УДК 539.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЛЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А.А. Мовчан, С.А. Казарина, А.Е. Машихин, И.В. Мишустин, Е.Б. Саганов, П.А. Сафронов

Аннотация

Рассмотрены варианты систем определяющих соотношений для сплавов с памятью формы (СПФ), различные постановки задач механики деформируемого твердого тела для этих материалов (несвязная, связная, дважды связная, задачи о потере устойчивости, вызванной фазовыми и структурными превращениями, задачи о предельных нагрузках в рамках жестко-фазово-структурного анализа). Получены аналитические и численные решения задач изгиба, кручения, аналогов задач Ламе для фазовых и структурных переходов в трубе из СПФ, задачи устойчивости для стержней, пластин и оболочек из СПФ.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы, определяющие соотношения, краевые задачи, предельные нагрузки.

---

1. Введение

Экспериментальному исследованию термомеханического поведения сплавов с памятью формы (СПФ) [1–3] и формулировке соответствующих определяющих уравнений [4–16] посвящено достаточно большое количество публикаций. Значительно хуже освещен в научной литературе вопрос о постановках и решении краевых задач механики для СПФ [17–21]. Большинство опубликованных решений сводится к теоретическому моделированию процессов, происходящих в опытах, как правило, при однородном напряженном и деформированном состоянии, и поэтому решением краевых задач по сути не является. С другой стороны, в сопровождающих документах к некоторым коммерческим пакетам прикладных программ приводятся решения для тел из СПФ сложной конфигурации в отсутствие четкой постановки проблемы и результатов для тестовых задач, которые убедительно свидетельствовали бы о достоверности получаемых решений. В настоящей работе приводятся различные постановки задач механики для СПФ и некоторые аналитические решения, которые могут использоваться для тестирования численных методов решения краевых задач для СПФ.

2. Система определяющих соотношений

Моделирование неупругого деформирования СПФ осложняется тем, что для этих материалов существует, помимо обычного пластического, еще два механизма изменения неупругой деформации, связанных с термоупругим фазовым и со структурным переходами, которые описываются различными законами, но при этом тесно связаны между собой. Попытки построить модель неупругого деформирования СПФ как аналог теории пластического течения с единой поверхностью нагружения как для фазовых, так и для структурных деформаций [22] не приводят к успеху хотя бы потому, что для явления накопления структурных деформаций деформационное упрочнение характерно, а для явления накопления фазовых деформаций не характерно [3]. Поэтому аналоги теории пластического течения имеет смысл строить только для моделирования развития структурных деформаций. Некоторые варианты систем определяющих соотношений для СПФ такого типа приведены в [11, 12, 14–16]. Они различаются в основном сложностью в моделировании структурного механизма развития неупругих деформаций. В простейшем случае считается [11–14], что все мартенситные элементы представительного объема при выполнении единых для всего объема условий активного нагружения испытывают структурное превращение и соответствующий рост неупругой деформации, описываемый аналогом теории пластичности с изотропным упрочнением. В результате получается, что приращение структурной деформации пропорционально значению параметра объемной доли мартенситной фазы q. В более сложном варианте [15] учитывается тот факт, что в общем случае взаимодействия между фазовыми и структурными механизмами деформирования СПФ поверхности нагружения различных мартенситных элементов представительного объема, вообще говоря, различны. В предположении об изотропном характере упрочнения и совпадении значения интенсивности напряжений во всех мартенситных элементах представительного объема (гипотеза об осреднении по Рейсу) получается, что приращение структурных деформаций пропорционально объемной доли тех мартенситных элементов в представительном объеме q_{st}, которые в данный момент испытывают структурное превращение. Соответствующая таким гипотезам система определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [15] сводится к следующим соотношениям:

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{phst}} = \frac{1}{3}\,\varepsilon_0 q\delta_{ij} + e_{ij}^{\mathrm{phst}}, \quad de_{ij}^{\mathrm{phst}} = de_{ij}^{\mathrm{ph}} + de_{ij}^{\mathrm{st}};$$

$$de_{ij}^{\mathrm{ph}} = \omega_{ij}\,dq, \quad \omega_{ij} = \frac{3}{2}\,\rho_D\,\frac{s_{ij}}{\sigma_i}\,F_1\left(\sigma_i\right)\left(1 - qf(q)\right) + f(q)e_{ij}^{\mathrm{phst}}; \tag{1}$$

$$de_{ij}^{\mathrm{st}} = \frac{3}{2}\,\rho_D\,\frac{s_{ij}}{\sigma_i}\,q_{\mathrm{st}}\,dF_2(\sigma_i). \tag{2}$$

Здесь ρ_D – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового превращения рассматриваемого СПФ; de_{ij}^{ph}, de_{ij}^{st} – приращения девиатора фазово-структурной деформации e_{ij}^{phst} за счет фазового и структурного переходов соответственно, σ_{ij}, s_{ij}, σ_i – тензор, девиатор и интенсивность напряжений, ε_0 – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения, $F_1(\sigma_i)$ – материальная функция, трактуемая как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное фазовое состояние), $F_2(\sigma_i)$ – аналогичная функция, но для мартенситного фазового состояния, $f(q)$ – материальная функция, которая для случая прямого фазового превращения из аустенита в мартенсит удовлетворяет неравенству $0 \le f(q) \le 1/q$; для случая обратного превращения $f(q) = 1/q$. Величина $q_{\mathrm{st}} = 0$, если $d\sigma_i \le 0$ или $\sigma_i < \sigma_i^{\max}$, где $\sigma_i^{\max}$ – максимальное значение интенсивности напряжений за всю историю существования мартенситной части рассматриваемого представительного объема СПФ. В случае если на протяжении всего процесса прямого превращения из аустенитного фазового состояния выполняется условие $d\sigma_i > 0$ и $\sigma_i = \sigma_i^{\max}$, то $q_{\mathrm{st}} = q$, то есть структурный переход происходит во всей мартенситной части представительного объема. Алгоритм вычисления q_{st} для промежуточных случаев описан в [15].

Для описания структурных деформаций может быть использована более сложная модель, учитывающая как изотропное, так и трансляционное упрочнение, причем в качестве параметра изотропного упрочнения используется максимальное значение интенсивности неупругих (фазово-структурных) деформаций за всю историю существования рассматриваемого мартенситного элемента [16]. В рамках такого предположения, в отличие от известных аналогов, возможны этапы чисто трансляционного и комбинированного упрочнения, причем при переходе с первого из этих этапов на второй касательный модуль увеличивается скачком. В этом случае выражение для приращения структурных деформаций (2) существенно усложняется, поскольку теперь уже различные мартенситные элементы представительного объема СПФ будут иметь, вообще говоря, различные касательные модули.

Определяющие процесс неупругого деформирования соотношения (1), (2) представляют собой систему уравнений в приращениях, которые в общем случае не могут быть проинтегрированы без знания пути термомеханического нагружения, то есть не сводятся к конечным алгебраическим соотношениям. Однако для этой системы установлено следующее положение [12, 14]. Пусть процесс термомеханического нагружения СПФ начинается либо из полностью аустенитного фазового состояния, либо из состояния хаотического (полностью сдвойникованного) мартенсита и состоит из фрагментов прямого или обратного фазового превращения, сопровождающегося или нет структурным переходом. Возможно наличие фрагментов, на которых происходит только структурный переход без фазового. Для всех точек процесса отсутствует разгрузка: $d\sigma_i \geq 0$, причем везде

$$q_{\mathrm{st}} = q. \tag{3}$$

Имеет место пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений: $s_{ij}/\sigma_i = \mathrm{const}$. Выполняется равенство

$$F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i) = F(\sigma_i). \tag{4}$$

В случае выполнения всех этих условий система уравнений в приращениях (1), (2) может быть проинтегрирована независимо от пути термомеханического нагружения, что приводит к следующему алгебраическому соотношению, связывающему напряжения, деформации и параметр фазового состава

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{phst}} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma_i}\rho_D q F(\sigma_i). \tag{5}$$

В случае, если речь идет о процессе прямого превращения при неизменном значении интенсивности напряжений σ_i, то для справедливости (5) выполнение условий (3), (4) не обязательно, и в этом случае в (5) следует считать $F(\sigma_i) = F_1(\sigma_i)$. Если речь идет о процессе обратного превращения, сопровождающегося или нет структурным переходом, то для справедливости (5) выполнение условия (4) также не обязательно, причем в (5) следует считать $F(\sigma_i) = F_2(\sigma_i)$. Такое же положение справедливо для процесса, сводящегося только к структурному превращению (без фазового), причем в данном случае в правой части (5) следует учитывать только второе слагаемое. Из (5) следует необходимое для дальнейшего соотношение

$$\varepsilon_i^{\mathrm{phst}} = \rho_D q F(\sigma_i). \tag{6}$$

Функции F_1, F_2 представляются в виде зависимости от безразмерного аргумента $F_k(\sigma_i) = \Phi_k(\sigma_i/\sigma_{0k})$, $k = 1, 2$, где σ_{0k} – параметры материала. Для Φ_1 можно использовать функцию распределения Лапласа

$$z = \Phi_1(x) = \mathrm{erf}(x/\sqrt{2}), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp(-t^2)\,dt.$$

Для функции Φ_2 лучше подходит функция распределения Вейбулла

$$z = \Phi(x) = 1 - \exp\left(-x^{\alpha}\right), \quad \alpha \geq 1.$$

Все перечисленные выше функции распределения определены для неотрицательных значений аргумента, являются непрерывными, монотонно возрастающими. Поэтому они имеют монотонно возрастающие обратные функции Φ^{-1}. При этом $\Phi(0) = \Phi^{-1}(0) = 0$.

Определяющие соотношения для процесса деформирования дополняются уравнениями для параметра фазового состава q:

$$q = 0.5\left(1 - \cos\left(\pi t\right)\right), \tag{7}$$

$$t = \frac{M_s^{\sigma} - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^{\sigma} = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}s_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S}$$

и

$$t = 1 - \frac{T - A_s^{\sigma}}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^{\sigma} = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}s_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S},$$

$$Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2\left(K_1 - K_2\right)}{6K_1K_2} + \frac{\sigma_i^2\left(G_1 - G_2\right)}{6G_1G_2}$$

для прямого и обратного фазового превращения соответственно. Здесь K_1, K_2 – значения утроенного объемного модуля для аустенитного и мартенситного состояний СПФ, G_1, G_2 – соответствующие величины модуля сдвига. Связное уравнение энергетического баланса имеет вид [3]

$$k_q\Delta T = C_{\sigma}\dot{T} + T\alpha\dot{\sigma}_{kk} - \left(\Delta U + \sigma_{kk}\varepsilon_0 + \omega_{ij}s_{ij}\right)\dot{q} - \rho_D q_{\mathrm{st}}\psi(\sigma_i)\sigma_i\dot{\sigma}_i. \tag{8}$$

Здесь ΔU, ΔS – объемные плотности энтальпии и энтропии фазового перехода, k_q, C_{σ}, α – коэффициент теплопроводности, теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении и коэффициент температурного расширения, которые считаются не зависящими от параметра фазового состава, $\psi(\sigma_i) = dF_2(\sigma_i)/d\sigma_i$.

В случае справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения формулы (7) упрощаются:

$$T = M_s^0 - \theta_0\left(M_s^0 - M_f^0\right), \quad \theta_0 = \frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - 2q\right) - \theta_{\sigma}; \tag{9}$$

$$\theta_{\sigma} = \frac{\rho_D\sigma_i F\left(\sigma_i\right) + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)},$$

а в формуле (8) слагаемое $\omega_{ij}s_{ij}$ следует заменить на $\rho_D\sigma_i F\left(\sigma_i\right)$.

Различаются несвязная, связная и дважды связная постановки задач термомеханики для СПФ. В рамках несвязной постановки не учитывается влияние напряженно-деформированного состояния на параметр фазового состава (7), который оказывается зависящим только от температуры. В уравнении энергетического баланса (8) считаются равными нулю все слагаемые, содержащие компоненты тензора напряжений или скорости изменения этих компонент. В результате каждая из трех задач: определение изменения фазового состава, определение изменения напряженно-деформированного состояния и определение изменения температурного поля – может решаться последовательно и независимо. В рамках связной постановки учитывается влияние действующих напряжений на параметр фазового состава, и соответствующие уравнения должны решаться совместно. Изменение температуры считается известным заранее, и уравнение (8) не решается. В рамках дважды связной постановки используются все приведенные выше системы определяющих соотношений, причем решаться они должны совместно.

3. Жестко-фазово-структурный анализ

Фазово-структурные деформации в СПФ на порядок и более превышают упругие деформации, соответствующие тем же напряжениям. В результате возникает приближенная постановка краевых задач для СПФ, являющаяся аналогом жестко-пластической постановки в теории пластичности, в рамках которой пренебрегают упругими деформациями по сравнению с фазово-структурными. В рамках такого упрощения и дополнительного предположения о независимости величины объемной доли мартенситной фазы от координат удалось получить аналитические решения ряда связных задач о деформировании некоторых элементов из СПФ, претерпевающих прямое термоупругое мартенситное фазовое превращение под действием постоянных нагрузок.

Задачи изгиба балок решаются в соответствии с гипотезами Бернулли – Эйлера. Влияние касательных напряжений в сечении балки и поперечных нормальных напряжений на развитие фазово-структурных деформаций не учитывается, рассматриваются лишь продольные нормальные напряжения $|\sigma| = \sigma_i$. Получить аналитическое решение задачи о прямом фазовом превращении балки из СПФ, находящейся под действием постоянного изгибающего момента, удается полуобратным методом в рамках предположения о равномерном распределении объемной доли мартенситной фазы по сечению в каждый момент рассматриваемого процесса. Требуемое для этого распределение температуры по сечению (в связной постановке) находится после определения напряженного состояния.

Объемный эффект реакции термоупругого мартенситного превращения при условии постоянства q по сечению не влияет на изгибное состояние и поэтому не учитывается. Деформации поперечного сдвига не учитываются. Поэтому $\varepsilon_i = |\varepsilon|$, где ε – продольная деформация. Предполагается, что продольная составляющая внешней нагрузки отсутствует. Поэтому в силу гипотезы плоских сечений

$$\varepsilon = \kappa z, \tag{10}$$

где κ – кривизна нейтральной оси балки, z – поперечная координата, отсчитываемая от нейтральной линии.

Ниже задача о прямом превращении в балке из СПФ, находящейся под действием постоянного изгибающего момента, решается при условии пренебрежения упругими деформациями. Сечение считается симметричным относительно нейтральной плоскости. Материальную функцию $\Phi(x)$ можно доопределить для отрицательных значений x нечетным образом: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Тогда для продольного напряжения σ как в растянутой, так и в сжатой зоне согласно (6) и (10) справедливо выражение

$$\sigma = \sigma_0 \Phi^{-1}\left(\kappa z / (q\rho_D)\right). \tag{11}$$

В силу того, что Φ обладает свойствами функции распределения, аргумент функции Φ^{-1} (11) после ее доопределения на отрицательную область должен находится в пределах $-1 < \kappa z/(q\rho_D) < 1$.

Умножая (11) на z и интегрируя по площади сечения, можно получить

$$M = \sigma_0 \int\limits_F \Phi^{-1}\left(\kappa z/(q\rho_D)\right) z\, dz. \tag{12}$$

Соотношение (12) дает искомую связь кривизны балки κ и изгибающего момента M. Для стержня прямоугольного поперечного сечения $2a \times b$ (a – полутолщина по высоте сечения) безразмерный изгибающий момент μ согласно (12) определяется по формуле

$$\mu = \frac{M}{2h^2 b\sigma_0} = \int\limits_0^1 \Phi^{-1}\left(\xi y/(q\rho_D)\right)\xi\, d\xi. \tag{13}$$

Разрешая уравнение (13) относительно безразмерной кривизны $y = \kappa h$, можно для каждого значения $q \in [0,1]$ и заданного значения момента μ найти величину кривизны при прямом превращении до значения объемной доли мартенсита q.

Можно доказать, что в рамках рассматриваемой постановки, в условиях пренебрежения упругими деформациями, кривизна в процессе прямого превращения под действием постоянного момента возрастает пропорционально q. Действительно, в силу монотонного возрастания функции Φ^{-1} по ее аргументу правая часть (13) монотонно возрастает, а левая – постоянна. Следовательно, для заданного значения μ уравнение (13) может иметь для величины $y/(\rho_D q)$ только единственное решение, которое далее обозначается как $\lambda = \lambda(\mu)$. Следовательно, решение (13) для кривизны записывается в виде

$$y = \lambda(\mu)\rho_D q, \tag{14}$$

что и требовалось доказать. Определяющая решение для кривизны функция $\lambda(\mu)$ находится из уравнения

$$\mu = \int\limits_0^1 \Phi^{-1}\left(\lambda\xi\right)\xi\, d\xi, \tag{15}$$

и при использовании в качестве Φ функции Лапласа не зависит от параметров материала.

Подстановка (14) в (11) для напряжений дает

$$\sigma = \sigma_0 \Phi^{-1}\left(\lambda\xi\right). \tag{16}$$

Согласно (16) напряжения распределены по высоте сечения нелинейно, не меняются в процессе фазового перехода и не зависят от параметра ρ_D.

Функция Φ^{-1} монотонно возрастает. Область определения ее аргумента ограничена сверху значением 1, причем $\lim\limits_{x\to 1} \Phi^{-1}(x) = +\infty$. Следовательно, величина λ в правой части (15) ограничена сверху значением 1, а множество всех величин μ (15) будет содержать свою точную верхнюю грань

$$\mu \le \mu^* = \int\limits_0^1 \Phi^{-1}(\xi)\xi\, d\xi \tag{17}$$

при условии, что стоящий в правой части несобственный (на верхнем пределе) интеграл сходится. Обосновать сходимость этого интеграла можно при достаточно широких предположениях о свойствах функции Φ. Поскольку подынтегральная функция (17) неотрицательна и для всех значений ξ из области интегрирования $\Phi^{-1}(\xi)\xi \le \Phi^{-1}(\xi)$, то интеграл в (17) будет сходиться, если сходится интеграл

$$I = \int_0^1 \Phi^{-1}(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

Произведя в (18) замену $\xi = \Phi(\eta)$, получаем

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \eta\, d\Phi(\eta).$$

Таким образом, величина I является математическим ожиданием случайной величины интенсивности микронапряжений. Если это математическое ожидание существует, то и интеграл (17) сходится.

Предельному значению μ^* соответствует решение уравнения (15) $\lambda = 1$. Для такой нагрузки максимальное значение безразмерной кривизны y, или, что то же, фазово-структурная деформация крайних волокон стержня при полном прямом превращении ($q = 1$), согласно (14), равны ρ_D, то есть максимально возможному значению фазово-структурной деформации СПФ. Дальнейшее увеличение изгибающего момента не может привести к росту накапливаемой фазово-структурной деформации. Таким образом предельная нагрузка μ^* соответствует невозможности дальнейшего деформирования СПФ по фазово-структурному механизму. Согласно (17) при $\mu = \mu^*$ напряжение в крайних волокнах стержня становится бесконечным (хотя соответствующий изгибающий момент имеет конечное значение).

Известно, что при достаточно высоких напряжениях в СПФ возможно развитие не только фазово-структурных, но и обычных пластических деформаций, которые начинают развиваться в случае превышения интенсивностью напряжений величины σ_s дислокационного предела текучести СПФ. Следует отметить, что дислокационные пределы текучести аустенитной и мартенситной фаз несколько различаются. Их величины зависят также от температуры. В настоящей работе эти зависимости не учитываются. Известно, что развитие макропластических деформаций существенно ухудшает функциональные свойства СПФ (уменьшают величину деформации, которая может накапливаться при прямом превращении и сниматься при обратном фазовом переходе). В связи с этим можно ввести предельные нагрузки второго типа, соответствующие достижению интенсивностью напряжений при фазовом или структурном переходе значения σ_s. Согласно (11) значение $\lambda = \lambda_s$, соответствующее достижению напряжением в крайнем волокне при полном прямом превращении значения предела текучести, определяется по формуле

$$\lambda_s = \Phi(s), \quad s = \sigma_s/\sigma_0. \tag{19}$$

Подстановка (19) в (15) дает выражение для предельного значения момента μ_s рассматриваемого типа

$$\mu_s = \int_0^1 \Phi^{-1}(\xi\Phi(s))\,\xi\,d\xi. \tag{20}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_s = \mu^*$. Значение безразмерной кривизны в процессе прямого превращения под действием предельного момента μ_s (20) определяется согласно (14) по формуле $y_s = \rho_D q \Phi(s)$.

Таким образом, при условии пренебрежения упругими деформациями полуобратным методом в предположении о равномерном распределении параметра фазового состава по поперечной координате получено аналитическое решение связной задачи о прямом превращении в стержне из СПФ, находящемся под действием постоянного изгибающего момента.

Решена задача о прямом превращении под действием постоянного крутящего момента в толстостенной трубке из СПФ кольцевого поперечного сечения с внутренним радиусом c и внешним радиусом a. Принимаются обычные кинематические гипотезы упругого кручения [21] (в том числе предположение об отсутствии депланации для круглых поперечных сечений)

$$\gamma_{xz} = -\omega y, \quad \gamma_{yz} = \omega x \tag{21}$$

(остальные деформации равны нулю). В (21) ω – угол закручивания θ на единицу длины s оси трубки $\omega = d\theta/ds$, γ_{xz}, γ_{xz} – деформации сдвига в декартовой системе координат, ось z которой направлена вдоль оси трубки, а плоскость (xy) перпендикулярна этой оси. В этом случае в цилиндрической системе координат (r, φ, z) отличны от нуля лишь деформация сдвига и соответствующие касательные напряжения

$$\gamma_{\varphi z} = \omega r = \sqrt{3}\, \varepsilon_i, \qquad (22)$$
$$\tau_{\varphi z} = \sigma_i / \sqrt{3}.$$

Для крутящего момента M из (22) и (6) получаем

$$M = 2\pi \int\limits_c^a \tau_{\varphi z} r^2\, dr = \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} \int\limits_c^a \Phi^{-1}\left(\omega r/(q\sqrt{3}\rho_D)\right) r^2 dr$$

или после введения безразмерных крутящего момента m и крутки β и замены переменных $r = a\eta$

$$m = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int\limits_\zeta^1 \Phi^{-1}(\beta\eta)\eta^2\, d\eta, \quad m = \frac{M}{\sigma_0 a^3}, \quad \beta = \frac{\omega a}{\sqrt{3}\rho_D q}, \quad \zeta = \frac{c}{a}. \qquad (23)$$

Уравнение (23) служит для определения зависимости крутки при прямом термоупругом фазовом превращении от величины приложенного крутящего момента. Так же, как и для случая изгиба, доказывается, что если решение (23) для β, соответствующее данному значению m, существует, то оно единственно: $\beta = \beta(m)$. В результате из последнего соотношения (23) получаем $\omega = \sqrt{3}\rho_D q \beta(m)/a$, то есть крутка в процессе прямого фазового превращения под действием постоянного крутящего момента меняется пропорционально параметру фазового состава. Для касательного напряжения согласно второй формуле (22) и (6) имеем

$$\tau_{\varphi z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \Phi^{-1}(\beta\eta). \qquad (24)$$

Согласно (24) касательное напряжение нелинейно зависит от радиальной координаты. В процессе фазового перехода перераспределения касательных напряжений по сечению не происходит.

В силу ограничений, связанных с областью определения функции $\Phi^{-1}(x)$, относительная крутка ограничена сверху: $\beta \le 1$. В соответствии с (23) крутящий момент монотонно возрастает с ростом β. Максимально возможное значение момента m^* получается из (23) при $\beta = 1$ и равно

$$m^* = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int\limits_\zeta^1 \Phi^{-1}(\eta)\, \eta^2\, d\eta. \qquad (25)$$

Интеграл (25) в окрестности верхнего предела опять является несобственным, однако для его сходимости достаточно существование математического ожидания для случайной величины интенсивности микронапряжений. Действительно, следует заметить, что в силу неравенства $\eta \le 1$ интеграл (25) сходится, если сходится интеграл (18). Вопрос о сходимости (18) исследован ранее. Предельное значение m^* (25) соответствует дальнейшей неспособности материала стержня деформироваться по фазово-структурному механизму. При $m = m^*$ интенсивность фазово-структурной деформации на внешней поверхности стержня при полном прямом превращении достигает предельного значения ρ_D, а интенсивность напряжений стремится к бесконечности.

Значение параметра крутки β_s, соответствующее началу пластического течения на внешней поверхности стержня при полном прямом превращении, определяется по формуле $\beta_s = \Phi(s)$. Соответствующее предельное значение безразмерного крутящего момента равно

$$m_s = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int\limits_{\zeta}^{1} \Phi^{-1}\left(\eta\Phi(s)\right)\eta^2\, d\eta,$$

а касательные напряжения в предельном состоянии распределены по сечению в соответствии с формулой

$$\tau_{\varphi z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\,\Phi^{-1}(\eta\Phi(s)).$$

Далее приводятся результаты решения жестко-фазово-структурной осесимметричной задачи о толстостенной цилиндрической трубе из СПФ с внутренним радиусом $r = a$ и внешним радиусом $r = b$, материал которой испытывает прямое термоупругое фазовое превращение под действием постоянных внешнего p_a и (или) внутреннего p_b давлений. Задача решена в предположении о выполнении условий плоской деформации $\varepsilon_z = 0$. Кроме того, пренебрегаем объемным эффектом реакции фазового перехода. Используются следующие безразмерные переменные:

$$\beta = b/a, \quad \eta = r/a, \quad P_a = p_a/\sigma_0, \quad P_b = p_b/\sigma_0, \quad P = |P_a - P_b|,$$

$$v = u/r, \quad s_r = \sigma_r/\sigma_0, \quad s_\varphi = \sigma_\varphi/\sigma_0, \quad s_i = \sigma_i/\sigma_0.$$

Здесь u – радиальное смещение, σ_r, σ_φ – радиальные и кольцевые напряжения.

Разрешающее уравнение задачи, служащее для нахождения параметра γ, через который определяются все искомые величины, имеет вид

$$\int\limits_{1}^{\beta} \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{\eta^2}\right)\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\sqrt{3}P}{2}.$$

Для безразмерных напряжений справедливы соотношения

$$s_i = \psi^{-1}\left(\frac{\gamma}{\eta^2}\right), \quad s_r = -P_a \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{1}^{\eta}\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{\xi^2}\right)\frac{d\xi}{\xi}, \quad s_\varphi = s_r \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{\eta^2}\right).$$

Безразмерные радиальное смещение и деформации определяются по формулам

$$v = \pm Dq\eta^{-1}, \quad \varepsilon_\varphi = -\varepsilon_r = \pm Dq\eta^{-2}, \quad D = \sqrt{3}\rho_D\gamma/2, \quad \varepsilon_i = \rho_D q\gamma\eta^{-2}.$$

Здесь и выше верхний знак соответствует случаю, когда внутреннее давление больше внешнего, а нижний – противоположной ситуации.

Предельное значение нагрузки P^*, соответствующее исчерпанию возможности деформирования по фазово-структурному механизму, определяется по формуле

$$P^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{1}^{\beta}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{d\eta}{\eta}.$$

Сходимость соответствующего несобственного интеграла доказывается аналогично случаям изгиба или кручения. Предельное значение нагрузки P_s, соответствующее началу пластического деформировании, задается формулой

$$P_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{1}^{\beta}\Phi^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{\eta^2}\right]\frac{d\eta}{\eta}.$$

Все полученные выше в рамках жестко-фазово-структурной постановки и в предположении о равномерном распределении q по материалу решения связных задач о прямом термоупругом фазовом превращении обладают следующими общими свойствами. Напряженное состояние не меняется в процессе фазового перехода. Следовательно, заведомо выполнены все условия справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения, и переход от определяющих соотношений в приращениях (1,2) к конечным соотношениям (5) правомерен. Деформации и смещения пропорциональны значению объемной доли мартенситной фазы q. Распределение температуры по материалу и ее изменение со временем, соответствующие решению связной задачи, определяются по формулам (9). Графики зависимости температуры от координат для различных значений q получаются путем сдвига вдоль оси температур на величину

$$\Delta T = -\frac{M_s^0 - M_f^0}{\pi} \arccos(1-2q)$$

графика зависимости $T = M_s^0 + \theta_\sigma \left(M_s^0 - M_f^0\right)$, соответствующего $q = 0$, поскольку в рамках данной постановки напряжения, а значит, и величина θ_σ не зависят от q.

Множество возможных величин внешних нагрузок ограничено сверху предельными значениями, выражающимися через сходящиеся несобственные интегралы. Предельные нагрузки, соответствующие началу пластического деформирования, также выражаются в квадратурах.

Учет упругих деформаций усложняет решение указанных выше задач. В этом случае зависимость деформаций и смещений от параметра фазового состава с большой степенью точности может считаться линейной. В процессе фазового перехода напряжения меняются, однако решения для напряжений, соответствующие полному прямому превращению, незначительно отличаются от аналогичных, полученных в условии пренебрежения упругими деформациями.

В [15, 21] приведены решения связных задач о прямом превращении под действием постоянных изгибающего или крутящего моментов для элементов из СПФ в альтернативной постановке, когда предполагается равномерное распределение по материалу не объемной доли мартенситной фазы, а температуры. Здесь уже наблюдается существенное перераспределение напряжений в процессе фазового перехода, причем имеет место не только возрастание, но и убывание интенсивности напряжений. Поэтому положение об активных процессах пропорционального нагружения не выполняется, приходится использовать определяющие соотношения в приращениях (1), (2). Такая постановка оказалась существенно сложнее, решения получены численными методами. Установлено, что в процессе прямого фазового перехода слои материала, близкие к нейтральной плоскости (при изгибе) или к оси кручения разгружаются до весьма малых значений напряжения, а внешние слои существенно перегружаются. Учет структурного превращения, которое происходит, несмотря на постоянство внешней нагрузки, существенно меняет получаемое решение.

4. Решение задач устойчивости

Явление потери устойчивости при нагружении элементов из СПФ в режиме сверхупругости было изучено в [23–25] для стержней и в [26, 27] для цилиндрических оболочек из СПФ. В [28, 29] исследовано явление потери устойчивости при нагружении стержней из СПФ в режиме мартенситной неупругости. В [2, 29] было экспериментально установлено, что как фазовые, так и структурные превращения могут вызывать потерю устойчивости тонкостенных элементов из СПФ. Предложена система гипотез (концепций) [30–35], в рамках которых эти явления могут быть адекватно описаны. На примере конкретных задач для стержней [35], пластин [36] и оболочек из СПФ [37] показано, что даже в случае прямого фазового превращения под действием постоянных напряжений, когда в невозмущенном процессе структурного превращения не происходит, при анализе возмущенного процесса необходимо учитывать возможность структурного перехода. В случае анализа потери устойчивости стержня при структурном переходе установлено, что критическая сила при переходе его уменьшающейся длины через некоторое характерное значение может скачком весьма существенно увеличиваться. Аналогичный эффект повышенного сопротивления коротких стержней из СПФ потере устойчивости обнаружен в [25, 28]. В [38, 39] рассмотрены задачи о потере устойчивости ленты и арки-полоски из СПФ. В [18, 19] численно исследовались осесимметричные формы потери устойчивости пластин и оболочек из СПФ.

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ (проект № 14-01-00189).

Summary

A.A. Movchan, S.A. Kazarina, A.E. Mashikhin, I.V. Mishustin, E.B. Saganov, P.A. Safronov. Boundary Value Problems of Mechanics for Shape Memory Alloys.

The variants of constitutive equation systems for shape memory alloys (SMAs) are considered. Different statements of boundary value problems of deformable solids mechanics for these materials (non-coupled, coupled, and twice-coupled problems; stability problems caused by phase and structural transitions; limit load problems in the framework of solid-phase structural analysis) are discussed. Some results of the analytical and numerical solutions of bending and twisting problems, analogs of the Lame problems for phase and structural transitions in a SMA tube, as well as stability problem for rods, plates, and shells made of SMAs are presented.

Keywords: shape memory alloys, constitutive equations, boundary value problems, limit loads.

Литература

1. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. / Под ред. В.А. Лихачева. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – Т. 2. – 374 с.

2. *Мовчан А.А., Казарина С.А.* Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 6. – С. 82–89.

3. *Мовчан А.А., Казарина С.А.* Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физ. мезомеханика. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 105–116.

4. *Tanaka K.* A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys // J. Pressure Vessel Technol. – 1990. – V. 112, No 2. – P. 158–163.

5. *Liang C., Rogers C.A.* One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1990. – V. 1, No 2. – P. 207–234.

6. *Graesser E.J., Cozzarelli F.A.* A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1994. – V. 5, No 1. – P. 78–89.

7. *Brinson L.S., Huang M.S.* Simplifications and comparisons of shape memory alloy constitutive models // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1996. – V. 7, No 1. – P. 108–114.

8. *Boyd J.G., Lagoudas D.C.* A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy // Int. J. Plast. – 1996. – V. 12, No 6. – P. 805–842.

9. *Волков А.Е., Сахаров В.Ю.* Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // Изв. РАН. Сер. физ. – 2003. – Т. 67, № 6. – С. 845–851.

10. *Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S.* About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions // Int. J. Solids Struct. – 2006. – V. 43, No 3–4. – P. 613–626.

11. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 3. – С. 118–130.

12. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Тант Зин Аунг.* Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы – микромеханика, феноменология, термодинамика // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 4. – С. 180–194.

13. *Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S.A.* A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings // Int. J. Plast. – 2010. – V. 26, No 7. – P. 976–991.

14. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л.* Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 44–56.

15. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 37–53.

16. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2015. – № 2. – С. 78–95.

17. *Какулия Ю.Б., Шарыгин А.М.* Численное моделирование напряжений и деформаций в толстостенной трубе из материала с памятью формы // Журн. функцион. материалов. – 2007. – № 8. – С. 303–313.

18. *Шкутин Л.И.* Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // Прикл. механика и техн. физика. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 163–171.

19. *Шкутин Л.И.* Анализ осесимметричных деформаций пластин и оболочек в термоцикле фазовых превращений // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 204–210.

20. *Мовчан А.А., Машихин А.Е.* Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 235–247.

21. *Саганов Е.Б.* Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 454–468.

22. *Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зин Аунг* Аналог теории пластичности для описания деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – № 9. – С. 2–6.

23. *Rahman M.A., Qiu J., Tani J.* Buckling and postbuckling characteristics of the superelastic SMA columns // Int. J. Solids Struct. – 2001. – V. 38, No 50–51. – P. 9253–9265.

24. *Rahman M.A., Qui J., Tani J.* Buckling and postbuckling characteristics of the superelastic SMA columns - numerical simulation // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2005. – V. 16, No 9. – P. 691–702.

25. *Rahman M.A., Tani J.* Postbuckling characteristics of the short superelastic shape memory alloy columns – experiment and quantitative analysis // Int. J. Appl. Mech. Eng. – 2006. – V. 11, No 4. – P. 941–955.

26. *Nemat-Nasser S., Choi J.Y., Isaacs J.B., Lisher D.W.* Quasi-static and dynamic buckling of thin cylindrical shape-memory shells // J. Appl. Mech. – 2006. – V. 73, No 5. – P. 825–833.

27. *Tang Z., Li D.* Quasi-static axial buckling behavior of TiNi thin-walled cylindrical shells // Thin-Walled Structures. – 2012. – V. 51. – P. 130–138.

28. *Urushiyama Y., Lewinnek D. Qiu J., Tani J.* Buckling of shape memory alloy columns: buckling of curved column and twinning deformation effect // JMSE Int. J.. Ser. A. Solid. Mech. Mater. Eng. – 2003. – V. 46, No 1. – P. 60–67.

29. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Жаворонок С.И., Сильченко Т.Л.* Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 3. – С. 72–80.

30. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г.* Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // Прикл. механика и техн. физика. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 169–178.

31. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г.* Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 2. – С. 132–144.

32. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г.* Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Прикл. матем. и механика. – 2004. – Т. 68, Вып. 1. – С. 60–72.

33. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г.* Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении // Прикл. матем. и механика. – 2006. – Т. 70, Вып. 5. – С. 869–881.

34. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Устойчивость кольцевой пластины из сплава с памятью формы // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – Т. 52, № 2. – С. 144–155.

35. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 6. – С. 137–147.

36. *Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А.* Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 5. – С. 57–65.

37. *Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Sil'chenko O.L.* Stability of cylindrical shell made from shape-memory alloys // Int. Appl. Mech. – 2014. – V. 50, No 2. – P. 171–178.

38. *Малыгин Г.А.* Эйлерова неустойчивость двунаправленного эффекта памяти формы в ленте из никелида титана // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45, № 12. – С. 2233–2237.

39. *Малыгин Г.А., Хусаинов М.А.* Анализ устойчивости механического поведения арки-полоски из никелида титана в условиях стесненного эффекта памяти формы // Журн. техн. физики. – 2004. – Т. 74, Вып. 10. – С. 57–63.

Поступила в редакцию
15.06.15

Мовчан Андрей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия.

E-mail: *movchan47@mail.ru*

Казарина Светлана Александровна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия.

E-mail: *svetlans@mail.ru*

Машихин Антон Евгеньевич – аспирант кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: *a-nton@mail.ru*

Мишустин Илья Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия.

E-mail: *levis@nm.ru*

Саганов Евгений Борисович – аспирант кафедры «Строительная механика и прочность (механико-математическая кафедра)», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

E-mail: *saganoff@yandex.ru*

Сафронов Павел Андреевич – аспирант кафедры «Строительная механика и прочность (механико-математическая кафедра)», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

E-mail: *www-midnight-express@yandex.ru*