h_k \leq h, \quad \|f^{(m+1)}\|_{\infty,e_k} \leq \|f^{(m+1)}\|_{\infty,[a,b]},$$

немедленно получается

Следствие 1.4. В условиях теоремы

$$\|f - f_h\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon_m \|f^{(m+1)}\|_{\infty,[a,b]} h^{m+1}, \quad (1.39)$$

в частности, для равномерной сетки с шагом $h_k = h = (b-a)/n$

$$\|f - f_h\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon_m \|f^{(m+1)}\|_{\infty,[a,b]} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{m+1}. \quad (1.40)$$

Следует отметить, что оценка (1.40) при числе отрезков $n = 1$ переходит в оценку (1.18), с. 22 (с заменой в этой последней оценке степени полинома n на m), так что интерполяция кусочными полиномами дает бóльшие возможности для хорошей аппроксимации функции не только за счет увеличения степени полиномов, но и за счет уменьшения шага сетки h , т.е. увеличения числа сегментов n .

3.1. Неравномерные сетки в кусочно-полиномиальной интерполяции

Использование равномерной сетки для аппроксимации кусочными полиномами эффективно, когда поведение функции и ее производных достаточно однородно, примерно одинаково на разных участках отрезка. Если же значения производных существенно отличаются друг от друга на некоторых подобластях отрезка, то следует разумно выбирать неравномерную сетку, адаптируя ее к поведению функции. Ключом к построению подходящей сетки может служить оценка (1.38), которая показывает, что для достижения нужной точности

$$\|f - f_h\|_{\infty, [a, b]} \leq \delta$$

для заданного малого $\delta > 0$, требуется такое разбиение, чтобы выполнялась оценка

$$\varepsilon_m \|f^{(m+1)}\|_{\infty, e_k} h_k^{m+1} \leq \delta$$

на всех сегментах разбиения e_k . Следовательно, большие значения $|f^{(m+1)}(x)|$ необходимо компенсировать малостью h_k^{m+1} и наоборот, на тех участках, где $|f^{(m+1)}(x)|$ принимает сравнительно небольшие значения длину h_k можно увеличить, уменьшая тем самым общее число отрезков. Оптимальной сеткой являлась бы такая, чтобы на всех сегментах e_k выполнялась сбалансированная оценка

$$\varepsilon_m \|f^{(m+1)}\|_{\infty, e_k} h_k^{m+1} \approx \delta.$$

Сложность однако в том, что зачастую оценить $\|f^{(m+1)}\|_{\infty, e_k}$ бывает затруднительно или невозможно. В таких ситуациях применяют специальные методы адаптивного измельчения сетки, начиная с равномерной, достаточно грубой сетки, сравнивая по тому или иному критерию два кусочных полинома на соседних сетках и принимая решение о дальнейшем измельчении тех сегментов, на которых отличие этих кусочных полиномов превышает некоторую допустимую пороговую величину.

Рассмотрим для иллюстрации функцию $f(x) = \operatorname{arctg}(100x)$, график которой показан на рис. 4. Эта функция имеет особенность в окрестности точки $x = 0$, связанную с сильным ростом ее производных в этой достаточно малой окрестности. Вне этой окрестности можно использовать равномерную сетку со сравнительно небольшим числом узлов, в то время как в самой окрестности требуется сильно сгустить сетку. Например, для достижения точности $\delta = 10^{-6}$ с использованием кусочно-линейной аппроксимации на равномерной сетке потребовалось бы порядка $n = 230000$ отрезков, а подходящая

неравномерная сетка использует примерно $n = 7300$ сегментов, т.е. приблизительно в 30 раз меньше. Такая же экономия получается, если эту функцию приближать кусочно-кубическим интерполянтom: для равномерной сетки потребуется $n = 3400$, с использованием подходящей неравномерной сетки можно ограничиться $n \approx 150$, причем эта неравномерность довольно существенная: максимальная длина сегмента h такой сетки будет отличаться от минимальной $h_{\min} = \min_k h_k$ примерно в 200 раз.

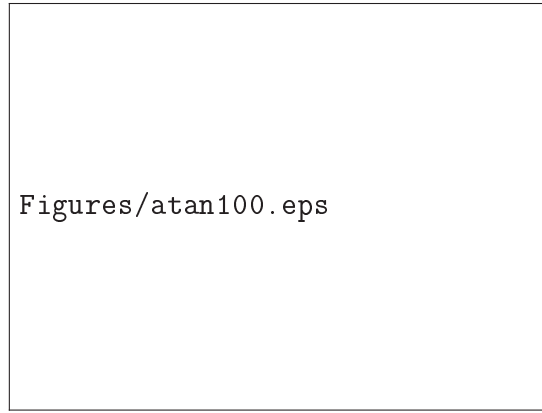


Рис. 4. График функции $f(x) = \arctg(100x)$ на $[-1, 1]$.

4. Интерполяция кубическими сплайнами

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим разбиение $\Omega_n = \{x_i : i = 1 : n + 1\}$: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$, сохранив обозначения $e_k = [x_k, x_{k+1}]$, $h_k = x_{k+1} - x_k$ — длина отрезка e_k , $h = \max h_k$ — максимальная из длин всех отрезков разбиения.

Определение 1.11. Для разбиения Ω_n пространством кубических сплайнов (гладкости 2) называется пространство функций

$$S_h^{3,2} = \{u \in C^2[a, b] : u|_{e_k} \in \mathbb{P}_3(e_k), k = 1 : n\}.$$

Определение 1.12. Задача построения интерполяционного кубического сплайна $s(x)$ по заданным в узлах Ω_n значениям f_i , $i = 1 : n + 1$, состоит в отыскании $s \in S_h^{3,2}$, удовлетворяющего условиям

$$s(x_i) = f_i \quad \forall i = 1 : n + 1. \quad (1.41)$$

4.1. Краевые условия для определения кубического сплайна

Вычислим размерность пространства $S_h^{3,2}$. Для определения полинома 3-ей степени на отрезке e_i требуется 4 параметра; для n отрезков получается $4n$ степеней свободы. С учетом включения кубического сплайна в пространство $C^2[a, b]$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, для $s \in S_h^{3,2}$ во внутренних узлах должны выполняться условия "склейки" 2-го порядка гладкости:

$$\begin{aligned} s(x_i - 0) &= s(x_i + 0), & s'(x_i - 0) &= s'(x_i + 0), \\ s''(x_i - 0) &= s''(x_i + 0) & \forall i &= 2 : n, \end{aligned}$$

т.е. всего накладывается $3(n - 1)$ ограничений. Таким образом, $N = \dim S_h^{3,2} = 4n - 3(n - 1) = n + 3$. Итак, для вычисления сплайна 3-ей степени требуется $N = n + 3$ параметров, тогда как уравнений (1.41) для его определения на 2 меньше. Для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи добавляют 2 так называемых *краевых (или граничных) условия*. Приведем примеры наиболее часто используемых краевых условий.

$$s''(x_1) = c_1, \quad s''(x_{n+1}) = c_{n+1}, \quad (1.42)$$

где c_1, c_{n+1} заданы;

$$s'(x_1) = d_1, \quad s'(x_{n+1}) = d_{n+1}, \quad (1.43)$$

где d_1, d_{n+1} заданы; периодические краевые условия:

$$s'(x_1) = s'(x_{n+1}), \quad s''(x_1) = s''(x_{n+1}). \quad (1.44)$$

Возможна постановка таких краевых условий, когда на одном конце отрезка $[a, b]$ задано условие типа (1.42), а на другом — (1.43). Если $f_i = f(x_i)$ для некоторой функции $f(x)$, то в (1.42) или (1.43) естественно взять в качестве c_i или d_i точные значения соответствующих производных этой функции $c_i = f''(x_i)$ или $d_i = f'(x_i)$ для $i = 1, n+1$, либо вычислить эти производные приближенно.

4.2. Вывод основных уравнений для определения сплайна

Для $i = 1 : n$ обозначим через $s_i(x)$ сужение искомого сплайна $s(x)$ на отрезок e_i ; так что $s_i \in \mathbb{P}_3(e_i)$, $s'_i \in \mathbb{P}_2(e_i)$, $s''_i \in \mathbb{P}_1(e_i)$. Положим также $c_i = s''(x_i)$ для $i = 1 : n+1$. Тогда на отрезке e_i , $i = 1 : n$, мы можем записать

$$s''_i(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}.$$

Интегрируя дважды по x , получим

$$s_i(x) = \frac{c_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \alpha_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \beta_i \frac{x - x_i}{h_i}.$$

Подставляя в это выражение концы i -го отрезка $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и учитывая (1.41), найдем

$$\alpha_i = f_i - \frac{c_i}{6}h_i^2, \quad \beta_i = f_{i+1} - \frac{c_{i+1}}{6}h_i^2.$$

Удобно ввести новые переменные

$$y_i = c_i/6, \quad i = 1 : n + 1, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}$$

и полиномы от универсальной локальной переменной t

$$\hat{s}_i(t) = s_i(x) = h_i^2 y_i (1-t)^3 + h_i^2 y_{i+1} t^3 + \quad (1.45)$$

$$+ (f_i - h_i^2 y_i)(1-t) + (f_{i+1} - h_i^2 y_{i+1})t, \quad (1.46)$$

при этом производные вычисляются по формулам

$$s'_i(x) = \frac{\hat{s}'_i(t)}{h_i} = -3h_i y_i (1-t)^2 + 3h_i y_{i+1} t^2 + \quad (1.47)$$

$$+ h_i (y_i - y_{i+1}) + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}. \quad (1.48)$$

Условия склейки во внутренних узлах $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$, $i = 2 : n$, приводят к равенствам

$$\frac{\hat{s}'_{i-1}(1)}{h_{i-1}} = \frac{\hat{s}'_i(0)}{h_i},$$

или

$$h_{i-1} y_{i-1} + 2h_{i-1} y_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} = -2h_i y_i - h_i y_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}.$$

Окончательно, для $i = 2 : n$

$$h_{i-1} y_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) y_i + h_i y_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}. \quad (1.49)$$

Далее, для сокращения записи, обозначим при $i = 2 : n$ компоненты вектора правой части основной системы

$$F_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

4.3. Учет краевых условий в системе уравнений

Если заданы граничные условия (1.42), то в (1.49) для $i = 2$ и $i = n$ уравнения следует переписать в виде

$$2(h_1+h_2)y_2+h_2y_3 = F_2-h_1\frac{c_1}{6}, \quad h_{n-1}y_{n-1}+2(h_{n-1}+h_n)y_n = F_n-h_n\frac{c_{n+1}}{6}.$$

Таким образом, в векторной форме получится система линейных алгебраических уравнений вида $Ay = g$ с симметричной 3-диагональной матрицей порядка $(n-1) \times (n-1)$ и вектором правой части $g \in \mathbb{R}^{n-1}$ для вектора неизвестных $[y_2, y_3, \dots, y_n]'$. Матрица этой системы уравнений имеет диагональное преобладание, поскольку в каждой строке диагональный элемент строго больше суммы модулей внедиагональных: $2(h_{i-1}+h_i) > h_{i-1}+h_i$, следовательно, эта матрица, как известно из линейной алгебры, положительно определена; так что $A = A' > 0$. Особенно проста структура этой системы в случае равномерной сетки $h_i = h = (b-1)/n$: после деления каждого уравнения этой системы на шаг h получится 3-диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят четверки, а на соседних диагоналях единицы.

В случае граничных условий (1.43) из формулы (1.47) получим

$$s'_1(x_1) = \frac{\hat{s}_1(0)}{h_1} = -2h_1y_1 - h_1y_2 + \frac{f_2 - f_1}{h_1} = d_1,$$

или

$$2h_1y_1 + h_1y_2 = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - d_1.$$

Аналогично на правом конце условие $s'(x_{n+1}) = d_{n+1}$ приведет к уравнению

$$h_ny_n + 2h_ny_{n+1} = d_{n+1} - \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n}.$$

Эти два последних уравнения следует присоединить к основным уравнениям (1.49). Получится система уравнений вида $Ay = g$ с симметричной положительно определенной (с диагональным преобладанием) 3-диагональной матрице порядка $(n+1) \times (n+1)$ и вектором правой части $g \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Мы можем рассмотреть более общие краевые условия, включающие в себя как частный случай оба рассмотренных выше типа:

$$\alpha_1 s''(x_1) - \beta_1 s'(x_1) = d_1, \quad \alpha_{n+1} s''(x_{n+1}) + \beta_{n+1} s'(x_{n+1}) = d_{n+1}, \quad (1.50)$$

где $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$. Тогда к основным уравнениям следует присоединить два следующих:

$$\left(\frac{\alpha_1}{6} + 2\beta_1 h_1\right) y_1 + \beta_1 h_1 y_2 = d_1 + \beta_1 \frac{f_2 - f_1}{h_1},$$

$$\beta_{n+1}h_n y_n + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{6} + 2\beta_{n+1}h_n \right) y_{n+1} = d_{n+1} - \beta_{n+1} \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n}.$$

Рассмотрим теперь периодические условия (1.44). Второе из этих условий приводит к равенству $y_1 = y_{n+1}$, что позволяет исключить переменную y_{n+1} из уравнений. Условие $s'(x_1) = s'(x_{n+1})$ равносильно

$$-2h_1 y_1 - h_1 y_2 + \frac{f_2 - f_1}{h_1} = h_n y_n + 2h_n y_{n+1} + \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n},$$

откуда с учетом равенства $y_1 = y_{n+1}$ получаем

$$2(h_1 + h_n)y_1 + h_1 y_2 + h_n y_n = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n},$$

при этом в (1.49) уравнение для $i = n$ следует переписать в виде

$$h_n y_1 + h_{n-1} y_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n) y_n = F_n.$$

Так что снова получается система линейных уравнений относительно вектора неизвестных $[y_1, y_2, \dots, y_n]' \in \mathbb{R}^n$ вида $Ay = g$ с симметричной положительно определенной (с диагональным преобладанием) $n \times n$ -матрицей с тем отличием, что кроме ненулевой 3-диагональной части матрицы, в позициях $(1, n)$ и $(n, 1)$ имеется ненулевой элемент h_n .

4.4. Оценки погрешности кубической сплайн-интерполяции

Здесь мы будем предполагать, что кубический сплайн в (1.41) строится по значениям $f_i = f(x_i)$ некоторой функции $f \in C^4[a, b]$. Нас будут интересовать оценки погрешности $r(x) = f(x) - s(x)$ и ее производных. Мы ограничимся случаем граничных условий (1.42), для других граничных условий анализ погрешности проводится аналогичным образом с аналогичными оценками скорости сходимости по $h \rightarrow 0$, что и в рассматриваемом случае.

Вначале мы будем считать, что имеет место точное задание значений

$$c_1 = f''(x_1), \quad c_{n+1} = f''(x_{n+1}). \quad (1.51)$$

Основным моментом является получение оценки нормы $\|r''\|_{\infty, e_i}$, поскольку через нее выражаются остальные:

$$\|r\|_{\infty, e_i} \leq \frac{h_i^2}{8} \|r''\|_{\infty, e_i}, \quad \|r'\|_{\infty, e_i} \leq h_i \|r''\|_{\infty, e_i}, \quad i = 1 : n. \quad (1.52)$$

Действительно, т.к. $r(x_i) = r(x_{i+1}) = 0$, то по теореме 1.15, с. 31, имеем для $x \in e_i$

$$r(x) = \frac{r''(\xi_x)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \text{ где } \xi_x \in e_i,$$

откуда с учетом очевидной оценки $|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leq h_i^2/4$ получается первое из неравенств (1.52). По теореме Ролля найдется $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$, что $r'(\eta_i) = 0$; поэтому $r'(x) = r''(\eta_x)(x - \eta_i)$ для некоторой точки $\eta_x \in e_i$, откуда следует второе из неравенств (1.52).

Обозначим $z_i = c_i - f''(x_i) = c_i - f_i''$, где $c_i = s''(x_i)$. Для точек произвольного сегмента $x \in e_i$

$$\begin{aligned} r''(x) = f''(x) - s_i''(x) = f''(x) - \left(f_i'' \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{h_i} \right) \\ + \left(z_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + z_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \right), \end{aligned}$$

откуда, применяя оценку линейной интерполяции,

$$\|r''\|_{\infty, e_i} \leq \frac{h_i^2}{8} \|f^{(4)}\|_{\infty, e_i} + \|z\|_{\infty}. \quad (1.53)$$

Из (1.49) для $i = 2 : n$ следует

$$\begin{aligned} h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \\ - (h_{i-1}f_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i)f_i'' + h_i f_{i+1}'') \equiv \Phi_i. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Запишем разложения Тейлора:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f_i' h_i + \frac{1}{2} f_i'' h_i^2 + \frac{1}{6} f_i^{(3)} h_i^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_{i+}) h_i^4, \text{ где } \xi_{i+} \in e_i, \\ f_{i-1} &= f_i - f_i' h_{i-1} + \frac{1}{2} f_i'' h_{i-1}^2 - \frac{1}{6} f_i^{(3)} h_{i-1}^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_{i-}) h_{i-1}^4, \text{ где } \xi_{i-} \in e_{i-1}, \\ f_{i+1}'' &= f_i'' + f_i^{(3)} h_i + \frac{1}{2} f^{(4)}(\eta_{i+}) h_i^2, \quad \eta_{i+} \in e_i, \\ f_{i-1}'' &= f_i'' - f_i^{(3)} h_{i-1} + \frac{1}{2} f^{(4)}(\eta_{i-}) h_{i-1}^2, \quad \eta_{i-} \in e_{i-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) &= 3(h_{i-1} + h_i) f_i'' + (h_i^2 - h_{i-1}^2) f_i^{(3)} \\ &\quad + \frac{h_{i-1}^3}{4} f^{(4)}(\xi_{i-}) + \frac{h_i^3}{4} f^{(4)}(\xi_{i+}), \end{aligned}$$

$$h_{i-1}f''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)f''_i + h_i f''_{i+1} = 3(h_{i-1} + h_i)f''_i + (h_i^2 - h_{i-1}^2)f_i^{(3)} + \frac{h_{i-1}^3}{2}f^{(4)}(\eta_{i-}) + \frac{h_i^3}{2}f^{(4)}(\eta_{i+}).$$

Подставляя в правую часть (1.54), после сокращений получим

$$\Phi_i = \frac{3}{4}h_{i-1}^3(f^{(4)}(\xi_{i-}) + f^{(4)}(\eta_{i-})) + \frac{3}{4}h_i^3(f^{(4)}(\xi_{i+}) + f^{(4)}(\eta_{i+})),$$

откуда

$$|\Phi_i| \leq \frac{3}{4}(h_{i-1}^3 + h_i^3)\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}.$$

Следовательно, из (1.54) для $i = 2 : n$ имеем оценку

$$2(h_{i-1} + h_i)|z_i| \leq \frac{3}{4}(h_{i-1}^3 + h_i^3)\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]} + h_{i-1}|z_{i-1}| + h_i|z_{i+1}|, \quad (1.55)$$

отсюда

$$2(h_{i-1} + h_i)|z_i| \leq \frac{3}{4}(h_{i-1}^3 + h_i^3)\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]} + (h_{i-1} + h_i)\|z\|_{\infty},$$

или, после деления на $h_{i-1} + h_i$,

$$\begin{aligned} 2|z_i| &\leq \frac{3}{4}(h_{i-1}^2 - h_{i-1}h_i + h_i^2)\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]} + \|z\|_{\infty} \\ &\leq \frac{3}{4}h^2\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]} + \|z\|_{\infty}, \end{aligned}$$

поскольку, $h_{i-1}^2 - h_{i-1}h_i + h_i^2 \leq \max(h_{i-1}^2, h_i^2) \leq h^2$. Окончательно,

$$\|z\|_{\infty} \leq \frac{3}{4}h^2\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}. \quad (1.56)$$

Подставим эту оценку в (1.53):

$$\|r''\|_{\infty,e_i} \leq \frac{h_i^2}{8}\|f^{(4)}\|_{\infty,e_i} + \|z\|_{\infty} \leq \frac{7}{8}h^2\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}.$$

Учитывая (1.52), мы получаем следующую теорему.

Теорема 1.18. *Если функция $f \in C^4[a, b]$, то для погрешности $r(x) = f(x) - s(x)$ кубического сплайна, построенного по значениям $f(x_i)$ с краевыми условиями (1.51), имеют место оценки*

$$\|r\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{M_4}{8}h^4, \quad \|r'\|_{\infty,[a,b]} \leq M_4h^3, \quad \|r''\|_{\infty,[a,b]} \leq M_4h^2,$$

где $M_4 = \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$.

Рассмотрим теперь краевые условия (1.42), где значения c_1, c_{n+1} аппроксимируют производные $f''(x_1), f''(x_{n+1})$ со вторым порядком:

$$|c_1 - f''(x_1)| \leq \alpha h^2, \quad |c_{n+1} - f''(x_{n+1})| \leq \alpha h^2. \quad (1.57)$$

Выполнения этих условий можно добиться, если взять

$$c_1 = L_a''(x_1), \quad c_{n+1} = L_b''(x_{n+1}), \quad (1.58)$$

где $L_a(x)$ интерполяционный полином Лагранжа 3-ей степени, построенный по значениям $f(x_i)$ для $i = 1 : 4$; аналогично определяется кубический интерполяционный полином Лагранжа $L_b(x)$ по значениям $f(x_i)$ для $i = n - 2 : n + 1$. Тогда оценки (1.57) будут вытекать из теоремы 1.8, с. 20, с постоянной $\alpha \leq 9M_4/2$ в общем случае неравномерной сетки; в случае равномерной сетки вблизи граничных точек оценку α можно улучшить: $\alpha \leq 11M_4/12$.

Заметим, что оценки (1.55) для $i = 2 : n$ будут также справедливы. Введем обозначение

$$\|z\|_{\infty, \omega_h} = \max_{i=2:n} |z_i|.$$

Тогда из (1.55) для $i = 2$ и $i = n$ в силу (1.57) получим

$$2|z_i| \leq \frac{3}{4}h^2M_4 + \alpha h^2 + \|z\|_{\infty, \omega_h},$$

а для $i = 3 : n - 1$, как и раньше, будут выполняться неравенства

$$2|z_i| \leq \frac{3}{4}h^2M_4 + \|z\|_{\infty, \omega_h}.$$

Таким образом, учитывая (1.57),

$$\|z\|_{\infty} \leq \left(\frac{3}{4}M_4 + \alpha\right)h^2.$$

Теперь из оценки (1.53), которая справедлива вне зависимости от краевых условий, мы получаем оценки погрешности и в случае неточного задания краевых условий (1.42).

Теорема 1.19. *Если функция $f \in C^4[a, b]$, то для погрешности $r(x) = f(x) - s(x)$ кубического сплайна, построенного по значениям $f(x_i)$ с краевыми условиями (1.42), удовлетворяющими условиям аппроксимации (1.57), имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \|r\|_{\infty, [a, b]} &\leq \frac{M_4 + \alpha}{8}h^4, \quad \|r'\|_{\infty, [a, b]} \leq (M_4 + \alpha)h^3, \\ \|r''\|_{\infty, [a, b]} &\leq (M_4 + \alpha)h^2. \end{aligned}$$

ГЛАВА 2
Задачи наилучшего приближения в
нормированных и евклидовых пространствах

1. Наилучшее приближение в нормированном пространстве

Пусть F — вещественное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $G \subset F$ — его замкнутое подпространство. Введем понятие расстояния от элемента $f \in F$ до подпространства G как величину

$$d_G(f) = \inf_{g \in G} \|f - g\|. \quad (2.1)$$

По определению точной нижней грани, найдется последовательность элементов $g_n \in G$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = d_G(f).$$

Любую такую последовательность будем называть аппроксимирующей $f \in F$ последовательностью элементов G , короче, аппроксимирующей последовательностью.

Проясним некоторые свойства расстояния до подпространства, как функционала (т.е. вещественнозначной функции) на нормированном пространстве F .

Теорема 2.1. *Функционал $d_G(f)$ на нормированном пространстве F удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $0 \leq d_G(f) \leq \|f\|$, причем $d_G(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f \in G$;

2) для любого числа α и вектора $f \in F$

$$d_G(\alpha f) = |\alpha| d_G(f),$$

при этом, если последовательность $g_n \in G$ аппроксимирует f , то последовательность $\alpha g_n \in G$ аппроксимирует αf ;

3) для любых $f_1, f_2 \in F$

$$d_G(f_1 + f_2) \leq d_G(f_1) + d_G(f_2);$$

4) для любых $f_1, f_2 \in F$

$$|d_G(f_1) - d_G(f_2)| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Неравенство $0 \leq d_G(f) \leq \|f\|$ очевидно, т.к. $d_G(f)$ есть точная нижняя грань множества неотрицательных чисел, содержащего число $\|f\|$, так подпространство G содержит нулевой вектор. Если $f \in G$, то точная нижняя грань достигается на $\|f - f\| = 0$. Пусть обратно, $d_G(f) = 0$. Тогда, по определению точной нижней грани, найдется последовательность элементов $g_n \in G$ такая, что $\|f - g_n\| \downarrow 0$. Это значит, что эта последовательность сходится к f , откуда, в силу условия замкнутости, $f \in G$.

2) В случае $\alpha = 0$ равенство очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$ и последовательность $g_n \in G$ аппроксимирует f . Тогда

$$d_G(\alpha f) \leq \|\alpha f - \alpha g_n\| = |\alpha| \|f - g_n\| \rightarrow |\alpha| d_G(f),$$

откуда $d_G(\alpha f) \leq |\alpha| d_G(f)$. Повторив те же рассуждения с заменой f на $\bar{f} = \alpha f$ и α на обратную величину $1/\alpha$, получим

$$d_G(\bar{f}/\alpha) \leq d_G(\bar{f})/|\alpha|, \quad \text{или,} \quad |\alpha| d_G(f) \leq d_G(\alpha f).$$

Доказано, тем самым, равенство $d_G(\alpha f) = |\alpha| d_G(f)$, а из сходимости $\|\alpha f - \alpha g_n\| \rightarrow |\alpha| d_G(\alpha f)$ следует вторая часть утверждения 2).

3) Пусть последовательность $g_{i,n} \in G$ аппроксимирует f_i , $i = 1, 2$. Тогда по неравенству треугольника

$$d_G(f_1 + f_2) \leq \|f_1 + f_2 - (g_{1,n} + g_{2,n})\| \leq \|f_1 - g_{1,n}\| + \|f_2 - g_{2,n}\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $n \rightarrow \infty$, получим требуемое неравенство.

4) Пусть последовательность $g_{i,n} \in G$ аппроксимирует f_i , $i = 1, 2$. Тогда по неравенству треугольника

$$d_G(f_1) \leq \|f_1 - g_{2,n}\| \leq \|f_1 - f_2\| + \|f_2 - g_{2,n}\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $n \rightarrow \infty$, получим неравенство

$$d_G(f_1) \leq \|f_1 - f_2\| + d_G(f_2).$$

Аналогично получается неравенство

$$d_G(f_2) \leq \|f_1 - f_2\| + d_G(f_1).$$

Следовательно, $|d_G(f_1) - d_G(f_2)| \leq \|f_1 - f_2\|$. \square

Из свойств 1)-3) следует, что функционал $d_G(\cdot)$ является непрерывной *полунормой* на F , нуль-множеством (или *ядром*) которой является подпространство G . Свойство 4) характеризует функцию $f \in F \rightarrow d_G(f)$ как *Липшиц-непрерывную функцию* с константой Липшица равной 1.

Определение 2.1. Наилучшим приближением элемента $f \in F$ в подпространстве G называется такой элемент $\bar{g} \in G$, что

$$\|f - \bar{g}\| = d_G(f). \quad (2.2)$$

Задача отыскания для заданного $f \in F$ такого элемента $\bar{g} \in G$ называется задачей наилучшего приближения.

Теорема 2.2. Если подпространство G конечномерно, то для всякого $f \in F$ существует наилучшее приближение в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $g_n \in G$ аппроксимирует f :

$$\|f - g_n\| \rightarrow d_G(f)$$

при $n \rightarrow \infty$. Поскольку любая сходящаяся последовательность ограничена, то для некоторой постоянной $c > 0$

$$\|f - g_n\| \leq c, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда при всех n

$$\|g_n\| \leq \|f - g_n\| + \|f\| \leq c + \|f\|,$$

что означает ограниченность последовательности элементов $\{g_n\}$ в конечномерном пространстве G . Следовательно, из этой последовательности можно выделить сходящуюся в G подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$, предел которой обозначим через $\bar{g} \in G$. Имеем

$$d_G(f) \leq \|f - \bar{g}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - g_{n_k}\| = d_G(f),$$

откуда заключаем, что предельный элемент $\bar{g} \in G$ является наилучшим приближением для f . \square

Далее всюду далее без оговорок предполагается, что подпространство G конечномерно. В доказанной теореме говорится о существовании наилучшего приближения, но не утверждается его единственность. Обозначим через $\Pi f \subset G$ множество всех наилучших приближений элемента f . Из свойства 2) теоремы 2.1 следует, что для любого числа α

$$\Pi(\alpha f) = \alpha \Pi f. \quad (2.3)$$

Напомним, что некоторое множество $K \subset F$ является выпуклым множеством, если вместе с любыми двумя элементами $g_1, g_2 \in K$ это множество содержит и весь отрезок $[g_1, g_2] = \{(1 - \lambda)g_1 + \lambda g_2 : \lambda \in [0, 1]\}$, соединяющий эти элементы.

Теорема 2.3. Множество Πf всех наилучших приближений элемента $f \in F$ является замкнутым выпуклым ограниченным множеством в конечномерном подпространстве G , т.е. выпуклым компактом в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $g_1, g_2 \in \Pi f$, то для $g = (1 - \lambda)g_1 + \lambda g_2$, где $\lambda \in [0, 1]$, будем иметь по неравенству треугольника

$$\begin{aligned} d_G(f) &\leq \|f - g\| = \|(1 - \lambda)(f - g_1) + \lambda(f - g_2)\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|f - g_1\| + \lambda\|f - g_2\| = d_G(f), \end{aligned}$$

т.е. g также принадлежит Πf , что означает выпуклость Πf . Докажем его замкнутость. Пусть последовательность g_1, g_2, \dots из Πf сходится к некоторому предельному элементу $g \in G$. Тогда

$$d_G(f) \leq \|f - g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} d_G(f) = d_G(f),$$

т.е. предельный элемент g также будет наилучшим приближением для $f \in F$. Далее, если $g \in \Pi f$, то

$$\|g\| \leq \|f - g\| + \|f\| = d_G(f) + \|f\|.$$

Эта оценка доказывает ограниченность множества Πf . \square

Приведем примеры задач, в которых наилучшее приближение не единственно. В качестве нормированного пространства $F = F_\infty$ возьмем пространство \mathbb{R}^2 векторов $x = (x_1, x_2)$, наделенное нормой $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$. Возьмем его одномерное подпространство

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

и для вектора $f = (0, 1)$ поставим задачу о наилучшем приближении этого вектора векторами из G в норме $\|\cdot\|_\infty$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $d_G(f) = 1$ и любой вектор $x = (x_1, 0)$, где $-1 \leq x_1 \leq 1$ является наилучшим приближением для f , поскольку для указанных точек $1 = d_G(f) = \|f - x\|_\infty$. Из доказанного выше свойства $\Pi(\alpha f) = \alpha \Pi f$ следует, что $\Pi(\alpha f) = \{(x_1, 0) : |x_1| \leq |\alpha|\}$. Если точку f двигать параллельно оси x_1 , то отрезок Πf будет двигаться по оси x_1 параллельно, не меняя своей длины. Таким образом, для $f = (f_1, f_2)$ множество наилучших приближений в G есть отрезок $\Pi f = \{(x_1, 0) : |x_1 - f_1| \leq |f_2|\}$.

С другой стороны, если в качестве подпространства взять

$$G = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = 0\},$$

где постоянные a, b отличны от нуля, то в таком подпространстве для любого $f \in \mathbb{R}^2$ будет существовать только единственное наилучшее приближение. Это легко понять из геометрических соображений, если учесть, что любая замкнутая r -окрестность точки f

$$O_r[f] = \{x \in F : \|f - x\|_\infty \leq r\}$$

представляет из себя квадрат с центром в точке f со сторонами, параллельными координатным осям и равным по длине $2r$. Поэтому для указанной прямой G , не совпадающей ни с одной из координатных осей, найдется единственная замкнутая r -окрестность с центром в f , которая коснется этой прямой одним из своих углов. Точка касания и будет единственным наилучшим приближением в G .

Похожим свойством обладает и нормированное пространство $F_1 = \mathbb{R}^2$ с нормой $\|\cdot\|_1$. Существуют два (и только два) одномерных подпространства

$$G = \{x : x_1 = x_2\} \quad \text{и} \quad G = \{x : x_1 = -x_2\},$$

в которых наилучшее приближение будет не единственным. Для остальных же подпространств наилучшее приближение будет единственным и относительно этой нормы.

С другой стороны, как следует из теоремы ниже, в пространстве \mathbb{R}^m , наделенным любой из норм $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$, задача о наилучшем приближении будет иметь единственное решение.

Определение 2.2. Нормированное пространство $(F, \|\cdot\|)$ называется строго нормированным, если для любых двух элементов $f, g \in F$, отличных от нуля, для которых выполнено равенство $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$, найдется такое число $\alpha > 0$, что $f = \alpha g$.

Определение 2.3. Единичный шар

$$O_1 = \{f : \|f\| \leq 1\}$$

является строго выпуклым множеством, если для любых двух различных элементов f, g таких, что $\|f\| = \|g\| = 1$, выполнено неравенство

$$\|(1 - \lambda)f + \lambda g\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Ясно, что если единичный шар является строго выпуклым множеством, то и для любого $r > 0$ шар $O_r = \{f : \|f\| \leq r\}$ радиуса r является строго выпуклым множеством в смысле выполнения для любых различных элементов f, g таких, что $\|f\| = \|g\| = r$ строгого неравенства

$$\|(1 - \lambda)f + \lambda g\| < r \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

На самом деле, как показывает следующее утверждение, эти два свойства нормы — строгой нормированности и строгой выпуклости единичного шара — эквивалентны.

Лемма 2.1. *Для того, чтобы пространство $(F, \|\cdot\|)$ было строго нормированным, необходимо и достаточно, чтобы единичный шар O_1 был строго выпуклым множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть пространство $(F, \|\cdot\|)$ строго нормировано, $\|f\| = \|g\| = 1$, $f \neq g$ и для некоторого $\lambda \in (0, 1)$, против доказываемого,

$$1 = \|(1 - \lambda)f + \lambda g\| = \|(1 - \lambda)f\| + \|\lambda g\|.$$

(Больше 1 эта норма быть не может в силу неравенства треугольника). Из строгой нормированности следует, что существует $\alpha > 0$, что $(1 - \lambda)f = \alpha \lambda g$, откуда

$$1 - \lambda = \|(1 - \lambda)f\| = \|\alpha \lambda g\| = \alpha \lambda.$$

Таким образом, получаем, что $f = g$ — противоречие.

Достаточность. Пусть единичный шар O_1 является строго выпуклым множеством и для двух ненулевых векторов $f, g \in F$ выполнено равенство $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$. Нужно показать, что $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$. Обозначим

$$\bar{f} = \frac{f}{\|f\|}, \quad \bar{g} = \frac{g}{\|g\|}.$$

Заметим, что $\|\bar{f}\| = \|\bar{g}\| = 1$. Предположим, что $\bar{f} \neq \bar{g}$. Введем

$$\lambda = \frac{\|g\|}{\|f\| + \|g\|} \in (0, 1), \quad 1 - \lambda = \frac{\|f\|}{\|f\| + \|g\|}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \left\| \frac{f}{\|f\| + \|g\|} + \frac{g}{\|f\| + \|g\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|f\|}{\|f\| + \|g\|} \bar{f} + \frac{\|g\|}{\|f\| + \|g\|} \bar{g} \right\| = \|(1 - \lambda)\bar{f} + \lambda \bar{g}\| < 1 \end{aligned}$$

(последнее неравенство выполнено в силу строгой выпуклости единичного шара). Полученное абсурдное неравенство доказывает, что $\bar{f} = \bar{g}$, а значит $f = \alpha g$ для $\alpha = \|f\|/\|g\| > 0$. Этим устанавливается строгая нормированность пространства $(F, \|\cdot\|)$. \square

Покажем теперь, что условие строгой выпуклости единичного шара является достаточным условием единственности элемента наилучшего приближения.

Теорема 2.4. *Если единичный шар нормированного пространства является строго выпуклым множеством, то существует единственный элемент наилучшего приближения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g_1, g_2 — два разных наилучших приближения для $f \in F$, тогда по теореме 2.3 вектор $g = g_1/2 + g_2/2$ также является элементом наилучшего приближения, так что

$$d_G(f) = \|f - g\| = \left\| \frac{f - g_1}{2} + \frac{f - g_2}{2} \right\|.$$

С другой стороны, в силу строгой выпуклости любого шара, в частности, с центром в нуле и радиуса $d_G(f)$,

$$\left\| \frac{f - g_1}{2} + \frac{f - g_2}{2} \right\| < d_G(f),$$

что противоречит предыдущему равенству. Значит, двух разных наилучших приближений быть не может. \square

2. Полином наилучшего равномерного приближения

Определение 2.4. Полином $p \in \mathbb{P}_n$ называется полиномом наилучшего равномерного приближения на отрезке $[a, b]$ для непрерывной функции $f \in C[a, b]$, если

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} = d_n(f), \quad (2.4)$$

где

$$d_n(f) = \min_{q \in \mathbb{P}_n} \|f - q\|_{\infty, [a, b]}$$

— расстояние в равномерной норме от f до пространства полиномов \mathbb{P}_n .

По теореме 2.2, всегда хотя бы один такой полином существует. Заметим, что единичный шар в равномерной норме не является строго выпуклым множеством, так что достаточное условие единственности наилучшего равномерного приближения не выполнено. Действительно, рассмотрим какую-нибудь функцию $f \in C[a, b]$ такую, что

$$|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [a, b] \text{ и } f(a) = 1$$

и возьмем любую функцию $g \in C[a, b]$, обладающую теми же свойствами:

$$|g(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [a, b] \text{ и } g(a) = 1,$$

но такую, что, например, $f(b) \neq g(b)$ (таких функций бесконечно много). Так что мы имеем две разные функции с единичной равномерной нормой. Кроме этого, любая выпуклая комбинация этих функций $(1-\lambda)f + \lambda g$, $\lambda \in [0, 1]$, также будет иметь единичную норму, поскольку по меньшей мере в одной точке $x = a$ эта комбинация принимает значение 1. Таким образом, вместе с f и g единичная сфера в $C[a, b]$ целиком содержит и весь отрезок, соединяющий эти функции. Это означает, что единичный шар в $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty, [a, b]})$ не является строго выпуклым множеством.

2.1. Примеры полиномов наилучшего равномерного приближения

Пусть функция $f \in C[a, b]$ в точках x_0 и x_1 принимает свои экстремальные значения

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Тогда полиномом наилучшего приближения $p_0 \in \mathbb{P}_0$ для f будет постоянная функция

$$p_0(x) = \frac{M + m}{2},$$

причем

$$d_0(f) = \frac{M - m}{2},$$

$$f(x_0) - p_0 = -d_0(f) = -\|f - p_0\|_{\infty}, \quad f(x_1) - p_0 = d_0(f) = \|f - p_0\|_{\infty}.$$

Точки x_0 , x_1 , в которых выполнены последние два равенства, называют *точками чебышевского альтернанса*.

Пусть теперь функция $f \in C^2[a, b]$ такова, что ее вторая производная $f''(x)$ не обращается в нуль внутри интервала (a, b) . Построим для этой функции полином наилучшего равномерного приближения $p \in \mathbb{P}_1$. Пусть для определенности $f''(x) > 0$ на (a, b) , т.е. функция $f(x)$ выпукла вниз на этом промежутке и ее производная возрастает. Тогда

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b)$$

и существует единственная точка $x_1 \in (a, b)$ такая, что

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \equiv \alpha.$$

Рассмотрим два полинома 1-ой степени с одинаковым старшим коэффициентом α :

$$q_1(x) = \alpha(x - a) + f(a), \quad q_2(x) = \alpha(x - x_1) + f(x_1).$$

Тогда полиномом наилучшего равномерного приближения $p \in \mathbb{P}_1$ для f будет среднее арифметическое

$$p(x) = 0.5(q_1(x) + q_2(x)).$$

Если обозначить $x_0 = a$, $x_2 = b$, то в точках x_i справедливы равенства

$$f(x_0) - p(x_0) = \|f - p\|_\infty, \quad f(x_1) - p(x_1) = -\|f - p\|_\infty,$$

$$f(x_2) - p(x_2) = \|f - p\|_\infty.$$

2.2. Теорема Чебышева об альтернансе

Теорема 2.5. *Чтобы полином $p \in \mathbb{P}_n$ был полиномом наилучшего равномерного приближения функции $f \in C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $n + 2$ точек $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ таких, что*

$$f(x_i) - p(x_i) = c(-1)^i \|f - p\|_\infty \quad \forall i = 0 : n + 1, \quad (2.5)$$

где постоянная $c = 1$ или $c = -1$ (для всех $i = 0 : n + 1$).

Точки x_i фигурирующие в теореме, называют точками чебышевского альтернанса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $p \in \mathbb{P}_n$ — полином наилучшего равномерного приближения степени $n \leq 1$ (случай $n = 0$ разобран в первом примере пункта 2.1), $d = d_n(f) = \|f - p\|_\infty > 0$ (случай $d = 0$ тривиален). Обозначим $r(x) = f(x) - p(x)$, через M_+ — множество всех $x \in [a, b]$, для которых $r(x) = d$ и через M_- — множество всех $x \in [a, b]$, для которых $r(x) = -d$. Заметим, что эти множества замкнуты и, по теореме Вейерштрасса, их объединение не пусто. Положим $z_0 = a$ и $x_0 = \inf(M_+ \cup M_-)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $f(x_0) - p(x_0) = d$, так что $x_0 = \inf M_+$. Далее, положим $M_1 = M_- \cap (x_0, b]$. Так как $r(x_0) > 0$, то это множество замкнуто. Покажем, что оно не пусто. Если оно пусто, то это значит, что

$$r(x) = f(x) - p(x) > -d \quad \forall x \in (x_0, b].$$

Положим $z_1 = b$, $q(x) = z_1 - x$ и $p_\varepsilon(x) = p(x) + \varepsilon q(x)$, где $\varepsilon > 0$ подберем настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$f(x) - p_\varepsilon(x) = f(x) - p(x) - \varepsilon q(x) > -d \quad \forall x \in (x_0, b],$$

например, можно взять $\varepsilon > 0$ из интервала

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{\min_{x \in [z_0, z_1]} (r(x) + d)}{\|q\|_\infty}. \quad (2.6)$$

Таким образом, для всех $x \in [z_0, z_1] = [a, b]$ выполняются неравенства

$$-d < f(x) - p_\varepsilon(x) < d,$$

т.е. $\|f - p_\varepsilon\|_\infty < d = d_n$, что противоречит определению числа $d_n(f)$. Полученное противоречие показывает, что M_1 не пусто; обозначим $x_1 = \inf M_1$, $M_2 = M_+ \cap (x_1, b]$. Если предположить, что $M_2 = \emptyset$, а значит

$$r(x) < d \quad \forall x \in (x_1, b],$$

то можно получить противоречие следующим образом. Положим $z_2 = b$, а в качестве z_1 зафиксируем любую точку из интервала (x_0, x_1) и для $q(x) = z_1 - x$ снова рассмотрим возмущение полинома $p(x)$ вида $p_\varepsilon(x) = p(x) + \varepsilon q(x)$. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ определяется из (2.6), а

$$\varepsilon_2 = \frac{\min_{x \in [z_1, z_2]} (d - r(x))}{\|q\|_\infty} > 0. \quad (2.7)$$

Тогда для $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ для всех точек $x \in [a, b] = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$ по построению выполнены неравенства

$$-d < f(x) - p_\varepsilon(x) = r(x) - \varepsilon q(x) < d,$$

т.е. $\|f - p_\varepsilon\|_\infty < d$, что противоречит определению числа d . Следовательно, $M_2 \neq \emptyset$ и мы можем положить $x_2 = \inf M_2$. Если $n = 1$, то точки альтернанса построены. Если $n \geq 2$, то аналогично строим точки $x_j = \inf M_j$ для $j = 2 : m$, где $M_j = M_+ \cap (x_{j-1}, b]$ для четных j , и $M_j = M_- \cap (x_{j-1}, b]$ для нечетных j . По построению,

$$r(x_j) = (-1)^j d, \quad j = 0 : m.$$

Если $m \geq n + 1$, то теорема в части необходимости доказана. Пусть $m \leq n$ и множество $M_{m+1} = M_* \cap (x_m, b]$ пусто, где символ $*$ заменяет $-$ или $+$ в зависимости от четности или нечетности m соответственно. Пусть $z_j \in (x_{j-1}, x_j)$ для $j = 1 : m$, $z_{m+1} = b$ и

$$q(x) = \prod_{j=1}^m (z_j - x).$$

Рассмотрим возмущение $p_\varepsilon = p + \varepsilon q \in \mathbb{P}_n$. Как и выше, определим

$$\varepsilon_j = \frac{\max_{x \in [z_{j-1}, z_j]} (d - (-1)^j r(x))}{\|q\|_\infty} > 0, \quad j = 1 : m + 1.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ из условия

$$\varepsilon < \min_{j=1:m+1} \varepsilon_j.$$

Тогда по построению и в силу предположения $M_{m+1} = \emptyset$ будут выполнены неравенства

$$-d < f(x) - p_\varepsilon(x) = r(x) - \varepsilon q(x) < d$$

на всех отрезках $[z_{j-1}, z_j]$, $j = 1 : m + 1$, откуда будет следовать противоречивое неравенство $\|f - p_\varepsilon\|_\infty < d$. Полученное противоречие доказывает теорему в части необходимости.

Достаточность. Пусть для полинома $p \in \mathbb{P}_n$ существуют точки альтернанса, в которых выполнены равенства (2.5). Предположим, что p не является полиномом наилучшего равномерного приближения для f и пусть $q \in \mathbb{P}_n$ — полином наилучшего равномерного приближения, так что $d_n(f) = \|f - q\|_\infty < \|f - p\|_\infty$. Рассмотрим разность $g = q - p \in \mathbb{P}_n$ в точках альтернанса:

$$g(x_i) = (f(x_i) - p(x_i)) - (f(x_i) - q(x_i)).$$

Поскольку $|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\|_\infty$, то знак $g(x_i)$ определяется знаком $f(x_i) - p(x_i)$. Таким образом, полином $g(x)$ степени n в точках x_i , $i = 0 : n + 1$, чередует знаки, следовательно, между этими точками имеет не менее $n + 1$ нулей, что может быть только в случае $g(x) \equiv 0$, но это противоречит тому, что $p \neq q$. Полученное противоречие доказывает, что полином p является полиномом наилучшего равномерного приближения функции f . \square

2.3. Единственность полинома наилучшего равномерного приближения

Теорема 2.6. *Полином наилучшего равномерного приближения единствен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ являются полиномами наилучшего равномерного приближения функции $f \in C[a, b]$. Тогда их

среднее арифметическое $p = 0.5(p_1 + p_2)$, по теореме 2.3, также является полиномом наилучшего равномерного приближения f . По теореме Чебышева об альтернансе, существуют $n + 2$ точки чебышевского альтернанса полинома $p(x)$, в которых выполнены равенства (2.5). Имеем

$$f(x_i) - p(x_i) = 0.5(f(x_i) - p_1(x_i)) + 0.5(f(x_i) - p_2(x_i)).$$

Поскольку для чисел $a_i = 0.5(f(x_i) - p_1(x_i))$, $b_i = 0.5(f(x_i) - p_2(x_i))$ справедливы соотношения:

$$|a_i| \leq 0.5d_n(f), \quad |b_i| \leq 0.5d_n(f), \quad |a_i + b_i| = d_n(f),$$

то это может быть только в случае, когда $a_i = b_i$, т.е. $p_1(x_i) = p_2(x_i)$ во всех точках альтернанса. Итак, два полинома степени n совпадают в более, чем n различных точках, что может быть только, когда $p_1 \equiv p_2$.

□

Используя доказанную теорему, мы можем установить единственность полинома, наименее уклоняющегося от нуля. Напомним (см. п. 1.5.1, с. 25), что полином $p \in \mathbb{P}_{n,1}(a, b)$ (множество полиномов со старшим коэффициентом 1) называется полиномом наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[a, b]$, если

$$\|p\|_{\infty, [a, b]} = \min_{q \in \mathbb{P}_{n,1}} \|q\|_{\infty, [a, b]}.$$

Эту задачу будем трактовать как задачу о полиноме наилучшего равномерного приближения $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ степенной функции $f(x) = x^n$. Действительно, любой полином q со старшим коэффициентом 1, можно представить в виде разности $q(x) = x^n - p_{n-1}(x)$ и найти полином такого вида с минимальной равномерной нормой, значит найти наилучшее равномерное приближение $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}(a, b)$ функции x^n . По теореме 2.6 такой полином p_{n-1} существует и единствен. Следовательно, и единствен полином, наименее уклоняющийся от нуля, который, как было показано в п.1.5.1, является масштабированным полиномом Чебышева на отрезке $[a, b]$. Итак, мы доказали

Следствие 2.1. *Полином Чебышева степени n со старшим коэффициентом 1 является единственным полиномом, имеющим наименьшую равномерную норму среди всех полиномов из $\mathbb{P}_{n,1}$.*

3. Наилучшее приближение в евклидовом пространстве

Напомним, что скалярным произведением на вещественном линейном пространстве F называется такая вещественная функция, заданная на парах векторов из F и обозначаемая далее через (\cdot, \cdot) , которая удовлетворяет трем свойствам:

1) для всех $f \in F$ скалярное произведение вектора на себя неотрицательно: $(f, f) \geq 0$, причем $(f, f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$;

2) для всех $f, g \in F$

$$(f, g) = (g, f);$$

3) для любых $f, g, w \in F$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f + \beta g, w) = \alpha(f, w) + \beta(g, w).$$

В силу свойства симметричности 2), переставляя аргументы, получим

$$(w, \alpha f + \beta g) = \alpha(w, f) + \beta(w, g).$$

Из этого же свойства и свойства 1) следует, что

$$(f, g) = 0 \quad \forall g \in F$$

тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Линейное пространство, наделенное скалярным произведением, называется *евклидовым пространством*. В силу свойства 1) скалярного произведения, на пространстве F корректно определяется функционал

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad (2.8)$$

называемый *нормой евклидова пространства*. Заметим, что из свойств скалярного произведения следует, что

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in F.$$

Ниже мы покажем, что этот функционал удовлетворяет неравенству треугольника

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

тем самым оправдывая свое название "норма".

3.1. Неравенство Коши-Шварца и его следствия

Важную роль в теории евклидовых пространств играет неравенство Коши-Шварца.

Лемма 2.2. 1) Для любых $f, g \in F$ справедливо неравенство

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|; \quad (2.9)$$

2) для двух ненулевых векторов $f, g \in F$ имеет место равенство $(f, g) = \|f\| \|g\|$ тогда и только тогда, когда $f = \alpha g$ для некоторого числа $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $f, g \in F$. Если хотя бы один из двух векторов $f, g \in F$ нулевой, то неравенство (2.9) превращается в равенство $0 = 0$. Докажем неравенство в предположении, что оба вектора ненулевые. Рассмотрим неотрицательную функцию $p(t)$ вещественного параметра t : $p(t) = \|f - tg\|^2$. В силу свойств скалярного произведения,

$$0 \leq p(t) = \|f - tg\|^2 = \|f\|^2 - 2t(f, g) + t^2\|g\|^2.$$

Таким образом, $p(t)$ — это полином 2-й степени от t с ненулевым старшим коэффициентом. Поскольку этот полином принимает неотрицательные значения для всех вещественных t , то это означает, что дискриминант этого квадратного трехчлена неположителен:

$$D = 4(f, g)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0.$$

Это неравенство равносильно (2.9).

Докажем утверждение 2). Если $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$, то непосредственной подстановкой получаем

$$(f, g) = \alpha\|g\|^2 = \|\alpha g\| \|g\| = \|f\| \|g\|.$$

Обратно, пусть $(f, g) = \|f\| \|g\| > 0$ для некоторых $f, g \in F$. Из доказательства неравенства Шварца следует, что дискриминант $D = 0$, а значит, существует единственный вещественный корень

$$\alpha = \frac{(f, g)}{\|f\|^2} > 0$$

полинома $p(t) = \|f - tg\|^2$. Таким образом, $0 = p(\alpha) = \|f - \alpha g\|^2$, откуда $f = \alpha g$. \square

Теперь мы можем доказать неравенство треугольника для функционала (2.8).

Теорема 2.7. 1) Для функционала (2.8) имеет место неравенство треугольника

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

для всех $f, g \in F$;

2) для двух ненулевых векторов $f, g \in F$ имеет место равенство

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$$

тогда и только тогда, когда $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем неравенство Коши-Шварца:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + \|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство треугольника.

Докажем второе утверждение. Если $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$, то

$$\|f + g\| = \|(1 + \alpha)g\| = (1 + \alpha)\|g\| = \|g\| + \|\alpha g\| = \|f\| + \|g\|.$$

Обратно, если для двух ненулевых векторов $f, g \in F$ имеет место равенство

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|,$$

то, как следует из доказательства неравенства треугольника выше, обязано выполняться равенство $(f, g) = \|f\| \|g\|$. По свойству 2) леммы 2.2, это может быть только в случае $f = \alpha g$ для некоторого $\alpha > 0$.

□

Из теоремы сразу получаем

Следствие 2.2. *Пространство F , наделенное нормой (2.8) евклидова пространства, является строго нормированным пространством, а его единичный шар строго выпуклым множеством.*

Следствие 2.3. *Наилучшее приближение в евклидовой норме существует и единственно.*

Для доказательства следует применить теорему 2.4, с. 51.

3.2. Критерий наилучшего приближения в евклидовой норме

Из неравенства Коши-Шварца следует, что для ненулевых векторов

$$-1 \leq \frac{(f, g)}{\|f\| \|g\|} \leq 1.$$

Поэтому корректно следующее

Определение 2.5. Для двух ненулевых векторов $f, g \in F$ углом между ними называется величина

$$\widehat{(f, g)} = \arccos \frac{(f, g)}{\|f\| \|g\|}.$$

В частности, говорят, что два вектора ортогональны, если $(f, g) = 0$ и пишут $f \perp g$.

Теорема 2.8. Для того, чтобы элемент $g \in G$ был наилучшим приближением для $f \in F$, необходимо и достаточно, чтобы разность $f - g$ (погрешность приближения) была ортогональна подпространству G , т.е.

$$(f - g, w) = 0 \quad \forall w \in G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $g \in G$ — элемент наилучшего приближения для $f \in F$. Предположим против утверждаемого, что найдется такой элемент $w \in G$, для которого

$$(f - g, w) > 0.$$

Для $t > 0$ рассмотрим семейство векторов $g_t = g + tw \in G$. Тогда, в силу единственности наилучшего приближения,

$$\begin{aligned} \|f - g_t\|^2 &= \|(f - g) - tw\|^2 = \\ &= \|f - g\|^2 - 2t(f - g, w) + t^2\|w\|^2 > \|f - g\|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$0 < 2(f - g, w) < t\|w\|^2 \quad \forall t > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $t \downarrow 0$ получим абсурдное неравенство $0 < 0$. Следовательно, вектор $f - g$ ортогонален G .

Достаточность. Пусть $(f - g, w) = 0$ для всех $w \in G$ и пусть $u \in G$ произвольный элемент, отличный от g . Тогда

$$\begin{aligned} \|f - u\|^2 &= \|(f - g) + (u - g)\|^2 = \|f - g\|^2 - 2(f - g, u - g) + \\ &+ \|u - g\|^2 = \|f - g\|^2 + \|u - g\|^2 > \|f - g\|^2, \end{aligned}$$

что означает, что g — наилучшее приближение для f . \square

Как и выше, через Πf мы используем операторное обозначение элемента наилучшего приближения f .

Теорема 2.9. *Отображение $\Pi : F \rightarrow G$, которое ставит в соответствие каждому вектору $f \in F$ его наилучшее приближение $g = \Pi f$, является линейным непрерывным оператором с нормой $\|\Pi\| = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство однородности $\Pi(\alpha f) = \alpha \Pi f$ было установлено ранее (см. (2.3), с. 47). Покажем его аддитивность. Для любых $f_1, f_2 \in F$ обозначим через $g_i = \Pi f_i \in G$, $i = 1, 2$. По теореме 2.8,

$$(f_i - g_i, w) = 0 \quad \forall w \in G, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$((f_1 + f_2) - (g_1 + g_2), w) = 0 \quad \forall w \in G.$$

Это означает по теореме 2.8, что $\Pi(f_1 + f_2) = g_1 + g_2 = \Pi f_1 + \Pi f_2$, т.е. отображение Π аддитивно.

Далее, из теоремы 2.1, с. 45, следует, что

$$\|\Pi f\| \leq \|f\| \quad \forall f \in F,$$

что доказывает непрерывность оператора Π . Наконец, из $\Pi f = f$ для $f \in G$ следует, что

$$\|\Pi\| = \sup\{\|\Pi f\| : \|f\| \leq 1\} = 1.$$

Теорема доказана.

Оператор Π , в силу его свойства ортогональности $f - \Pi f \perp G$, называют оператором *ортогонального проектирования* на подпространство G . Теоремы 2.8, 2.9 справедливы не только для конечномерного подпространства G , но и для бесконечномерного, при условии его полноты: любая последовательность элементов $g_n \in G$, удовлетворяющая условию

$$\|g_n - g_m\| \rightarrow 0$$

при $m, n \rightarrow \infty$, должна сходиться к некоторому пределу $g \in G$.

3.3. Сведение задачи наилучшего приближения в евклидовом пространстве к решению системы линейных алгебраических уравнений

Полученная характеристика наилучшего приближения в евклидовом пространстве позволяет построить метод решения задачи о наилучшем приближении, основанный на решении специальной системы линейных алгебраических уравнений.

В пространстве G размерности $\dim G = n < \infty$ выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_n \in G$. Тогда для заданного $f \in F$ наилучшее приближение $g \in G$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации

$$g = \sum_{j=1}^n y_j e_j. \quad (2.10)$$

По теореме 2.8,

$$0 = (f - g, e_i) = (f, e_i) - \sum_{j=1}^n y_j (e_j, e_i) \quad \forall i = 1 : n.$$

Таким образом, мы получили систему линейных алгебраических уравнений

$$Ay = F, \quad (2.11)$$

где элементы матрицы A и вектора правой части F вычисляются по формулам

$$A_{ij} = (e_j, e_i) = (e_i, e_j) = A_{ji}, \quad F_i = (f, e_i) \quad \forall i, j = 1 : n. \quad (2.12)$$

Матрица A называется матрицей Грама системы векторов $\{e_i : i = 1 : n\}$.

Лемма 2.3. *Матрица Грама системы линейно независимых векторов $\{e_i : i = 1 : n\}$ симметрична и положительно определена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность матрицы непосредственно вытекает из формул (2.12). Докажем ее положительную определенность. Для этого нужно показать, что значение квадратичной формы

$$q_A(z) = (Az, z)$$

принимает положительные значения на всех ненулевых векторах. Для произвольного ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (Az, z) &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} z_i z_j = \sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j) z_i z_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (z_i e_i, z_j e_j) = \left(\sum_{i=1}^n z_i e_i, \sum_{j=1}^n z_j e_j \right) = \|w\|^2 > 0, \end{aligned}$$

поскольку $w = \sum_{i=1}^n z_i e_i \neq 0$. \square

Симметричность и положительная определенность матрицы A (пишут $A = A' > 0$) позволяет для решения системы (2.11) применять специальные эффективные методы их решения.

Итак, алгоритм нахождения элемента наилучшего приближения в евклидовой норме для заданного $f \in F$ включает следующие этапы.

1. Выбор или построение базиса e_1, e_2, \dots, e_n в подпространстве G ;
2. Генерирование системы уравнений $Ay = F$ по формулам (2.12);
3. Решение системы $Ay = F$ на компьютере, т.е. вычисление $y \in \mathbb{R}^n$, используя тот или иной метод, учитывающий симметричность и положительную определенность матрицы;
4. Вычисление наилучшего приближения по формуле (2.10).

Заметим, что от выбора базиса само наилучшее приближение g не зависит, однако, с точки зрения вычислений на компьютере, выбор базиса является ключевым аспектом, поскольку такие свойства матрицы Грама, как ее заполненность или разреженность, обусловленность матрицы (отношение максимального собственного числа к минимальному), зависят выбора векторов e_i и сильно влияют как на процесс решения в смысле затрат ресурсов компьютера (памяти и времени), так и на результат решения — в случае плохо обусловленной матрицы, т.е. с большим числом обусловленности, ошибки округления могут сильно исказить результат.

Рассмотрим случай, когда построен или заранее известен *ортонормальный базис*:

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{для } i \neq j.$$

В этом случае матрица Грама диагональна $A = \text{diag } \|e_i\|^2$ и коэффициенты y_j в разложении (2.10) будут являться коэффициентами Фурье вектора f для этой ортогональной системы:

$$y_i = \frac{(f, e_i)}{\|e_i\|^2}, \quad i = 1 : n.$$

4. Примеры задач о наилучшем приближении в евклидовом пространстве

В этом разделе рассматриваются задачи, которые непосредственно формулируются как задачи о наилучшем приближении в пространстве со скалярным произведением, либо сводятся к ним.

4.1. Тригонометрический полином наилучшего среднеквадратического приближения

Обозначим через $\mathbb{T}_n(-1, 1) = \mathbb{T}_n$ пространство тригонометрических полиномов степени n , т.е. множество функций вида

$$a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos \pi j x + b_j \sin \pi j x).$$

Ясно, что $\dim T_n = 2n + 1$. Пространство $F = L_2(-1, 1)$ — это *гильбертово*, т.е. полное евклидово пространство со скалярным произведением и нормой

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Хорошо известно, что тригонометрическая система функций

$$1, \sin \pi x, \cos \pi x, \dots, \sin \pi n x, \cos \pi n x, \dots$$

является ортогональным базисом пространства $L_2(-1, 1)$. В этом пространстве для заданной функции $f \in L_2(-1, 1)$ ставится задача отыскания наилучшего приближения g_n в подпространстве \mathbb{T}_n . Решением будет n -ый отрезок ряда Фурье

$$g_n(x) = 0.5a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos \pi j x + b_j \sin \pi j x), \quad (2.13)$$

где коэффициенты Фурье функции f вычисляются по формулам

$$a_j = \int_{-1}^1 f(x) \cos \pi j x dx \text{ для } j = 0 : n,$$

$$b_j = \int_{-1}^1 f(x) \sin \pi j x dx \text{ для } j = 1 : n.$$

Для приближенного вычисления интегралов при больших j в этих формулах используются специальные приемы численного интегрирования. Следует также сказать, что прямое вычисление суммы в (2.13) при большом числе слагаемых приводит к накоплению ошибок и сильному искажению результата из-за характерного поведения быстро осциллирующих высокочастотных членов ряда. Для корректного вычисления суммы используют различные так называемые *методы регуляризации*.

4.2. Алгебраический полином наилучшего среднеквадратического приближения

Для интегрируемой на интервале (a, b) почти всюду положительной функции $\rho(x)$ через $L_{2,\rho}(a, b)$ обозначается гильбертово пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\rho} = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

которая порождается скалярным произведением

$$(f, g) = (f, g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то в обозначениях ρ опускается.

Определение 2.6. Полином $g_n \in \mathbb{P}_n(a, b)$ называется полиномом наилучшего среднеквадратического с весом ρ приближения для функции $f \in L_{2,\rho}(a, b)$, если

$$\|f - p\|_{2,\rho} = \min_{q \in \mathbb{P}_n} \|f - q\|_{2,\rho}.$$

Из общих результатов о наилучшем приближении в евклидовом пространстве следует, что полином наилучшего среднеквадратического приближения для заданной функции f существует и единствен. Если известна или построена ортогональная с весом ρ система полиномов $p_j \in \mathbb{P}_j(a, b)$,

$$(p_j, p_i) = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

то решение представляется суммой

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j p_j(x) \tag{2.14}$$

с коэффициентами Фурье

$$y_j = \frac{(f, p_j)}{\|p_j\|^2}, \quad j = 0 : n. \tag{2.15}$$

Примером классических ортогональных полиномов являются уже рассматривавшиеся ранее полиномы Чебышева $T_j(x)$ (см. п. 1.5, с. 23) для весовой функции

$$\rho(x) = (1 - x^2)^{1/2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Для веса $\rho(x) \equiv 1$ ортогональную систему алгебраических полиномов в $L_2(-1, 1)$ образуют *полиномы Лежандра*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Полиномы Чебышева и Лежандра являются частными случаями системы *полиномов Якоби* $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ для весовой функции

$$\rho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \quad x \in (-1, 1),$$

(здесь $\alpha, \beta > -1$),

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - x)^{-\alpha} (1 + x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1 - x)^{n+\alpha} (1 + x)^{n+\beta}).$$

4.3. Наилучшее среднеквадратическое приближение на дискретном множестве точек

Пусть $\Omega_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ — заданное множество N точек, $w(x_i) = w_i > 0$ для $i = 1 : N$ — весовая функция. По аналогии с непрерывной мерой Лебега на интервале Ω , обозначим через $l_{2,w}(\Omega_N)$ множество сеточных функций на Ω_N (т.е. множество функций дискретного аргумента $x \in \Omega_N$), наделенное скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{x \in \Omega_N} w(x) f(x) g(x) \quad (2.16)$$

и соответствующей нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. При $n < N$ для функции $f \in l_{2,w}(\Omega_N)$ ставится задача об отыскании полинома $g_n \in \mathbb{P}_n$ наилучшего приближения в рассматриваемой норме. Как и в случае непрерывной меры, можно построить систему полиномов $p_j \in l_{2,w}(\Omega_N)$, $j = 0, 1, \dots, n$, ортогональную в смысле скалярного произведения (2.16). Тогда решение представляется в виде (2.14) с коэффициентами Фурье (2.15), где скалярные произведения вычисляются по формуле (2.16).

Между ортогональными полиномами в $L_{2,\rho}(\Omega)$ и $l_{2,w}(\Omega_N)$ имеется следующая связь. Если $p_j \in \mathbb{P}_j$, $j = 0, 1, \dots$ — ортогональная система полиномов в $L_{2,\rho}(\Omega)$ на интервале Ω и Ω_N — множество нулей полинома p_N , то эти же полиномы для $j = 0, 1, \dots, n$, $n < N$, будут образовывать ортогональную систему в $l_{2,w}(\Omega_N)$, где $\{w_j : j = 1 : N\}$ — веса квадратурной формулы Гаусса для интеграла с весом $\rho(x)$.

Действительно, (см. раздел, посвященный квадратурным формулам Гаусса, главы "Численное интегрирование"), так как

$$\int_{\Omega} \rho(x)g(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j g(x_j) \quad \forall g \in \mathbb{P}_{2N-1},$$

то для $i, j = 0 : n, i \neq j$

$$\sum_{k=0}^N w_k p_i(x_k) p_j(x_k) = \int_{\Omega} \rho(x) p_i(x) p_j(x) dx = 0$$

и

$$\sum_{k=0}^N w_k p_i^2(x_k) = \int_{\Omega} \rho(x) p_i^2(x) dx > 0,$$

поскольку $p_i p_j \in \mathbb{P}_{2N-2}$.

4.4. Решение системы линейных уравнений с прямоугольной матрицей

Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = f$ для $f \in \mathbb{R}^n$ с прямоугольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, когда $m < n$. Конечно, в общем случае, решения $x \in \mathbb{R}^m$ такой системы может и не быть. Однако, мы можем ввести понятие *псевдорешения* как вектора $x \in \mathbb{R}^m$, для которого в \mathbb{R}^n минимизируется некоторая евклидова норма невязки $\|f - Ax\|$. Пусть $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно определенная матрица, $D = D' > 0$. Всякая такая матрица задает скалярное произведение в \mathbb{R}^n и норму

$$(x, y)_D = (Dx, y) = y' \cdot (Dx), \quad \|x\|_D = \sqrt{(x, x)_D}$$

(и наоборот, всякому скалярному произведению в \mathbb{R}^n отвечает единственная такая матрица $D = D' > 0$). Положим $G = \{Ax \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^m\}$. Задача отыскания $x \in \mathbb{R}^m$, минимизирующего норму невязки $\|f - Ax\|_D$, есть задача отыскания наилучшего по норме $\|\cdot\|_D$ приближения $g = Ax$ вектора $f \in \mathbb{R}^n$ из подпространства G . Будем считать, что ранг матрицы A равен m , так что столбцы матрицы A образуют линейно-независимую систему в \mathbb{R}^n , а значит, образуют базис в G . Если $e_1, e_2, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$ — канонические орты в \mathbb{R}^m , то $b_1 = Ae_1, b_2 = Ae_2, \dots, b_m = Ae_m$ — столбцы A — есть базис G и, следуя общей схеме, коэффициенты $x \in \mathbb{R}^m$ разложения решения задачи

$g \in G$ по этому базису

$$g = \sum_{j=1}^m x_j b_j$$

могут быть найдены из системы линейных уравнений $Bx = F$, где

$$B_{ij} = (b_j, b_i)_D = (DAe_j, Ae_i), \quad F_i = (f, b_i)_D = (Df, Ae_i), \quad i, j = 1 : m,$$

или, в матричной форме,

$$B = A'DA \quad \text{и} \quad F = A'Df.$$

Матрица $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ этой системы симметрична и положительно определена и решение $x \in \mathbb{R}^m$ определяется единственным образом.

5. Ортогональные полиномы

На интервале $\Omega = (a, b)$ в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\Omega)$ рассматривается вопрос построения системы полиномов $p_j \in \mathbb{P}_j$, $j = 0, 1, \dots$, со свойством ортогональности

$$(p_i, p_j) = \int_{\Omega} \rho(x) p_i(x) p_j(x) dx = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Такая система называется ортогональной с весом $\rho(x)$ системой полиномов. Обозначим через k_n старший коэффициент полинома p_n . Будем считать, что $k_n > 0$. Так что

$$p_0(x) = k_0 > 0, \quad p_1(x) = k_1 x - b_0,$$

где постоянная b_0 определяется условием ортогональности $(p_1, p_0) = 0$, откуда

$$b_0 = k_1 \frac{(e_1, e_0)}{\|e_0\|^2} = k_1 \frac{\int_{\Omega} \rho(x) x dx}{\int_{\Omega} \rho(x) dx}. \quad (2.17)$$

Здесь и далее обозначено $e_j(x) = x^j$. Таким образом, первые два полинома ортогональной системы однозначно определяются заданием своих старших коэффициентов k_0, k_1 . Следующая теорема дает рекуррентную формулу для последовательного вычисления остальных полиномов ортогональной системы.

Теорема 2.10. Для $n = 1, 2, \dots$ справедливо рекуррентное тождество

$$p_{n+1}(x) = (a_n x - b_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x), \quad (2.18)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad b_n = a_n \frac{(e_1 p_n, p_n)}{\|p_n\|^2}, \quad c_n = \frac{k_{n-1} k_{n+1}}{k_n^2} \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}. \quad (2.19)$$

Доказательство проведем индукцией по n . Предположим, что ортогональные полиномы p_0, p_1, \dots, p_n для некоторого $n \geq 1$ построены. Добавив к этой системе полином $x p_n(x) = e_1(x) p_n(x)$, мы получим базис в пространстве \mathbb{P}_{n+1} , поскольку $e_1 p_n \in \mathbb{P}_{n+1}$ с положительным коэффициентом перед x^{n+1} , в то время, когда остальные полиномы этой системы имеют степени не выше n . Таким образом, полином p_{n+1} должен иметь единственное представление

$$p_{n+1}(x) = y_{n+1} x p_n(x) + \sum_{j=0}^n y_j p_j(x), \quad (2.20)$$

откуда, сравнивая старшие коэффициенты, сразу находим

$$y_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{k_n} = a_n.$$

Далее, для отыскания остальных коэффициентов разложения (2.20), умножим скалярно это разложение на полином p_i для $i < n + 1$ и найдем y_i из условия ортогональности:

$$0 = (p_{n+1}, p_i) = a_n (e_1 p_n, p_i) + y_i \|p_i\|^2,$$

следовательно, учитывая очевидное равенство $(e_1 p_n, p_i) = (p_n, e_1 p_i)$, получим

$$y_i = -a_n \frac{(p_n, e_1 p_i)}{\|p_i\|^2}.$$

Поскольку $e_1 p_i \in \mathbb{P}_{i+1}$, то $y_i = 0$, когда $i + 1 < n$, т.е. для индексов $i = 0 : n - 2$. Таким образом, мы доказали представление полинома $p_{n+1}(x)$ в (2.18) с коэффициентами a_n, b_n указанными в (2.19) и

$$c_n = -y_{n-1} = a_n \frac{(p_n, e_1 p_{n-1})}{\|p_{n-1}\|^2}.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что и коэффициент $c_n = -y_{n-1}$ можно вычислить по соответствующей формуле (2.19). Для этого запишем разложение

$$xp_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^n z_j p_j(x).$$

Сравнивая старшие коэффициенты левой и правой частей этого разложения, находим

$$z_n = \frac{k_{n-1}}{k_n}.$$

Умножив скалярно разложение $xp_{n-1}(x)$ на p_n и учитывая ортогональность построенных полиномов, получим

$$(p_n, e_1 p_{n-1}) = z_n \|p_n\|^2 = \frac{k_{n-1}}{k_n} \|p_n\|^2.$$

Отсюда,

$$c_n = a_n \frac{(p_n, e_1 p_{n-1})}{\|p_{n-1}\|^2} = \frac{k_{n-1} k_{n+1}}{k_n^2} \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}.$$

Теорема доказана.

Следует подчеркнуть, что каждый из полиномов p_n определяется однозначно с точностью до множителя, в качестве которого, например, может выступать старший коэффициент k_n . Таким образом, одномерное подпространство, натянутое на p_n и ортогональное пространству \mathbb{P}_{n-1} определяется однозначно, а выбор полинома из этого одномерного подпространства неоднозначен и может быть подчинен определенным условиям. Например, можно положить $k_n = 1$ для всех n ; этим условием система ортогональных с заданным весом полиномов будет определена однозначно.

Следствие 2.4. *Предположим, что весовая функция $\rho(x)$ на интервале $\Omega = (-1, 1)$ четна. Тогда все коэффициенты $b_n = 0$ в (2.18) и полином $p_n(x)$ является четной функцией для четного n и нечетной функцией для нечетного n .*

Доказательство утверждения проведем индукцией по n . При $n = 0$ полином нулевой степени $p_0(x) = k_0$ является четной функцией. Из условия четности $\rho(x) = \rho(-x)$ следует нечетность произведения $\rho(x)x$, откуда по формуле (2.17) получаем $b_0 = 0$ и нечетность полинома $p_1(x)$. Пусть утверждение верно до некоторого $n \geq 1$: $b_j = 0$ для $j = 0 : n - 1$ и полиномы $p_j(x)$ четны или нечетны в зависимости от четности или нечетности $j = 0 : n$. Тогда функция $\rho(x)p_n^2(x)$ четна,

а $\rho(x)xp_n^2(x)$ — нечетна, откуда по формуле (2.19) следует $b_n = 0$. Тогда из равенства (2.18) вытекает, что полином $p_{n+1}(x)$ имеет такую же четность, как и $p_{n-1}(x)$ и противоположную четности $p_n(x)$, так как умножение $p_n(x)$ на нечетную функцию x меняет его четность. \square

Важную роль играет теорема о нулях ортогональных полиномов.

Теорема 2.11. *Если полином $p \in \mathbb{P}_n$ с ненулевым старшим коэффициентом ортогонален с весом $\rho(x)$ пространству \mathbb{P}_{n-1} , то все его нули простые и лежат в интервале Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_m все различные нули полинома $p(x)$ нечетной кратности, лежащие в интервале Ω . Если $m = n$, то теорема доказана. Предположим, что $m < n$ и положим

$$q(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j).$$

(Если таких нулей нет, т.е. $m = 0$, то полагаем $q = 1$.) Из определения $q(x)$ следует, что функция $p(x)q(x)$ не меняет знак на интервале Ω , а потому

$$(p, q) = \int_{\Omega} \rho(x)p(x)q(x) dx \neq 0.$$

С другой стороны, из условия ортогональности $p \perp \mathbb{P}_{n-1}$ должно следовать $(p, q) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. \square

ГЛАВА 3

Численное интегрирование

В этой главе рассматриваются вопросы приближенного вычисления одномерных интегралов вида

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1)$$

Часто подынтегральную функцию удобно представлять в виде произведения двух функций, одна из которых считается фиксированным весом. Например, такая необходимость возникает, когда приходится интегрировать функции с особенностями. В таких случаях рассматриваются интегралы вида

$$I(f) = \int_a^b \rho(x)f(x) dx. \quad (3.2)$$

Здесь весовая функция $\rho(x)$ считается интегрируемой и почти всюду положительной на интервале $\Omega = (a, b)$, а функция $f(x)$ принадлежит некоторому классу гладких функций.

1. Квадратурные формулы интерполяционного типа

1.1. Определения и простейшие свойства

Определение 3.1. Квадратурной формулой, или квадратурой, для интеграла (3.2) называется приближенная формула

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j), \quad (3.3)$$

где x_j называются узлами квадратурной формулы, w_j — весами или коэффициентами квадратуры, $Q(f)$ — квадратурной суммой.

Погрешностью квадратурной формулы (3.3) называется величина

$$R(f) = I(f) - Q(f).$$

Определение 3.2. Говорят, что квадратура точна на алгебраических полиномах степени m , если $R(f) = 0$ для всех $f \in \mathbb{P}_m$. Алгебраической точностью квадратурной формулы называется максимальная степень полиномов, на которых она точна.

Для того, чтобы установить точность квадратуры на полиномах \mathbb{P}_m , достаточно, в силу линейности функционала погрешности $R(f)$ по f , убедиться, что $R(\psi_i) = 0$ на каком-нибудь базисе $\{\psi_i : i = 0 : m\}$ пространства \mathbb{P}_m . Этим простым фактом мы часто будем пользоваться.

Из определения следует, что если квадратура точна на константах, то, подставив в квадратурную формулу $f(x) = 1$, получим

$$\int_a^b \rho(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j. \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. Если квадратура (3.3) точна на \mathbb{P}_m , то справедлива оценка погрешности

$$|R(f)| \leq M d_m(f),$$

где

$$d_m(f) = \inf \{ \|f - p\|_{\infty, [a, b]} : p \in \mathbb{P}_m \}, \quad M = \int_a^b \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n |w_j|.$$

Если в квадратурной формуле все веса положительны, то

$$M = 2 \int_a^b \rho(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого полинома $p \in \mathbb{P}_m$

$$\begin{aligned} |R(f)| &= |R(f - p)| = \left| \int_a^b \rho(x)(f(x) - p(x)) dx - \sum_{j=1}^n w_j(f(x_j) - p(x_j)) \right| \\ &\leq \int_a^b \rho(x) |f(x) - p(x)| dx + \sum_{j=1}^n |w_j| |f(x_j) - p(x_j)| \leq M \|f - p\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Взяв точную нижнюю грань по всем полиномам $p \in \mathbb{P}_m$, получим оценку в теореме. Если в квадратурной формуле все веса положительны, то с учетом (3.4), получим

$$M = \int_a^b \rho(x) dx + \sum_{j=1}^n w_j = 2 \int_a^b \rho(x) dx.$$

Теорема доказана.

1.2. Квадратуры интерполяционного типа

Естественным способом получить приближенное значение интеграла — это заменить в интеграле функцию $f(x)$ какой-либо близкой к ней, но более простой функцией, например ее интерполяционным полиномом Лагранжа, и вычислить этот интеграл, приняв его значение за приближение к значению исходного интеграла. Полученные таким способом квадратурные формулы называются интерполяционными квадратурами.

Определение 3.3. Квадратурная формула (3.3) называется квадратурой интерполяционного типа, если

$$Q(f) = I(L_{n-1}), \quad (3.5)$$

где $L_{n-1}(x)$ обозначает интерполяционный полином Лагранжа степени $n - 1$, совпадающий в узлах квадратуры с f :

$$L_{n-1}(x_j) = f(x_j) \quad \text{для } j = 1 : n.$$

Теорема 3.2. Для того, чтобы квадратурная формула (3.3) была квадратурой интерполяционного типа, необходимо и достаточно, чтобы она была точна на полиномах степени $n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Тогда $f = L_{n-1}$. Отсюда следует $Q(f) = I(L_{n-1}) = I(f)$, т.е. квадратура точна на полиномах степени $n - 1$.

Достаточность. Если квадратура точна на полиномах степени $n - 1$ и $L_{n-1}(x_j) = f(x_j)$ для $j = 1 : n$, то

$$Q(f) = Q(L_{n-1}) = I(L_{n-1}),$$

что означает, что квадратурная формула (3.3) является, по определению, квадратурой интерполяционного типа. \square

Теорема 3.3. Если квадратурная формула (3.3) интерполяционного типа, то для весов квадратуры справедливы формулы

$$w_j = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) dx = I(\varphi_j) \quad \text{для } j = 1 : n, \quad (3.6)$$

где $\{\varphi_j : j = 1 : n\}$ — базис Лагранжа для множества узлов квадратуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для базисной функции Лагранжа $\varphi_i(x)$ по теореме 3.2 мы можем записать

$$I(\varphi_i) = Q(\varphi_i) = \sum_{j=1}^n w_j \varphi_i(x_j) = w_i$$

для всех $i = 1 : n$. \square

1.3. Пример

Для интеграла

$$\int_0^{0.5} x^2 f(x) dx$$

построим квадратурную формулу с одним узлом

$$\int_0^{0.5} x^2 f(x) dx \approx w_1 f(x_1),$$

точную на полиномах первой степени. Подставляя $f(x) = 1$, получим

$$w_1 = \int_0^{0.5} x^2 dx = 1/24.$$

Подставим $f(x) = x$:

$$w_1 x_1 = x_1/24 = \int_0^{0.5} x^3 dx = 1/64,$$

откуда $x_1 = 24/64 = 3/8 \in (0, 0.5)$. Таким образом, построена квадратура

$$\int_0^{0.5} x^2 f(x) dx \approx f(3/8)/24 = Q(f),$$

точная на полиномах первой степени. Заметим попутно, что узел квадратурной формулы расположен ближе к правому концу, что объясняется возрастанием весовой функции $\rho(x) = x^2$ на $[0, 0.5]$, так что бóльшие значения она принимает ближе к правому концу.

На этом же примере проиллюстрируем метод получения оценки погрешности построенной квадратуры. С этой целью для заданной $f(x)$ построим интерполяционный полином Эрмита $H_1(x)$ с одним кратным узлом $x_1 = 3/8$:

$$H_1(x_1) = f(x_1), \quad H_1'(x_1) = f'(x_1).$$

Хотя это и не важно здесь, укажем явный вид этого полинома:

$$H_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

По теореме о представлении погрешности эрмитовой интерполяции (теорема 1.16, с. 32), имеем

$$f(x) - H_1(x) = 0.5 f''(\xi_x)(x - x_1)^2.$$

Здесь предполагается, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 0.5]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} R(f) &= I(f) - Q(f) = I(f) - Q(H_1) = I(f) - I(H_1) \\ &= \int_0^{0.5} x^2 (f(x) - H_1(x)) dx = 0.5 \int_0^{0.5} x^2 f''(\xi_x)(x - x_1)^2 dx. \end{aligned}$$

Поскольку $x^2(x - x_1)^2$ не меняет знак на интервале интегрирования, а функция $f''(\xi_x)$ непрерывна как функция переменной x на отрезке интегрирования (следствие 1.3, с. 33), то по теореме о среднем найдется такая точка $\eta \in (0, 0.5)$, что

$$\int_0^{0.5} x^2 f''(\xi_x)(x - x_1)^2 dx = f''(\eta) \int_0^{0.5} x^2 (x - x_1)^2 dx = \delta f''(\eta).$$

Следовательно,

$$R(f) = 0.5 \delta f''(\eta).$$

Непосредственные вычисления дают

$$\delta = \int_0^{0.5} x^2(x - x_1)^2 dx \approx 4 \cdot 10^{-4},$$

откуда получаем окончательную оценку погрешности построенной квадратурной формулы с одним узлом для интеграла с весовой функцией $\rho(x) = x^2$:

$$|R(f)| \leq 2 \cdot 10^{-4} \|f''\|_{\infty, [0, 0.5]}$$

в предположении гладкости функции $f \in C^2[0, 0.5]$.

2. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол

В этом разделе для случая $\rho(x) = 1$ рассматриваются три употребительные квадратурные формулы. Удобно в рассматриваемом интеграле сделать замену переменных

$$x = \psi(t) = 0.5ht + c, \text{ где } h = b - a, c = 0.5(a + b),$$

которая отрезок интегрирования $[a, b]$ переводит в $[-1, 1]$. С каждой функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ свяжем функцию $\hat{f}(t) = f(\psi(t))$. Узлы квадратуры $x_j \in [a, b]$ будут связаны с узлами квадратуры $t_j \in [-1, 1]$ тем же преобразованием $x_j = \psi(t_j)$.

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = 0.5h \int_{-1}^1 \hat{f}(t) dt = 0.5h \hat{I}(\hat{f}),$$

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) = 0.5h \hat{Q}(\hat{f}) = 0.5h \sum_{j=1}^n \hat{w}_j \hat{f}(t_j),$$

откуда $w_j = 0.5h \hat{w}_j$. Для погрешности имеем

$$R(f) = I(f) - Q(f) = 0.5h(\hat{I}(\hat{f}) - \hat{Q}(\hat{f})) = 0.5h \hat{R}(\hat{f}). \quad (3.7)$$

Отсюда, в частности, следует, что квадратура $I(f) \approx Q(f)$ точна на полиномах степени m тогда и только тогда, когда соответствующая ей квадратура $\hat{I}(g) \approx \hat{Q}(g)$ точна на полиномах такой же степени. Эти замечания позволяют построить и исследовать квадратурную формулу сначала на базисном отрезке $[-1, 1]$, а затем уже на произвольном отрезке $[a, b]$.

Нам понадобится также связь производных по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{d^k \hat{f}(t)}{dt^k} = \left(\frac{h}{2}\right)^k \frac{d^k f(x)}{dx^k}, \quad \text{где } x = \psi(t). \quad (3.8)$$

2.1. Квадратура прямоугольников

Квадратура (центральных) прямоугольников на $[-1, 1]$ имеет вид

$$\hat{I}(g) = \int_{-1}^1 g(t) dt \approx \hat{Q}(g) = 2g(0).$$

Квадратура прямоугольников на $[a, b]$:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx Q(f) = hf(0.5(a+b)), \quad (3.9)$$

где $h = b - a$. Геометрический смысл этой формулы состоит в замене площади соответствующей криволинейной трапеции площадью прямоугольника (отсюда и название) с длинами сторон h и $f(c)$.

Теорема 3.4. *Квадратурная формула (3.9) точна на полиномах первой степени и ее погрешность имеет вид*

$$R(f) = \frac{f''(\eta)}{24} h^3 \quad (3.10)$$

для некоторой точки $\eta \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\hat{I}(g) = \hat{Q}(g)$ для базиса $g_0(t) = 1$ и $g_1(t) = t$. Действительно,

$$\hat{I}(g_0) = \int_{-1}^1 1 dt = 2 = 2g_0(0) = \hat{Q}(g_0),$$

$$\hat{I}(g_1) = \int_{-1}^1 t dt = 0 = 2g_1(0) = \hat{Q}(g_1),$$

что доказывает первую часть утверждения.

Для получения представления погрешности $\hat{R}(g)$, как и в примере п.1.3, для заданной дважды непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$ построим интерполяционный полином Эрмита 1-й степени $H_1(t)$ с кратным узлом в $t = 0$:

$$H_1(0) = g(0), \quad H_1'(0) = g'(0).$$

В этом случае погрешность интерполяции имеет вид

$$r(t) = g(t) - H_1(t) = 0.5g''(\xi_t)t^2.$$

Повторяя рассуждения п.1.3, получим

$$\begin{aligned} \hat{R}(g) &= \hat{I}(g) - \hat{Q}(g) = \hat{I}(g - H_1) = 0.5 \int_{-1}^1 g''(\xi_t)t^2 dt = \\ &= 0.5g''(\theta) \int_{-1}^1 t^2 dt = g''(\theta)/3, \quad \theta \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $g(t) = \hat{f}(t) = f(\psi(t))$ и учитывая (3.8) для $k = 2$, будем иметь

$$R(f) = 0.5h\hat{R}(\hat{f}) = (0.5h)^3 f''(\eta)/3 = f''(\eta)h^3/24,$$

где $\eta = \psi(\theta)$ — некоторая точка интервала (a, b) . \square

Используя разбиение (3.11)

Из (3.16) следует, что погрешность квадратурной формулы прямоугольников будем мала лишь при сравнительно малой длине отрезка интегрирования $h = b - a$. В общем случае это условие может быть не выполнено. Тогда для хорошего приближения значения интеграла можно воспользоваться свойством аддитивности интеграла следующим образом. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на достаточно большое число n отрезков e_i малой длины h_i :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b, \quad e_i = [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad (3.11)$$

$i = 1 : n$, $h = \max_i h_i$. Тогда

$$I(f) = \sum_{i=1}^n I_{e_i}(f), \quad \text{где } I_{e_i}(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

Определение 3.4. Формула

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{i=1}^n Q_{e_i}(f), \quad (3.12)$$

где

$$Q_{e_i}(f) = h_i f(0.5(x_i + x_{i+1})),$$

называется составной квадратурой прямоугольников.

Используя представление погрешности (3.10) на каждом сегменте e_i , нетрудно получить оценку погрешности составной квадратуры:

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{24} \max_i (\|f''\|_{\infty, e_i} h_i^2). \quad (3.13)$$

Действительно,

$$|R(f)| \leq \sum_{i=1}^n |I_{e_i}(f) - Q_{e_i}(f)|.$$

По теореме 3.4, найдутся точки $\eta_i \in e_i$, что

$$I_{e_i}(f) - Q_{e_i}(f) = \frac{f''(\eta_i)}{24} h_i^3.$$

Следовательно,

$$|R(f)| \leq \frac{1}{24} \max_i (\|f''\|_{\infty, e_i} h_i^2) \sum_{i=1}^n h_i = \frac{b-a}{24} \max_i (\|f''\|_{\infty, e_i} h_i^2).$$

Отсюда сразу следует

Теорема 3.5. Если подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{24} \|f''\|_{\infty, [a, b]} h^2.$$

В частности, для равномерной сетки $h = (b-a)/n$ и

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.14)$$

Последняя оценка показывает, что погрешность составной квадратурной формулы прямоугольников можно сделать сколь угодно малой, увеличивая число отрезков разбиения.

Задача. Указать примерное число отрезков разбиения n составной квадратуры прямоугольников для приближенного вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение. Оценим вторую производную подынтегральной функции:

$$f''(x) = 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1), \quad |f''(x)| \leq |f''(0)| = 2.$$

В силу (3.14), точность $|R(f)| \leq \varepsilon$ обеспечивается выполнением неравенства

$$\frac{2}{24n^2} \leq \varepsilon, \quad \text{откуда} \quad n \geq \sqrt{\frac{1}{12\varepsilon}} \approx 290.$$

Ответ. $n \approx 290$.

В случае существенно неоднородного поведения функции на разных участках отрезка интегрирования, использование равномерной сетки может быть крайне не эффективным. В таких случаях следует использовать неравномерную сетку, чтобы, как следует из оценки (3.13), большие по модулю значения f'' были сбалансированы мелким шагом сетки. На практике, как правило, нет возможности явно оценивать производные интегранта, поэтому применяют различные адаптивные методы построения сеток для составных квадратур, используя так называемые *апостериорные* оценки погрешности квадратуры.

2.2. Квадратура трапеций

Квадратура трапеций на $[-1, 1]$ имеет вид

$$\hat{I}(g) = \int_{-1}^1 g(t) dt \approx \hat{Q}(g) = g(-1) + g(1).$$

Квадратура трапеций на $[a, b]$:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx Q(f) = 0.5h(f(a) + f(b)), \quad (3.15)$$

где $h = b - a$. Геометрический смысл этой формулы состоит в замене площади соответствующей криволинейной трапеции площадью прямоугольной трапеции с высотой $h = b - a$ и основаниями $f(a)$ и $f(b)$.

Теорема 3.6. *Квадратурная формула (3.15) точна на полиномах первой степени и ее погрешность имеет вид*

$$R(f) = -\frac{f''(\eta)}{12}h^3 \quad (3.16)$$

для некоторой точки $\eta \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\hat{I}(g) = \hat{Q}(g)$ для базиса $g_0(t) = 1$ и $g_1(t) = t$. Действительно,

$$\hat{I}(g_0) = \int_{-1}^1 1 dt = 2 = g_0(-1) + g_0(1) = \hat{Q}(g_0),$$

$$\hat{I}(g_1) = \int_{-1}^1 t dt = 0 = g_1(-1) + g_1(1) = \hat{Q}(g_1),$$

что доказывает первую часть утверждения.

Для получения представления погрешности $\hat{R}(g)$ для заданной дважды непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$ построим интерполяционный полином Лагранжа 1-й степени $L_1(t)$ с узлами $t_1 = -1$, $t_2 = 1$:

$$L_1(-1) = g(-1), \quad L_1(1) = g(1).$$

В этом случае погрешность интерполяции имеет вид

$$r(t) = g(t) - H_1(t) = 0.5g''(\xi_t)(t+1)(t-1) = 0.5g''(\xi_t)(t^2 - 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{R}(g) &= \hat{I}(g) - \hat{Q}(g) = \hat{I}(g - L_1) = 0.5 \int_{-1}^1 g''(\xi_t)(t^2 - 1) dt = \\ &= 0.5g''(\theta) \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt = -2g''(\theta)/3, \quad \theta \in (-1, 1). \end{aligned}$$

В выкладках была использована теореме о среднем, так как функция $t^2 - 1$ не меняет знак внутри интервала интегрирования. Подставляя сюда $g(t) = \hat{f}(t) = f(\psi(t))$ и учитывая (3.8) для $k = 2$, будем иметь

$$R(f) = 0.5h\hat{R}(\hat{f}) = -2(0.5h)^3 f''(\eta)/3 = -f''(\eta)h^3/12,$$

где $\eta = \psi(\theta)$ — некоторая точка интервала (a, b) . \square

Аналогично составной квадратуре прямоугольников определяется составная квадратурная формула трапеций.

Определение 3.5. Для разбиения (3.11) формула

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{i=1}^n Q_{e_i}(f), \quad (3.17)$$

где

$$Q_{e_i}(f) = 0.5h_i(f(x_i) + f(x_{i+1})),$$

называется составной квадратурой трапеций.

Оценим погрешность составной квадратурной формулы трапеций, используя представление погрешности (3.16) на каждом сегменте e_i : по теореме 3.6, найдутся точки $\eta_i \in e_i$, что

$$I_{e_i}(f) - Q_{e_i}(f) = -\frac{f''(\eta_i)}{12}h_i^3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \sum_{i=1}^n |I_{e_i}(f) - Q_{e_i}(f)| \\ &\leq \frac{1}{12} \max_i (\|f''\|_{\infty, e_i} h_i^2) \sum_{i=1}^n h_i = \frac{b-a}{12} \max_i (\|f''\|_{\infty, e_i} h_i^2). \end{aligned}$$

Таим образом,

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{12} \max_i (\|f''\|_{\infty, e_i} h_i^2). \quad (3.18)$$

Отсюда следует

Теорема 3.7. Если подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]} h^2.$$

В частности, для равномерной сетки $h = (b - a)/n$ справедлива оценка

$$|R(f)| \leq \frac{(b - a)^3}{12n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.19)$$

2.3. Квадратура парабол (Симпсона)

Построим квадратурную формулу вида

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx Q(f) = w_1 f(a) + w_2 f(0.5(a + b)) + w_3 f(b),$$

точную на полиномах 2-й степени. Построения проведем сначала на отрезке $[-1, 1]$, на котором она будет иметь вид

$$\hat{I}(g) = \int_{-1}^1 g(t) dt \approx \hat{Q}(g) = \hat{w}_1 g(-1) + \hat{w}_2 g(0) + \hat{w}_3 g(1).$$

Подставляя последовательно функции 1 , t , t^2 , получим систему линейных уравнений для определения \hat{w}_i :

$$\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \hat{w}_3 = 2, \quad -\hat{w}_1 + \hat{w}_3 = 0, \quad \hat{w}_1 + \hat{w}_3 = 2/3.$$

Таким образом,

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_3 = 1/3, \quad \hat{w}_2 = 4/3,$$

и искомая формула на $[-1, 1]$ примет вид

$$\hat{I}(g) = \int_{-1}^1 g(t) dt \approx \hat{Q}(g) = \frac{1}{3} (g(-1) + 4g(0) + g(1)).$$

Заметим, что эта формула точна на полиноме t^3 , как и на всех нечетных функциях, поскольку на таких функциях приближенное равенство превращается в равенство $0 = 0$. Следовательно, эта формула точна на полиномах \mathbb{P}_3 . В то же время, для $g(t) = t^4$

$$\hat{I}(g) = 2/5 \neq Q(g) = 2/3,$$

таким образом алгебраическая точность построенной формулы равна 3. На произвольном отрезке $[a, b]$ получаем следующую формулу:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx Q(f) = \frac{h}{6} (g(a) + 4g(0.5(a+b)) + g(b)), \quad (3.20)$$

где $h = b - a$.

Определение 3.6. Квадратурная формула (3.20) называется квадратурой парабол.

Теорема 3.8. Для погрешности квадратурной формулы (3.20) справедливо представление

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}(b-a)^5, \quad (3.21)$$

где $\eta \in (a, b)$ — некоторая точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим представление погрешности квадратуры парабол на отрезке $[-1, 1]$. Для произвольной функции $g \in C^4[-1, 1]$ построим интерполяционный полином Эрмита 3-ей степени $H_3(t)$, удовлетворяющий равенствам

$$H_3(\pm 1) = g(\pm 1), \quad H_3(0) = g(0), \quad H_3'(0) = g'(0),$$

для погрешности которого $r(t) = g(t) - H_3(t)$ справедливо представление (теорема 1.16, с. 32):

$$r(t) = \frac{g^{(4)}(\xi_t)}{4!} t^2(t^2 - 1),$$

причем функция $g^{(4)}(\xi_t)$ непрерывна по t на $[-1, 1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{R}(g) &= \hat{I}(g) - \hat{Q}(g) = \hat{I}(g) - \hat{Q}(H_3) = \hat{I}(g) - \hat{I}(H_3) \\ &= \frac{1}{24} \int_{-1}^1 g^{(4)}(\xi_t) t^2(t^2 - 1) dt = \frac{g^{(4)}(\theta)}{24} \int_{-1}^1 t^2(t^2 - 1) dt = -\frac{g^{(4)}(\theta)}{90} \end{aligned}$$

для некоторой точки $\theta \in (-1, 1)$. Здесь, как и выше, мы воспользовались теоремой о среднем, поскольку полином $t^2(t^2 - 1)$ не меняет знак на интервале интегрирования. Подставляя сюда $g(t) = \hat{f}(t) = f(\psi(t))$ и учитывая (3.8) для $k = 4$, будем иметь

$$R(f) = 0.5h\hat{R}(\hat{f}) = -(0.5h)^5 - \frac{f^{(4)}(\eta)}{90} = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}h^5.$$

□

Определение 3.7. Для разбиения (3.11) формула

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{i=1}^n Q_{e_i}(f), \quad (3.22)$$

где

$$Q_{e_i}(f) = \frac{h_i}{6}(f(x_i) + 4f(0.5(x_i + x_{i+1})) + f(x_{i+1})),$$

называется составной квадратурой парабол.

Оценим погрешность составной квадратурной формулы парабол, используя представление погрешности (3.21) на каждом сегменте e_i : по теореме 3.8, найдутся точки $\eta_i \in e_i$, что

$$I_{e_i}(f) - Q_{e_i}(f) = -\frac{f''(\eta_i)}{2880}h_i^5.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \sum_{i=1}^n |I_{e_i}(f) - Q_{e_i}(f)| \\ &\leq \frac{1}{2880} \max_i (\|f^{(4)}\|_{\infty, e_i} h_i^4) \sum_{i=1}^n h_i = \frac{b-a}{2880} \max_i (\|f^{(4)}\|_{\infty, e_i} h_i^4). \end{aligned}$$

Таим образом,

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{2880} \max_i (\|f^{(4)}\|_{\infty, e_i} h_i^4). \quad (3.23)$$

Оценивая очевидным образом максимум по всем сегментами разбиения, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.9. Если подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]} h^4.$$

В частности, для равномерной сетки $h = (b-a)/n$ справедлива оценка

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.24)$$

3. Квадратурные формулы Гаусса

Поставим задачу найти квадратурную формулу с n узлами

$$I(f) = \int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx Q_n(f) = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j), \quad (3.25)$$

точную на полиномах максимально возможной степени. Если эту степень обозначить за m , то для определения $2n$ неизвестных весов и узлов квадратуры, мы получим $m + 1 = \dim \mathbb{P}_m$ уравнений. Приравняв число уравнений и число неизвестных, находим, что алгебраическая точность такой квадратуры должна быть равна $2n - 1$.

Определение 3.8. Квадратурная формула (3.25) называется квадратурой Гаусса (или квадратурой наивысшей алгебраической точности), если она точна на полиномах степени $2n - 1$.

Примером квадратуры Гаусса с одним узлом для $\rho(x) = 1$ является квадратура прямоугольников. Другой пример квадратуры Гаусса с одним узлом для веса $\rho(x) = x^2$ рассмотрен в п.1.3, с. 75.

3.1. Квадратуры Гаусса для $n = 2$ и $n = 3$ в невесовом случае

Построим квадратуры Гаусса с 2-мя и 3-мя узлами в случае $\rho(x) = 1$. Построения удобно провести на базисном отрезке $[-1, 1]$.

Для $n = 2$ формула

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \hat{Q}_2(g) = \hat{w}_1 g(t_1) + \hat{w}_2 g(t_2)$$

должна быть точной полиномах 3-ей степени. В силу симметрии (четности) весовой функции, должны выполняться равенства (позднее это свойство симметрии для четных весовых функций будет строго доказано):

$$t_1 = -t_2, \hat{w}_1 = \hat{w}_2.$$

Подставляя полиномы $g(t) = 1$ и $g(t) = t^2$, получим уравнения

$$2\hat{w}_2 = 2, \quad 2\hat{w}_2 t_2^2 = 2/3.$$

Следовательно,

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_2 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = -t_1.$$

Для $n = 3$ формула

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \hat{Q}_3(g) = \hat{w}_1 g(t_1) + \hat{w}_2 g(0) + \hat{w}_3 g(t_3)$$

должна быть точной полиномах 5-ей степени. Опять таки в силу симметрии, должны выполняться равенства:

$$t_1 = -t_3, \quad t_2 = 0, \quad \hat{w}_1 = \hat{w}_3.$$

Подставляя полиномы $g(t) = 1$, $g(t) = t^2$ и $g(t) = t^4$, получим уравнения (для нечетных степеней приближенное равенство будет превращаться в тождество $0 = 0$)

$$\hat{w}_2 + 2\hat{w}_3 = 2, \quad 2\hat{w}_3 t_3^2 = 2/3, \quad 2\hat{w}_3 t_3^4 = 2/5.$$

Поделив последнее уравнение на второе, получим

$$t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = -t_1.$$

Отсюда,

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_3 = \frac{5}{9}, \quad \hat{w}_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}.$$

3.2. Существование и единственность квадратурной формулы Гаусса

Докажем сначала характеризацию квадратурной формулы Гаусса, ключевым пунктом которой является ортогональность в $L_{2,\rho}(a, b)$ полинома

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

пространству \mathbb{P}_{n-1} .

Теорема 3.10. *Для того, чтобы квадратурная формула (3.25) была квадратурой Гаусса, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

1) она должна быть интерполяционного типа, т.е. точна на \mathbb{P}_{n-1} ;

2) полином $\omega_n(x)$ с нулями в узлах квадратуры должен быть ортогонален с весом $\rho(x)$ пространству полиномов степени $n - 1$:

$$(\omega_n, p)_\rho = \int_a^b \rho(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если квадратурная формула (3.25) является квадратурой Гаусса, то она точна на полиномах степени $2n - 1$, а значит и на полиномах степени $n - 1 < 2n - 1$. Докажем свойство ортогональности $\omega_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$. Для произвольного $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ произведение $\omega_n p$ является полиномом степени $2n - 1$. Так как квадратура Q_n точна на полиномах из \mathbb{P}_{2n-1} , то

$$(\omega_n, p)_\rho = I(\omega_n p) = Q_n(\omega_n p) = \sum_{i=1}^n \omega_n(x_i) p(x_i) = 0,$$

так как $\omega_n(x_i) = 0$ во всех узлах x_i по определению полинома $\omega_n(x)$. Тем самым свойство 2) доказано.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы. Нужно показать, что $I(f) = Q_n(f)$ для всех $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Действительно, любой полином $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$ путем деления с остатком можно представить единственным образом в виде

$$f(x) = \omega_n(x) p_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),$$

где $p_{n-1}, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Следовательно, учитывая точность квадратуры Q_n на \mathbb{P}_{n-1} и свойство ортогональности 2), будем иметь

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \rho(x) (\omega_n(x) p_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)) dx = I(r_{n-1}) = Q_n(r_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i r_{n-1}(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i (f(x_i) - \omega_n(x_i) p_{n-1}(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = Q_n(f), \end{aligned}$$

т.е. квадратура Q_n точна на полиномах \mathbb{P}_{2n-1} , что доказывает достаточность. \square

Теорема 3.11. *Для любой весовой функции $\rho(x)$ квадратура Гаусса (3.25) с n узлами существует и определяется единственным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.10, с. 69, существует единственная последовательность ортогональных с весом $\rho(x)$ полиномов $p_j \in \mathbb{P}_j$ со старшими коэффициентами $k_j = 1$ для $j = 0, 1, \dots$. По теореме 2.11, с. 71, нули полинома $\omega_n(x) \equiv p_n(x)$ простые и лежат внутри интервала (a, b) . Возьмем эти нули в качестве узлов квадратурной

формулы (3.25) интерполяционного типа. По теореме 3.3, с. 75, коэффициенты такой квадратурной формулы вычисляются по формулам (3.6). Таким образом, квадратура Q_n определяется единственным образом и удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 3.10, следовательно, является квадратурой Гаусса. \square

Для примера возьмем в качестве веса на отрезке $[-1, 1]$ весовую функцию $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Как было показано в п.1.5, с. 23, для этой весовой функции ортогональную систему полиномов образуют полиномы Чебышева $T_j(x)$. Следовательно, для заданного n узлами квадратуры Гаусса

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

будут нули полинома $T_n(x)$

$$x_i = -\cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1 : n.$$

Можно показать в этом случае, что все коэффициенты квадратуры $w_i = \pi/n$.

3.3. Основные свойства квадратуры Гаусса

Установим ряд свойств квадратуры Гаусса.

Теорема 3.12. *Степень $2n-1$ полиномов, на которых точна квадратура Гаусса с n узлами, максимальна, т.е. на полиномах степени $2n$ она не точна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\omega_n^2 \in \mathbb{P}_{2n}$ и

$$0 < I(\omega_n^2) \neq Q(\omega_n^2) = \sum_{i=1}^n w_i \omega_n^2(x_i) = 0.$$

\square

Теорема 3.13. *Все веса квадратурной формулы Гаусса положительны:*

$$w_i > 0 \quad \forall i = 1 : n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_i : i = 1 : n\} \subset \mathbb{P}_{n-1}$ — базис Лагранжа множества узлов квадратуры. Тогда для каждой базисной

функции имеет место включение $\varphi_i^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$. Из формулы (3.6) и из свойств квадратуры Гаусса имеем

$$\begin{aligned} w_i &= I(\varphi_i) = Q_n(\varphi_i) = \sum_{j=1}^n w_j \varphi_i(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n w_j \varphi_i^2(x_j) = Q_n(\varphi_i^2) = I(\varphi_i^2) > 0. \end{aligned}$$

□

Напомним, что некоторая функция $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется четной относительно середины отрезка $c = 0.5(a + b)$, если

$$g(c - x) = g(c + x) \quad \forall x \in (-h/2, h/2), \text{ где } h = b - a.$$

Теорема 3.14. *Если весовая функция четна относительно середины отрезка $[a, b]$, то узлы квадратурной формулы Гаусса расположены симметрично относительно середины отрезка и соответствующие симметрично расположенным узлам веса квадратуры равны между собой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя, в случае необходимости, аффинное преобразование отрезка $[-1, 1]$ на $[a, b]$, можем сразу рассматривать случай $[a, b] = [-1, 1]$. Тогда

$$\rho(x) = \rho(-x) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — узлы квадратуры Гаусса из интервала $(-1, 1)$. Нам нужно доказать, что

$$x_j = -x_{n-j+1} \quad \text{и} \quad w_j = w_{n-j+1} \quad \forall j = 1 : n.$$

Сделав замену переменных $x = -y$ в интеграле для произвольного полинома $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, получим

$$\begin{aligned} Q_n(f) &= \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) = I(f) = \int_{-1}^1 \rho(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \rho(x) f(-x) dx \\ &= Q_n(\bar{f}) = \sum_{j=1}^n w_j f(-x_j) = \sum_{j=1}^n \bar{w}_j f(\bar{x}_j) = \bar{Q}_n(f), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\bar{f}(x) = f(-x), \quad \bar{x}_j = -x_{n-j+1}, \quad \bar{w}_j = w_{n-j+1} \quad \forall j = 1 : n.$$

Полученное равенство означает, что \bar{Q}_n — квадратура Гаусса с узлами $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_n$ из интервала $(-1, 1)$ и весами \bar{w}_j . По теореме 3.11 о единственности квадратуры Гаусса

$$\bar{x}_j = x_j, \quad \bar{w}_j = w_j \quad \text{для всех } j = 1 : n,$$

что и требовалось доказать. \square

3.4. Представление погрешности квадратуры Гаусса

Теорема 3.15. *Если $f \in C^{2n}[a, b]$, то для погрешности $R_n(f) = I(f) - Q_n(f)$ квадратурной формулы Гаусса справедливо представление*

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx, \quad (3.26)$$

η — некоторая точка интервала (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданной функции $f \in C^{2n}[a, b]$ в узлах квадратуры x_j по значениям $f(x_j)$ и производных $f'(x_j)$ построим интерполяционный полином Эрмита $H_{2n-1}(x)$ степени $2n - 1$, удовлетворяющий равенствам

$$H_{2n-1}(x_j) = f(x_j), \quad H'_{2n-1}(x_j) = f'(x_j) \quad \forall j = 1 : n.$$

По теореме о представлении погрешности интерполяции Эрмита

$$r(x) = f(x) - H_{2n-1}(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \omega_n^2(x),$$

где функция $f^{(2n)}(\xi_x)$ непрерывна по $x \in [a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} R_n(f) &= I(f) - Q_n(f) = I(f) - Q_n(H_{2n-1}) = I(f) - I(H_{2n-1}) \\ &= \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \omega_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

Последнее равенство для некоторой точки $\eta \in (a, b)$ получено с использованием теоремы о среднем, поскольку функция $\rho(x) \omega_n^2(x)$ не меняет знак на интервале интегрирования (a, b) . \square

Заметим, что входящий в правую часть (3.26) интеграл является квадратом нормы в пространстве $L_{2,\rho}(a, b)$ ортогонального полинома

ω_n :

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx = I(\omega_n^2) = \|\omega_n\|_{2,\rho}^2.$$

Для некоторых специальных весовых функций $\rho(x)$, например, для весов Якоби $\rho(x) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta$, известны точные значения этих норм.

Литература

1. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.