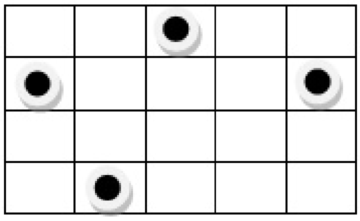
5 класс

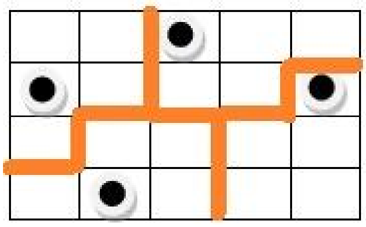
Задачи, решения, критерии.

Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 баллов.

1. Вася хочет разрезать торт на четыре равные части так, чтобы в каждой части была ровно одна свечка. Помогите ему. Части называются равными, если совпадают при наложении (равные по форме). Резать можно только по линиям клеток. Свечки обозначены черными кружками.



Решение:



Возможно, есть другие решения.

2. Можно ли из дробей 1/2015, 2/2014, 3/2013, …, 2015/1 выбрать три, произведение которых равно 1?

Решение. Можно. 1 = (1/2015)×(1007/1007)×(2015/1).

Критерии: Только ответ без примера – 0 баллов

3. Муся, Дуся и Люся измерили дорогу от своих домов до школы. Оказалось, что если дорогу от дома Муси увеличить втрое, дорогу от дома Дуси уменьшить втрое, а дорогу от дома Люси оставить неизменной, то все дороги окажутся равны. Какую часть составляет дорога от дома Муси до школы от суммарной длины дорог трех девочек до школы?

Ответ: 1/13.

Решение. Пусть дорога от Муси до школы равна x. Тогда дорога от Дуси до школы равна 9x, от Люси до школы — 3x, все дороги – 13x

Критерии: Только правильный ответ без обоснования или с неправильным обоснованием – 2 балла.

4. В День святого Валентина каждый из 23 одноклассников отправил 7 валентинок своим одноклассникам. Всегда ли найдутся трое детей, не посылавших друг другу валентинки?

Ответ. Нет.

Решение. Построим пример. Выстроим учеников по кругу, и пусть каждый пошлёт валентинки 7 следующим по часовой стрелке. Возьмём любых троих и рассмотрим три восьмерки учеников каждая из которых состоит из одного из трёх взятых и семерых, которым он послал валентинки. Если никто из этих троих не посылал никому валентинки, то три этих восьмерки учеников не должны пересекаться. Но тогда в классе не меньше 24 учеников, а по условию их там 23.

Критерии: только правильный ответ – 0 баллов.

Любое решение, в котором доказывается, что всегда найдутся трое детей, не посылавших друг другу подарки, - 0 баллов.

6 класс

Задачи, решения, критерии.

Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 баллов.

1. Муся, Дуся и Люся измерили дорогу от своих домов до школы. Оказалось, что если дорогу от дома Муси увеличить втрое, дорогу от дома Дуси уменьшить втрое, а дорогу от дома Люси оставить неизменной, то все дороги окажутся равны. Какую часть составляет дорога от дома Муси до школы от суммарной длины дорог трех девочек до школы?

Ответ: 1/13.

Решение. Пусть дорога от Муси до школы равна x. Тогда дорога от Дуси до школы равна 9x, от Люси до школы — 3x, все дороги – 13x

Критерии: Только правильный ответ без обоснования или с неправильным обоснованием – 2 балла.

2. Когда Васе стало скучно, он написал на полоске бумаги 30-значное число. Вася разрезал полоску и получил кусочки, на которых оказались написаны все целые числа от года его рождения 2002 до текущего года 2015. Докажите, что исходное число не было простым.

Решение. Сумма всех цифр исходного числа, равная $2\cdot14+1+2+3+\ldots+9+1+1+1+1+1+1+2+3+4+5$ делится на 3. Поэтому на 3 делится и само это число.

3. Найдите наибольший простой делитель числа 99!+100!. ($N! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-1)\cdot N$, например, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$)

Ответ: 101.

Решение. $99!+100! = 99!(1+100) = 99!\cdot101 = 99!\cdot101$. Поскольку 101 — простое число, а все простые сомножители 99! меньше 101, то 101 – наибольший простой делитель.

Критерии: только правильный ответ или правильный ответ с неправильным обоснованием – 2 балла

4. 6 команд играют в школьный турнир по футболу. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только 6А и 6Б сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?

Ответ: Нет.

Решение. Каждая команда могла сыграть не менее одного и не более 6 матчей: с каждой из остальных девяти плюс ещё один повторный. Получается 6 возможностей (1, 2, …, 6 матчей) на 6 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли $(1+2+\ldots+6)/2 = 21{,}5$ матчей, что невозможно.

5. Даны 15 различных натуральных чисел. Четыре из них делятся на 11, пять из них делятся на 12, шесть из них делятся на 13. Докажите, что одно из них больше 260.

Решение. Заметим, что любые два из чисел 11, 12 и 13 взаимно просты. Поэтому если есть число, которое делится на два или три из них, то оно делится и на произведение этих двух или трёх. Поставим около каждого данного числа, делящегося на 11, красный крестик, делящегося на 12 — синий крестик, делящегося на 13 — зеленый крестик. Всего будет выставлено 15 крестиков. Если есть число с тремя крестиками, то оно делится и на $11\cdot12\cdot13 > 260$, и все доказано. Если же такого числа нет, то есть четыре числа с двумя крестиками. Поскольку из трех цветов можно составить только три различные пары, среди этих четырех чисел найдутся два, у которых цвета крестиков одинаковы. Тогда наибольшее из этих двух чисел не меньше, чем $2\cdot11\cdot12$, что больше 260.

7 класс

Задачи, решения, критерии.

Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 баллов.

1. Когда Васе стало скучно, он написал на полоске бумаги 30-значное число. Вася разрезал полоску и получил кусочки, на которых оказались написаны все целые числа от года его рождения 2002 до текущего года 2015. Докажите, что исходное число не было простым.

Решение. Сумма всех цифр исходного числа, равная $2\cdot14+1+2+3+\ldots+9+1+1+1+1+1+1+2+3+4+5$ делится на 3. Поэтому на 3 делится и само это число.

2. Найдите наибольший простой делитель числа 99!+100!+101!. ($N! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-1)\ N$, например, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$)

Ответ: 101.

Решение. $99!+100!+101! = 99!(1+100+10101) = 99!\cdot10201 = 99!\cdot101^2$. Поскольку 101 — простое число, а все простые сомножители 99! меньше 101, то 101 – наибольший простой делитель.

Критерии: только правильный ответ – 2 балла

3. 10 команд играют в школьный турнир по футболу. В некоторый момент оказалось, что любые две команды сыграли между собой не более, чем по одному разу, только 7А и 7Б сыграли дважды. При этом каждая команда сыграла хотя бы один матч. Могло ли так случиться, что в этот момент все команды сыграли различное число игр?

Ответ: Нет.

Решение. Каждая команда могла сыграть не менее одного и не более 10 матчей: с каждой из остальных девяти плюс ещё один повторный. Получается 10 возможностей (1, 2, …, 10 матчей) на 10 команд. Но тогда эти команды вместе сыграли $(1+2+\ldots+10)/2 = 27{,}5$ матчей, что невозможно.

4.Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC соответственно отмечены такие точки S и T, что AT = CS и MT = MS. Докажите, что треугольник ABC - равнобедренный.

Решение. Треугольники AMT и CMS равны по трем сторонам. Поэтому $\angle SCA = \angle TAC$, и треугольник TAC равен треугольнику SCA по двум сторонам и углу между ними. Отсюда AS = CT, и треугольники AST и CTS равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle SAT = \angle TCS$, откуда $\angle BAC = \angle SAT+\angle TAC = \angle TCS+\angle SCA = \angle BCA$ и AB = BC.

5. Для любых целых чисел x, y, z и t докажите неравенство $x^2+y^2+z^2+3t^2 \geq (2t-1)(x+y+z)+3t$.

Решение. Соберем все члены неравенства в его левой части. Тогда его, как легко проверить, можно привести к виду $(x-t)(x-t+1)+(y-t)(y-t+1)+(z-t)(z-t+1) \geq 0$. Теперь достаточно заметить, что при целых x, y, z и t все три произведения в левой части неотрицательны.

Критерии: сведение к неравенству $(x-t)(x-t+1)+(y-t)(y-t+1)+(z-t)(z-t+1) \geq 0$ – 3 балла