# Асимптотическая плотность и вычислимость

Батыршин И.И.

Семинар кафедры алгебры и математической логики
Казанского (Приволжского) федерального университета,
5 мая 2017 г.

# Обзор публикаций (около 300 страниц)

1. **Jockusch, Schupp.** Generic computability, Turing degrees, and asymptotic density (2012)
2. **Downey, Jockusch, Schupp.** Asymptotic density and computably enumerable sets (2013)
3. **Igusa.** Nonexistence of minimal pairs for generic computability (2013)
4. **Bienvenu, Day, Hölzl.** From bi-immunity to absolute undecidability (2013)
5. **Igusa.** The generic degrees of density-1 sets and a characterization of the hyper- arithmetic reals (2015)
6. **Downey, Jockusch, McNicholl, Schupp.** Asymptotic density and the Ershov Hierarchy (2015)
7. **Astor.** Asymptotic density, immunity, and randomness (2015)
8. **Hirschfeldt, Jockusch, McNicholl, Schupp.** Asymptotic density and the coarse computability bound (2016)
9. **Andrews, Cai, Diamondstone, Jockusch, Lempp.** Asymptotic density, computable traceability, and 1-randomness (2016)
10. **Dzhafarov, Igusa.** Notions of robust information coding (2017)

# План моего доклада

1) Исторический обзор развития идей о сложности математических проблем (1930-2012).

2) Описание ведущихся в настоящее время исследований и достигнутых результатов (2012-н.в.).

# Сложность математических проблем: вычислимые или невычислимые

1930-е: Формализация понятия алгоритма (Гедель, Тьюринг, Черч, Пост, Клини)

1955: Невычислимость проблемы равенства слов в конечно- определенных группах (П.С. Новиков)

1958: Невычислимость проблемы гомеоморфности многообразий (А.А. Марков)

1970: Невычислимость проблемы определения разрешимости или неразрешимости диофантовых уравнений в целых числах (Ю.В. Матиясевич) (Десятая проблема Гильберта для $\mathbb{Z}$).

# Сложность математических проблем: вычислимые или невычислимые

## Вопрос

*Десятая проблема Гильберта для других коммутативных колец (для некоторых решена, для некоторых колец - до сих пор нет).*

## Вопрос

*Пусть* $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ *- множество алгебраических чисел. Вычислима ли проблема изоморфизма многообразий над* $\overline{\mathbb{Q}}$*?*

## Вопрос

*Пусть фиксировано ненулевое коммутативное кольцо. Вычислима ли проблема изоморфизма конечно порожденных коммутативных алгебр над этим кольцом?*

## Вопрос

*Пусть дана бесконечная шахматная доска. Существует ли алгоритм, который по конечному набору шахматных фигур и их стартовой позиции дает ответ, могут ли белые форсировать мат? (Известно, что проблема мата за n ходов вычислима).*

# Сложность математических проблем: необходимые для их решения время и пространство

Оценка максимального времени и пространства, которые потребуется алгоритму для решения этих проблем в зависимости от всех возможных входов.

1. **Cook S. A.**, The complexity of theorem-proving procedures (1971)
2. **Левин Л. А.**, Универсальные задачи перебора (1973)
3. **Karp R. M.**, Reducibility among Combinatorial Problems (1972)

## Одна из «проблем тысячелетия»

$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?

# Сложность в худшем случае

Симплекс-метод - алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве (1947, Данциг).

В некоторых «худших» случаях этот алгоритм имеет экспоненциальную сложность, однако, несмотря на его интенсивное ежедневное использование на протяжении десятилетий, эти худшие случаи ни разу не встретились.

Поэтому оценку сложности алгоритма в зависимости от максимального времени, необходимого на всех возможных входах, стали называть «сложностью в худшем случае» (“worst-case complexity“), и встал вопрос о других способах оценки сложности алгоритмов.

# Оценка сложности математических проблем, позволяющая избежать «худших случаев»

Три подхода к алгоритмической сложности математических проблем:

1986: «сложность в среднем» (“average-case complexity“), основана на распределении вероятностей появления входных данных (Левин, Гуревич)

2001: «сглаженная сложность» (“smoothed complexity“), комбинация сложности в худшем случае и сложности в среднем случае с помощью математического аппарата теории возмущений (Шпильман и Тенг, получили за эту работу премию Гёделя (2008), премию Неванлинны (2010) и премию Фалкерсона (2009)).

2003: «генерическая сложность» (“generic-case complexity“), основана на идее оценки сложности алгоритма не на всем множестве входов, а на очень большом множестве почти всех входов.

# Generic-case complexity

2003: **Kapovich, Myasnikov, Schupp, Shpilrain.** Generic-case complexity, decision problems in group theory and random walks.

Ввели понятия генерической сложности алгоритмической проблемы (generic-case complexity) и генерически вычислимого языка над фиксированным алфавитом (generically computable language). Показали, что проблема равенства слов в конечно-определенных группах является «генерически вычислимой» за полиномиальное время.

2012: **Jockusch, Schupp.** Generic computability, Turing degrees, and asymptotic density.

Ввели понятия генерической вычислимости (generic computability) и грубой вычислимости (coarse computability) подмножеств множества натуральных чисел и начали изучение их взаимоотношений с вычислимостью, вычислимой перечислимостью, тьюринговой сводимостью, сводимостью по перечислимости и т.д.

# План описания ведущихся исследований и достигнутых результатов (2012-н.в.).

- Асимптотическая плотность
  - Асимптотическая плотность и арифметическая иерархия
  - Асимптотическая плотность и иерархия Ершова
  - Асимптотическая плотность, низкие и высокие множества
  - Асимптотическая плотность и иммунные множества
- Генерическая вычислимость
  - Генерическая вычислимость и генерическая сводимость
  - Генерическая сводимость и генерические степени
  - Генерическая сводимость, сводимость по перечислимости и гиперарифметические множества
- Грубая вычислимость и грубая сводимость
- Другие ослабленные определения вычислимости
  - Частичная вычислимость с плотностью $r < 1$ и грубая вычислимость с плотностью $r < 1$
  - Абсолютная неразрешимость
  - Плотная вычислимость и эффективно плотная вычислимость

# Асимптотическая плотность

$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$

$A = \{0, 2, 4, 6....\}$ (множество четных чисел)

$B = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$ (множество квадратов натуральных чисел)

$C = \omega - B$

# Асимптотическая плотность

## Определение

*(Эрдёш, 1938) Пусть* $A \subseteq \omega$. *Для любого* $n > 0$ *обозначим*

$$A \restriction n = A \cap \{0, 1, 2, ..., n\},$$

$$p_n(A) = \frac{|A \restriction n|}{n}.$$

*Верхней плотностью* $\overline{p}(A)$ *множества* $A$ *называется*

$$\overline{p}(A) = \limsup_{n\to\infty} p_n(A).$$

*Нижней плотностью* $\underline{p}(A)$ *множества* $A$ *называется*

$$\underline{p}(A) = \liminf_{n\to\infty} p_n(A).$$

*Если предел* $p_n(A)$ *существует, т.е.* $\overline{p}(A) = \underline{p}(A)$, *то* $p(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A)$ *называется асимптотической плотностью множества* $A$.

# Асимптотическая плотность

Если $p(A)$ существует, то $0 \leq p(A) \leq 1$.

$A = \{0, 2, 4, 6....\}, p(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n/2}{n} = 1/2$

$B = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}, p(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$C = \omega - B, p(C) = 1 - 0 = 1.$

# Асимптотическая плотность и арифметическая иерархия

### Определение

*Действительное число* $r$ *является* $\Sigma^0_n$*-слева действительным числом (*$\Pi^0_n$*-слева,* $\Delta^0_n$*-слева), если множество* $\{q \in \mathbb{Q} | q < r\} \in \Sigma^0_n(\Pi^0_n, \Delta^0_n)$.

### Теорема

*(Джокуш, Шупп) Для любого действительного числа* $r \in [0, 1]$ *существует множество* $A \in \omega$*, плотность которого равна* $r$*.*

### Теорема

*(Джокуш, Шупп) Действительное число* $r$ *является плотностью некоторого вычислимого множества, тогда и только тогда, когда* $r$ *является* $\Delta^0_2$ *числом.*

# Асимптотическая плотность и арифметическая иерархия

### Теорема

*(Доуни, Джокуш, Шупп) Действительное число $r$ является плотностью некоторого вычислимо перечислимого множества, тогда и только тогда, когда $r$ является $\Pi^0_2$-слева действительным числом.*

### Теорема

*(Доуни, Джокуш, Шупп, релятивизация) $r$ является плотностью $\Delta^0_n$-множества, тогда и только тогда, когда $r$ является $\Delta^0_{n+1}$ числом; $r$ является плотностью некоторого $\Sigma^0_n$-множества, тогда и только тогда, когда $r$ является $\Pi^0_{n+1}$-слева числом.*

# Асимптотическая плотность и иерархия Ершова

### Теорема

*(Доуни, Джокуш, МакНихол, Шупп) Для любого $n \geq 2$ если множество является $n$-в.п. множеством, то его асимптотическая плотность является разностью между двумя $\Pi^0_2$-слева действительными числами.*

### Теорема

*(Доуни, Джокуш, МакНихол, Шупп) Пусть $f$ - любая вычислимая, неубывающая, неограниченная функция. Если $A$ является $\Delta^0_2$-множеством и имеет плотность, то существует $f$-в.п. множество $B$ такое, что плотность $A$ совпадает с плотностью $B$.*

# Асимптотическая плотность, низкие и высокие множества

**Теорема**

*(Доуни, Джокуш, Шупп) Пусть* ***a*** *в.п. степень. Тогда* ***a*** *не является низкой тогда и только тогда, когда* ***a*** *содержит такое в.п. множество* $A$*, что* $\rho(A) = 1$ *и* $A$ *не содержит вычислимых подмножеств, плотность которых тоже равна 1.*

**Теорема**

*(Доуни, Джокуш, Шупп + Астор) Существует такое в.п. множество* $A$*, что* $\rho(A) = 1$ *и совокупность степеней всех подмножеств* $A$*, плотность которых равна 1, совпадает с совокупностью всех высоких степеней.*

# Асимптотическая плотность и иммунные множества

### Теорема

*(Доуни, Джокуш, Шупп)*

*(i) Нижняя плотность любого гипериммунного множества равна 0.*

*(ii) Существует ко-в.п. гипериммунное множество, верхняя плотность которого равна 1.*

*(iii) Плотность любого ко-в.п. гипергипериммунного множества равна 0.*

*(iv) Существует гипергипериммунное множество, верхняя плотность которого равна 1.*

# План описания ведущихся исследований и достигнутых результатов (2012-н.в.).

- Асимптотическая плотность
  - Асимптотическая плотность и арифметическая иерархия
  - Асимптотическая плотность и иерархия Ершова
  - Асимптотическая плотность, низкие и высокие множества
  - Асимптотическая плотность и иммунные множества
- Генерическая вычислимость
  - Генерическая вычислимость и генерическая сводимость
  - Генерическая сводимость и генерические степени
  - Генерическая сводимость, сводимость по перечислимости и гиперарифметические множества
- Грубая вычислимость и грубая сводимость
- Другие ослабленные определения вычислимости
  - Частичная вычислимость с плотностью $r < 1$ и грубая вычислимость с плотностью $r < 1$
  - Абсолютная неразрешимость
  - Плотная вычислимость и эффективно плотная вычислимость

# Генерическая вычислимость

### Определение

*(Капович, Мясников, Шупп, Шпильрайн, 2003)*
*(Джокуш, Шупп, 2012)*
*Множество $A$ называется генерически вычислимым (generically computable), если существует частично-вычислимая функция $\varphi$, такая что асимптотическая плотность области определения $\varphi$ равна 1, и для всех $n \in \omega$ если $\varphi(n)\downarrow$, то $\varphi(n) = A(n)$.*

### Теорема

*(Джокуш, Шупп)*
*(i) Если  в.п. и $p(A) = 1$, то $A$ генерически вычислимо.*
*(ii) Если $A$ би-иммунно, то $A$ не является генерически вычислимым.*
*(iii) В каждой ненулевой тьюринговой степени есть и генерически вычислимое множество, и множество, которое не является генерически вычислимым.*

# Генерическая вычислимость и генерическая сводимость

### Определение

*Множество $A$ называется генерически вычислимым (generically computable), если существует частично-вычислимая функция $\varphi$, такая что асимптотическая плотность области определения $\varphi$ равна 1, и для всех $n \in \omega$ если $\varphi(n)\downarrow$, то $\varphi(n) = A(n)$.*

### Определение

*(Джокуш, Шупп) Если для частичной функции $\varphi$ верно, что плотность $dom\varphi = 1$ и для всех $n \in \omega$ если $\varphi(n)\downarrow$, то $\varphi(n) = A(n)$, то $\varphi$ называется* ***генерическим описанием*** *$A$.*

Таким образом, $A$ является генерически вычислимым тогда и только тогда, когда оно имеет частично вычислимое генерическое описание.

# Генерическая сводимость и генерические степени

## Определение

*Оператор перечисления - это в.п. множество $W$ пар $< n, D >$, где $n \in \omega$, $D \subseteq \omega$ - конечно.*
$W^X := \{n | (\exists D)(< n, D > \in W \& D \subseteq X)\}$.
$\gamma(\varphi) = \{< a, b > | \varphi(a) = b\}$ *(граф частичной функции $\varphi$).*

## Определение

*(Джокуш, Шупп) $A \leq_g B$ ($A$ генерически сводимо к $B$), если существует такой фиксированный оператор перечисления $W$, что для любого генерического описания $\psi$ множества $B$ найдется генерическое описание $\varphi$ множества $A$, что $W^{\gamma(\psi)} = \gamma(\varphi)$.*
*Генерической степенью $A$ называется множество $\{B | B \leq_g A \& A \leq_g B\}$.*

Генерически вычислимые множества образуют наименьшую генерическую степень.

# Генерическая сводимость, сводимость по перечислимости и гиперарифметические множества

Отображение $A \mapsto deg_e(A \oplus \overline{A})$ является вложением Тьюринговых степеней в степени по перечислимости.

## Определение

*(Джокуш, Шупп)* $R_k = \{m : 2^k | m, 2^{k+1} \not| m\}$, $\bigcup_{k=0}^{\infty} R_k = \omega - 0$. $\mathcal{R}(A) = \bigcup_{n \in A} R_n$.

## Теорема

*(Джокуш, Шупп) Отображение* $\boldsymbol{a} \mapsto deg_g \mathcal{R}(A)$ *является вложением тьюринговых степеней* $(\mathbf{D}, \leq_T)$ *в генерические степени* $(\mathbf{I}, \leq_g)$.

## Определение

*Ненулевая степень перечислимости (генерическая степень)* $\boldsymbol{a}$ *является квази-минимальной, если ни одна ненулевая степень* $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$ *не лежит в области значений соответствующего вложения.*

# Генерическая сводимость, сводимость по перечислимости и гиперарифметические множества

### Теорема

*(Джокуш, Шупп) Если плотность множества $A$ равна 1, $A$ не является генерически вычислимым, и степень перечислимости $A$ является квази-минимальной, тогда генерическая степень $A$ также является квази-минимальной.*

### Теорема

*(Игуса) Множество $A$ является гиперарифметическим тогда и только тогда, когда существует множество $B$, плотность которого равна 1, и $\mathcal{R}(A) \leq_g B$.*

# Генерическая сводимость и генерические степени

### Вопрос

*Верно ли, что для любой ненулевой генерической степени* $\boldsymbol{a}$ *найдется ненулевая генерическая степень* $\boldsymbol{b} \leq_g \boldsymbol{a}$*, плотность которой равна 1?*

(Если ответ «да», то не существует минимальной генерической степени, если ответ «нет», то существует минимальная пара генерических степеней).

# План описания ведущихся исследований и достигнутых результатов (2012-н.в.).

- Асимптотическая плотность
  - Асимптотическая плотность и арифметическая иерархия
  - Асимптотическая плотность и иерархия Ершова
  - Асимптотическая плотность, низкие и высокие множества
  - Асимптотическая плотность и иммунные множества
- Генерическая вычислимость
  - Генерическая вычислимость и генерическая сводимость
  - Генерическая сводимость и генерические степени
  - Генерическая сводимость, сводимость по перечислимости и гиперарифметические множества
- Грубая вычислимость и грубая сводимость
- Другие ослабленные определения вычислимости
  - Частичная вычислимость с плотностью $r < 1$ и грубая вычислимость с плотностью $r < 1$
  - Абсолютная неразрешимость
  - Плотная вычислимость и эффективно плотная вычислимость

## Грубая вычислимость

### Определение

*(Джокуш, Шупп, 2012)*
*Множество $A$ генерически вычислимо, если есть частично-вычислимая функция $\varphi$, такая что $p(dom\varphi) = 1$, и если $\varphi(n)\downarrow$, то $\varphi(n) = A(n)$.*
*Множество $A$ грубо вычислимо (coarsely computable), если существует (всюду определенная) вычислимая функция $f$, такая что $p(\{n | f(n) = A(n)\}) = 1$.*

### Теорема

*(Джокуш, Шупп)*
*(i) Существует в.п. генерически вычислимое множество, которое не является грубо вычислимым.*
*(ii) Существует в.п. грубо вычислимое множество, которое не является генерически вычислимым.*
*(iii) В каждой ненулевой тьюринговой степени есть множество, которое не является ни генерически вычислимым, ни грубо вычислимым.*

# Грубая вычислимость и грубая сводимость

## Определение

*(Джокуш, Шупп) Множество $D$ является грубым описанием $A$ (coarse description), если $\rho(D \triangle A) = 0$ (плотность симметрической разности равна нулю). Множество грубо вычислимо, если у него есть вычислимое грубое описание*

## Определение

*(Хиршфельдт, Джокуш, Куйпер, Шупп) $Y$ равномерно грубо сводимо к $X$ ($Y \leq_{uc} X$), если существует такой Тьюринговый функционал $\Phi$, что если $D$ является грубым описанием $X$, то $\Phi^D$ является грубым описанием $Y$. Классы эквивалентности $\equiv_u c$ называются равномерными грубыми степенями.*
*$Y$ неравномерно грубо сводимо к $X$ ($Y \leq_{nc} X$), если каждое грубое описание $X$ вычисляет грубое описание $Y$. Классы эквивалентности $\equiv_n c$ называются неравномерными грубыми степенями*

# Грубая вычислимость и грубая сводимость

### Теорема

*(Хиршфельдт, Джокуш, Куйпер, Шупп) Пусть* $I_n = [n!, (n+1)!)$, $\mathcal{I} = \bigcup_{n \in A} I_n$ *и* $\mathcal{H}(A) = \{< n, i > | n \in A \& i \in \omega >\}$, *тогда* $\mathcal{I}$ *является вложением тьюринговых степеней в неравномерно грубые степени,* $\mathcal{E}(A) = \mathcal{I}(\mathcal{H}(A)))$ *является вложением тьюринговых степеней в равномерно грубые степени.*

### Теорема

*(Хиршфельдт, Джокуш, Куйпер, Шупп) Если A является 2-генерическим множеством (или 2-случайным множеством), тогда* $\mathcal{E}(A) \leq_{nc} \mathcal{I}(A)$, *но* $\mathcal{E}(A) \not\leq_{uc} \mathcal{I}(A)$.

### Теорема

*(Хиршфельдт, Джокуш, Куйпер, Шупп) Если два множества являются взаимно слабо-3-случайными, то их грубые степени (и равномерные, и неравномерные) образуют минимальную пару степеней.*

В целом это направление имеет тесные связи с алгоритмической случайностью и наименее исследовано.

# План описания ведущихся исследований и достигнутых результатов (2012-н.в.).

- Асимптотическая плотность
  - Асимптотическая плотность и арифметическая иерархия
  - Асимптотическая плотность и иерархия Ершова
  - Асимптотическая плотность, низкие и высокие множества
  - Асимптотическая плотность и иммунные множества
- Генерическая вычислимость
  - Генерическая вычислимость и генерическая сводимость
  - Генерическая сводимость и генерические степени
  - Генерическая сводимость, сводимость по перечислимости и гиперарифметические множества
- Грубая вычислимость и грубая сводимость
- Другие ослабленные определения вычислимости
  - Частичная вычислимость с плотностью $r < 1$ и грубая вычислимость с плотностью $r < 1$
  - Абсолютная неразрешимость
  - Плотная вычислимость и эффективно плотная вычислимость

# Вычислимость с плотностью $r < 1$

Можно сказать, что множество $A$ расширяет частично вычислимую функцию $\varphi$, если для всех $x \in dom\varphi$ выполняется $\varphi(x) = A(x)$. Зафиксировав множество $A$ и рассматривая различные частично вычислимые функции, которые расширяются этим множеством, мы тем самым пытаемся измерить, насколько близко множество $A$ находится к вычислимому множеству: чем больше асимптотическая плотность области определения таких функций, тем множество $A$ ближе к тому, чтобы быть вычислимым. Если существует $\varphi$, такая что $A$ расширяет $\varphi$ и асимптотическая плотность $dom\varphi$ равна 1, то $A$ является генерически вычислимым множеством, т.е. оно максимально приближено к вычислимым множествам.
Что если асимптотические плотности областей определения всех функций, расширяемых $A$, меньше 1?

# Частичная вычислимость с плотностью $r < 1$ и грубая вычислимость с плотностью $r < 1$

## Определение

*(Доуни, Джокуш, Шупп) Множество $A \subseteq \omega$ называется частично вычислимым с плотностью $r \in [0,1]$, если существует частично вычислимая функция $\varphi$, такая что для всех $(\forall n \in \omega)(\varphi(n)\downarrow \Rightarrow \varphi(n) = A(n)$, и $\underline{p}(dom\varphi) \geq r$.*
*Асимптотической границей вычислимости $A$ называется $\alpha(A) = \sup\{r | A$ частично вычислимо с плотностью $r\}$.*

## Определение

*(Хиршфельдт, Джокуш, МакНихол, Шупп) Множество $A \subseteq \omega$ называется грубо вычислимым с плотностью $r \in [0,1]$, если существует (всюду определенная) вычислимая функция $f$, такая что $\underline{p}(\{n | f(n) = A(n)\}) \geq r$.*
*Грубой границей вычислимости $A$ называется $\gamma(A) = \sup\{r | A$ грубо вычислимо с плотностью $r\}$.*

# Частичная вычислимость с плотностью $r < 1$ и грубая вычислимость с плотностью $r < 1$

**Теорема**

*(Andrews, Cai, Diamondstone, Jockusch, Lempp) Если множество $A$ вычислимо прослеживаемо (computably traceable), то $A$ грубо вычислимо с плотностью 1/2.*

**Теорема**

*(Andrews, Cai, Diamondstone, Jockusch, Lempp) Если множество $X$ является 1-случайным и $A$ таблично сводится к $X$, то $A$ грубо вычислимо с плотностью 1/2.*

# Абсолютная неразрешимость

## Определение

*(Мясников, Рыбалов) Множество называется абсолютно неразрешимым (absolutely undecidable), если не существует частично вычислимой функции* $\varphi : \omega \to \{0, 1\}$, *такой что* $\varphi(n) = A(n)$ *для всех* $n \in dom\varphi$, *и верхняя плотность области определения* $\varphi$ *больше нуля, т.е.* $\overline{p}(dom\varphi) > 0$.

## Теорема

*(Бьенвеню, Дэй и Хёльзль) В каждой ненулевой Тьюринговой степени существует абсолютно неразрешимое множество.*

Доказано с использованием кода Уолша-Адамара, применяемого в теории кодов для исправления ошибок в каналах связи с шумами.

# Плотная вычислимость и эффективно плотная вычислимость

### Definition

(Астор, Хиршфельдт, Джокуш)
Множество $A$ называется плотно вычислимым (densely computable), если существует частично-вычислимая функция $f$, такая что асимптотическая плотность множества $\{n | f(n) \downarrow = A(n)\}$ равна 1.
Множество $A$ называется эффективно плотно вычислимым (effectively densely computable), если существует (всюду определенная) вычислимая функция $f : \omega \to \{0, 1, -1\}$, такая что асимптотическая плотность множества $C = \{x | f(x) = -1\}$ равна нулю и $f(x) = A(x)$ для всех $x \notin C$.

Если множество эффективно плотно вычислимо, то оно одновременно генерически и грубо вычислимо. Если множество генерически вычислимо или грубо вычислимо, то оно плотно вычислимо.

*СПАСИБО*