ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
1 декабря 2020 г.

1. Прямая ℓ пересекает ветвь гиперболы в точках A_1 и A_2, а её асимптоты в точках B_1 и B_2. Доказать, что длины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 равны.
Решение. Асимптоты гиперболы Φ образуют кривую второго порядка – пару пересекающихся прямых Φ^*. У кривых Φ и Φ^* совпадают центры и диаметры, сопряжённые (направлению) прямой ℓ. Пусть M — точка пересечения указанного общего диаметра с прямой ℓ. Тогда $A_1M = A_2M$ и $B_1M = B_2M$.

2. Вычислить определённый интеграл $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{(2x+5)dx}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+4}$.
Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
Решение.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{(2x+5)dx}{(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+4} = \int_{-2}^{-1} \frac{d(x^2+5x+5)}{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+4}$$

После замены $y = x^2+5x+5$ получаем, что искомый интеграл есть

$$\int_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Примечание. Система Wolfram Mathematica, в отличие от Maple, Matlab и студентов, не умеет в настоящее время брать этот интеграл в такой форме (умеет только в немного преобразованной)

(*А.В.Пасечник, Э.Ю.Лернер*)

3. Найти геометрическое место точек $z \in \mathbb{C}$, для которых n-й член ряда

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

превосходит по модулю все остальные члены этого ряда.
Ответ: В круговом кольце $n < |z| < n+1$.
Решение. Пусть $a_n = \frac{z^n}{n!}$. Найдем значения z, для которых $|a_n| > |a_{n-1}|$:

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| > \left|\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\right| \quad \Rightarrow \quad |z| > n$$

Заметим, что в этой же области также $|z| > n-1$, поэтому $|a_{n-1}| > |a_{n-2}|$, следовательно, выполняется неравенство $|a_n| > |a_{n-2}|$. По этой же причине a_n будет больше по модулю всех предыдущих членов ряда.
Найдем значения z, для которых $|a_n| > |a_{n+1}|$:

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| > \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| \quad \Rightarrow \quad |z| < n+1$$

В этой же области $|z| < n+k$, поэтому выполняется для всех $k > 1$, поэтому a_n будет больше по модулю всех последующих членов ряда.

4. Доказать неравенство $|a^3+b^3+c^3-3abc| \leqslant (a^2+b^2+c^2)^{3/2}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Решение. Рассмотрим три вектора с координатами $\vec{u} = \{a, b, c\}$, $\vec{v} = \{c, a, b\}$, $\vec{w} = \{b, c, a\}$. Заметим, что левая часть неравенства – модуль смешанного произведения $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, то есть объём параллелепипеда, построенного на данных векторах. Это произведение не может быть больше произведения длин векторов, откуда следует исходное неравенство.

(*А.Ю.Эвнин*)

5. Дана целочисленная матрица A размера 2×2. Известно, что существует положительное число M, что $|\mathrm{tr}(A^k)| < M$ при любом натуральном k. Чему могут быть равны собственные значения матрицы A?
Напоминание: Следом $\mathrm{tr}(A)$ матрицы A называют сумму элементов главной диагонали.
Ответ: $0, \pm 1, \pm i, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
Решение. Для произвольной матрицы A размера 2×2 нетрудно проверить, что $\mathrm{tr}(A^k) = \lambda^k + \mu^k$, где λ, μ – собственные значения A. Для любых комплексных чисел λ и μ и любого натурального k имеем

$$2(\lambda\mu)^k = (\lambda^k + \mu^k)^2 - (\lambda^{2k} + \mu^{2k}) \quad \Rightarrow \quad 2|\lambda\mu|^k \leqslant |\lambda^k + \mu^k|^2 + |\lambda^{2k} + \mu^{2k}|$$

В нашем случае правая часть ограничена, поэтому $|\lambda\mu| = |\det A| \leqslant 1$. Напомним, что собственные числа λ, μ – корни характеристического уравнения $x^2 + bx + \det A = 0$. Следовательно, достаточно рассмотреть все случаи квадратных уравнений вида $x^2+bx = 0$ и $x^2+bx\pm1 = 0$, где $b \in \mathbb{Z}$, с ограниченной суммой k-х степеней корней. Первый случай приводит к корням (собственным числам) $\{0, \pm 1\}$. Во втором случае модули обоих собственных чисел должны быть равны единице, следовательно, либо $b = 0$, либо дискриминант квадратного уравнения неположителен (иначе модули корней будут различны). Отсюда $|b| < 3$. Перебрав всевозможные b получаем наборы корней из ответа.
Случаи действительных собственных значений реализуются диагональными матрицами, а пары $\pm i$, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ реализуются следующими матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*М.М.Ямалеев, Э.Ю.Лернер*)

6. На плоскости даны замкнутая непрерывная кривая γ, ограничивающая выпуклую область, и точка O внутри этой области. Доказать, что в кривую γ можно вписать треугольник ABC, такой что

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}.$$

Решение. 1. Пусть ℓ — произвольная прямая, проходящая через некоторую точку Q, лежащую внутри области, ограниченной кривой γ, а M и N — точки пересечения прямой ℓ с γ. Пусть $\ell(t)$ — прямая, получающаяся поворотом прямой $\ell = \ell(0)$ вокруг Q на угол $t \in [0, \pi]$, $M(t)$ и $M'(t)$ — соответствующие точки пересечения $\ell(t)$ с γ, а $k(t) = \overrightarrow{M(t)Q}/\overrightarrow{QM'(t)}$. Поскольку $k(\pi) = 1/k(0)$, то найдется такое значение $t = t_0$, при котором $k(t_0) = 1$.
2. Пусть теперь A, A', D, B и C — точки на γ, такие что $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'}$, а $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, тогда треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи.

7. Пусть $z_1, \ldots, z_{101}$ – различные числа, среднее арифметическое которых равно 20. Чему может быть равна сумма $\frac{(z_1)^{101}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\ldots(z_1-z_{101})} + \frac{(z_2)^{101}}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\ldots(z_2-z_{101})} + \ldots + \frac{(z_{101})^{101}}{(z_{101}-z_1)(z_{101}-z_2)\ldots(z_{101}-z_{100})}$?
Ответ: 2020.
Решение. Пусть $R > \max\{|z_1|, \ldots, |z_r|\}$. По теореме о вычетах искомая сумма совпадает с интегралом по контуру на комплексной плоскости

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{z^{101} dz}{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{101})}$$

или с (-1)-м членом разложения в ряд Лорана подынтегральной функции. Имеем:

$$\frac{1}{(1 - z_1/z)(1 - z_2/z)\ldots(1 - z_{101}/z)} = 1 + \frac{z_1 + \ldots + z_{101}}{z} + \ldots \qquad ,$$

где ряд справа равномерно сходится при $|z| \geqslant R$. Значит, искомая сумма равна $z_1 + z_2 + \ldots + z_{101} = 2020$.

8. За круглым столом сидит 13 хамелеонов: синих, зелёных и красных. В течение минуты каждый смотрит на двух своих соседей и выбирает себе следующий цвет. Если соседи у него одного цвета, он этот цвет и выбирает. А если разного, он выбирает третий возможный цвет. Каждую минуту раздаётся хлопок, и все хамелеоны одновременно перекрашиваются в выбранный ими следующий цвет. Доказать, что через несколько минут все они будут раскрашены так же, как в самом начале.
Решение. Всего раскрасок конечное количество, так что в какой-то момент они повторятся и дальше процесс зациклится. Чтобы доказать, что цикл начнется прямо с первой раскраски, достаточно проверить, что смена цветов – биективное преобразование. Поставим в соответствие каждому цвету остатки по модулю 3. Пусть хамелеон с номером i в текущий момент окрашен в цвет x_i, а в последующий – в цвет $\widetilde{x}_i$. Тогда $\widetilde{x}_i = 2(x_{i-1} + x_{i+1})$, то есть преобразование линейно.
Матрица этого преобразования невырождена. Действительно, в противном случае существовал бы нетривиальный прообраз нуля, то есть, все хамелеоны могли бы стать, скажем, красными, не обладая таковым свойством в предыдущий момент. Однако, в этом случае, в предыдущей момент цвета каждого второго хамелеона по кругу чередовались бы между синим и зелёным, повторяясь, таким образом, у каждого 4-го хамелеона. Поскольку 13 не делится на 4, такая раскраска невозможна. Из невырожденности следует существование обратного преобразования.

(Д.А.Звонкин)

9. С кубом $x_0 \times y_0 \times z_0 = 1 \times 1 \times 1$ выполняют следующие операции: на первом шаге увеличивают первую сторону так, чтобы объём куба увеличился на 1 (т.е. он превращается в параллелепипед $x_1 \times y_0 \times z_0 = 2 \times 1 \times 1$), потом выполняют аналогичные шаги 2 и 3, увеличивая при этом вторую и третью сторону параллелепипеда так, чтобы объём после каждого шага увеличивался на 1. Так, после второго шага параллелепипед будет иметь размеры $x_1 \times y_1 \times z_0 = 2 \times \frac{3}{2} \times 1$, после третьего – $x_1 \times y_1 \times z_1 = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$. Далее шаги повторяются, размеры полученного параллелепипеда после шага $3n$ обозначим $x_n \times y_n \times z_n$. Чему равен предел $\frac{y_n}{z_n}$ при $n \to \infty$?
Ответ: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
Решение. Объём параллелепипеда после шага k равен $k+1$, откуда следуют равенства

$$x_n \cdot y_{n-1} \cdot z_{n-1} = 3n - 1, \quad x_n \cdot y_n \cdot z_{n-1} = 3n, \quad x_n \cdot y_n \cdot z_n = 3n + 1.$$

Далее $\dfrac{y_n}{z_n} = \dfrac{(x_n y_n z_{n-1})^2}{(x_n y_n z_n)(x_n y_{n-1} z_{n-1})} \cdot \dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}} = \dfrac{(3n)^2}{(3n-1)(3n+1)} \cdot \dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}}$.
С учётом того, что $z_0 = y_0 = 1$ получим выражение в виде произведения

$$\frac{y_n}{z_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(3k)^2}{(3k-1)(3k+1)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(3k)^3}{(3k-1)(3k)(3k+1)} = \frac{(3^n \cdot n!)^3}{(3n+1)!}$$

Для предельного выражения используем формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{3n} \cdot (n!)^3}{(3n+1)(3n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{3n}}{(3n+1)} \cdot \frac{\sqrt{(2\pi n)^3} n^{3n}}{e^{3n}} \cdot \frac{e^{3n}}{\sqrt{6\pi n}(3n)^{3n}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Замечания. Предел отношения других сторон выражается через Гамма-функцию:

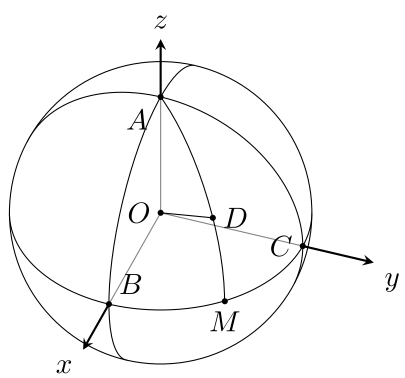
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(3k-1)^2}{(3k-2)(3k)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Аналог этой задачи для плоскости разобран в интернете.
См. https://mindyourdecisions.com/blog/2016/10/30/the-rectangle-ratio-a-surprising-answer-sunday-puzzle/
Ответ в нём представляет собой формулу Валлиса:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \ldots} = \frac{\pi}{2}$$

10. Класс $\mathscr{C}$ многочленов от трёх переменных x, y, z определен следующим образом:
1) Многочлены x, y, z, $x+1$, $y+1$, $z+1$ принадлежат $\mathscr{C}$;
2) Многочлен, отличный от x, y, z, $x+1$, $y+1$, $z+1$, принадлежит классу $\mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3$, где f_1, f_2, $f_3 \in \mathscr{C}$.
а) Существует ли $f \in \mathscr{C}$, такой что значение $f(x,y,z)$ чётно для всех целых x, y, z? (3 балла)
б) Существует ли $f \in \mathscr{C}$, такой что значение $f(x,y,z)+x+y+z$ чётно для всех целых x, y, z? (4 балла)
Ответ: а) нет. **б)** да.
Решение. а) Такой многочлен не существует, поскольку (по индукции) для каждого многочлена $f \in \mathscr{C}$ являются нечётными значения $f(x,y,z)+f(x+1,y+1,z+1)$, если x, y, z – целые (при смене четности аргументов четность функции меняется).
б) Если $d(x,y,z) = xy + yz + xz$, то примером такого многочлена является
$f(x,y,z) = d(x+1, d(x,y+1,z), d(x,y,z+1))$.
Замечание. Задача и решение являются переформулировкой теорем о классе самодвойственных булевых функций и его базисе.
Отметим, что при $x = 0$ многочлен $d(x,y,z)$ по модулю 2 эквивалентен булевой конъюнкции "y и z", а при $x = 1$ – булевой дизъюнкции "y или z". Тогда при $x = 0$ многочлен $d(x+1, d(x,y+1,z), d(x,y,z+1))$ эквивалентен булевому выражению "(не y и z) или (y и не z)", то есть сумме $y+z = x+y+z$. В силу самодвойственности $x+y+z$ и $d(x+1, d(x,y+1,z), d(x,y,z+1))$ отсюда вытекает эквивалентность этих выражений и при $x = 1$.
Эти вопросы полностью изложены в книге: Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций.

11. Бернхард построил равносторонний треугольник и провел в нём медианы. Оказалось, что их длины совпали с длинами сторон треугольника. В каком соотношении точка пересечения медиан делит медиану в этом треугольнике?
Ответ: $\frac{\arccos(1/\sqrt{3})}{\pi/2-\arccos(1/\sqrt{3})} = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2})}{\pi/2-\operatorname{arctg}(\sqrt{2})}$
Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B, C и проведем медиану AM. Из условия следует, что $\triangle MAC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle AMC = \angle ACM$. Но так как AM также является высотой, то все углы в $\triangle ABC$ – прямые. Это возможно в геометрии Римана или сферической геометрии. Но задачу можно решить и, пользуясь обычной трёхмерной евклидовой геометрией, если предположить, что прямым соответствуют большие круги на сфере. Исходный треугольник соответствует одной восьмой части сферы.



Пусть O – центр сферы единичного радиуса, D – точка пересечения медиан. Введем систему координат так, что центр сферы находится в начале координат, а оси координат проходят через вершины. Тогда точка D имеет координаты $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
Угол $\angle AOD = \arccos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$

Искомое отношение дуг $\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{DM}} = \dfrac{\angle AOD}{\pi/2 - \angle AOD} = \dfrac{\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)}{\pi/2 - \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)}$.

(*Д.Ф.Абзалилов*)