

Министерство образования и науки Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМЕНИ ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Специальность: 010800.62 — механика и математическое моделирование

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Работа завершена:

"_26_"__05____2015 г. _____(Р.М. Габсагтаров)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

к.ф-м.н.,

"__"____2015 г. _____(О.А. Саченков)

Заведующего кафедрой

д.ф-м.н.

"__"____2015 г. _____(Ю.Г. Коноплев)

Казань 2015

Содержание

1.	Введение.....	3
2.	Постановка задачи.....	4
3.	Решение системы.....	6
	3.1 без диссипации.....	9
	3.2. с учетом диссипации.....	12
4.	Вывод.....	18
5.	Литература.....	19

Введение

Подвеска автомобиля – сложная и взаимосвязанная система, которая связывает кузов автомобиля с дорогой.

Функциями подвески: физически соединяет колеса с несущей системой машины – кузовом или рамой; передает на несущую систему силы и моменты, появляющиеся, при взаимодействии колес с дорогой; обеспечивает необходимый характер перемещения колес относительно кузова, и требуемую плавность хода. Плавность движения – совокупность свойств автомобиля, обеспечивающих ограничение вибронагруженности водителя, пассажиров, грузов.

Основными элементами подвески являются: упругие элементы, воспринимающие и передающие продольные и боковые силы и их моменты, нормальные силы реакции дороги, которые возникают при наезде колеса на неровности; амортизаторы, главной задачей которых является гашение колебаний несущей системы, возникающих вследствие действия дороги.

При движении автомобиля можно выделить виды колебаний:

1. Подпрыгивание – вертикальные колебания центра масс;
2. Галопирование – угловые колебания в продольной вертикальной плоскости;
3. Покачивание – угловые колебания в поперечной вертикальной плоскости;
4. Подергивание – колебания в продольной горизонтальной плоскости.

Самыми важными являются 1 и 2.

Упругие элементы подвески автомобиля в зависимости от внешних возмущений могут войти в резонанс с собственными колебаниями системы, что приводит к потере управляемости. Задача определения устойчивых диапазонов подвески является актуальной задачей.

Постановка задачи

Будем рассматривать автомобиль как систему упруго связанных жестких (кузов автомобиля) и демпфирующих (амортизаторы и стойки) тел.

Движение такой системы в процессе колебания характеризуется : вертикальным перемещением центра масс кузова, вертикальным перемещением центра стойки, углом поворота относительно поперечной оси, углом поворота относительно продольной оси.

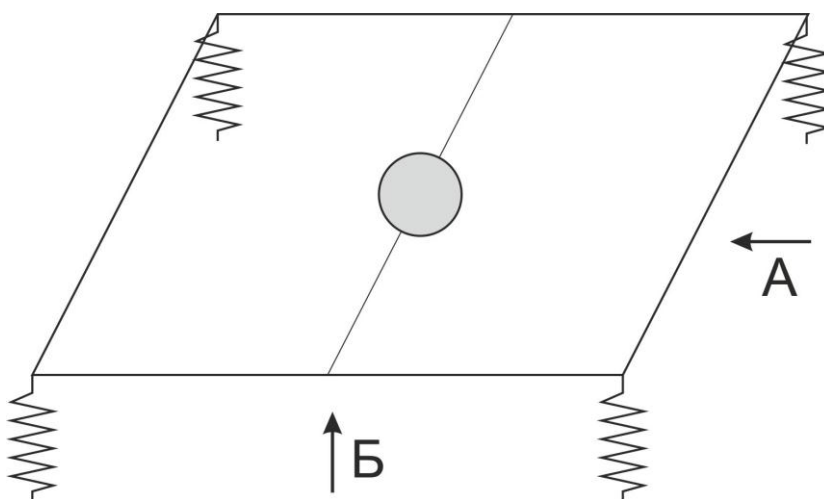


Рис. 1. А-продольное сечение, Б – поперечное сечение

Общий процесс колебания можно представить как состоящим из двух взаимно не связанных процессов:

продольных колебания, характеризуемых вертикальным перемещением кузова, поворотом кузова вокруг поперечной оси.

Поперечных колебания, характеризуемых поворотом кузова вокруг продольной оси.

Обобщая указанные два взаимно не связанные процессы можно рассмотреть задачу.

Дана балка, концы закреплены жестко на пружинах с разными коэффициентами жесткости. Рассмотрим случай, когда центр масс находится не посередине.

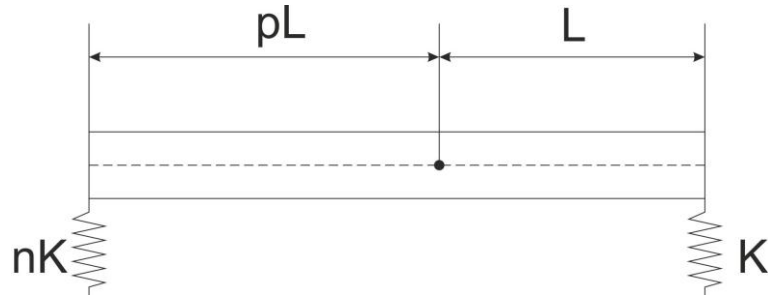


Рис. 2. Расчетная схема. L – расстояние до центра масс, r – характеристика эксцентрика центра масс, K – жесткость пружины, n – отношение жесткостей

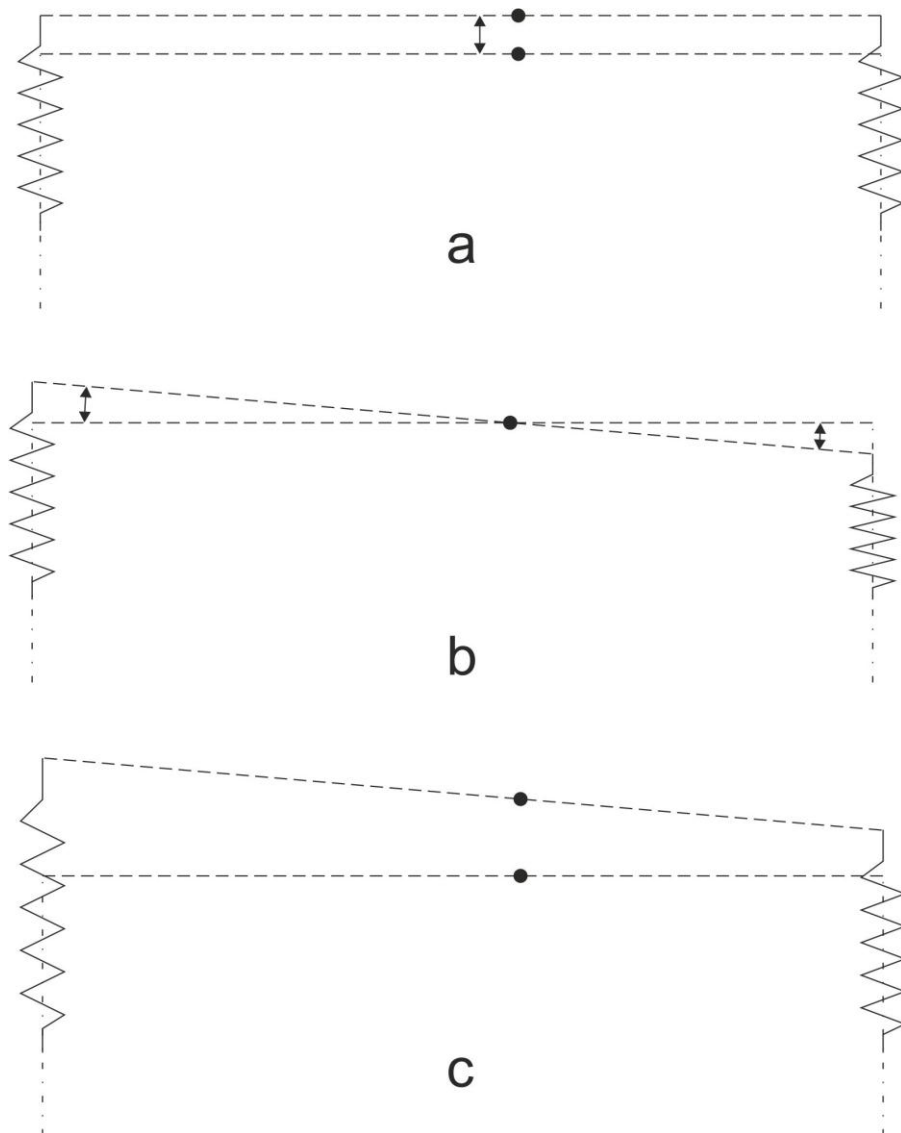


Рис. 3. а - перемещение по обобщенной координате y ; б - по обобщенной координате φ ; с - совместное перемещение

Решение системы

Выберем две обобщённые координаты и для каждого из них составим уравнение Лагранжа 2-го рода.

Распишем кинетическую энергию через введенные обобщенные координаты

$$T = T_y + T_\varphi$$

$$T_y = \frac{m\dot{y}^2}{2}$$

$$T_\varphi = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

Распишем потенциальную энергию через введенные обобщенные координаты

$$E = E_p + E_{E1} + E_{E2}$$

$$E_p = mgy$$

$$E_{E1} = \frac{K_1(y + L_1 \sin\varphi)^2}{2}$$

$$E_{E2} = \frac{K_2(y - L_2 \sin\varphi)^2}{2}$$

$$K_1 = K, K_2 = nK, L_1 = pL, L_2 = L$$

Дифференцируя для системы Лагранжа 2 получим:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + k(1+n)y + kL(p-n)\sin\varphi = -mg \\ J\ddot{\varphi} + kL\cos\varphi(L(n+p^2)\sin\varphi + (p-n)y) = 0 \end{cases}$$

В силу малости угла φ :

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\cos \varphi \approx 1$$

Линеаризуем это выражение

$$\begin{cases} m\ddot{y} + k(1+n)y + kL(p-n)\varphi = -mg \\ J\ddot{\varphi} + kL(L(n+p^2)\varphi + (p-n)y) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{y} + k(1+n)y + kL(p-n)\varphi = 0 \\ J\ddot{\varphi} + kL(L(n+p^2)\varphi + (p-n)y) = 0 \end{cases}$$

Решение системы однородных уравнений сводим к задаче на собственные значения

$$\begin{vmatrix} \frac{k(1+n)}{m} - \lambda^2 & \frac{kL(p-n)}{m} \\ \frac{kL(p-n)}{J} & \frac{kL^2(n+p^2)}{J} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{k(1+n)}{m} - \lambda^2\right) \cdot \left(\frac{kL^2(n+p^2)}{J} - \lambda^2\right) - \frac{k^2L^2(p-n)^2}{Jm} = 0$$

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left(\frac{kL^2(n+p^2)}{J} + \frac{k(1+n)}{m}\right) + \frac{k(1+n)}{m} \cdot \frac{kL^2(n+p^2)}{J} - \frac{k^2L^2(p-n)^2}{Jm} = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\frac{k(1+n)}{m} - \frac{kL^2(n+p^2)}{J}} \pm \sqrt{\frac{k^2(J^2(1+n)^2 + L^4m^2(n+p^2)^2 + 2JL^2m(n^2 + p^2 - n(1+4p+p^2)))}{J^2m^2}}}{\sqrt{2}}$$

Общий вид решения:

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 C_i \tilde{C}_i^1 e^{\lambda_i t}$$

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^4 C_i \tilde{C}_i^2 e^{\lambda_i t}$$

где C_i - константы интегрирования определяются из НУ(начальных условий).

где \tilde{C}_i - константы, определяются из:

$$\begin{pmatrix} \frac{k(1+n)}{m} - \lambda_i^2 & \frac{kL(p-n)}{m} \\ \frac{kL(p-n)}{J} & \frac{kL^2(n+p^2)}{J} - \lambda_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \end{pmatrix} = 0$$

Общее решение:

Константы можно определить:

$$\tilde{C}_i^1 = \frac{J\lambda_i^2 - kL(n+p^2)}{kL(p-n)}$$

$$\tilde{C}_i^2 = 1$$

В общем случае ввиду сопряженности комплексных корней, получим для общего решения, где константы А и В определяются из констант выше и ну:

$$\sum_{i=1}^4 C_i \tilde{C}_i^j e^{\lambda_i t} = -Aie^{-i\alpha t} + Aie^{i\alpha t} + Bie^{-i\beta t} - Bie^{i\beta t} = 2B\sin\beta t - 2A\sin\alpha t$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{k(1+n)}{m} - \frac{kL^2(n+p^2)}{J} + \sqrt{\frac{k^2(J^2(1+n)^2 + L^4m^2(n+p^2)^2 + 2JL^2m(n^2+p^2 - n(1+4p+p^2)))}{J^2m^2}}}}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\frac{k(1+n)}{m} - \frac{kL^2(n+p^2)}{J} - \sqrt{\frac{k^2(J^2(1+n)^2 + L^4m^2(n+p^2)^2 + 2JL^2m(n^2+p^2 - n(1+4p+p^2)))}{J^2m^2}}}}{\sqrt{2}}$$

Колебание тела в этом случае получается как сумма двух колебательных процессов с разными частотами (совпадающими при $n = p$)

Зададим параметры тела в пакете математики и получим график зависимости перемещения центра масс от времени:

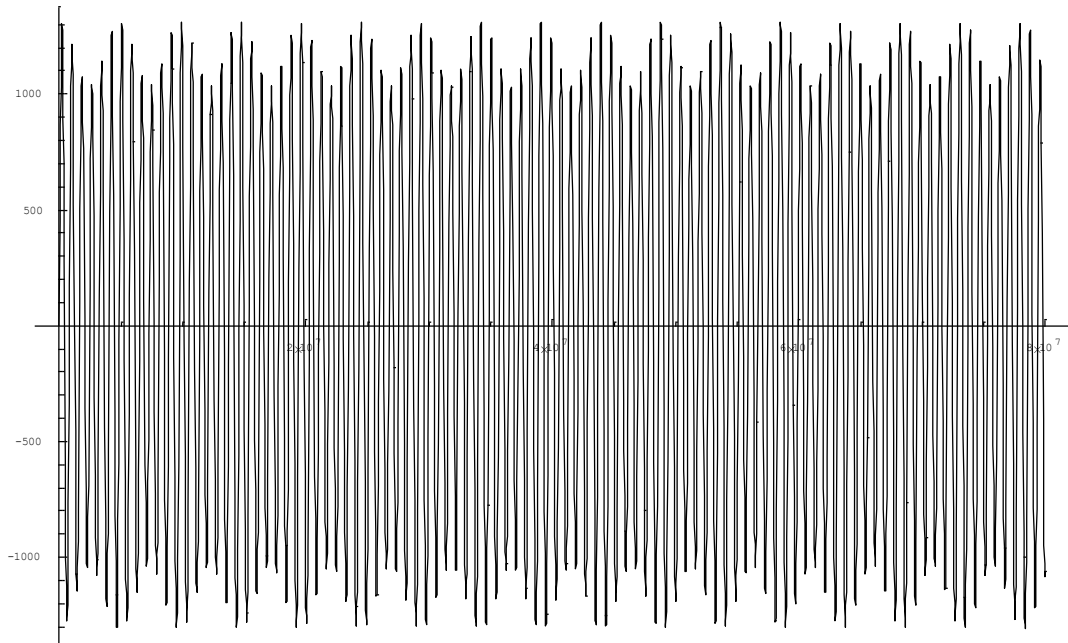


Рис. 4. Вертикальные перемещения центра масс. По оси абсцисс – время (с), по оси ординат – перемещение (мм)

$$m = 20.5 \text{ [кг]}$$

$$J = 0.963$$

$$L = 370 \text{ [м]}$$

$$p = 0.82$$

$$z = 1.12$$

$$n < n_{\text{кр}} = 1.02$$

Представлены графики для $n = 1.03$

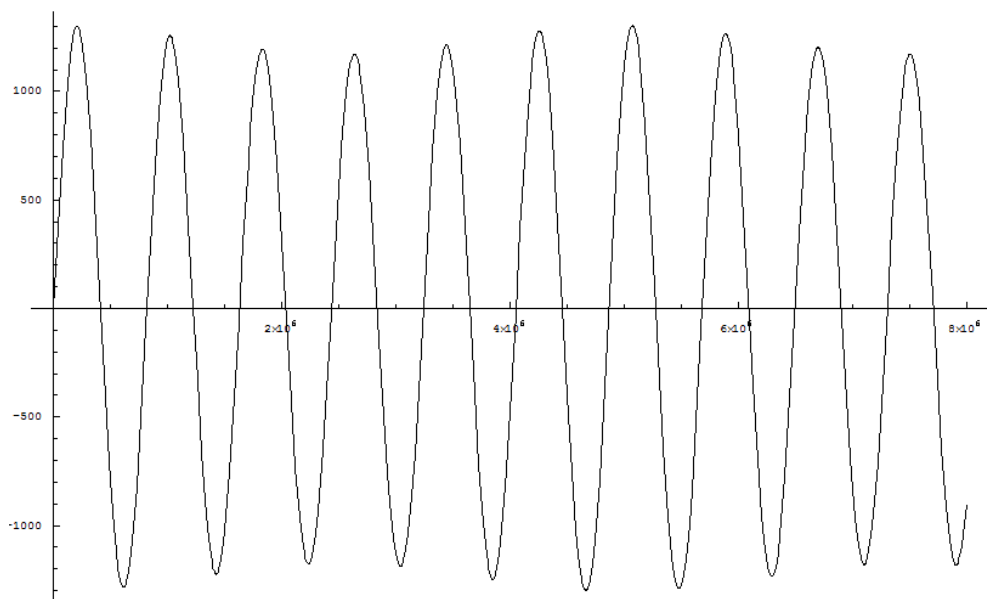


Рис. 5. Вертикальные перемещения центра масс. По оси абсцисс – время (с), по оси ординат – перемещение (мм)

Вид закона перемещения центра масс

Представлены графики для $n = 1.0009$

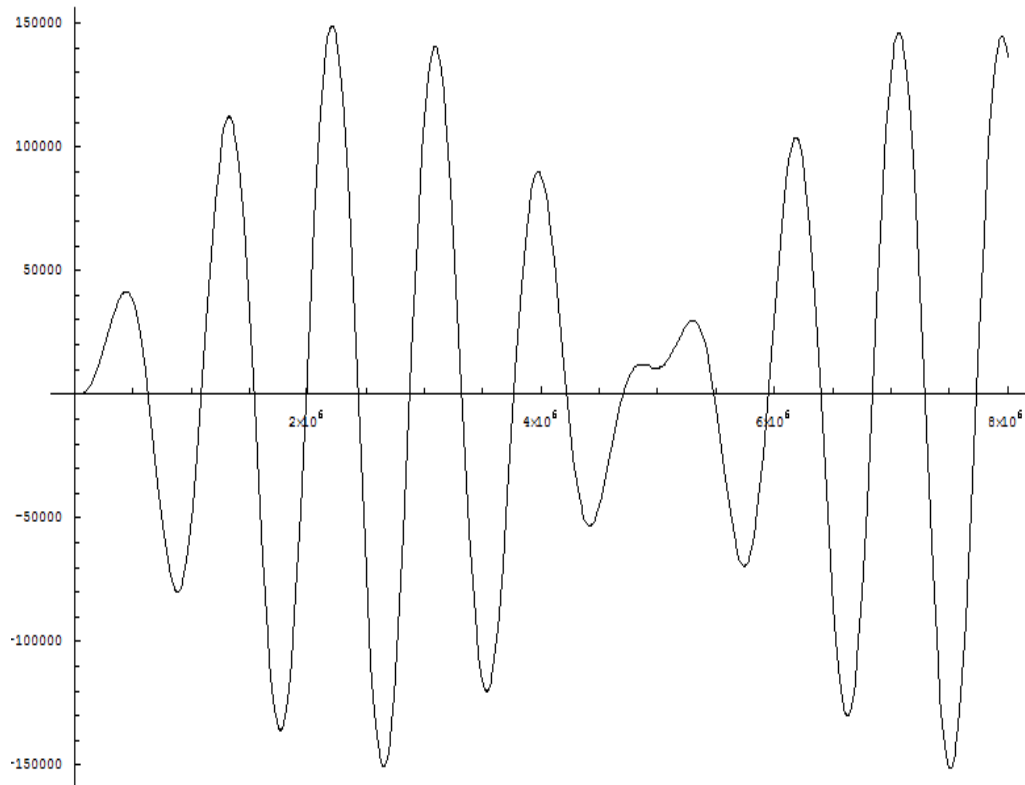


Рис. 6. Угол поворота около центра масс. По оси абсцисс – время (с), по оси ординат – угол поворота (радиан)

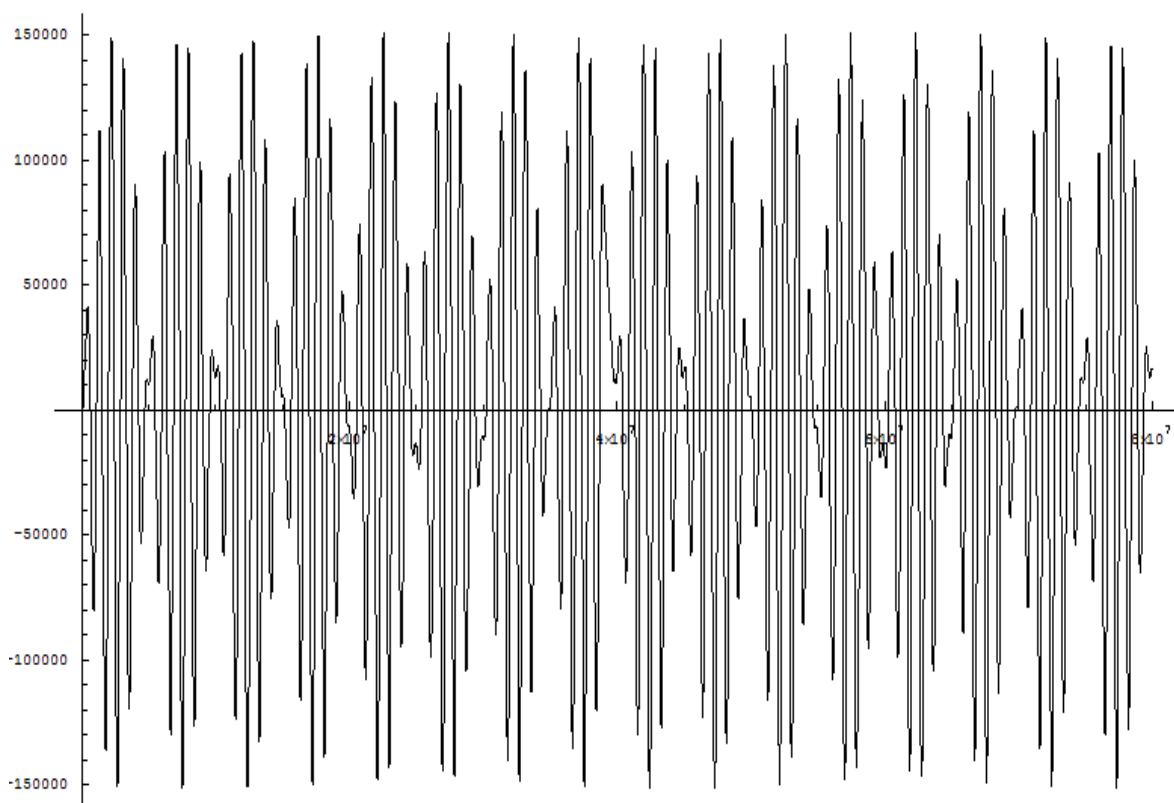


Рис. 7. Угол поворота около центра масс. По оси абсцисс – время (с), по оси ординат – угол поворота (радиан)

Для случая малого смещения центра масс и не большой разности жесткостей получим:

$$n \approx 1; p \approx 1 \Rightarrow n^2 = 1; p^2 = 1:$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\frac{k(1+n)}{m} - \frac{kl^2(n+1)}{J} + \sqrt{\frac{k^2(J^2 2(1+n) + 2l^4 m^2(1+n) + 4Jl^2 m(1-n(1+2p)))}{J^2 m^2}}}}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-\frac{k(1+n)}{m} - \frac{kl^2(n+1)}{J} - \sqrt{\frac{k^2(J^2 2(1+n) + 2l^4 m^2(1+n) + 4Jl^2 m(1-n(1+2p)))}{J^2 m^2}}}}{\sqrt{2}}$$

Рассмотрим возмущения при собственных колебаниях системы. При равенстве частот собственных колебаний с частотой вынуждающей силы возникает резонанс. Резонанс это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний. Увеличение амплитуды – это следствие резонанса. В нашем случае при $\alpha = \beta$ возникает резонанс.

Получим неустойчивую систему. Чтобы гасить возмущения добавляем амортизаторы.

Будем рассматривать автомобиль, добавим к балке с обеих сторон демпфер - устройство для уменьшения или предотвращения вредных механических колебаний в машинах, механизмах и устройствах путем поглощения энергии колеблющейся системы.

Демпфер рулевого управления уменьшает биение руля и предупреждает рывки при рулении на шоссе. На бездорожье смягчает удары в руль от попадания колеса на серьезные неровности. В обычных условиях хороший демпфер должен быть попросту незаметен, он не должен создавать дополнительное сопротивление рулению. Но он должен быть всегда настороже, чтобы в любой момент погасить резкое колебание. Разумеется, погасить колебания полностью демпферу не по силам, но он может существенно снизить их частоту и амплитуду.

Реальные автомобили имеют подвеску, поэтому более нагруженная (нижняя по склону) сторона проседает, а другая приподнимается. Это явление называется креном кузова.

Крен возникает не только на склоне, а при всяком воздействии боковых сил, например, в повороте.

При крене происходит смещение центра масс автомобиля по двум осям: OY и OZ . При этом центр масс поворачивается вокруг центра крена.

Независимо от метода решения дифференциальных уравнений необходимо сначала сформулировать математическую модель (например, систему четырех дифференциальных уравнений с начальным (вынуждающая сила) и граничными (демпфирование, диссипация) условиями). В нашем случае обобщенными координатами останутся так же вертикальное перемещение - y и поворот φ .

Упрощенная схема автомобиля:

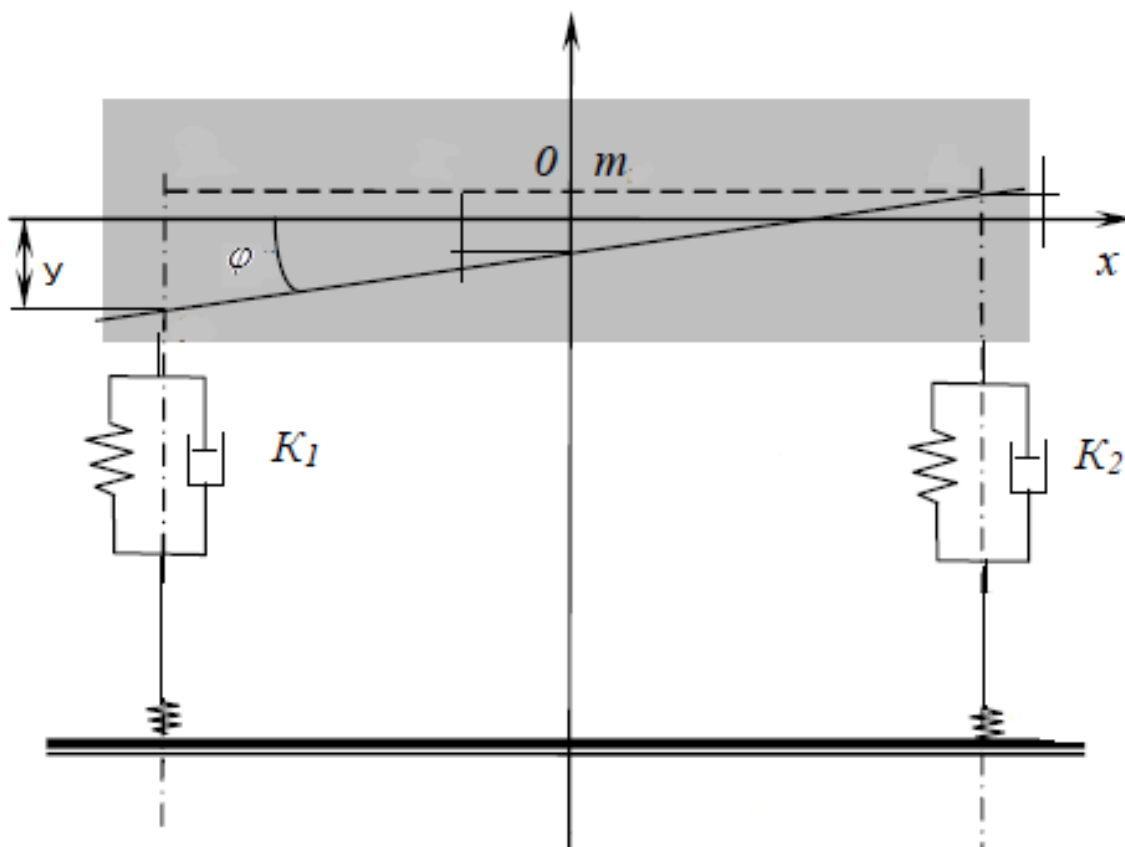


Рис. 8. y - перемещение, φ - угол поворота, K_1, K_2 - жесткости пружины

К потенциальной энергии системы добавится энергия деформации рессор в виде:

$$\varphi' h(G_2 - G_1) \cos^2 \alpha + y'(G_1 + G_2) \cos^2 \alpha$$

$$\varphi' h^2(G_1 + G_2) \cos^2 \alpha + y' h(G_1 - G_2) \cos^2 \alpha$$

Получим суммарную потенциальную энергию в виде:

$$k(1+n)y - kl(n-1)(p-1)\varphi - \varphi' h(G_2 - G_1) \cos^2 \alpha + y'(G_1 + G_2) \cos^2 \alpha$$

$$kl^2(1+n)(1+p^2)\varphi - kl(n-1)(1+p)y + h^2\varphi'(G_1 + G_2) \cos^2 \alpha + hy'(G_1 - G_2) \cos^2 \alpha$$

Общее решение с учетом демпфера:

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 C_i \tilde{C}_i^1 e^{\lambda_i t}$$

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^4 C_i \tilde{C}_i^2 e^{\lambda_i t}$$

где C_i - константы интегрирования определяются из НУ

Где константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k}{m}\right)(n+1) & -\frac{\cos^2 \alpha}{m}(G_1+G_2)-\lambda & \frac{kl}{m}(n-1)(p-1) & h\frac{\cos^2 \alpha}{m}(G_2-G_1) \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{kl(n-1)(p+1)}{J} & -h\frac{\cos^2 \alpha}{J}(G_1-G_2) & -\left(\frac{k}{J}\right)(n+1)(l(p+1))^2 & h\frac{\cos^2 \alpha}{J}(G_1+G_2)-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0$$

Константы можно определить:

$$C_1 = -\frac{-kl + kln + klp - klpn + G_1 h \lambda \cos^2 \alpha - G_2 h \lambda \cos^2 \alpha}{\lambda(k + kn + m \lambda^2 + G_1 \lambda \cos^2 \alpha + G_2 \lambda \cos^2 \alpha)}$$

$$C_2 = -\frac{-kl + kln + klp - klpn + G_1 h \lambda \cos^2 \alpha - G_2 h \lambda \cos^2 \alpha}{(k + kn + m \lambda^2 + G_1 \lambda \cos^2 \alpha + G_2 \lambda \cos^2 \alpha)}$$

$$C_3 = \frac{1}{\lambda}$$

$$C_4 = 1$$

Зададим значения в пакете математики, считаем что угол (демпфирования) и плечо известны. Получим затухающие колебания, исследуем под каким углом разумнее поставить демпфер.

$$l=1;$$

$$p=2;$$

$$n=0.2;$$

$$m=10;$$

$$k=100;$$

$$G_1=90;$$

$$G_2=n \cdot G_1;$$

$$h=1$$

Где h -плечо, G_1 и G_2 параметры демпфирования

При $\alpha = 30^\circ$ получим график перемещении и график поворота.

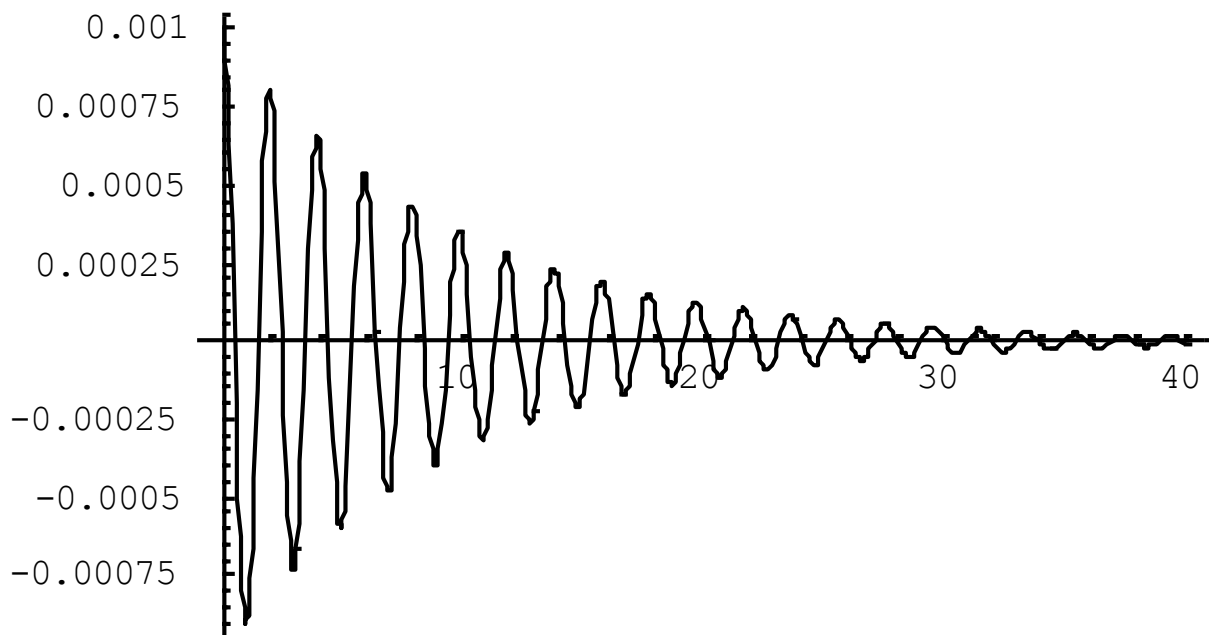


Рис. 9. График перемещения с учетом демпфера; По оси абсцисс – время (с), по оси ординат – перемещение (мм)

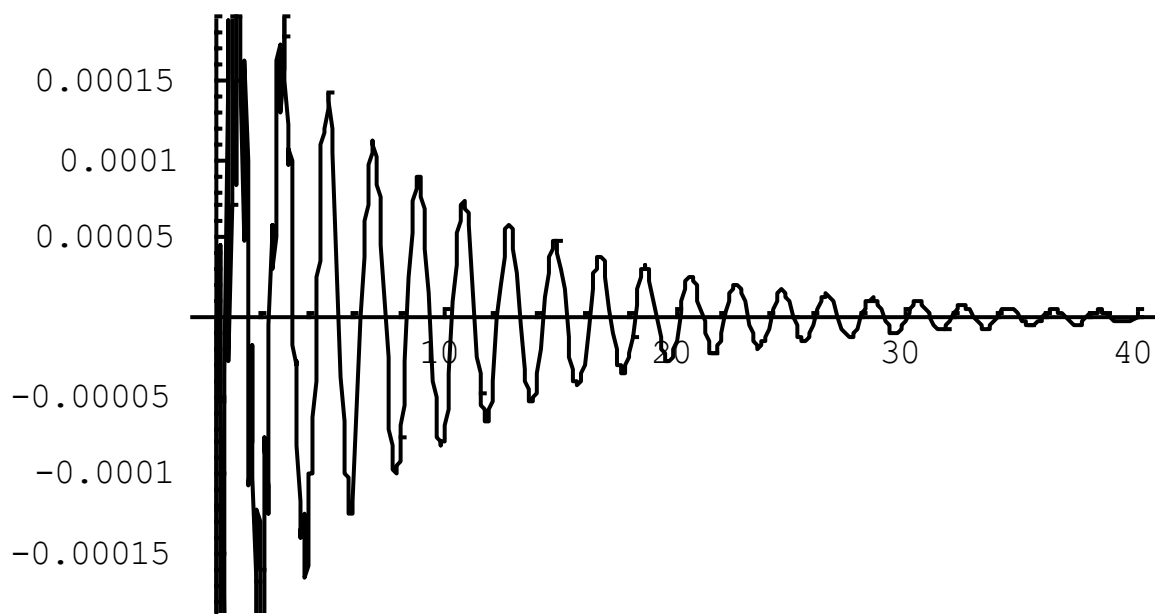


Рис. 10. График поворота с учетом демпфера; По оси абсцисс – время (с) по оси ординат – угол поворота (радиан)

Построим график перемещений, и график поворота зависимости времени затухания от угла.

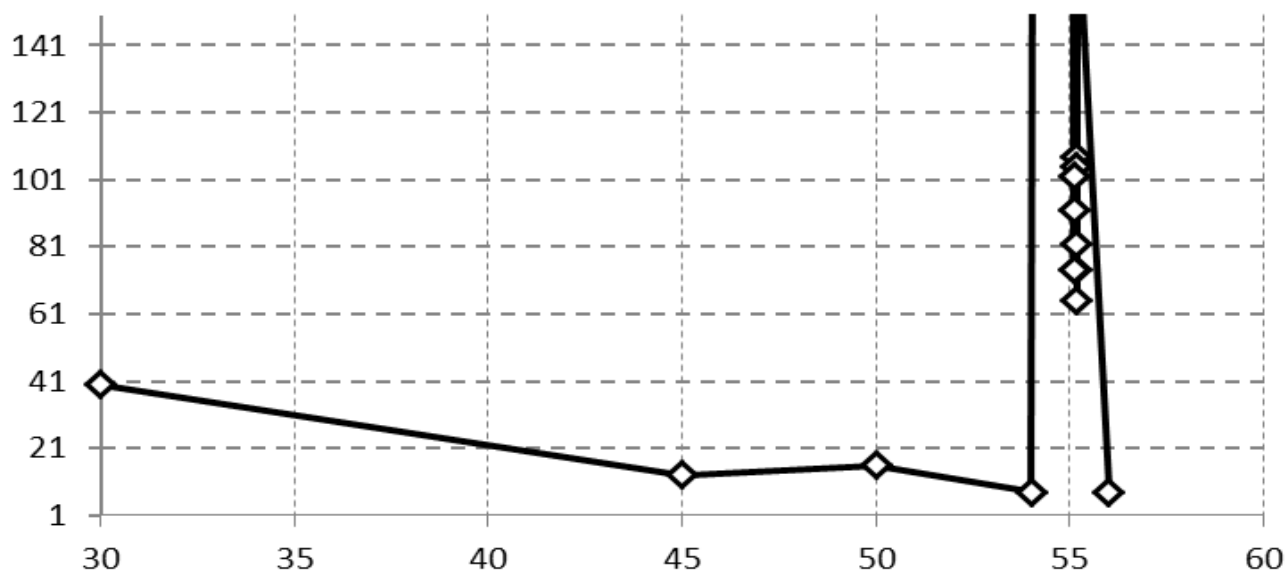


Рис. 11. По оси абсцисс угол демпфера (радиан), по оси ординат время (с)

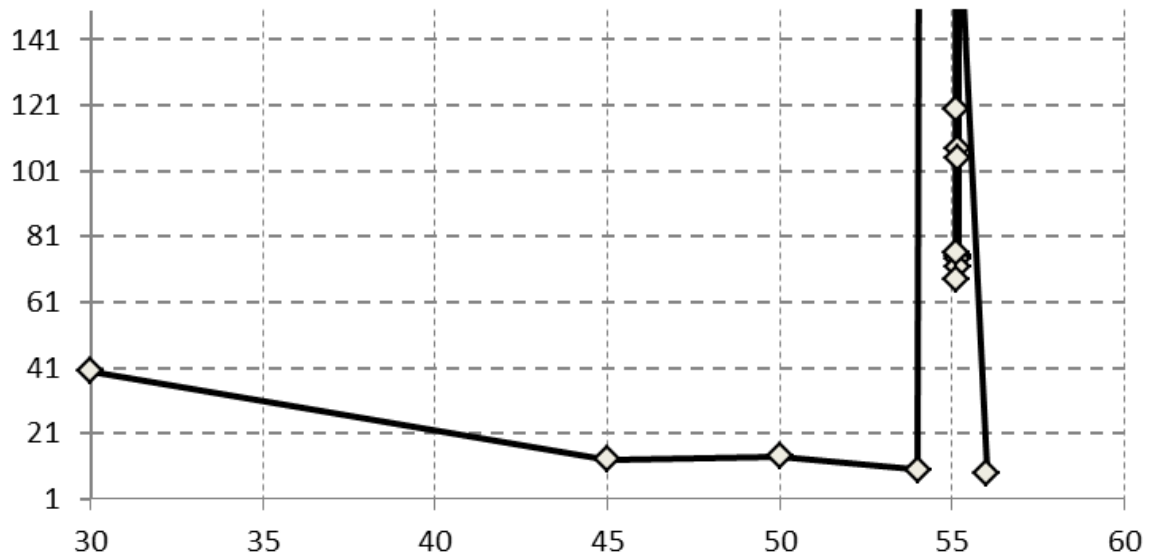


Рис. 12. По оси абсцисс угол демпфера (радиан), по оси ординат время (с)

При α от 55^0 до 55.19^0 время резко увеличивается, то есть при таких параметрах α точки - критические, под таким углом не выгодно ставить демпфер.

Вывод

В работе рассмотрена динамика автомобиля, методом разложения колебаний по продольному и поперечному сечениям. В рамках каждого сечения рассматривалось колебание балки с эксцентриситетом центра масс, разными жесткостями и демпфированием. Суперпозиция этих решений аппроксимирует движение всей подвески. В работе были определены аналитические выражения для закона движения центра масс и угла поворота около него при отсутствии и наличии диссипации.

На основании аналитического решения было получено выражение для определения собственных частот системы при разных жесткостях и наличии эксцентриситета центра масс. Было произведено моделирование установки демпфирующего элемента под заданным углом и определена функция влияния угла установки на время гашения.

Полученные результаты позволяют определить жесткости упругих элементов подвески таким образом, что вероятность возникновения резонанса от внешних воздействий при эксплуатации автомобиля минимальна. На основании выведенной функции влияния возможен оптимальный подбор демпфирующих характеристик подвески, то есть подбор угла установки и механической характеристики стойки.

Список использованной литературы

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики./ Бухгольц Н.Н., С.М.Тарг/ -М. 1965 – 467с.
2. А.Ф.Филиппов. Дифференциальные уравнения. / А.Ф.Филиппов -М. 2000 – 176 с.
3. Яковлева Л. А. Лекции по теоретической механике. / Яковлева Л. А. -М. 2009 – 115 с.
4. Хусаинов А.Ш. Теория автомобиля./ Хусаинов А.Ш Селифонов В.В. –М. 2008. -121 с.
5. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1981.
6. Власов Ю.Л. Влияние расположения груза в кузове грузового автомобиля на устойчивость автомобиля в поворотах / Власов Ю.Л., Морозов Н.А., Бочаров И.А., Гаврилов А.А. // Вестник Оренбургского государственного университета. 2011. № 4 (123). С. 152-156.
7. Катаев Н.Н. Влияние углов установки управляемых колес и увода колес на курсовую устойчивость движения автомобиля // Автотранспортное предприятие. 2011. № 5. С. 45-46.
8. Кабанин П.А. Результаты экспериментальных исследований на устойчивость опытного образца автомобиля нами-3333 / Кабанин П.А., Козловская М.А., Мягков А.Е. // Международный технико-экономический журнал. 2011. № 2. С. 134-139.
9. Санжапов Р.Р. Влияние базы автомобиля на устойчивость движения и управляемость / Санжапов Р.Р., Балакина Е.В. // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2010. Т. 3. № 10 (70). С. 86-89.
10. Макаров В.А. К вопросу улучшения системы измерения параметров, характеризующих устойчивость движения автомобилей категории М1 / Мака-

ров В.А., Волохов А.С., Куплинов А.В. // Автомобильный транспорт (Харьков). 2011. № 29. С. 195-198.

11. Мишута Д.В. Влияние конструктивных параметров автомобиля и его подвески на устойчивость и управляемость штабной машины / Мишута Д.В., Михайлов В.Г. // Вестник Белорусско-Российского университета. 2013. № 3 (40). С. 30-36.

12. Селифонов В.В., Хусаинов А.Ш., Ломакин В.В. Теория автомобиля М.: МГТУ "МАМИ" 2007. С. 102.

13. Туревский И. С. Теория автомобиля М.: Высшая школа. 2005. С. 121

14. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.