УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 438–455 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 514.76 doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.438-455

ПСЕВДОГРУППЫ ГОЛОНОМИИ КАК ПРЕПЯТСТВИЯ К ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ НАД АЛГЕБРОЙ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А.А. Малюгина, В.В. Шурыгин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Гладкое многообразие над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$-гладкое многообразие) несет на себе каноническое слоение, на слоях которого индуцируется структура аффинных многообразий. Распространение карт на $\mathbb{D}$-гладком многообразии вдоль слоевых путей позволяет ассоциировать с погруженной трансверсалью канонического слоения псевдогруппу локальных $\mathbb{D}$-гладких диффеоморфизмов, называемую псевдогруппой голономии.

В настоящей работе псевдогруппы голономии применены к исследованию строения $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов между фактормногообразиями алгебры $\mathbb{D}$ по решеткам. В частности, показано, что для существования $\mathbb{D}$-диффеоморфизма между такими многообразиями решетки должны получаться одна из другой умножением на дуальное число. Кроме того, установлено, что естественно ассоциированные с аффинным многообразием $\mathbb{D}$-гладкие многообразия $\mathbb{D}$-диффеоморфны тогда и только тогда, когда это многообразие радиантно.

Ключевые слова: аффинное многообразие, многообразие над алгеброй дуальных чисел, слоение, слоеное расслоение, касательное расслоение, касательное многообразие, тор над алгеброй дуальных чисел, расслоение Вейля

Введение

Алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D} = \mathbb{R}(\varepsilon)$ называется [1] двумерная алгебра над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ с базисом $\{1 = e_1, \varepsilon = e_2\}$, состоящим из единицы $1 = e_1$ и элемента ε, квадрат которого равен нулю. Произвольный элемент алгебры $\mathbb{D}$ имеет вид $X = a + b\varepsilon$, где a, $b \in \mathbb{R}$, а произведение $X = a + b\varepsilon$ и $Y = c + d\varepsilon$ вычисляется по формуле: $XY = ac + (ad + cb)\varepsilon$. Строки $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ длины n, состоящие из элементов $X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, алгебры $\mathbb{D}$, образуют n-мерный модуль $\mathbb{D}^n$ над алгеброй $\mathbb{D}$. Гладкое отображение

$$F : U \subset \mathbb{D}^n \ni \{X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon\} \mapsto \{Y^k = y^k + \dot{y}^k\varepsilon\} \in \mathbb{D}^m \tag{1}$$

из открытого подмножества U модуля $\mathbb{D}^n$ в модуль $\mathbb{D}^m$ называется $\mathbb{D}$-*гладким* (гладким над $\mathbb{D}$), если его дифференциал dF в каждой точке из U является $\mathbb{D}$-линейным отображением. В некоторой окрестности каждой точки из U $\mathbb{D}$-гладкое отображение (1) имеет следующий вид [1]:

$$x'^k + \dot{x}'^k\varepsilon = f^k(x^i) + (\dot{x}^j\partial_j f^k + g^k(x^i))\varepsilon, \tag{2}$$

где $f^k(x^i)$ и $g^k(x^i)$ – гладкие функции вещественных переменных и символом $\partial_j f^k$ обозначена частная производная функции f^k по переменной x^j. Структура n-мерного $\mathbb{D}$-гладкого многообразия на вещественном $2n$-мерном многообразии M_{2n}

задается атласом, карты которого принимают значения в модуле $\mathbb{D}^n$, а функции перехода являются $\mathbb{D}$-гладкими.

Естественная структура многообразия над алгеброй $\mathbb{D}^n$ возникает на касательном расслоении гладкого многообразия [1], что находит свое отражение в геометрии касательных расслоений. Применению $\mathbb{D}$-гладких многообразий в дифференциальной геометрии посвящены некоторые разделы книги [2]. Топологические аспекты строения $\mathbb{D}$-гладких многообразий изучались в работах [3–8]. В работах [5] и [7] $\mathbb{D}$-гладкие многообразия рассматривались под названиями многообразий с интегрируемой почти касательной структурой и касательных многообразий соответственно.

В настоящей работе в соответствии с общей схемой из [9] определяется псевдогруппа голономии полного $\mathbb{D}$-гладкого многообразия на полной погруженной трансверсали и изучаются ее свойства. Доказывается (теорема 1), что изоморфизм псевдогрупп голономии $\mathbb{D}$-гладких многообразий влечет их эквивалентность ($\mathbb{D}$-диффеоморфность).

Свойства псевдогрупп голономии применяются в разд. 2 к изучению строения $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов между торами над алгеброй $\mathbb{D}$, являющимися фактормногообразиями алгебры $\mathbb{D}$ по решеткам. Следует отметить, что $\mathbb{D}$-гладкие структуры на торе изучались в работах М.А. Малахальцева [4, 6]. В работе [6], в частности, показано, что для всякого слоения на торе существует $\mathbb{D}$-гладкая структура, по отношению к которой это слоение совпадает с каноническим слоением $\mathbb{D}$-гладкой структуры. В работе [4] были установлены $\mathbb{D}$-диффеоморфизмы между некоторыми $\mathbb{D}$-торами, определенными решетками.

В разд. 3 изучается вопрос $\mathbb{D}$-диффеоморфности $\mathbb{D}$-гладких многообразий, естественно ассоциированных с аффинным многообразием [10]. Доказывается (теорема 4), что эти многообразия $\mathbb{D}$-диффеоморфны тогда и только тогда, когда аффинное многообразие является радиантным.

Краткое описание псевдогруппы голономии полного $\mathbb{D}$-гладкого многообразия и формулировки основных результатов настоящей работы без доказательств опубликованы в кратком сообщении авторов [11].

1. Представления голономии многообразия над алгеброй дуальных чисел

Представление модуля $\mathbb{D}^n$ в виде объединения вещественных n-мерных плоскостей с уравнениями $x^i = x^i_0 = \mathrm{const}$ определяет *каноническое слоение* $\mathcal{F}$ на $\mathbb{D}^n$. Произвольное $\mathbb{D}$-гладкое отображение (1) может быть представлено в виде (2) и на всем открытом множестве U, но при этом функции f^k и g^k, определенные на множестве U, должны быть базовыми по отношению к каноническому слоению $\mathcal{F}$, то есть удовлетворять условиям $\partial f^k/\partial \dot{x}^i = 0$, $\partial g^k/\partial \dot{x}^i = 0$ [12].

Множество $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов ($\mathbb{D}$-гладких диффеоморфизмов) $F : U \subset \subset \mathbb{D}^n \to V \subset \mathbb{D}^n$ между открытыми подмножествами $\mathbb{D}$-модуля $\mathbb{D}^n$ образует псевдогруппу $\Gamma(\mathbb{D}^n)$.

Структура n-мерного $\mathbb{D}$-гладкого многообразия на вещественном $2n$-мерном многообразии M_{2n} задается $\Gamma(\mathbb{D}^n)$-атласом, то есть атласом

$$\{h_\alpha : U_\alpha \ni X \mapsto \{X^i_\alpha = x^i_\alpha + \dot{x}^i_\alpha \varepsilon\} \in U^*_\alpha \subset \mathbb{D}^n\}_{\alpha \in A}, \tag{3}$$

карты которого принимают значения в модуле $\mathbb{D}^n$, а функции перехода $h_\beta \circ h^{-1}_\alpha$ принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\mathbb{D}^n)$, то есть имеют вид

$$x^k_\beta + \dot{x}^k_\beta \varepsilon = f^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha) + \left(\dot{x}^j_\alpha \frac{\partial f^k_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha} + g^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha) \right) \varepsilon,$$

где функции $f^k_{\beta\alpha}$ и $g^k_{\beta\alpha}$ являются базовыми по отношению к каноническому слоению на $\mathbb{D}^n$. Для обозначения n-мерного многообразия над $\mathbb{D}$ будем использовать символ $M^{\mathbb{D}}_n$. Карты на $M^{\mathbb{D}}_n$, согласованные с его структурой $\mathbb{D}$-гладкого многообразия, будем называть $\mathbb{D}$-картами.

Идеал $\mathbb{I}$ алгебры $\mathbb{D}$, состоящий из элементов с нулевой вещественной частью (элементов вида $b\,\varepsilon$), порождает подмодуль $\mathbb{I}^n$ в $\mathbb{D}^n$, инвариантный относительно $\mathbb{D}$-линейных преобразований. Подмодулю $\mathbb{I}^n$ соответствует каноническое слоение $\mathcal{F}$ на многообразии $M^{\mathbb{D}}_n$ [13], слои которого в картах атласа (3) определяются уравнениями $x^i = x^i_0 = \mathrm{const}$.

Открытое подмножество $U \subset M^{\mathbb{D}}_n$ будем называть *простым*, если ограничение $\mathcal{F}_U$ слоения $\mathcal{F}$ на множество U является слоением, порождаемым субмерсией $p : U \to \overline{U}$ со связными слоями. Образ $s(\overline{U}) \subset U$ сечения $s : \overline{U} \to U$ субмерсии p будем называть локальной трансверсалью в простом открытом подмножестве. В соответствии с этим $\mathbb{D}$-карту (U, h) на $M^{\mathbb{D}}_n$ будем называть *простой*, если ее область определения U является простым открытым подмножеством. Удобно также рассматривать $\mathbb{D}$-карты, для которых область $U^* = h(U)$ представляет собой координатный параллелепипед в $\mathbb{D}^n$ по отношению к координатам $\{x^i, \dot{x}^i\}$.

Из уравнений (2) следует, что на каждом слое слоения $\mathcal{F}$ индуцируется каноническая структура аффинного многообразия, то есть многообразия с атласом, функции перехода которого являются аффинными преобразованиями [14].

Аффинное многообразие M_n называется *полным* [14], если развертывающее отображение $D : \widetilde{M}_n \to \mathbb{R}^n$ универсального накрывающего пространства $\widetilde{M}_n$ многообразия M_n на аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ является накрытием. В соответствии с этим $\mathbb{D}$-гладкое многообразие $M^{\mathbb{D}}_n$ называется *полным*, если слои его канонического слоения $\mathcal{F}$ являются полными аффинными многообразиями.

С $\mathbb{D}$-гладким многообразием $M^{\mathbb{D}}_n$ можно ассоциировать *каноническое соприкасающееся расслоение* $\pi^V : O^V M^{\mathbb{D}}_n \to M^{\mathbb{D}}_n$ со стандартным слоем $\mathbb{R}^n$, определяемое нижеследующим образом. Атласу (3) на многообразии $M^{\mathbb{D}}_n$ ставится в соответствие атлас $\{(U^V_\alpha, h^V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, где $U^V_\alpha = (\pi^V)^{-1}(U_\alpha)$, на многообразии $O^V M^{\mathbb{D}}_n$, карты которого, согласованные со структурой расслоения, имеют вид

$$h^V_\alpha : (\pi^V)^{-1}(U_\alpha) \ni Y \mapsto \{X^i_\alpha = x^i_\alpha + \dot{x}^i_\alpha \varepsilon, \quad y^i_\alpha\} \in U^*_\alpha \times \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $\{X^i_\alpha\} = h_\alpha(X)$, $X = \pi^V(Y)$, а функции перехода $h^V_\beta \circ (h^V_\alpha)^{-1}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} x^k_\beta + \dot{x}^k_\beta \varepsilon &= f^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha) + \left(\dot{x}^j_\alpha \frac{\partial f^k_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha} + g^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha) \right) \varepsilon, \\ y^k_\beta &= y^j_\alpha \frac{\partial f^k_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha} + g^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Расслоенное многообразие $O^V M^{\mathbb{D}}_n$ несет на себе каноническое слоение $\mathcal{F}^V$, слои которого являются интегральными многообразиями распределения, определяемого в локальных картах (4) уравнениями $dx^i = 0$, $dy^i = 0$. Слои слоения $\mathcal{F}^V$ пересекают трансверсально слои расслоения $\pi^V : O^V M^{\mathbb{D}}_n \to M^{\mathbb{D}}_n$. Из уравнений (5) следует, что при проекции π^V слой L_Y слоения $\mathcal{F}^V$, проходящий через точку $Y \in O^V M^{\mathbb{D}}_n$, накрывает слой L_X слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M^{\mathbb{D}}_n$, проходящий через точку $X = \pi^V(Y)$. Таким образом, расслоение $\pi^V : O^V M^{\mathbb{D}}_n \to M^{\mathbb{D}}_n$ относится к классу слоеных расслоений [12]. Слоение $\mathcal{F}^V$ на многообразии $O^V M^{\mathbb{D}}_n$ будем называть *поднятым слоением*.

Многообразие $O^V M^{\mathbb{D}}_n$ несет на себе естественную структуру n-мерного гладкого многообразия над алгеброй $\widehat{\mathbb{D}}$, элементы которой имеют вид $a + b\varepsilon + c\varepsilon'$,

a, b, $c \in \mathbb{R}$, а умножение определяется соотношениями $\varepsilon^2 = (\varepsilon')^2 = \varepsilon \circ \varepsilon' = 0$. Эта структура возникает, если считать, что отображения (4) принимают значения в $\widehat{\mathbb{D}}$-модуле $\widehat{\mathbb{D}}^n$, то есть

$$h^V_\alpha : (\pi^V)^{-1}(U_\alpha) \ni Y \mapsto \{Y^i_\alpha = x^i_\alpha + \dot{x}^i_\alpha \varepsilon + y^i_\alpha \varepsilon'\} \in \widehat{\mathbb{D}}^n,$$

поскольку преобразования

$$x^k_\beta + \dot{x}^k_\beta \varepsilon + y^k_\beta \varepsilon' = f^k_{\beta\alpha} + \left(\dot{x}^j_\alpha \frac{\partial f^k_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha} + g^k_{\beta\alpha}\right)\varepsilon + \left(y^j_\alpha \frac{\partial f^k_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha} + g^k_{\beta\alpha}\right)\varepsilon'$$

являются $\widehat{\mathbb{D}}$-гладкими, если функции $f^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha)$ и $g^k_{\beta\alpha}(x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha)$ локально не зависят от переменных $\dot{x}^i_\alpha$.

Отметим в связи с этим, что для произвольной коммутативной алгебры $\mathbb{A}$ отображение Φ из области U $\mathbb{A}$-модуля $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{A}$-модуль $\mathbb{A}^m$ называется $\mathbb{A}$-гладким, если его дифференциал $d_X\Phi$ является $\mathbb{A}$-линейным отображением в каждой точке $X \in U$ (см., например, [13]).

Из уравнений (5) следует, что расслоение $\pi^V : O^V M^{\mathbb{D}}_n \to M^{\mathbb{D}}_n$ является аффинным расслоением, то есть расслоением со структурной группой $GA(n, \mathbb{R})$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Уравнения $dx^i = 0$, $dy^i = 0$ задают в этом расслоении плоскую связность ∇, определенную над слоями канонического слоения $\mathcal{F}$ (частичную связность). При параллельном перенесении в связности ∇ вдоль кривой γ, лежащей в слое слоения $\mathcal{F}$, точка многообразия $O^V M^{\mathbb{D}}_n$ описывает кривую $\widetilde{\gamma}$, лежащую в слое поднятого слоения $\mathcal{F}^V$ и накрывающую кривую γ.

Пусть $\gamma : [0,1] \to L_{X_0}$ – произвольный путь, лежащий в слое канонического слоения $\mathcal{F}$, который проходит через X_0, и соединяющий точку $X_0 = \gamma(0)$ с точкой $X_1 = \gamma(1)$, а (U,h) – простая $\mathbb{D}$-карта такая, что $U \ni X_0$. Образ $\gamma([0,1])$ пути γ можно покрыть конечным числом областей определения простых $\mathbb{D}$-карт (U_a, h_a), $a = 0, 1 \ldots, p$, таких, что $(U_0, h_0) = (U, h)$, а $\gamma([t_a, t_{a+1}]) \subset U_a$, где $t_0 = 0$, $t_{p+1} = 1$. Преобразования координат $h_0 \circ h_1^{-1}$ на некотором простом открытом подмножестве V_1 из пересечения $U_0 \cap U_1$, содержащем точку $\gamma(t_1)$, являются аффинными на слоях индуцированного на V_1 слоения и поэтому однозначно продолжаются на некоторую простую окрестность множества $\gamma([t_1, t_2])$. В результате возникает простая $\mathbb{D}$-карта $(\widetilde{U}_1, \widetilde{h}_1)$, область определения которой является окрестностью множества $\gamma([t_1, t_2])$, такая, что отображения h и $\widetilde{h}_1$ совпадают на $U \bigcap \widetilde{U}_1$. Аналогично, преобразования координат $\widetilde{h}_1 \circ h_2^{-1}$ на некотором простом открытом подмножестве V_2 из пересечения $\widetilde{U}_1 \bigcap U_2$, содержащем точку $\gamma(t_2)$, являются аффинными на слоях индуцированного на V_2 слоения и поэтому однозначно продолжаются на некоторую простую окрестность множества $\gamma([t_2, t_3])$. В результате возникает простая $\mathbb{D}$-карта $(\widetilde{U}_2, \widetilde{h}_2)$, область определения которой является окрестностью множества $\gamma([t_2, t_3])$, такая, что отображения $\widetilde{h}_1$ и $\widetilde{h}_2$ совпадают на $\widetilde{U}_1 \bigcap \widetilde{U}_2$. Рассматривая затем преобразования координат $\widetilde{h}_2 \circ h_3^{-1}$ на некотором простом открытом подмножестве V_3 из пересечения $\widetilde{U}_2 \cap U_3$, содержащем точку $\gamma(t_3)$, получим аналогичным образом простую $\mathbb{D}$-карту $(\widetilde{U}_3, \widetilde{h}_3)$, область определения которой является окрестностью множества $\gamma([t_3, t_4])$, такую, что $\widetilde{h}_2$ и $\widetilde{h}_3$ совпадают на $\widetilde{U}_2 \bigcap \widetilde{U}_3$. Продолжая указанный процесс, в результате получим простую $\mathbb{D}$-карту $(\widetilde{U}_p, \widetilde{h}_p)$, область определения которой является окрестностью множества $\gamma([t_p, 1])$, такую, что отображения $\widetilde{h}_{p-1}$ и $\widetilde{h}$ совпадают на пересечении $\widetilde{U}_{p-1} \bigcap \widetilde{U}$. Построенную простую $\mathbb{D}$-карту $(\widetilde{U}_p, \widetilde{h}_p)$, а также промежуточные карты $(\widetilde{U}_a, \widetilde{h}_a)$ будем называть картами, полученными распространением $\mathbb{D}$-карты (U, h) вдоль пути γ. Для $\mathbb{D}$-карты $(\widetilde{U}_p, \widetilde{h}_p)$ будем использовать обозначение (U_γ, h_γ).

На многообразии $M_n^{\mathbb{D}}$ можно ввести слоевую топологию, базу которой образуют локальные слои канонического слоения $\mathcal{F}$. В этой топологии слои слоения $\mathcal{F}$ являются компонентами связности. Росток карты (U_γ, h_γ) в точке X_1 зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ слоевого пути γ, соединяющего точки X_0 и X_1 по отношению к слоевой топологии.

Одновременно с преобразованиями координат на пересечениях $\widetilde{U}_a \bigcap U_{a+1}$ на многообразии $M_n^{\mathbb{D}}$ вдоль пути γ происходят преобразования координат на областях $\widetilde{U}_a^V \bigcap U_{a+1}^V$ расслоения $O^V M_n^{\mathbb{D}}$, в результате чего возникает карта $(\widetilde{U}_p^V, \widetilde{h}_p^V)$ над окрестностью $\widetilde{U}_p$ точки $\gamma(1)$. Эту карту и промежуточные карты $(\widetilde{U}_a^V, \widetilde{h}_a^V)$ будем называть картами, полученными распространением карты (U^V, h^V) вдоль пути γ. В соответствии с принятыми выше обозначениями карта $(\widetilde{U}_p^V, \widetilde{h}_p^V)$ будет в дальнейшем обозначаться следующим образом: (U_γ^V, h_γ^V).

Гомотопическим группоидом $\mathbb{D}$*-гладкого многообразия* $M_n^{\mathbb{D}}$ будем называть гомотопический группоид $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ [16] слоеного многообразия $(M_n^{\mathbb{D}}, \mathcal{F})$. Элементами гомотопического группоида $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ являются гомотопические классы путей на $M_n^{\mathbb{D}}$, лежащих в слоях слоения $\mathcal{F}$ с фиксированными концами. Гомотопический группоид $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ несет на себе индуцированную структуру гладкого многообразия размерности $3n$ [16]. Атлас гладкого многообразия на $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ определяется следующим образом [16].

Пусть (U, h) – $\mathbb{D}$-карта на $M_n^{\mathbb{D}}$, $X_0 \in U$, $\gamma : [0,1] \to M_n^{\mathbb{D}}$ – путь, лежащий в слое L_{X_0} и соединяющий точку $X_0 = \gamma(0)$ с точкой $X_1 = \gamma(1)$, а (U_γ, h_γ), $U_\gamma \ni X_1$ – $\mathbb{D}$-карта, полученная распространением $\mathbb{D}$-карты (U, h) вдоль пути γ. Ограничивая области определения рассмотренных выше $\mathbb{D}$-карт (U, h) и (U_γ, h_γ), можно получить карты $(\widehat{U}_0, \widehat{h}_0)$ и $(\widehat{U}_1, \widehat{h}_1)$ такие, что образы $\widehat{h}_0(\widehat{U}_0)$ и $\widehat{h}_1(\widehat{U}_1)$ имеют вид $V \times \dot{V}_0$ и $V \times \dot{V}_1$, где V, $\dot{V}_0$ и $\dot{V}_1$ – открытые параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$, и скольжение [12] локальной трансверсали $(\widehat{h}_0)^{-1}(V \times \{\dot{x}_0^i\})$ вдоль γ осуществляет диффеоморфизм между локальными трансверсалями в точках $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$. Кроме того, карты (U_a, h_a), области определения которых покрывают путь γ, можно с самого начала предполагать такими, что $h_a(U_a)$, $a = 0, \ldots, p$, является координатным параллелепипедом в $\mathbb{D}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$. Соответствие, относящее гомотопическому классу слоевого пути $\tau : [0,1] \to M_n^{\mathbb{D}}$ с началом в точке из $\widehat{U}_0$ и концом в точке из $\widehat{U}_1$ такому, что $\tau(t)$ при всех $t \in [0,1]$ принадлежит некоторой окрестности U_a, набор $\{x^i, \dot{x}^i, z^i\}$, где $x^i + \varepsilon\dot{x}^i$ – набор $\mathbb{D}$-координат точки $\tau(0)$ в карте $(\widehat{U}_0, \widehat{h}_0)$, а $x^i + \varepsilon z^i$ – набор $\mathbb{D}$-координат точки $\tau(1)$ в карте $(\widehat{U}_1, \widehat{h}_1)$, определяет карту из атласа гладкого многообразия на гомотопическом группоиде $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$. Для этой карты введем обозначение $(\widehat{U}^\Pi, h_\gamma^\Pi)$.

Относя гомотопическому классу $[\tau] \in \Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ точку из слоя $(\pi^V)^{-1}(\tau(0))$ расслоения $O^V M_n^{\mathbb{D}}$, имеющую в карте $(\widehat{U}^V, \widehat{h}^V)$ на расслоении $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ координаты $Y^i = x^i + \varepsilon\dot{x} + \varepsilon' z^i$, где $\{x^i, \dot{x}^i, z^i\}$ – координаты гомотопического класса $[\tau]$ в карте $(\widehat{U}^\Pi, h_\gamma^\Pi)$, получим корректно определенное отображение

$$D : \Pi(M_n^{\mathbb{D}}) \to O^V M_n^{\mathbb{D}}. \tag{6}$$

Действительно, если $(\widehat{U}', \widehat{h}')$ – другая $\mathbb{D}$-карта на $M_n^{\mathbb{D}}$ такая, что $\widehat{U}' \ni \tau(0)$, то преобразование $\widehat{h}' \circ \widehat{h}^{-1}$ $\mathbb{D}$-координат на $\widehat{U} \bigcap \widehat{U}'$ индуцирует одинаковые аффинные преобразования $z_1^{i'} = a_i^{i'} z_1^i + b^{i'}$ координат точки $\tau(1)$ и $y^{i'} = a_i^{i'} y^i + b^{i'}$ координат в слое $(\pi^V)^{-1}(\tau(0))$. Из определения отображения (6) следует, что оно является локальным диффеоморфизмом и гомотопический группоид $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\widehat{\mathbb{D}}$. Имеются две проекции

$$\pi_0 : \Pi(M_n^{\mathbb{D}}) \ni [\gamma] \mapsto \gamma(0) \in M_n^{\mathbb{D}}, \quad \pi_1 : \Pi(M_n^{\mathbb{D}}) \ni [\gamma] \mapsto \gamma(1) \in M_n^{\mathbb{D}}$$

гомотопического группоида $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ на многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$, относящие гомотопическому классу пути γ его начало и конец соответственно. Прообраз $(\pi_0)^{-1}(X_0)$ представляет собой универсальное накрывающее пространство $\widetilde{L}_{X_0}$ слоя $L_{X_0} \subset M_n^{\mathbb{D}}$, а слой $(\pi^V)^{-1}(X_0)$, рассматриваемый как аффинное многообразие, является аффинным пространством. Поэтому по построению ограничение отображения (6) на $\widetilde{L}_{X_0}$ является развертывающим отображением для аффинного многообразия L_{X_0} [14].

Если многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ является полным, то отображение (6) является диффеоморфизмом. В случае полного многообразия $M_n^{\mathbb{D}}$ будем отождествлять многообразия $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ и $O^V M_n^{\mathbb{D}}$. При этом отождествлении проекциям π_0 и π_1 гомотопического группоида соответствуют проекции канонического соприкасающегося расслоения $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ на $M_n^{\mathbb{D}}$. Проекции π_0 соответствует проекция π^V, а проекция, соответствующая π_1, представляет собой накрытие слоя L_{X_0} канонического слоения $\mathcal{F}$ многообразия $M_n^{\mathbb{D}}$, проходящего через точку X_0, слоем $(\pi^V)^{-1}(X_0)$ расслоения $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ над X_0.

С $\mathbb{D}$-гладким многообразием $M_n^{\mathbb{D}}$ естественно ассоциируется также *трансверсальное расслоение* канонического слоения [12] $\pi_{tr} : T_{tr}M_n^{\mathbb{D}} \to M_n^{\mathbb{D}}$. Стандартным слоем трансверсального расслоения является пространство $\mathbb{R}^n$. Карты атласа $\{((\pi_{tr})^{-1}(U_\alpha), h_{tr\,\alpha})\}_{\alpha\in A}$ на многообразии $T_{tr}M_n^{\mathbb{D}}$, согласованные со структурой расслоения и картами атласа (3), имеют вид

$$h_{tr\,\alpha} : (\pi_{tr})^{-1}(U_\alpha) \ni Y \mapsto \{X_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i\varepsilon, z_\alpha^i\} \in U_\alpha^* \times \mathbb{R}^n, \quad X = \pi_{tr}(Y), \quad \{X_\alpha^i\} = h_\alpha(X). \tag{7}$$

Функции перехода $h_{tr\,\beta} \circ (h_{tr\,\alpha})^{-1}$ при этом определяются формулами

$$x_\beta^k + \dot{x}_\beta^k\varepsilon = f_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i) + \left(\dot{x}_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j} + g_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i)\right)\varepsilon, \quad z_\beta^k = z_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j}. \tag{8}$$

Расслоенное многообразие $T_{tr}M_n^{\mathbb{D}}$ несет на себе каноническое слоение $\mathcal{F}_{tr}$ (поднятое слоение [12]), слои которого являются интегральными многообразиями распределения, определяемого в локальных картах (7) уравнениями $dx^i = 0$, $dz^i = 0$. На многообразии $T_{tr}M_n^{\mathbb{D}}$ имеется, кроме того, естественная структура n-мерного гладкого многообразия над алгеброй $\widehat{\mathbb{D}}$. Эта структура задается атласом, карты которого получаются из карт (7) заменой наборов координат $\{X_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i\varepsilon, z_\alpha^i\}$ соответственно на наборы $\widehat{\mathbb{D}}$-координат $\{Y_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i\varepsilon + z_\alpha^i\varepsilon'\}$. Преобразования координат

$$x_\beta^k + \dot{x}_\beta^k\varepsilon + z_\beta^k\varepsilon' = f_{\beta\alpha}^k + \left(\dot{x}_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j} + g_{\beta\alpha}^k\right)\varepsilon + \left(z_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j}\right)\varepsilon'$$

при этом являются $\widehat{\mathbb{D}}$-гладкими.

Относя каждой точке $X \in M_n^{\mathbb{D}}$ гомотопический класс $[\gamma_X]$ постоянного пути $\gamma_X : [0,1] \ni t \mapsto X \in M_n^{\mathbb{D}}$ в этой точке, получим каноническое сечение

$$\sigma : M_n^{\mathbb{D}} \ni X \mapsto [\gamma_X] \in O^V M_n^{\mathbb{D}},$$

которое позволяет вложить многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ в $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ как образ сечения σ.

Из уравнений (8) и (5) следует, что расслоения $T_{tr}M_n^{\mathbb{D}}$ и $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ ассоциированы одно с другим как векторное и аффинное расслоения. Рассмотрим отображение

$$\psi : T_{tr}M_n^{\mathbb{D}} \times_{M_n^{\mathbb{D}}} O^V M_n^{\mathbb{D}} \to O^V M_n^{\mathbb{D}},$$

относящее точке $Y \in (\pi^V)^{-1}(X)$ и вектору $Z \in (\pi_{tr})^{-1}(X)$ точку $\psi(Y,Z) \in \in (\pi^V)^{-1}(X)$, являющуюся концом вектора Z, отложенного от точки Y. Сечение σ индуцирует канонический изоморфизм расслоений

$$\Sigma : T_{tr}M_n^{\mathbb{D}} \to O^V M_n^{\mathbb{D}}, \quad \Sigma : (\pi_{tr})^{-1}(X) \ni Z \mapsto \psi(\sigma(X), Z) \in (\pi^V)^{-1}(X).$$

В локальных координатах отображение Σ имеет вид $\{x^i + \varepsilon \dot{x}^i + \varepsilon' z^i\} \mapsto \{x^i + \varepsilon \dot{x}^i + + \varepsilon'(\dot{x}^i + z^i)\}$, откуда следует, что Σ – морфизм в категории многообразий над локальными алгебрами в смысле А. Вейля [15], соответствующий автоморфизму $\widehat{\mathbb{D}} \ni a + b\varepsilon + c\varepsilon' \mapsto a + b\varepsilon + (b+c)\varepsilon' \in \widehat{\mathbb{D}}$ алгебры $\widehat{\mathbb{D}}$.

Пусть теперь W_k – некоторое вещественное гладкое многообразие, а $\varphi : W_k \to \to M_n^{\mathbb{D}}$ – гладкое отображение. Если рассматривать W_k как слоеное многообразие, слоями которого являются точки W_k, то отображение φ будет являться морфизмом слоений. Поэтому можно применить к отображению φ трансверсальный функтор T_{tr}, относящий слоеному многообразию его трансверсальное расслоение, а морфизму слоений – соответствующий морфизм трансверсальных расслоений. Поскольку в рассматриваемом случае трансверсальное расслоение $T_{tr}W_k$ совпадает с касательным расслоением TW_k, в результате возникает отображение

$$T_{tr}\varphi : TW_k \to T_{tr}M_n^{\mathbb{D}}.$$

Функтор T_{tr} естественно эквивалентен трансверсальному функтору А. Вейля $T_{tr}^{\mathbb{D}}$ [13, 17], и отображение $T_{tr}\varphi$ представляет собой морфизм в категории многообразий над локальными алгебрами в смысле А. Вейля [15], соответствующий мономорфизму $i : \mathbb{D} \ni a + b\varepsilon \mapsto a + b\varepsilon' \in \widehat{\mathbb{D}}$. Если уравнения отображения φ в локальных координатах на W_k и $M_n^{\mathbb{D}}$ имеют вид $x^i + \dot{x}^i\varepsilon = \varphi^i(u^a) + \dot{\varphi}^i(u^a)\varepsilon$, $a = 1, \ldots, k$, то в соответствующих индуцированных локальных координатах на TW_k и $T_{tr}M_n^{\mathbb{D}}$ уравнения отображения $T_{tr}\varphi$ имеют вид $x^i + \dot{x}^i\varepsilon + z^i\varepsilon' = \varphi^i(u^a) + + \dot{\varphi}^i(u^a)\varepsilon + \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial u^a}\dot{u}^a\varepsilon'$. Нас будет интересовать случай, когда $\varphi : W_n \to M_n^{\mathbb{D}}$ – погружение, трансверсальное каноническому слоению, такое, что образ $\varphi(W_n)$ имеет непустое пересечение со всеми слоями канонического слоения на $M_n^{\mathbb{D}}$. В этом случае будем говорить, что $\varphi : W_n \to M_n^{\mathbb{D}}$ – погружение полной трансверсали. Композиция $\sigma \circ \varphi : W_n \to O^V M_n^{\mathbb{D}}$ является погружением, и для $x \in W_n$ подпространство $T_x(\sigma \circ \varphi)(T_x W_n) \subset T_{(\sigma\circ\varphi)(x)} O^V M_n^{\mathbb{D}}$ имеет нулевое пересечение с касательным пространством к слою поднятого слоения на $O^V M_n^{\mathbb{D}}$, проходящему через точку $(\sigma \circ \varphi)(x)$. Отображение

$$\Sigma \circ T_{tr}\varphi : TW_n \to O^V M_n^{\mathbb{D}} \tag{9}$$

представляет собой морфизм аффинных расслоений, изоморфно отображающий пространства $T_x W_n$, $x \in W_n$, на $(\pi^V)^{-1}(\varphi(x))$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to L_{X_0}$ – произвольный путь, лежащий в слое канонического слоения $\mathcal{F}$, проходящем через X_0, и соединяющий точку $X_0 = \gamma(0)$ с точкой $X_1 = = \gamma(1)$, а $(\widehat{U}_0, \widehat{h}_0)$ и $(\widehat{U}_1, \widehat{h}_1)$ – рассмотренные выше $\mathbb{D}$-карты такие, что $\widehat{U}_0 \ni X_0$, $\widehat{U}_1 \ni X_1$, образы $\widehat{h}_0(\widehat{U}_0)$ и $\widehat{h}_1(\widehat{U}_1)$ имеют вид $V \times \dot{V}_0$ и $V \times \dot{V}_1$, где V, $\dot{V}_0$ и $\dot{V}_1$ – открытые параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$, а скольжение [12] локальной трансверсали W_0 простого открытого множества $\widehat{U}_0$ вдоль γ осуществляет диффеоморфизм между W_0 и локальной трансверсалью W_1 простого открытого множества $\widehat{U}_1$. Параллельное перенесение в частичной плоской связности ∇ в расслоении $O^V M_n^{\mathbb{D}}$

осуществляет изоморфизм аффинных расслоений, определяемый диаграммой

$$\begin{tikzcd} (\pi^V)^{-1}(W_0) \arrow[r, "\psi^V"] \arrow[d, "\pi_V"'] & (\pi^V)^{-1}(W_1) \arrow[d, "\pi_V"] \\ W_0 \arrow[r, "\psi"] & W_1 \end{tikzcd} \quad . \tag{10}$$

Рассмотрим в качестве локальных трансверсалей W_0 и W_1, участвующих в диаграмме (10), образы $W_0 = \varphi(W_0')$ и $W_1 = \varphi(W_1')$ открытых подмножеств W_0' и W_1' в W_n, которые отображением φ отображаются диффеоморфно на W_0 и W_1 соответственно. Переходя к прообразам подмножеств $(\pi^V)^{-1}(W_0)$ и $(\pi^V)^{-1}(W_1)$ при отображении (9), получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(W_0') \arrow[r, "\psi^T"] \arrow[d, "\pi"'] & \pi^{-1}(W_1') \arrow[d, "\pi"] \\ W_0' \arrow[r, "\psi"] & W_1' \end{tikzcd} \quad , \tag{11}$$

в которой символ π используется для обозначения проекций касательных расслоений на базовые многообразия, ψ – диффеоморфизм, определяемый скольжением локальной трансверсали, а ψ^T – $\mathbb{D}$-диффеоморфизм, соответствующий $\mathbb{D}$-диффеоморфизму ψ^V из диаграммы (10). Диаграмма (11) представляет собой изоморфизм аффинных расслоений. Все локальные $\mathbb{D}$-диффеоморфизмы вида ψ^T из диаграммы (11) порождают псевдогруппу, которую будем обозначать Γ_W и называть *псевдогруппой голономии на полной погруженной трансверсали* W_n.

Предполагаем далее, что многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ является полным. Псевдогруппа голономии на полной погруженной трансверсали W_n определяет отношение эквивалентности на касательном расслоении TW_n, при котором два элемента $v_0 \in \pi^{-1}(u_0)$ и $v_1 \in \pi^{-1}(u_1)$ эквивалентны, если для некоторых $W_0' \ni u_0$ и $W_1' \ni u_1$ выполняется соотношение $v_1 = \psi^T(v_0)$. Будем обозначать это отношение эквивалентности тем же символом Γ_W, что и псевдогруппу голономии. Пусть TW_n/Γ_W – фактормножество и $p : TW_n \to TW_n/\Gamma_W$ – каноническая проекция. Пусть, далее, $X_0' \in TW_n$ – произвольная точка, $x_0' = \pi(X_0')$ – проекция точки X_0' на W_n и $X_0 = \varphi(x') \in M_n^{\mathbb{D}}$. Выберем открытую окрестность $W_0' \ni x_0'$ точки x_0' такую, что ограничение $\varphi|W_0' : W_0' \to M_n^{\mathbb{D}}$ является вложением и диффеоморфизмом на подмногообразие $W_0 \subset M_n^{\mathbb{D}}$. Пусть, затем, $X_1 = (\pi_1 \circ \Sigma \circ T_{tr}\varphi)(X_0')$ и γ – путь в слое L_{X_0} канонического слоения $\mathcal{F}$ на многообразии $M^{\mathbb{D}}$ такой, что $[\gamma] = X_1$. Будем предполагать, что в окрестности точек X_0 и X_1 на $M^{\mathbb{D}}$ выбраны вышеуказанные $\mathbb{D}$-карты $(\widehat{U}_0, \widehat{h}_0)$ и $(\widehat{U}_1, \widehat{h}_1)$ такие, что образы $\widehat{h}_0(\widehat{U}_0)$ и $\widehat{h}_1(\widehat{U}_1)$ имеют вид $V \times \dot{V}_0$ и $V \times \dot{V}_1$, где V, $\dot{V}_0$ и $\dot{V}_1$ – открытые параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$, и, кроме того, $W_0 = \varphi(W_0')$ в $\mathbb{D}$-карте $(\widehat{U}_0, \widehat{h}_0)$ определяется уравнениями $\dot{x}^i = \dot{x}_0^i$. Поскольку, очевидно, всякий локальный слой канонического слоения, содержащийся в области $\widehat{U}_1$, проходит через эту область только один раз, проекция π_1 осуществляет диффеоморфизм между $(\pi^V)^{-1}(W_0) \bigcap (\pi_1)^{-1}(\widehat{U}_1) \subset (\pi^V)^{-1}(W_0)$ и $\widehat{U}_1$. В соответствии с имеющейся на $(\pi^V)^{-1}(W_0)$ структуре $\mathbb{D}$-гладкого многообразия этот диффеоморфизм является $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом. Подмножеству $(\pi^V)^{-1}(W_0) \bigcap (\pi_1)^{-1}(\widehat{U}_1)$ взаимно однозначно соответствует открытое подмножество $\widehat{U}_1' \subset \pi^{-1}(W_0') \subset TW_n$. По построению проекция $p : TW_n \to TW_n/\Gamma_W$, ограниченная на $\widehat{U}_1'$, является взаимно однозначным отображением $p_1' : \widehat{U}_1' \to \widehat{U}_1'' \subset TW_n/\Gamma_W$. Это позволяет ввести на множестве TW_n/Γ_W атлас $\mathcal{A}_W$, состоящий из $\mathbb{D}$-карт, определяемых отображениями вида $Th' \circ (p_1')^{-1} : \widehat{U}_1'' \to \mathbb{D}^n$, где $h' : W_0 \to \mathbb{R}^n$ – некоторая карта на многообразии W_n, превращающий TW_n/Γ_W в топологическое многообразие.

Определение. Пусть $M_n^{1\mathbb{D}}$ и $M_n^{2\mathbb{D}}$ – полные $\mathbb{D}$-гладкие многообразия размерности n, $\varphi^1 : W_n^1 \to M_n^{1\mathbb{D}}$ и $\varphi^2 : W_n^2 \to M_n^{2\mathbb{D}}$ – погружения полных трансверсалей, а Γ_W^1 и Γ_W^2 – соответствующие псевдогруппы голономии. Псевдогруппы голономии Γ_W^1 и Γ_W^2 назовем изоморфными, если существуют диффеоморфизм $f : W_n^1 \to W_n^2$ такой, что при изоморфизме касательных расслоений $Tf : TW_n^1 \to TW_n^2$ всякая диаграмма (11) для открытых подмножеств W_0' и W_1' многообразия W_n^1 переходит в диаграмму (11) для открытых подмножеств $f(W_0')$ и $f(W_1')$ многообразия W_n^2.

Теорема 1. 1) *Пусть $M_n^{\mathbb{D}}$ – полное $\mathbb{D}$-гладкое многообразие размерности n, а $\varphi : W_n \to M_n^{\mathbb{D}}$ – погружение полной трансверсали. Тогда преобразования $\mathbb{D}$-координат на пересечении областей определения атласа $\mathcal{A}_W$ являются $\mathbb{D}$-гладкими, и TW_n/Γ_W, как $\mathbb{D}$-гладкое многообразие, $\mathbb{D}$-диффеоморфно многообразию $M_n^{\mathbb{D}}$.*

2) *Если псевдогруппы голономии Γ_W^1 и Γ_W^2 двух полных $\mathbb{D}$-гладких многообразий $M_n^{1\mathbb{D}}$ и $M_n^{2\mathbb{D}}$ на полных погруженных трансверсалях $\varphi^1 : W_n^1 \to M_n^{1\mathbb{D}}$ и $\varphi^2 : W_n^2 \to M_n^{2\mathbb{D}}$ изоморфны, то многообразия $M_n^{1\mathbb{D}}$ и $M_n^{2\mathbb{D}}$ являются $\mathbb{D}$-диффеоморфными.*

Доказательство. 1) $\mathbb{D}$-диффеоморфизм между TW_n/Γ_W и $M_n^{\mathbb{D}}$ задается отображением
$$\Phi = \pi_1 \circ \Sigma \circ T_{tr}\varphi : TW_n \to M_n^{\mathbb{D}}, \tag{12}$$
которое по построению является локальным $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом и постоянно на классах эквивалентных элементов по отношению эквивалентности Γ_W.

2) Поскольку при изоморфизме псевдогрупп голономии Γ_W^1 и Γ_W^2, соответствующем диффеоморфизму $f : W_n^1 \to W_n^2$, всякая диаграмма $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов (11) для открытых подмножеств W_0' и W_1' многообразия W_n^1 переходит в диаграмму $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов (11) для открытых подмножеств $f(W_0')$ и $f(W_1')$ многообразия W_n^2, то тем самым индуцируется взаимно однозначное соответствие $F : M_n^{1\mathbb{D}} \cong TW_n^1/\Gamma_W^1 \to TW_n^2/\Gamma_W^2 \cong M_n^{2\mathbb{D}}$. Второе утверждение предложения поэтому следует из утверждения 1) и коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
TW_n^1 \arrow[rrr, "Tf"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\Phi^1"'] & & & TW_n^2 \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\Phi^2"] \\
& W_n^1 \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\varphi^1"] & W_n^2 \arrow[dr, "\varphi^2"'] & \\
M_n^{1\mathbb{D}} \arrow[rrr, "F"] & & & M_n^{2\mathbb{D}}
\end{tikzcd}, \tag{13}$$

в которой отображения Φ_1 и Φ_2 определяются формулой (12) с отображениями φ_1 и φ_2 соответственно. □

Теорема 2. *Пусть $F : M_n^{1\mathbb{D}} \to M_n^{2\mathbb{D}}$ – диффеоморфизм между двумя полными $\mathbb{D}$-гладкими многообразиями, являющийся по отношению к каноническим слоениям на этих многообразиях изоморфизмом в категории слоений, а $\varphi : W_n \to M_n^{1\mathbb{D}}$ – полная погруженная трансверсаль. Отображение F является $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда псевдогруппы голономии на погруженных трансверсалях $\varphi : W_n \to M_n^{1\mathbb{D}}$ и $F \circ \varphi : W_n \to M_n^{2\mathbb{D}}$ совпадают.*

Доказательство. При $\mathbb{D}$-диффеоморфизме $F : M_n^{1\mathbb{D}} \to M_n^{2\mathbb{D}}$ локальным трансверсалям $W_0 = \varphi(W_0')$, $W_1 = \varphi(W_1')$ на $M_n^{1\mathbb{D}}$ и локальным трансверсалям $(F\circ\varphi)(W_0')$, $(F\circ\varphi)(W_1')$ на $M_n^{2\mathbb{D}}$ соответствует одна и та же диаграмма (11), представляющая $\mathbb{D}$-диффеоморфизм из псевдогруппы локальных $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов касательного расслоения TW_n.

Обратно, если при диффеоморфизме F псевдогруппы голономии на полных погруженных трансверсалях $\varphi : W_n \to M_n^{1\mathbb{D}}$ и $F\circ\varphi : W_n \to M_n^{2\mathbb{D}}$ совпадают, то возникает диаграмма (13), в которой $W_n^1 = W_n^1 = W$, $f = id_W$, $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^2 = F\circ\varphi$, и нижняя строка является $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом. □

2. Торы над алгеброй $\mathbb{D}$

Алгебру $\mathbb{D}$ можно рассматривать как регулярный $\mathbb{D}$-модуль и как двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Произвольный базис $\{V_\alpha = v_\alpha + \dot{v}_\alpha\varepsilon\}$, $\alpha = 1,2$, в алгебре $\mathbb{D}$ как векторном пространстве определяет подгруппу (решетку)

$$\Lambda = \{X \in \mathbb{D} \,|\, X = \lambda^\alpha V_\alpha,\ \lambda^\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha = 1,2\}$$

в аддитивной группе алгебры $\mathbb{D}$. Базис, определяющий решетку Λ, будем называть базисом этой решетки. Подгруппу Λ можно рассматривать как группу преобразований регулярного модуля $\mathbb{D}$, действующую на $\mathbb{D}$ сдвигами. Пусть $T = T(\Lambda) = \mathbb{D}/\Lambda$ – соответствующее факторпространство. Каноническая проекция

$$\pi : \mathbb{D} \to T \tag{14}$$

является универсальным накрытием. Если $U' \subset \mathbb{D}$ – открытое множество, инъективно проектирующееся на T, и $\pi(U') = U$, то $(\pi|U')^{-1} : U \to U' \subset \mathbb{D}$ является $\mathbb{D}$-картой на T. Совокупность таких карт, в которой множество подмножеств $U \subset T$ образует покрытие, является атласом, превращающим T в одномерное $\mathbb{D}$-гладкое многообразие. Будем называть тор $T = T(\Lambda)$ с индуцированной структурой $\mathbb{D}$-гладкого многообразия $\mathbb{D}$-*тором.*

Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ будем рассматривать как подмножество в $\mathbb{D}$. Ограничение $\pi|\mathbb{R} : \mathbb{R} \to T$ проекции (14) является полной погруженной трансверсалью $\mathbb{D}$-гладкого многообразия T. На касательном расслоении $T\mathbb{R}$ возникает естественная структура $\mathbb{D}$-модуля, естественно изоморфного регулярному $\mathbb{D}$-модулю $\mathbb{D}$: касательному вектору $\dot{x}$ в точке $x \in \mathbb{R}$ при этом изоморфизме соответствует элемент $x + \dot{x}\varepsilon \in \mathbb{D}$, а операциям сложения и умножения на дуальные числа в $T\mathbb{R}$, возникающим в результате применения касательного функтора T к операциям сложения и умножения на вещественные числа в $\mathbb{R}$, при этом соответствуют операции сложения и умножения на дуальные числа в модуле $\mathbb{D}$ (см., например, [15]). Сдвиг модуля $\mathbb{D}$ на вектор V_α является $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом ψ^T из верхней строки диаграммы (11), в которой открытые подмножества W_0' и W_1' совпадают со всей прямой $\mathbb{R}$. Таким образом, псевдогруппа голономии на погруженной трансверсали $\varphi = \pi|\mathbb{R} : \mathbb{R} \to T$ порождается группой сдвигов модуля $\mathbb{D}$ на векторы решетки Λ.

Для комплексных торов имеет место следующий результат (см., например, [19]): два тора $T(\Lambda) = \mathbb{C}/\Lambda$ и $T(\Lambda') = \mathbb{C}/\Lambda'$ комплексно аналитически диффеоморфны тогда и только тогда, когда решетка Λ переходит в решетку Λ' при умножении модуля $\mathbb{D}$ на некоторое комплексное число. Целью настоящего раздела является доказательство аналогичного утверждения для $\mathbb{D}$-торов и выяснение строения $\mathbb{D}$-диффеоморфизмов между $\mathbb{D}$-торами.

Пусть $T = T(\Lambda)$ и $T' = T(\Lambda')$ – $\mathbb{D}$-торы, определяемые решетками Λ и Λ' соответственно, и $\{V_\alpha\}$, $\alpha = 1,2$, – базис решетки Λ. Предположим, что отображение

$F : T \to T'$ является $\mathbb{D}$-диффеоморфизмом. $\mathbb{D}$-диффеоморфизм F индуцирует $\mathbb{D}$-диффеоморфизм $\widetilde{F}$ между универсальными накрывающими пространствами $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}'$ торов T и T', реализованными как множества гомотопических классов путей на T и T' с началами в некоторой точке $x_0 \in T$ и точке $F(x_0) \in T'$ соответственно. Будем считать, что каждое из пространств $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}'$ отождествлено с модулем $\mathbb{D}$ таким образом, что $\widetilde{F}(0) = 0$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "\pi'"] \\ T \arrow[r, "F"] & T' \end{tikzcd} . \tag{15}$$

Поскольку $\mathbb{D}$-диффеоморфизм $\widetilde{F}$ накрывает $\mathbb{D}$-диффеоморфизм F, а псевдогруппы голономии торов T и T' на погруженных трансверсалях $\varphi = \pi|\mathbb{R} : \mathbb{R} \to T$ и $F \circ \varphi = \pi|\mathbb{R} : \mathbb{R} \to T'$ должны совпадать, то для любого $X \in \mathbb{D}$ должно выполняться соотношение $\widetilde{F}(X + V_\alpha) = \widetilde{F}(X) + V'_\alpha$, где $\{V'_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, – некоторый базис решетки Λ'. В частности, для базисов $\{V_\alpha\}$ и $\{V'_\alpha\}$ решеток Λ и Λ' имеем (при $X = 0$)

$$\widetilde{F}(V_\alpha) = V'_\alpha. \tag{16}$$

Рассмотрим равенство $\widetilde{F}(X+V_\alpha)-\widetilde{F}(X) = V'_\alpha = \mathrm{const}$. Левая часть этого равенства представляет собой $\mathbb{D}$-гладкую функцию $G_\alpha(X) = \widetilde{F}(X+V_\alpha) - \widetilde{F}(X)$ переменного $X \in \mathbb{D}$, являющуюся константой. Поэтому $dG_\alpha/dX = dG_\alpha/dx \equiv 0$ и

$$\frac{d\widetilde{F}}{dx}(X + V_\alpha) = \frac{d\widetilde{F}}{dx}(X), \quad \alpha = 1, 2. \tag{17}$$

Соотношение (17) означает, что функция $d\widetilde{F}/dx$ имеет вид $d\widetilde{F}/dx = \overline{F} \circ \pi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, где $\overline{F} : T \to \mathbb{D}$ – некоторая $\mathbb{D}$-гладкая функция на $\mathbb{D}$-торе T. Пусть $\overline{F} = \overline{F}^0 + \overline{F}^1\varepsilon$ – разложение значений функции $\overline{F}$ по базису алгебры $\mathbb{D}$. Функции $\overline{F}^0 : T \to \mathbb{R}$ и $\overline{F}^1 : T \to \mathbb{R}$ – гладкие функции, определенные на торе. Так как тор является компактным множеством, эти функции достигают своих максимального и минимального значений и, следовательно, являются ограниченными. Если $d\widetilde{F}/dx = d\widetilde{F}^0/dx + \varepsilon d\widetilde{F}^1/dx$ – разложение производной $d\widetilde{F}/dx$ по стандартному базису $\{1, \varepsilon\}$ алгебры $\mathbb{D}$, то для функций $d\widetilde{F}^0/dx$ и $d\widetilde{F}^1/dx$ выполняются соотношения $d\widetilde{F}^0/dx = \overline{F}^{\,0} \circ \pi$ и $d\widetilde{F}^1/dx = \overline{F}^{\,1} \circ \pi$. Отсюда следует, что производные $d\widetilde{F}^0/dx$ и $d\widetilde{F}^1/dx$ являются ограниченными функциями. Производная $\widetilde{F}' = d\widetilde{F}/dx$ $\mathbb{D}$-гладкой функции $\widetilde{F}(X) = f(x) + (f'(x)\dot{x} + g(x))\varepsilon$ имеет вид

$$\widetilde{F}'(x) = f'(x) + (f''(x)\dot{x} + g'(x))\varepsilon. \tag{18}$$

Если при некотором значении $x = x_0$ производная $f''(x_0)$ не равна нулю, то функция $f''(x_0)\dot{x}$ может принимать как угодно большие по абсолютной величине значения при неограниченном возрастании переменной $\dot{x}$, и функция $d\widetilde{F}^1/dx$ не может быть ограниченной. Поэтому $f''(x) \equiv 0$ и, следовательно, $f'(x) = a = \mathrm{const}$. В результате формула (18) приобретает вид $d\widetilde{F}/dx = a + g'(x)\varepsilon$, откуда следует, что

$$\widetilde{F}(X) = a(x + \dot{x}\varepsilon) + g(x)\varepsilon, \tag{19}$$

где $g(0) = 0$ в соответствии с условием $\widetilde{F}(0) = 0$.

Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то отображение $\widetilde{F}$ является гомотетией $\widetilde{F}(X) = a(x + \dot{x}\varepsilon)$. При ограничении этой гомотетии на решетку Λ соотношение (16) принимает вид $V'_\alpha = aV_\alpha$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$.

Если функция $g(x)$ не равна нулю тождественно, представим ее в виде $g(x) = bx + h(x)$. При этом функция (19) принимает вид

$$\widetilde{F}(X) = (a + b\varepsilon)(x + \dot{x}\varepsilon) + h(x)\varepsilon, \tag{20}$$

где $h(0) = 0$ в соответствии с условием $\widetilde{F}(0) = 0$.

Если функция $h(x)$ в (20) тождественно равна нулю, то $\widetilde{F}(X) = (a+b\varepsilon)(x+\dot{x}\varepsilon)$, и при ограничении отображения $\widetilde{F}$ на решетку Λ соотношение (16) принимает вид $V'_\alpha = (a + b\varepsilon)V_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Предполагаем далее, что функция $h(x)$ не равна нулю тождественно. Из условий (17) следует, что $h'(x + v_\alpha) = h'(x)$, где $V_\alpha = v_\alpha + \dot{v}_\alpha\varepsilon$. Поэтому

$$h(x + v_\alpha) = h(x) + c_\alpha, \quad c_\alpha = \text{const}. \tag{21}$$

Из формулы (16) тогда следует, что

$$c_\alpha = h(v_\alpha) = \dot{v}'_\alpha - bv_\alpha - a\dot{v}_\alpha. \tag{22}$$

Подставляя в (21) вместо x числа v_1, v_2, $-v_1$, $-v_2$ и учитывая (22), приходим к следующим условиям, которым должна удовлетворять функция $h(x)$:

$$h(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2) = \lambda^1 c_1 + \lambda^2 c_2 \quad \text{при} \quad \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Предположим сначала, что в (23) $v_1 : v_2 = p : q$, где p и q – взаимно простые целые числа. Пусть $kp + mq = 1$, где $k, m \in \mathbb{Z}$, и $e = kv_1 + mv_2$. Тогда $v^1 = pe$, $v^2 = qe$. Действительно, умножая первое из уравнений $v^1 = pt$, $v^2 = qt$ на k, а второе на q, получим $t = e$. Кроме того, $c_1 = h(v_1) = ph(e)$, $c_2 = h(v_2) = qh(e)$ и, следовательно, $c_\alpha = (h(e)/e)v_\alpha$. Полагая $\dot{a} = b + (h(e)/e)$, получим $v'_\alpha + \dot{v}'_\alpha\varepsilon = (a + \dot{a}\varepsilon)(v_\alpha + \dot{v}_\alpha\varepsilon)$.

Если в (23) одна из координат v_α равна нулю, скажем $v_2 = 0$, то из (22) следует, что $c_2 = h(0) = 0$ и $\dot{v}'_2 = a\dot{v}_2$. Полагая $\dot{a} = b + (v_1/c_1)$, получим $V'_\alpha = (a + \dot{a}\varepsilon)V_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Рассмотрим теперь случай, когда отношение $v_1 : v_2$ есть иррациональное число. В этом случае подмножество $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2,\ \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{Z}\}$ является всюду плотным на прямой $\mathbb{R}$. Действительно, факторизуя вещественную прямую $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}v^1$, образованной числами kv_1, $k \in \mathbb{Z}$, получим окружность $\mathbb{S}(v_1)$ длины v_1. Проекция $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}(v_1)$ отображает все точки kv_1, $k \in \mathbb{Z}$, в одну точку $M_0 \in \mathbb{S}(v_1)$. Среди точек $p(v_2)$, $p(2v_2)$, $\ldots$, $p(nv_2)$ найдутся две $p(mv_2)$ и $p(m'v_2)$, расстояние δ между которыми не больше чем v^1/n. Поскольку расстояние между точками $p(x)$ и $p(y)$ на $\mathbb{S}(v_1)$ равно расстоянию между $p(x + kv_2)$ и $p(y + kv_2)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, то точки $p(mv_2)$, $p(m + (m' - m)v_2)$, $p(m + 2(m' - m)v_2)$, $\ldots$, $p(m + k(m' - m)v_2)$, $k > (v^1/\delta)$, расположены на окружности таким образом, что расстояние между соседними точками не больше чем v_1/n. Если точка $p(m_1 v_2)$ при некотором $m_1 \in \mathbb{Z}$ находится от точки M_0 на расстоянии ω, это значит, что существует $k_1 \in \mathbb{Z}$ такое, что расстояние между $k_1 v_1$ и $m_1 v_2$ равно ω. Пусть, для определенности, $m_1 v_2 - k_1 v_1 = \omega$. Тогда множество точек 0, $\pm(m_1 v_2 - k_1 v_1)$, $\pm 2(m_1 v_2 - k_1 v_1)$, $\ldots$, $\pm s(m_1 v_2 - k_1 v_1)$, $s \in \mathbb{N}$, на прямой $\mathbb{R}$ обладает таким свойством, что расстояние между соседними равно ω. Поэтому существуют последовательности целых чисел k_n и m_n $(n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющих условию

$$|k_n v_1 - m_n v_2| < \delta_n \to 0. \tag{24}$$

Поскольку $h(k_n v_1) = k_n c_1$, $h(m_n v_2) = m_n c_2$ и функция $h(x)$ непрерывна, то из (24) следует, что

$$|k_n c_1 - m_n c_2| < \omega \to 0. \tag{25}$$

Соотношения (24) и (25) эквивалентны соответственно соотношениям

$$\left|\frac{v_1}{v_2} - \frac{m_n}{k_n}\right| < \frac{\delta_n}{k_n v_2} \to 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{c_1}{c_2} - \frac{m_n}{k_n}\right| < \frac{\varepsilon_n}{k_n B} \to 0,$$

из которых следует, что $v_1 : v_2 = c_1 : c_2$ и, следовательно, $c_2 : v_2 = c_1 : v_1$. Поскольку шаг $k_n v_1 - m_n v_2$ в силу (24) может быть сделан как угодно малым, любое вещественное число можно приблизить числами $k_n v_1 - m_n v_2$, прибавляя к числу вида pv_1 необходимое кратное $q(k_n v_1 - m_n v_2)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, а поскольку

$$h(x) = \frac{c_1}{v_1} x \tag{26}$$

при $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, то равенство (26) сохраняется для всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, в рассматриваемом случае формула (20) принимает вид

$$\widetilde{F}(X) = (a + \dot{a}\varepsilon)(x + \dot{x}\varepsilon), \tag{27}$$

где $\dot{a} = b + (c_1/v_1)$, и при ограничении на решетку Λ соотношение (16) принимает вид $V'_\alpha = (a + \dot{a}\varepsilon)V_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Сформулируем следствие проведенных выше рассуждений.

Теорема 3. *Два $\mathbb{D}$-тора $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ $\mathbb{D}$-диффеоморфны тогда и только тогда, когда существует элемент $A = a + \dot{a}\varepsilon \in \mathbb{D}$ такой, что $\Lambda' = A\Lambda$.*

В случае, когда слои канонических слоений на $\mathbb{D}$-диффеоморфных $\mathbb{D}$-торах $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ являются всюду плотными, $\mathbb{D}$-диффеоморфизм между $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ определяется формулой

$$\widetilde{F}(X) = AX + B, \tag{28}$$

где A, $B \in \mathbb{D}$ и элемент A определен однозначно.

Доказательство. Появление слагаемого B в формуле (28) по сравнению с формулой (27) объясняется тем, что в предыдущих рассмотрениях предполагалось, что $\widetilde{F}(0) = 0$. Остается проверить, что в случае, когда отношение $v_1 : v_2$ является иррациональным числом, не существует $\mathbb{D}$-диффеоморфизма $\mathbb{D}$-тора $T(\Lambda)$ на себя, при котором один базис решетки Λ переходит в другой. Предположим, что $\mathbb{D}$-диффеоморфизм (27) является нетождественным автоморфизмом решетки Λ. Применяя $\mathbb{D}$-диффеоморфизм $X \mapsto (v_1 + \dot{v}_1\varepsilon)^{-1}X$ к модулю $\mathbb{D}$, мы преобразуем Λ в решетку, первый элемент базиса которой является единицей, поэтому без ограничения общности можно предполагать, что базис решетки Λ имеет вид

$$\{1, V_2\} = \{1, v_2 + \dot{v}_2\varepsilon\}, \quad \text{где} \quad v_2 \notin \mathbb{Q}. \tag{29}$$

При умножении векторов базиса (29) решетки Λ на $a + \dot{a}\varepsilon$ получим векторы нового базиса $\{V'_1, V'_2\}$ этой же решетки, поэтому

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & m \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} k & m \\ p & q \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Отсюда следует, что $(a+\dot{a}\varepsilon)\cdot 1 = k\cdot 1 + m(v_2+\dot{v}_2\varepsilon)$ и $(a+\dot{a}\varepsilon)(v_2+\dot{v}_2\varepsilon) = p\cdot 1 + q(v_2+\dot{v}_2\varepsilon)$. Сравнивая коэффициенты при базисных элементах, получаем равенства

$$k + mv_2 = a, \quad p + qv_2 = av_2, \quad m\dot{v}_2 = \dot{a}, \quad q\dot{v}_2 = a\dot{v}_2 + \dot{a}v_2. \tag{30}$$

Подставив выражение для $\dot a$ из третьего равенства (30) в четвертое и используя первое и второе равенства, получим $q\dot v_2 = a\dot v_2 + m\dot v_2 v_2 = (2a-k)\dot v_2$. Поскольку $\dot v_2 \neq 0$, отсюда следует, что $a = (k+q)/2 \in \mathbb{Q}$ и $v_2 \in \mathbb{Q}$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

3. $\mathbb{D}$-гладкие многообразия, ассоциированные с аффинным многообразием

Структура аффинного многообразия на многообразии M_n задается атласом

$$\mathcal{A} = \{h_\alpha : U_\alpha \ni x \mapsto \{x^i_\alpha\} \in U^*_\alpha \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in A}, \tag{31}$$

функции перехода $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ которого имеют вид $x^i_\alpha = a^i_k(\alpha,\beta)x^k_\beta + b^i(\alpha,\beta)$, где $a^i_k(\alpha,\beta)$ и $b^i(\alpha,\beta)$ – локально постоянные функции координат x^k_β. Аффинное многообразие M_n называется *радиантным* [21], если оно обладает атласом, для которого $b^i(\alpha,\beta) = 0$ для всех α и β. С аффинным многообразием M_n естественно ассоциируются следующие два локально тривиальных расслоения (см. [10, 21], а также [20] для многообразий над алгебрами Вейля):

1) $\pi : OM_n \to M_n$ с атласом $\{H_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U^*_\alpha \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in A}$, функции перехода которого $H_\alpha \circ H_\beta^{-1} : \{x^i_\beta, y^i_\beta\} \mapsto \{x^i_\alpha, y^i_\alpha\}$, соответствующие атласу (31), имеют вид

$$x^i_\alpha = a^i_k(\alpha,\beta)x^k_\beta + b^i(\alpha,\beta), \quad y^i_\alpha = a^i_k(\alpha,\beta)y^k_\beta + b^i(\alpha,\beta); \tag{32}$$

2) $\tilde\pi : \tilde OM_n \to M_n$ с атласом $\{\tilde H_\alpha : \tilde\pi^{-1}(U_\alpha) \to U^*_\alpha \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in A}$, функции перехода которого $\tilde H_\alpha \circ \tilde H_\beta^{-1} : \{x^i_\beta, y^i_\beta\} \mapsto \{x^i_\alpha, y^i_\alpha\}$, соответствующие атласу (31), имеют вид

$$x^i_\alpha = a^i_k(\alpha,\beta)x^k_\beta + b^i(\alpha,\beta), \quad y^i_\alpha = a^i_k(\alpha,\beta)y^k_\beta. \tag{33}$$

Расслоения OM_n и $\tilde OM_n$ называются соответственно [20] *каноническим соприкасающимся* и *каноническим радиантным* расслоениями аффинного многообразия M_n. Расслоение $\tilde OM_n$ естественно эквивалентно касательному расслоению многообразия M_n.

В работе [10] на пространствах этих расслоений были введены структуры n-мерных $\mathbb{D}$-гладких многообразий $O^{\mathbb{D}}M_n$ и $\tilde O^{\mathbb{D}}M_n$ со следующими атласами соответственно:

$$\mathcal{A}^O = \{H^O_\alpha = \psi\circ H_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{D}^n\}_{\alpha\in A},\ \tilde{\mathcal{A}}^O = \{\tilde H^O_\alpha = \psi\circ\tilde H_\alpha : \tilde\pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{D}^n\}_{\alpha\in A},$$

где $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni \{x^i, y^i\} \mapsto \{X^i = y^i + \varepsilon x^i\} \in \mathbb{D}^n$.

Теорема 4. *$\mathbb{D}$-гладкие многообразия $O^{\mathbb{D}}M_n$ и $\tilde O^{\mathbb{D}}M_n$, ассоциированные со связным полным аффинным многообразием M_n, $\mathbb{D}$-диффеоморфны тогда и только тогда, когда многообразие M_n радиантно.*

Доказательство. По отношению к структурам $\mathbb{D}$-гладких многообразий $O^{\mathbb{D}}M_n$ и $\tilde O^{\mathbb{D}}M_n$ слои расслоений (32) и (33) являются глобальными трансверсалями. Поэтому в качестве погруженной трансверсали для многообразия $\tilde OM_n$ можно взять отображение $\varphi : W_n = \mathbb{R}^n \to \tilde O^{\mathbb{D}}M_n$, являющееся аффинным изоморфизмом на слой $\tilde O_xM_n$ канонического радиантного расслоения (33) над точкой $x \in M_n$. Касательное расслоение $TW_n = T\mathbb{R}^n$ в этом случае естественно отождествляется с $\mathbb{D}$-модулем $\mathbb{D}^n$, а отображение (12) $\Phi : TW_n = \mathbb{D}^n \to \tilde O^{\mathbb{D}}M_n$ является накрытием. Из уравнений (33) следует, что существует вложение $\iota : M_n \to \tilde O^{\mathbb{D}}M_n$, отображающее точку x с координатами x^i в точку $\iota(x)$ с координатами x^i, $y^i = 0$.

При отождествлении $\tilde{O}M_n \equiv TM_n$ отображение ι переходит в нулевое сечение касательного расслоения. Образ $\iota(M_n)$ является слоем канонического расслоения на $\mathbb{D}$-гладком многообразии $\tilde{O}M_n$, а по отношению к канонической аффинной связности на расслоении (33) отображение ι является плоским сечением. Предположим теперь, что имеется $\mathbb{D}$-диффеоморфизм $F : O^{\mathbb{D}}M_n \to \tilde{O}^{\mathbb{D}}M_n$. Поскольку слои канонических слоений на $\mathbb{D}$-гладких многообразиях $O^{\mathbb{D}}M_n$ и $\tilde{O}^{\mathbb{D}}M_n$ представляют собой интегральные многообразия горизонтальных распределений канонических плоских связностей в расслоениях (32) и (33), то при $\mathbb{D}$-диффеоморфизме F прообраз $F^{-1}(\iota(M_n))$ является слоем канонического слоения на $\mathbb{D}$-гладком многообразии $O^{\mathbb{D}}M_n$, который является образом плоского сечения $F^{-1} \circ \iota : M_n \to O^{\mathbb{D}}M_n$ расслоения (32). Как показано в работе [21], существование плоского сечения у расслоения (33) эквивалентно радиантности многообразия M_n.

Обратно, если аффинное многообразие M_n радиантно, то в картах атласа с линейными функциями склейки изоморфизм плоских аффинных расслоений (32) и (33) задается тождественными отображениями, а изоморфизм плоских аффинных расслоений определяет и $\mathbb{D}$-диффеоморфизм $\mathbb{D}$-гладких многообразий $O^{\mathbb{D}}M_n$ и $\tilde{O}^{\mathbb{D}}M_n$. $\square$

Литература

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – С. 5–247.

2. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 264 с.

3. *Малахальцев М.А.* Аналог когомологий Дольбо для многообразий над алгеброй дуальных чисел // Изв. вузов. Матем. – 1990. – № 11. – С. 82–84.

4. *Малахальцев М.А.* Об одном классе многообразий над алгеброй дуальных чисел // Труды геом. семинара. – Казань, 1991. – Т. 21. – С. 70–79.

5. *Thompson G., Schwardmann U.* Almost tangent and cotangent structures in the large // Trans. Am. Math. Soc. – 1991. – V. 327, No 1. – P. 313–328.

6. *Малахальцев М.А.* Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе // Труды геом. семинара. – Казань, 1994. – Т. 22. – С. 47–62.

7. *Vaisman I.* Lagrange geometry on tangent manifolds // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – No 51. – P. 3241–3266. – doi: 10.1155/S0161171203303059.

8. *Malyugina A.A, Shurygin V.V.* Complexes of differential forms associated with a normalized manifold over the algebra of dual numbers // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37, No 1. – P. 66–74. – doi: 10.1134/S1995080216010066.

9. *Шурыгин В.В.* О строении полных многообразий над алгебрами Вейля // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 11. – С. 88–97.

10. *Малюгина А.А, Шурыгин В.В.* Представления голономии одного класса многообразий над алгеброй дуальных чисел // Изв. Пенз. гос. пед. ун-та. – 2011. – № 26. – С. 128–136.

11. *Малюгина А.А, Шурыгин В.В.* Псевдогруппа голономии многообразия над алгеброй дуальных чисел и некоторые ее применения // Изв. вузов. Матем. – 2019. – № 2. – С. 82–88.

12. *Molino P.* Riemannian Foliations. – Boston: Birkhäuser, 1988. – 339 p.

13. *Shurygin V.V.* Structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras // Lobachevskii J. Math. – 1999. – V. 5. – P. 29–55.

14. *Тёрстон У.* Трехмерная геометрия и топология. – М.: МЦНМО, 2001. – 312 с.

15. *Shurygin V.V.* Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles // J. Math. Sci. – 2002. – V. 108, No 2. – P. 249–294. – doi: 10.1023/A:1012848404391.

16. *Phillips J.* The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold // Rocky Mt. J. Math. – 1987. – V. 17, No 1. – P. 151–165. – doi: 10.1216/RMJ-1987-17-1-151.

17. *Pogoda Z.* Horizontal lifts and foliations // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. II. – 1989. – V. 38, Suppl. 21. – P. 279–289.

18. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. – М.: Мир, 1983. – 302 с.

19. *Diamond F., Shurman J.* A first course in modular forms. – N. Y.: Springer, 2005. – 436 p.

20. *Шурыгин В.В.* Препятствия к радиантности для гладких многообразий над алгебрами Вейля // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 5. – С. 71–83.

21. *Goldman W., Hirsch M.W.* The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds // Trans. Am. Math. Soc. – 1984. – V. 26, No 2. – P. 629–649.

Поступила в редакцию
08.05.19

Малюгина Александра Александровна, ассистент кафедры геометрии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *alexandra.malyugina@gmail.com*

Шурыгин Вадим Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Vadim.Shurygin@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 3, pp. 438–455

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.438-455

Holonomy Pseudogroups as Obstructions to Equivalence of Manifolds over the Algebra of Dual Numbers

*A.A. Malyugina**, *V.V. Shurygin***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **alexandra.malyugina@gmail.com*, ***Vadim.Shurygin@kpfu.ru*

Received May 8, 2019

Abstract

A smooth manifold over the algebra of dual numbers $\mathbb{D}$ (a $\mathbb{D}$-smooth manifold) carries the canonical foliation whose leaves are affine manifolds. Extension of charts on a $\mathbb{D}$-smooth manifold along leaf paths allows ones to associate with an immersed transversal of the canonical foliation a pseudogroup of local $\mathbb{D}$-diffeomorphisms called the holonomy pseudogroup. In the present paper, holonomy pseudogroups are applied to the study of $\mathbb{D}$-diffeomorphisms between quotient manifolds of the algebra $\mathbb{D}$ by lattices. In particular, it is shown that a $\mathbb{D}$-diffeomorphism between two such manifolds exists if and only if one of the lattices is obtained from the other by the multiplication by a dual number. In addition, it is shown that some $\mathbb{D}$-smooth manifolds naturally associated with an affine manifold are $\mathbb{D}$-diffeomorphic if and only if this manifold is radiant.

Keywords: affine manifold, manifold over algebra of dual numbers, foliation, foliated bundle, tangent bundle, tangent manifold, torus over the algebra of dual numbers, Weil bundle

References

1. Evtushik L.E., Lumiste Yu.G., Ostianu N.M., Shirokov A.P. Differential-geometric structures on manifolds. *J. Sov. Math.*, 1980, vol. 14, pp. 1573–1719. doi:10.1007/BF01084960
2. Vishnevskii V.V., Shirokov A.P., Shurygin V.V. *Prostranstva nad algebrami* [Spaces over Algebras]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1984. 264 p. (In Russian)
3. Malakhaltsev M.A. An analogue of Dolbeault cohomology for varieties over the algebra of dual numbers. *Sov. Math. (Izv. VUZov)*, 1990, vol. 34, no. 11, pp. 107–110.
4. Malakhaltsev M.A. A class of manifolds over the algebra of dual numbers. *Tr. Geom. Semin.*, 1991, vol. 21, pp. 70–79. (In Russian)
5. Thompson G., Schwardmann U. Almost tangent and cotangent structures in the large. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1991, vol. 327, no. 1, pp. 313–328.
6. Malakhaltsev M.A. Structures of a manifold over the algebra of dual numbers on a torus. *Tr. Geom. Semin.*, 1994, vol. 22, pp. 47–62. (In Russian)
7. Vaisman I. Lagrange geometry on tangent manifolds. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2003, no. 51, pp. 3241–3266. doi: 10.1155/S0161171203303059.

8. Malyugina A.A, Shurygin V.V. Complexes of differential forms associated with a normalized manifold over the algebra of dual numbers. *Lobachevskii J. Math.*, 2016, vol. 37, no. 1, pp. 66–74. doi: 10.1134/S1995080216010066.
9. Shurygin V.V. On the structure of complete manifolds over Weil algebras. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 11, pp. 84–93.
10. Malyugina A.A., Shurygin V.V. Holonomy representation for a class of manifolds over the algebra of dual numbers. *Izv. Penz. Gos. Pedagog. Univ.*, 2011, no. 26, pp. 128–136. (In Russian)
11. Malyugina A.A., Shurygin V.V. Holonomy pseudogroup of a manifold over the algebra of dual numbers and some its applications. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 74–79. doi: 10.3103/S1066369X19020099.
12. Molino P. *Riemannian Foliations.* Boston, Birkhäuser, 1988. 339 p.
13. Shurygin V.V. Structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras. *Lobachevskii J. Math.*, 1999, vol. 5, pp. 29–55.
14. Thurston W.P. *Three-Dimensional Geometry and Topology.* Princeton, N.J., Princeton Univ. Press. 1997, 328 p.
15. Shurygin V.V. Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles. *J. Math. Sci.*, 2002, vol. 108, no. 2, pp. 249–294. doi: 10.1023/A:1012848404391.
16. Phillips J. The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold. *Rocky Mt. J. Math.*, 1987, vol. 17, no. 1, pp. 151–165. doi: 10.1216/RMJ-1987-17-1-151.
17. Pogoda Z. Horizontal lifts and foliations. *Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. II*, 1989, vol. 38, suppl. 21, pp. 279–289.
18. Kosniowski C. *A First Course in Algebraic Topology.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1980. 269 p.
19. Diamond F., Shurman J. *A First Course in Modular Forms.* New York, Springer, 2005. 436 p.
20. Shurygin V.V. Radiance obstructions for smooth manifolds over Weil algebras. *Russ. Math.*, 2005, vol. 49, no. 5, pp. 67–79.
21. Goldman W., Hirsch M.W. The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1984, vol. 26, no. 2, pp. 629–649. doi: 10.2307/1999812.

***Для цитирования*:** *Малюгина А.А., Шурыгин В.В.* Псевдогруппы голономии как препятствия к эквивалентности многообразий над алгеброй дуальных чисел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 438–455. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.438-455.

***For citation*:** Malyugina A.A., Shurygin V.V. Holonomy pseudogroups as obstructions to equivalence of manifolds over the algebra of dual numbers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 438–455. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.438-455. (In Russian)