Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

9 класс. Краткие решения

1. Можно ли выбрать параметры a, b, c так, что для всех x верно равенство

$$(x+a)^2 + (2x+b)^2 + (2x+c)^2 = (3x+1)^2 \ ?$$

Решение. Раскроем скобки: $x^2 + 2ax + a^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 + 4x^2 + 4cx + c^2 = 9x^2 + 6x + 1$, откуда $(2a + 4b + 4c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 6x + 1$. Достаточно подобрать числа a, b, c так, чтобы $a + 2b + 2c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Подходят числа $a = 1/3$, $b = c = 2/3$.

2. Азат выписал подряд все числа месяца: 123456789101112... и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

Решение. Всего выписано 47, 49, 51 или 53 числа. Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из нечётного числа цифр (9 и какое-то количество двузначных), а все остальные — из чётного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных участков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: покрашенных цифр в этом случае не более 5, непокрашенных — не более $8 \cdot 4 = 32$, итого — не более 37 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль невисокосного года) даёт 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

3. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг (каждый сыграл с каждым по одной партии). Журналист в репортаже сообщил, что каждый участник выиграл столько же партий, сколько и свел вничью. Докажите, что журналист ошибся.

Решение. Каждый игрок сыграл 19 партий. Если i-тый участник выиграл a_i партий, то сыграл вничью тоже a_i матчей, а проиграл $19 - 2a_i$ партий. Так как выигранная одним участником партия является проигранной для другого, то суммарное количество всех выигранных партий равно суммарному количеству всех проигранных. Отсюда $a_1 + \ldots + a_{20} = (19 - 2a_1) + \ldots + (19 - 2a_{20})$, тогда $a_1 + \ldots + a_{20} = 19 \cdot 20/3$, но то число не является целым.

4. В треугольнике ABC стороны $CB = a$, $CA = b$. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K, а описанную вокруг треугольника окружность — в точке M. Окружность, описанная около треугольника AMK, вторично пересекает прямую AC в точке P. Найдите длину отрезка AP.

Решение. Треугольник CPK равен треугольнику CBK, поскольку CK — общая сторона, $\angle PCK = \angle BCK$, $\angle KPC = \angle KMA = \angle CBK$. Последние два равенства следуют из того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Следовательно, $AP = |CP - CA| = |a - b|$.

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Математика»

10 класс. Краткие решения.

1. Произведение четырех чисел — корней уравнений $x^2+2bx+c=0$ и $x^2+2cx+b=0$, равно 1. Известно, что числа b и c положительны. Найдите их.

Решение. Пусть корни первого уравнения — числа x_1 и x_2, второго — числа x_3 и x_4. По Теореме Виета $1=x_1x_2x_3x_4=bc$. Запишем дискриминанты обоих уравнений: $4b^2-4c\geqslant 0$, $4c^2-4b\geqslant 0$. Следовательно, $b^2\geqslant c=1/b$, но так как $b>0$, то на него можно домножить и получить $b^3\geqslant 1$. Отсюда следует, что $b\geqslant 1$. Аналогично, $c\geqslant 1$. Но раз их произведение равно единице, то $b=c=1$.

2. Два игрока по очереди заменяют один (любой) из коэффициентов a_7, ..., a_0 в выражении

$$a_7\cdot 8^7+a_6\cdot 8^6+a_5\cdot 8^5+\ldots+a_2\cdot 8^2+a_1\cdot 8+a_0\cdot 1$$

на $+1$ или -1 (по своему выбору). Докажите, что второй игрок всегда может добиться того, что результат после его последнего хода будет делиться на 13.

Решение. $8^2+1=65$ делится на 13. Второму для победы достаточно разбить все числа на пары: (a_7,a_5), (a_6,a_4), (a_3,a_1) и (a_2,a_0). Теперь, если первый игрок заменяет одно число из какой-то пары, то второй заменяет другое число из этой же пары на то же самое число.

3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot\sqrt{2013}+2013\cdot\sqrt{2012}}>0,97$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Следовательно, вся сумма равна

$$1-\frac{1}{\sqrt{2013}}>0,97$$

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK и на сторонах BA и BC взяты соответственно точки M и N так, что $\angle AKM=\angle CKN=\frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что прямая AC касается окружности, описанной около треугольника MBN.

Решение. Пусть $\angle ABC=2\alpha$, тогда $\angle MKN=\pi-\angle AKM-\angle CKN=\pi-2\alpha$, то есть, $\angle MKN+\angle MBN=\pi$. Следовательно, четырехугольник $MBNK$ — вписанный, то есть, описанная окружность треугольника MBN проходит через точку K. Прямая CK образует с хордой KN угол α, равный вписанному углу, опирающемуся на эту хорду, следовательно, является касательной к окружности в точке K. Аналогично, AK касается этой окружности. Отсюда следует, что AC касается этой окружности в точке K.

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

11 класс. Краткие решения.

1. Докажите, что функция
$$f(x) = \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin x + \cos x}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
является нечетной.

Решение. $f(x) = \frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а эта функция нечетна.

2. Доказать, что для любого n многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ делится на многочлен x^2+x+1.

Решение. Индукция по n. При $n=0$ имеем: $(x+1)^{2\cdot 0+1}+x^{0+2} = x^2+x+1$. При $n=k+1$ имеем:
$$(x+1)^{2(k+1)+1}+x^{(k+1)+2} = (x+1)^2(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2} =$$
$$(x^2+2x+1)(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2} = (x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x((x+1)^{2k+1}+x^{k+2}).$$

3. На плоскости даны точка M и окружность ω Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M до двух концов диаметра окружности ω не зависит от выбора диаметра.

Решение. Пусть C — центр окружности ω, R — ее радиус, $M=O$ — начало координат. а A и B — концы некоторого диаметра окружности ω. Обозначим $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{x}$, тогда $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{x}$, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{c}+\mathbf{x}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{c}-\mathbf{x}$,

Имеем:
$$(\mathbf{c}+\mathbf{x})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{x})^2 = 2(\mathbf{c}^2+\mathbf{x}^2) = 2(\mathbf{c}^2+R^2).$$

Решение 2. Рассмотрим произвольный диаметр AB, пусть центр окружности — точка O, радиус равен R. Пусть $AM=a$, $BM=b$, $OM=m$. Пусть $\angle MOA = \alpha$, тогда $\angle MOB = \pi-\alpha$. Тогда $a^2 = m^2+R^2+2mR\cos\alpha$, $b^2 = m^2+R^2-2mR\cos\alpha$, откуда $a^2+b^2 = 2(m^2+R^2)$ — не зависит от выбора диаметра AB.

4. Доказать, что $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[4]{3})\ldots(1+\sqrt[11]{3}) > 2013\sqrt[3]{3}$.

Решение. Имеем: $1+\sqrt[n]{3} = 1+3^{\frac{1}{n}} = 1+(3^{\frac{1}{2n}})^2 > 2\cdot 1\cdot 3^{\frac{1}{2n}}$. Поэтому
$$(1+\sqrt{3})(1+\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[4]{3})\ldots(1+\sqrt[11]{3}) > 2^{10}\cdot 3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{22}\right)} > 2^{10}\cdot 3 = 3072 > 2013\cdot\frac{3}{2} > 2013\sqrt[3]{3}.$$

При решении используется неравенство $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{22} > 1$, оно легко проверяется подсчетом.