

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ  
КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ  
В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Учебное пособие. IV семестр*

*Курс лекций для студентов математического факультета  
проф. Ю.Г.Игнатьева*

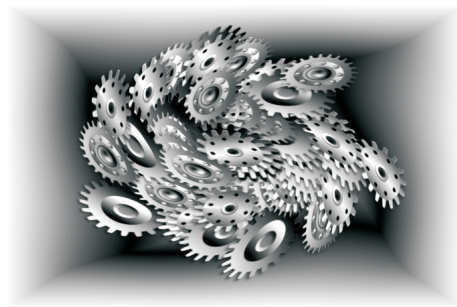
*(Специальности: математика и информатика, математика и английский  
язык)*

*Большое количество примеров по всем разделам!  
Примеры решения задач в пакете Maple*

**Большое количество  
конкретных примеров!**

**По просьбе студентов  
издание дополнено  
рядом примеров,  
выполненных с  
применением системы  
компьютерной  
математики Maple!**

*Лаборатория НИЛИТМО  
КФУ*



Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, протокол № 6 от 13 июня 2013 г.

УДК 513

**Игнатъев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Учебное пособие. IV семестр. - Казань: Казанский университет, 2013, - 204 с.**

Учебное пособие является приложением к Курсу лекций Автора по дифференциальной геометрии и посвящено изложению основ дифференциальной геометрии кривых и поверхностей. Курс лекций снабжен большим количеством примеров решений основных геометрических задач дифференциальной геометрии, в том числе и примеров решения задач дифференциальной геометрии средствами пакета программ Maple.

Материалы пособия предназначены для студентов математических факультетов педагогических институтов по специальностям «Математика», «Математика и информатика», «Математика и иностранный язык».

Рецензенты: **Сушков С.В.**, д-р. физ.-мат. наук,  
проф., (КФУ);  
**Мухлисов Ф.Г.**, д-р. физ.-мат. наук,  
проф., (КФУ)

©Казанский университет, 2013

©Игнатъев Ю.Г., 2013

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Дифференциальная геометрия кривых</b>	<b>8</b>
<b>I</b>	<b>Кривые и поверхности</b>	<b>9</b>
I.1	Дифференцирование и интегрирование векторной функции .	9
I.1.1	Бесконечно малые векторы . . . . .	9
I.1.2	Предел переменного вектора . . . . .	10
I.1.3	Векторная функция скалярного аргумента . . . . .	11
I.1.4	Производная векторной функции . . . . .	13
I.1.5	Геометрический смысл производной векторной функции .	14
I.2	Дифференцирование и интегрирование векторной функции .	15
I.2.1	Правила дифференцирования вектора . . . . .	15
I.2.2	Формула Тейлора . . . . .	18
I.2.3	Интегрирование векторной функции . . . . .	19
I.3	Векторные функции со специальными свойствами . . . . .	19
I.3.1	Вектор постоянной длины и вектор постоянного направления	19
I.3.2	Вектор, параллельный данной плоскости . . . . .	21
I.3.3	Круговая векторная функция . . . . .	22
I.4	Кривые в пространстве . . . . .	23
I.4.1	Параметризованная кривая . . . . .	23
I.4.2	Касательная параметризованной кривой . . . . .	25
I.4.3	Неявное уравнение плоской кривой . . . . .	27
I.5	Поверхности . . . . .	28
I.5.1	Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности . . .	28
I.5.2	Особая точка поверхности . . . . .	30
I.5.3	Неявное задание пространственной кривой . . . . .	31
I.6	Соприкосновение кривых и поверхностей . . . . .	32
I.6.1	$n$ -параметрическое семейство кривых . . . . .	32
I.6.2	Соприкосновение кривых . . . . .	33
I.6.3	Соприкосновение кривой и поверхности . . . . .	37

<b>II</b>	<b>Сопровождающий трехгранник</b>	<b>39</b>
II.1	Соприкасающаяся плоскость . . . . .	39
II.1.1	Определение соприкасающейся плоскости . . . . .	39
II.1.2	Уравнение соприкасающейся плоскости . . . . .	41
II.1.3	Касательная плоскость и соприкасающаяся плоскость . . . . .	42
II.1.4	Расстояние от точки кривой до соприкасающейся плоскости . . . . .	43
II.1.5	Точки уплощения . . . . .	45
II.2	Основной трехгранник . . . . .	45
II.3	Натуральная параметризация кривой . . . . .	47
II.3.1	Длина дуги . . . . .	47
II.3.2	Длина дуги как параметр . . . . .	49
II.3.3	Производные радиуса-вектора по натуральному параметру . . . . .	50
<b>III</b>	<b>Формулы Френе - Серре</b>	<b>52</b>
III.1	Единичные векторы основного трехгранника . . . . .	52
III.2	Формулы Френе - Серре . . . . .	53
III.3	Разложение производных по натуральному параметру . . . . .	56
III.4	Лемма о единичном векторе . . . . .	58
III.5	Геометрический смысл кривизны . . . . .	59
III.6	Геометрический смысл кручения . . . . .	61
III.7	Формулы для вычисления кривизны и кручения . . . . .	62
III.8	Кривизна плоской кривой . . . . .	64
<b>IV</b>	<b>Натуральные уравнения кривой</b>	<b>67</b>
IV.1	Натуральные уравнения . . . . .	67
IV.2	Кривые с общими натуральными уравнениями . . . . .	67
<b>V</b>	<b>Задачи дифференциальной геометрии кривых</b>	<b>70</b>
V.1	Общие задачи о кривых . . . . .	70
V.2	Кривая и касательная . . . . .	73
V.3	Поверхность и ее касательные . . . . .	73
V.4	Соприкосновение . . . . .	74
V.5	Сопровождающий трехгранник . . . . .	75
V.6	Формулы Френе - Серре . . . . .	79
V.7	Кривизна и кручение кривой . . . . .	82
V.8	Натуральные уравнения кривой . . . . .	85

<b>VI</b>	<b>Дифференциальная геометрия кривых в пакете Maple</b>	<b>87</b>
VI.1	Maple-процедура вычисления производных векторной функции скалярного аргумента . . . . .	87
VI.2	Процедура вычисления кривизны кривых . . . . .	88
VI.3	Процедура вычисления кручения кривых . . . . .	89
VI.4	Пример исследования кривых . . . . .	90
VI.5	Исследование кривых в евклидовом пространстве по их натуральным уравнениям . . . . .	93
VI.5.1	Задание кривой . . . . .	93
VI.5.2	Вычисление кривизны и кручения кривой . . . . .	95
VI.5.3	Формирование системы дифференциальных уравнений . . . . .	96
VI.5.4	Начальные условия . . . . .	99
VI.5.5	Задание натуральных уравнений кривой . . . . .	99
VI.5.6	Создание процедуры численного интегрирования . . . . .	101
<b>II</b>	<b>Дифференциальная геометрия поверхностей</b>	<b>106</b>
<b>VII</b>	<b>Первая квадратичная форма поверхности</b>	<b>107</b>
VII.1	Криволинейные координаты . . . . .	107
VII.2	Параметрическое уравнение поверхности . . . . .	110
VII.3	Касательные прямые к поверхности . . . . .	112
VII.4	Касательная плоскость к поверхности . . . . .	114
VII.5	Длина дуги на поверхности . . . . .	115
VII.6	Первая квадратичная форма поверхности . . . . .	116
VII.7	Угол между двумя линиями на поверхности . . . . .	116
VII.8	Площадь поверхности . . . . .	118
VII.9	Задачи на первую квадратичную форму поверхности . . . . .	120
<b>VIII</b>	<b>Внутренняя геометрия поверхности</b>	<b>123</b>
VIII.1	Наложимость поверхностей . . . . .	123
VIII.2	Преобразование первой квадратичной формы . . . . .	125
VIII.3	Задачи внутренней геометрии . . . . .	129
VIII.4	Геодезическая кривизна и геодезические линии . . . . .	129
VIII.4.1	Определение геодезической кривизны . . . . .	129
VIII.4.2	Геодезические линии и уравнения геодезических линий . . . . .	131
VIII.5	Геодезическая линия как кратчайшая . . . . .	134
VIII.6	Задачи внутренней геометрии поверхности . . . . .	138

<b>IX</b>	<b>Вторая квадратичная форма поверхности</b>	<b>145</b>
IX.1	Кривизна кривых на поверхности . . . . .	145
IX.2	Формулы для кривизн . . . . .	152
IX.3	Классификация точек поверхности . . . . .	154
IX.4	Задачи на вторую квадратичную форму поверхности . . . . .	156
<b>X</b>	<b>Геометрия поверхностей вращения</b>	<b>161</b>
X.1	Первая квадратичная форма . . . . .	161
X.2	Вторая квадратичная форма . . . . .	163
X.3	Геодезические поверхности вращения . . . . .	165
X.4	Геометрия сферы . . . . .	170
X.4.1	Метрика сферы . . . . .	170
X.4.2	Кривизна сферы . . . . .	173
X.4.3	Основные формулы для сферы . . . . .	173
X.4.4	Геодезические сферы . . . . .	174
X.4.5	Стереографическая проекция сферы на плоскость . . . . .	177
X.5	Геометрия псевдосферы . . . . .	179
X.5.1	Трактриса и псевдосфера . . . . .	179
X.5.2	Первая квадратичная форма псевдосферы . . . . .	182
X.5.3	Вторая квадратичная форма псевдосферы . . . . .	183
X.5.4	Геодезические псевдосферы . . . . .	184
<b>XI</b>	<b>Построение геодезической сети на псевдосфере средствами Maple</b>	<b>187</b>
XI.1	Задание псевдосферы и вычисление производных радиуса-вектора . . . . .	187
XI.2	Нахождение матрицы первой квадратичной формы псевдосферы . . . . .	188
XI.3	Вычисление символов Кристоффеля псевдосферы . . . . .	189
XI.4	Приведение уравнений геодезических к нормальной системе ОД У . . . . .	191
XI.5	Ввод группы начальных условий . . . . .	192
XI.6	Изображение верхней половины псевдосферы и линий начальных условий . . . . .	193
XI.7	Процедуры численного интегрирования нормальной системы ОДУ . . . . .	194
<b>Литература</b>		<b>201</b>

## Введение

Курс лекций является продолжением книг Автора “Аналитическая геометрия. Курс лекций. Часть I, Часть II.” [1], [2], “Проективная геометрия и методы изображений” [3]. В ней также нашли отражение основные идеи более ранней книги Автора [4]. Курс лекций построен в соответствии с требованиями нового Госстандарта Российской Федерации.

В данном Курсе лекций излагаются основные вопросы дифференциальной геометрии кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, рассмотрены вопросы внутренней геометрии поверхностей и элементы теории геодезических линий на поверхностях, а также изложены основные вопросы, связанные со второй квадратичной формой поверхности. В частности, установлена связь между геометрией Лобачевского и геометрией псевдосферы.

Существенное сокращение часов, отводимое в новом Госстандарте Российской Федерации на геометрию, при сохранении числа и качества вопросов, выносимых на Государственную аттестацию, потребовало и существенной переработки Курса геометрии.

В сравнении с предыдущими версиями Лекций в настоящей исправлены многочисленные ошибки и опечатки, опущены второстепенные вопросы и по многочисленным просьбам студентов *значительно* расширено количество примеров и иллюстраций, что делает удобным Курс лекций для самостоятельного решения задач по дифференциальной геометрии. Двадцать примеров решения стандартных задач собрано в виде отдельных разделов в конце соответствующих глав. Отдельная глава посвящена поверхностям вращения, и эту главу также можно рассматривать в качестве практического материала. Курс лекций сопровождается также и комплектами индивидуальных заданий, без которых он был бы не полным. Следует отметить, что *все типы задач*, входящих в индивидуальные задания, нашли отражение в настоящем Курсе.

В ряде важных случаев иллюстрации получены *точными* средствами компьютерной графики с помощью пакета символьной математики Maple. Автор также счел целесообразным ввести в курс ряд примеров решения стандартных задач дифференциальной геометрии средствами пакета программ символьной математики Maple, надеясь что это окупится в дальнейшем, в последующих научных изысканиях молодых математических талантов.

Автор

# Часть I

## Дифференциальная геометрия кривых



# Глава I

## Кривые и поверхности

### I.1 Дифференцирование и интегрирование векторной функции

#### I.1.1 Бесконечно малые векторы

Среди переменных векторов особенно важную роль играют *бесконечно малые векторы*.

**Определение ОI.1.** *Вектор называется бесконечно малым, если его абсолютная величина (или модуль) стремится к нулю.*

Чтобы отметить, что вектор  $\vec{\alpha}$  бесконечно мал, употребляют обычную запись:

$$\vec{\alpha} \rightarrow \vec{0}.$$

Для бесконечно малых векторов можно установить теоремы, совпадающие по своим формулировкам с теоремами обычного анализа.

**Теорема ТI.1.** *Сумма ограниченного числа бесконечно малых векторов бесконечно мала.*

Переходя к рассмотрению произведений, напомним, что в векторной алгебре существуют следующие типы произведений векторов:

1. произведение вектора на скаляр

$$\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha},$$

2. скалярное произведение двух векторов

$$\lambda = (\vec{\alpha} \vec{\beta}),$$

3. векторное произведение двух векторов

$$\lambda = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix}.$$

Во всех этих случаях абсолютная величина произведения меньше произведения абсолютных величин сомножителей или равна ему. Поэтому, если один из сомножителей бесконечно мал, а другой только ограничен по абсолютной величине, то абсолютная величина произведения, а значит и само произведение бесконечно мало. Таким образом для всех трех случаев имеет место следующая общая теорема.

**Теорема П1.2.** *Если вектор участвует в некотором произведении, один из сомножителей которого бесконечно мал, а другой только ограничен по абсолютной величине, то и произведение бесконечно мало.*

Заметим, что для векторных, так же, как и для скалярных величин, можно говорить об относительном порядке их бесконечной малости, рассматривая для этого отношение их абсолютных величин. Если предел отношения абсолютных величин бесконечно малых векторов  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$  равен нулю, то порядок  $\vec{\alpha}$  выше порядка  $\vec{\beta}$ , если же он равен числу, отличному от нуля, то их порядки одинаковы.

### I.1.2 Предел переменного вектора

**Определение ОI.2.** *Постоянный вектора  $\vec{\alpha}$  называется пределом переменного вектора  $\vec{u}$ , если разность между ними бесконечно мала.*

Пользуясь обычными обозначениями запишем это так:

$$\vec{\alpha} = \lim \vec{u}$$

или

$$\vec{u} \rightarrow \vec{\alpha},$$

если

$$\vec{u} - \vec{\alpha} = \vec{\alpha}' \rightarrow 0.$$

Из определения следует таким образом, что переменный вектор равен сумме своего предела и некоторого бесконечно малого вектора.

### I.1. Дифференцирование и интегрирование векторной функции

Пользуясь этим соотношением, а также свойствами бесконечно малых векторов, приведем основные теоремы о пределах суммы и произведения, заметив, что доказательства этих теорем формально ничем не отличаются от доказательств соответствующих теорем скалярного анализа.

**Теорема ТП.3.** *Предел суммы векторов равен сумме пределов слагаемых.*

$$\lim \vec{w} = \lim(\vec{u} + \vec{v}) = \lim \vec{u} + \lim \vec{v}.$$

**Теорема ТП.4.** *При умножении вектора на скаляр и при скалярном или векторном перемножении векторов предел произведения равен произведению пределов сомножителей.*

Так, например, в случае векторного произведения:

$$\lim \left[ \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} \\ u & v \end{matrix} \right] = \left[ \lim \vec{u} \cdot \lim \vec{v} \right].$$

В рассмотренном случае векторного перемножения следует обратить внимание на порядок сомножителей. Пределы, перемножаемые в правой части, должны следовать друг за другом в том же порядке, что и соответствующие им множители левой части. Предел постоянного вектора следует считать равным ему самому.

Имея это в виду, получим как следствие следующую теорему.

**Теорема ТП.5.** *В условиях теоремы ТП.4 постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

#### I.1.3 Векторная функция скалярного аргумента

Вектор может изменяться в зависимости от переменного скаляра. Пример такой зависимости мы находим в механике. Если  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  есть радиус-вектор движущейся точки  $M$ , то он изменяется в зависимости от времени, которое измеряется скалярной величиной.

**Определение ОI.3.** *Переменный вектор  $\vec{u}$  называется функцией скалярного аргумента  $t$ , если всякому значению этого аргумента соответствует определенное значение вектора.*

Чтобы отметить такую зависимость, употребляют запись

$$\vec{u} = \vec{u}(t).$$

Чтобы задать вектор  $\vec{u}$ , зависящий от скалярного аргумента  $t$  его координатами  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , нужно задать эти координаты в функциях этого аргумента. С этой точки зрения задание векторной функции скалярного аргумента равносильно заданию трех зависящих от него скалярных переменных:

$$u_x = u_x(t); \quad u_y = u_y(t); \quad u_z = u_z(t).$$

Непрерывность векторной функции определяется также, как и в скалярном анализе. Разность значений функции, соответствующих данному значению  $t = t_1$  и приращенному значению  $t = t_1 + \Delta t$

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t_1 + \Delta t) - \vec{u}(t_1),$$

называется *приращением* функции  $\vec{u}$ , соответствующим приращению  $\Delta t$  аргумента.

**Определение ОI.4.** *Функция называется непрерывной при  $t = t_1$ , если ее приращение, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, тоже бесконечно мало.*

Абсолютная величина приращения выражается через приращение координат так:

$$|\Delta \vec{u}|^2 = \Delta u_x^2 + \Delta u_y^2 + \Delta u_z^2.$$

Если при  $\Delta t \rightarrow 0$  приращение координат стремится к нулю, то и  $|\Delta \vec{u}| \rightarrow 0$  и функция  $\vec{u}$  непрерывна. Обратное, если  $|\Delta \vec{u}| \rightarrow 0$ , то приращение любой из координат, например:

$$|\Delta u_x| \leq |\Delta \vec{u}|$$

Отсюда следует: для непрерывности векторной функции скалярного аргумента необходима и достаточна непрерывность ее координат

### 1.1.4 Производная векторной функции

Операция дифференцирования вводится в векторном анализе совершенно так же, как и в анализе скалярном.

**Определение ОI.5.** Производной векторной функции по ее скалярному аргументу называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда это приращение аргумента стремится к нулю.

Итак:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}.$$

Так как при делении вектора  $\Delta \vec{u}$  на число  $\Delta t$  снова получается вектор, то предел этого вектора, т.е. производная, является вектором. Результат перехода к пределу, очевидно, зависит от того, какому значению  $t$  давалось приращение  $\Delta t$ , а значит, сам вектор производной зависит от  $t$  и определяет новую векторную функцию аргумента  $t$

$$\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}(t).$$

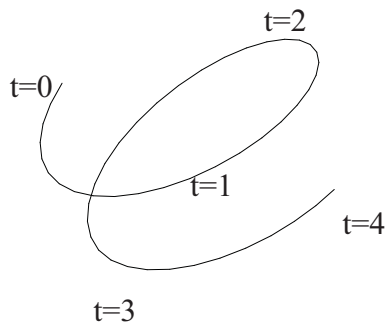
Для этой функции снова можно вычислять производную и т.д. Производные второго, третьего и т.д. порядков обозначают:

$$\frac{d \dot{\vec{u}}}{dt} = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \ddot{\vec{u}}; \quad \frac{d \ddot{\vec{u}}}{dt} = \frac{d^3 \vec{u}}{dt^3} = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{u}}.$$

**Определение ОI.6.** Если функция допускает существование производных до определенного порядка при всех значениях  $t$  некоторого промежутка  $t_1 \leq t_2$ , то она называется дифференцируемой соответствующее число раз на этом промежутке.

### Годограф векторной функции

Чтобы получить наглядное представление о векторной функции, можно поступить так. Поставим в соответствие всякому ее значению геометрический вектор  $\vec{u}$ , начало которого совпадает с началом координат, а конец с некоторой точкой  $M$ . При изменении  $\vec{u}$  точка  $M$  опишет некоторую пространственную кривую, которую называют *годографом* данной функции.

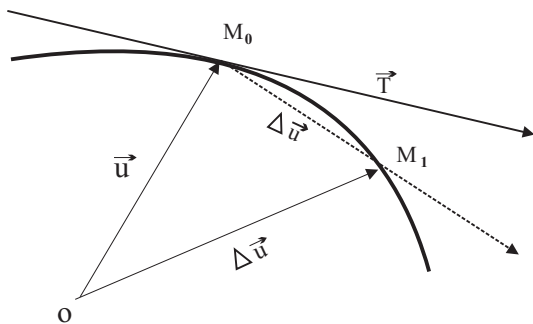


**Рис. I.1.** Годограф векторной функции

При рассмотрении векторных функций годограф играет роль, в известной мере, аналогичную роли графика функций в скалярном анализе. Однако, для полного представления о функции задания годографа недостаточно. Кроме задания его формы и положения в пространстве, следует еще иметь возможность определить, какое значение аргумента  $t$  (времени, например,) соответствует каждой из его точек [Рис. I.1](#).

### I.1.5 Геометрический смысл производной векторной функции

С помощью годографа можно установить геометрический смысл операций, приводящих к получению производной.



**Рис. I.2.** К геометрическому значению производной

Возьмем на годографе две точки  $M_0$  и  $M_1$ , соответствующие значению аргумента  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$  и построим их радиус - векторы

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{OM_1} = \vec{u} + \Delta \vec{u}.$$

Приращение функции  $\Delta u$  будет равно разности этих радиус - векторов

$$\Delta \vec{u} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M_1}$$

и будет соответствовать отрезку хорды годографа, соединяющей точки  $M_0$  и  $M_1$  [Рис. I.2](#)

## 1.2 Дифференцирование и интегрирование векторной функции

Составляя отношение приращений, получим вектор

$$\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \overrightarrow{M_0 M_1},$$

направленный по секущей  $M_0 M_1$ , так как при делении вектора на число, направление вектора не изменяется. Предположим, что функция  $\vec{u} = \vec{u}(t)$  непрерывна, заставим приращение аргумента  $\Delta t$  стремиться к нулю. При этом вектор  $\Delta \vec{u} = \overrightarrow{M_0 M_1}$  будет тоже стремиться к нулю, а точка  $M_1$  будет двигаться по годографу, приближаясь неограниченно к точке  $M_0$ .

Вектор  $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \overrightarrow{M N}$  тоже будет вращаться вместе с секущей вокруг точки  $M_0$ , стремясь занять некоторое предельное положение  $M T$ .

Но предельное положение секущей, проходящей через две бесконечно сближающиеся точки кривой, есть касательная к этой кривой.

Таким образом, вектор

$$\overrightarrow{M T} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

направлен по касательной к годографу.

Итак:

Производная векторной функции по ее скалярному аргументу есть вектор, направленный по касательной годографа в его соответствующей точке.

Полученное геометрическое истолкование производной определяет только направление вектора  $\vec{u}$ . Его абсолютная величина зависит от того, какой смысл имеет аргумент  $t$ . В частности, если  $t$  - время, то  $|\dot{\vec{u}}| = v$  есть модуль скорости, с которой точка движется по годографу. Сам вектор  $\vec{u}$  называется в таком случае вектором скорости точки  $M$ .

### 1.2.1 Правила дифференцирования вектора

Обычные правила дифференцирования суммы и произведения имеют место и в векторном анализе.

**Теорема П.6.** *Производная суммы векторов равна сумме производных слагаемых.*

**Доказательство:**  $\langle\langle$  Пусть

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v},$$

где  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  дифференцируемые функции  $t$ .

Тогда

$$\Delta\vec{w} = \vec{u} + \Delta\vec{u} + \vec{v} + \Delta\vec{v} - (\vec{u} + \vec{v}) = \Delta\vec{u} + \Delta\vec{v}$$

$$\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

или

$$\frac{d(\vec{u} + \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (\text{I.1})$$

$\rangle\rangle$

**Теорема П.7.** Произведение вектора на скаляр, скалярное и векторное произведения дифференцируются по обычному правилу скалярного анализа.

**Доказательство:**  $\langle\langle$  Во всех трех перечисленных случаях доказательства одинаковы. Поэтому рассмотрим только один случай, а именно - векторное произведение. Пусть

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix},$$

где  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  дифференцируемые функции аргумента  $t$ .

Приращение  $\vec{w}$

$$\Delta\vec{w} = \begin{bmatrix} \vec{u} + \Delta\vec{u} \cdot \vec{v} + \Delta\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\vec{u} \cdot \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \Delta\vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\vec{u} \cdot \Delta\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \cdot \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \cdot \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{v} \end{bmatrix}$$

но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

а

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{v} = 0$$



## I.2. Дифференцирование и интегрирование векторной функции

в силу непрерывности функции  $\vec{v}$ .

Поэтому

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \left[ \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} \right].$$

Проведя аналогичные рассуждения и выкладки, мы придем к следующим формулам:

$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{u}) = \lambda \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\vec{u}, \quad (\text{I.2})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} \vec{v}) = \vec{u} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \vec{v}, \quad (\text{I.3})$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \cdot \vec{v} \right] = \left[ \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} \right], \quad (\text{I.4})$$

Из формулы I.3 следует:

Правило для дифференцирования скалярного квадрата

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}^2) = 2\vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt}. \quad (\text{I.5})$$

>>

**Теорема П.8.** *Смешанное произведение векторов дифференцируется по следующему правилу:*

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left( \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}, \vec{w} \right) + \left( \vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{w} \right) + \left( \vec{u}, \vec{v}, \frac{d\vec{w}}{dt} \right) \quad (\text{I.6})$$

Для доказательства этой теоремы надо принять во внимание, что

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ([\vec{u} \vec{v}] \vec{w}),$$

**Теорема П1.9.** Производная постоянного вектора равна нулю, так как его приращение равно нулю.

**Теорема П1.10.** Векторный или скалярный постоянный множитель можно выносить за знак производной, что следует из теорем П1.7 и П1.9.

Полученные теоремы применим к нахождению координат производной по заданным координатам дифференцируемого вектора.

Пусть

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}.$$

Применяя к правой части равенства правило дифференцирования суммы и вынося постоянные векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  за знак производной, получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du_x}{dt} \vec{i} + \frac{du_y}{dt} \vec{j} + \frac{du_z}{dt} \vec{k}. \quad (\text{I.7})$$

Таким образом: координаты производной равны производным от соответствующих координат дифференцируемой векторной функции.

## I.2.2 Формула Тейлора

Если функция  $\vec{u} = \vec{u}(t)$  дифференцируема в промежутке от  $t$  до  $t + \Delta t$ , то ее координаты дифференцируемы столько же раз в этом промежутке. Напишем для каждой из них формулу Тейлора:

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x + \dot{x}\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{x}\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \overset{(n)}{x}(t)\Delta t^n + o(\Delta t^n); \\ y(t + \Delta t) = y + \dot{y}\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{y}\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \overset{(n)}{y}(t)\Delta t^n + o(\Delta t^n); \\ z(t + \Delta t) = z + \dot{z}\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{z}\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \overset{(n)}{z}(t)\Delta t^n + o(\Delta t^n). \end{cases}$$

В векторном виде получим:

$$\vec{u}(t + \Delta t) = \vec{u}(t) + \dot{\vec{u}}(t)\Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\vec{u}}(t)\Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \overset{(n)}{\vec{u}}(t)\Delta t^{n-1} + \vec{R}_n(t), \quad (\text{I.8})$$

где остаточный член,  $\vec{R}_n$ , равен:

### I.3. Векторные функции со специальными свойствами

$$\vec{R}_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \vec{u}^{(n+1)}(\bar{t}) \delta \bar{t}^{n+1}, \quad (\text{I.9})$$

где  $\bar{t} \in [t, t + \Delta t]$ .

#### I.2.3 Интегрирование векторной функции

**Определение ОI.7.** Неопределенным интегралом от векторной функции  $\vec{u}(t)$  называется функция

$$\vec{v}(t) = \int \vec{u}(t) dt,$$

если

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}(t).$$

Эта функция, очевидно, определяется, как и в скалярном анализе, с точностью до постоянного слагаемого, однако это слагаемое векторное. Определенным интегралом будем называть следующий постоянный вектор

$$\int_a^b \vec{u}(t) dt = \vec{v}(b) - \vec{v}(a).$$

Основные свойства интегралов сохраняются и для интегралов векторной функции. Так, например, интеграл суммы векторных функций равен сумме интегралов от слагаемых функций, а постоянный множитель (векторный или скалярный) можно выносить за знак интеграла.

Опираясь на эти свойства, получим выражения интеграла через координаты функции

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \vec{i}u_x(t) + \vec{j}u_y(t) + \vec{k}u_z(t), \\ \int \vec{u}(t) dt &= \vec{i} \int u_x(t) dt + \vec{j} \int u_y(t) dt + \vec{k} \int u_z(t) dt. \end{aligned}$$

### I.3 Векторные функции со специальными свойствами

#### I.3.1 Вектор постоянной длины и вектор постоянного направления

**1. Вектор постоянной длины.** Если вектор, изменяя свое направление

сохраняет неизменной абсолютную величину, то

$$\vec{u}^2 = \text{Const}.$$

Дифференцируя левую и правую часть этого равенства, будем иметь вследствие формулы I.5:

$$\vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} = 0, \quad (\text{I.10})$$

откуда следует: производная вектора постоянной длины перпендикулярна этому вектору.

Этот результат имеет следующее геометрическое значение. Годограф функции  $\vec{u} = \vec{u}(t)$  есть некоторая кривая, лежащая всеми своими точками на поверхности сферы радиуса  $R = |\vec{u}|$  с центром в начале координат. Так как вектор  $\frac{d\vec{u}}{dt}$  направлен по касательной к этой кривой, то предыдущий результат равносителен следующей геометрической теореме:

**Теорема ПI.11.** *Касательная к сферической кривой перпендикулярна радиусу сферы, направленному в точку прикосновения.*

**2. Вектор постоянного направления.** Если вектор  $\vec{u}$  изменяет свой модуль, сохраняя направление, то его можно представить в виде произведения этого модуля на постоянный единичный вектор  $\vec{\tau}$

$$\vec{u} = u\vec{\tau}. \quad (\text{I.11})$$

Дифференцируя это равенство и вынося  $\vec{\tau}$  за знак производной, получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{\tau} = \frac{\dot{u}}{u}\vec{u};$$

обозначив скаляр  $\frac{\dot{u}}{u}$  через  $\lambda$ , будем иметь

$$\dot{\vec{u}} = \lambda\vec{u}. \quad (\text{I.12})$$

Докажем, что условие I.12 достаточно для того, чтобы вектор  $\vec{u}$  имел постоянное направление. Для этого продифференцируем I.11, не предполагая сначала, что единичный вектор  $\vec{\tau}$  постоянен, и воспользуемся условием I.12.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{\tau} + u\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lambda\vec{u} = \lambda u\vec{\tau}.$$

Но производная единичного вектора  $\vec{\tau}$  перпендикулярна этому вектору. Поэтому после скалярного умножения последнего равенства на  $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ , мы получим

$$\vec{u} \left( \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right)^2 = 0.$$

### I.3. Векторные функции со специальными свойствами

Так как  $u \neq 0$ , то

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0,$$

откуда следует, что вектор  $\vec{\tau}$  постоянен. Итак:

Коллинеарность вектора и его производной необходима и достаточна для того, чтобы этот вектор сохранял неизменным свое направление.

#### I.3.2 Вектор, параллельный данной плоскости

Если вектор  $\vec{u}$ , изменяясь, остается параллельным данной плоскости, то он перпендикулярен нормальному вектору  $\vec{a}$  этой плоскости. Запишем условие перпендикулярности в виде равенства

$$\left( \vec{a} \vec{u} \right) = 0$$

и продифференцируем это равенство дважды, имея в виду, что вектор  $\vec{a}$  постоянен. Вследствие этого

$$\vec{a} \frac{d\vec{u}}{dt} = 0; \quad \vec{a} \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = 0.$$

Вектор  $\vec{u}$  и две его производные перпендикулярны одному направлению, следовательно параллельны одной плоскости. Условие их компланарности можно записать в виде равенства нулю их смешанного произведения

$$\left( \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}} \right) = 0. \quad (\text{I.13})$$

Докажем достаточность этого условия для того, чтобы вектор  $\vec{u}$ , изменяясь, оставался параллельным неизменной плоскости.

Исключая из рассмотрения случай коллинеарности  $\dot{\vec{u}}$  и  $\vec{u}$ , разобранный ранее и очевидно не противоречащий нашему утверждению, обозначим их векторное произведение

$$\left[ \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} \right] = \vec{a}.$$

Дифференцируя это равенство получим:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left[ \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} \right] + \left[ \vec{u} \cdot \ddot{\vec{u}} \right]$$

но  $\ddot{\vec{u}}$  компланарен  $\vec{u}$  и  $\dot{\vec{u}}$  вследствие I.13, и может быть представлен в виде их линейной комбинации

$$\ddot{\vec{u}} = \lambda \dot{\vec{u}} + \eta \vec{u}.$$

Подставляя выражение второй производной, получим

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lambda \left[ \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} \right] + \mu \left[ \vec{u} \cdot \vec{u} \right] = \lambda \vec{a}.$$

Это равенство показывает, что вектор  $\vec{a}$  имеет постоянное направление. Но он перпендикулярен вектору  $\vec{u}$ , который вследствие этого должен оставаться параллельным неизменной плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{a}$ .

Итак: Для того, чтобы вектор, изменяясь оставался параллельным неизменной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы он был компланарен векторам своей первой и второй производной.

### I.3.3 Круговая векторная функция

Предположим, что в плоскости задан единичный вектор  $\vec{e}$ , образующий с положительным направлением оси  $Ox$  угол  $\varphi$ , отсчитанный против часовой стрелки.

Так как значение вектора вполне определяется заданием этого угла, то вектор  $\vec{e}$  есть функция  $\varphi$ :

$$\vec{e} = \vec{e}(\varphi),$$

определенная таким образом функция весьма часто встречается в приложениях. Мы будем называть ее *круговой функцией* в связи с тем, что ее график есть круг единичного радиуса.

Наряду с круговой функцией  $\vec{e}(\varphi)$ , рассмотрим функцию

$$\vec{e}_1(\varphi) = \vec{e} \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{I.14})$$

Для того, чтобы получить вектор  $\vec{e}_1(\varphi)$  достаточно повернуть вектор  $\vec{e}(\varphi)$  на прямой угол против часовой стрелки в плоскости  $xOy$ .

Производную круговой функции можно получить из геометрических соображений.

Вектор  $\frac{d\vec{e}}{d\varphi}$  должен быть перпендикулярен единичному вектору  $\vec{e}$ . С другой стороны,

$$\left| \frac{d\vec{e}}{d\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{d\Delta\vec{e}}{d\Delta\varphi} \right|,$$

#### I.4. Кривые в пространстве

но  $|\Delta\vec{e}|$  есть хорда окружности, а  $\Delta\varphi$  - стягиваемая хордой дуга, предел отношения которых равен единице:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

вследствие чего  $\frac{d\vec{e}}{d\varphi}$  есть единичный вектор:

$$\left| \frac{d\vec{e}}{d\varphi} \right| = 1.$$

С учетом того, что  $\frac{d\vec{e}}{d\varphi}$  должен быть направлен в сторону возрастания угла  $\varphi$ , получим равенство.

$$\frac{d\vec{e}(\varphi)}{d\varphi} = \vec{e}_1(\varphi). \quad (\text{I.15})$$

Рассуждая таким же образом, получим для вектора

$$\frac{d\vec{e}_1(\varphi)}{d\varphi} = -\vec{e}(\varphi). \quad (\text{I.16})$$

Отметим выражения круговых функций в координатах

$$\vec{e}(\varphi) = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \quad (\text{I.17})$$

$$\vec{e}_1(\varphi) = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi. \quad (\text{I.18})$$

## I.4 Кривые в пространстве

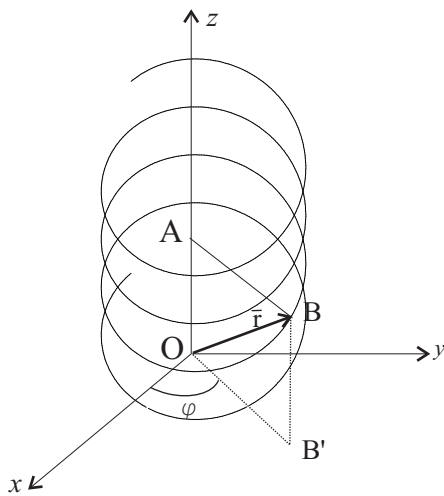
### I.4.1 Параметризованная кривая

Наиболее удобным способом задания кривой является *параметрическое представление*. В механике радиус - вектор движущейся точки изменяется в зависимости от времени. Если точка  $M$  движется, то ее радиус - вектор  $\vec{OM} = \vec{r}$  изменяется в зависимости от времени  $t$ . Таким образом, движение точки характеризуется уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (\text{I.19})$$

Это уравнение вполне определяет траекторию движения материальной точки. Если отвлечься от механического смысла  $t$  и рассматривать его просто как параметр, т.е. как вспомогательную переменную, то уравнение I.19 определяет некоторую кривую.

Соответствие (I.19) должно удовлетворять требованиям однозначности и непрерывности. Соответствие между точками кривой и значениями параметра называется непрерывным, если, при неограниченном сближении двух значений параметра  $t$ , расстояние между соответствующими им точками кривой стремится к нулю.



**Рис. I.3.** Цилиндрическая винтовая линия

Если кривая параметризована, то всякому значению параметра  $t$  соответствует точка  $M$  кривой и ее радиус - вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Таким образом радиус - вектор точки параметризованной кривой является функцией параметра. Соответствующее этой зависимости соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

называется *параметрическим уравнением* кривой. Очевидно, что параметризованная кривая является графиком для функциональной зависимости радиуса - вектора и ее точки от параметра. Функция эта непрерывна вследствие непрерывности соответствия между точками кривой и значениями параметра.

Отрезок постоянной длины  $a$ , перпендикулярный некоторой прямой, скользит по ней одним из своих концов. Если расстояние, проходимое этим концом, пропорционально углу  $\varphi$  поворота отрезка, то другой его конец описывает винтовую линию. Составить ее параметрическое уравнение.

Если точка  $A$  отрезка  $AB$  скользит по прямой совпадающей с осью  $Oz$ , а  $\varphi$  есть угол, образованный этим отрезком с осью  $Ox$ , то соответствующий ему вектор [Рис. I.3](#)

$$\overrightarrow{AB} = a(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) = a\vec{e}(\varphi).$$

Расстояние точки  $A$  от начала координат пропорционально углу  $\varphi$

$$OA = b\varphi.$$



#### 1.4. Кривые в пространстве

Радиус-вектор точки  $B$  винтовой линии

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{AB},$$

откуда уравнение винтовой линии

$$\vec{r} = a\vec{e}(\varphi) + b\varphi\vec{k},$$

где  $\vec{k}$  - единичный вектор оси  $Oz$ .

#### 1.4.2 Касательная параметризованной кривой

Если кривая задана параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

то направление касательной определяется вектором производной

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Уравнение касательной запишем как уравнение прямой  $d(M_0, \vec{T})$ , проходящей через точку  $M_0$  в направлении вектора  $\vec{T} = \dot{\vec{r}}_0$  (Рис.1.4):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \dot{\vec{r}}_0. \quad (I.20)$$

Параметрические уравнения этой кривой имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0\lambda; \\ y = y_0 + \dot{y}_0\lambda; \\ z = z_0 + \dot{z}_0\lambda. \end{cases} \quad (I.21)$$

где:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0); \quad \dot{\vec{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Исключив  $\lambda$ , получим каноническое уравнение касательной

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}. \quad (I.22)$$

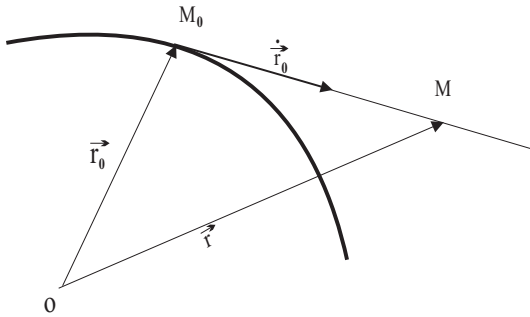
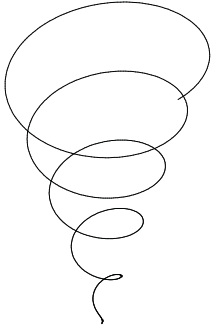
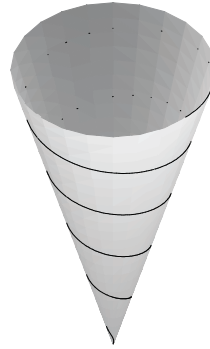


Рис.1.4. К касательной параметризованной кривой

Указанный способ определения касательной, очевидно, не приложим в той точке кривой  $t = t_0$ , в которой вектор  $\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$  обращается в нуль. Такие точки мы будем называть особыми точками параметризованной кривой и исключим из рассмотрения.



**Рис. I.5а.** Коническая винтовая линия



**Рис. I.5б.** Эта же линия, намотанная на конус

Особая точка называется несущественной, если радиус-вектор можно разложить вблизи этой точки по формуле Тейлора. В этой точке направляющий вектор касательной можно определить следующим образом. Допустим для общности, что при  $t = t_0$ , кроме первой производной, обращаются в нуль все производные радиуса-вектора до некоторого порядка  $s$  исключительно. В таком случае,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{s!} \left( \vec{r}^{(s)}(t_0) + \vec{\alpha} \right) \Delta t^s.$$

Вектор, направленный по секущей, соединяющий точки  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{r}(t_0)$ , можно представить в виде

$$\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t^s} = \frac{1}{s!} \left( \vec{r}^{(s)}(t_0) + \vec{\alpha} \right),$$

где  $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{0}$  вместе с  $\Delta t$ .

При неограниченном сближении точек предельное положение вектора секущей определяет направление касательной. Таким образом, направляющий вектор касательной

$$\vec{T} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t^s} = \frac{1}{s!} \vec{r}^{(s)}(t_0),$$

а уравнение касательной может быть записано в виде

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0^s} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0^s} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0^s}. \quad (\text{I.23})$$

### I.4.3 Неявное уравнение плоской кривой

Из аналитической геометрии известно, что плоская кривая может быть задана соотношением между ее прямоугольными координатами

$$F(x, y) = 0. \quad (\text{I.24})$$

Выразим ту же кривую параметрическим уравнением

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Подставляя выражения  $x$  и  $y$  в уравнение I.24, получим тождественное равенство, справедливое при любом значении  $t$

$$F(x(t); y(t)) = 0. \quad (\text{I.26})$$

Дифференцируя левую часть по независимой переменной  $t$ , будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0. \quad (\text{I.27})$$

Из этого уравнения можно определить отношение координат направляющего вектора касательной в данной точке кривой, если величины

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

не равны в ней одновременно нулю.

Принимая во внимание I.25, перепишем уравнение касательной

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0}$$

в виде

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) = 0. \quad (\text{I.28})$$

*Нормалью* плоской кривой называют прямую, расположенную в ее плоскости, перпендикулярную касательной и проходящей через точку прикосновения.

Угловым коэффициентом нормали обратен по величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту касательной (из условия перпендикулярности). Отсюда следует, что уравнение нормали может быть представлено в следующих видах:

$$\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) = 0 \quad (\text{I.29})$$

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y}. \quad (\text{I.30})$$

Последнее уравнение показывает, что величины  $F_x$  и  $F_y$  могут быть приняты за координаты направляющего вектора нормали плоской кривой.

## I.5 Поверхности

### I.5.1 Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности

Из аналитической геометрии известно, что поверхность выражается уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (\text{I.31})$$

связывающим координаты ее точек.

**Определение OI.8.** *Прямая называется касательной прямой поверхности, если она касается какой-либо кривой, принадлежащей этой поверхности.*

Чтобы найти условие прикосновения прямой и поверхности, зададим кривую, расположенную на этой поверхности, параметрическими уравнениями:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (\text{I.32})$$

Подстановка координат точек этой кривой в уравнение поверхности дает тождественное равенство

$$F(x); y(t); z(t) = 0, \quad (\text{I.33})$$

справедливое при любом значении  $t$ .

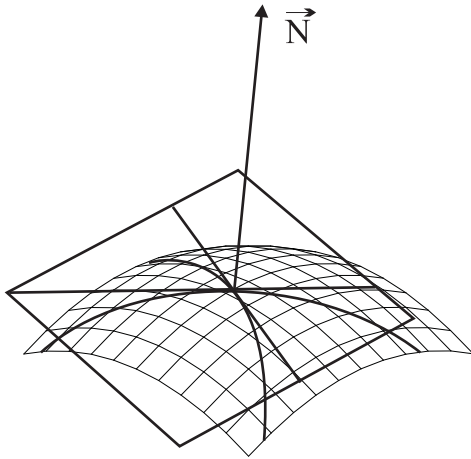
Дифференцируя это тождество, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (\text{I.34})$$

Левая часть последнего равенства содержит две группы величин.

А. Производные от координат точки кривой, равные координатам направляющего вектора касательной.

Б. Частные производные от левой части уравнения поверхности, величины которых зависят только от положения точки, в которой они вычисляются и не зависят от выбора кривой, проходящей через эту точку.



**Рис. I.6.** *Нормаль к поверхности*

Введем в рассмотрение вектор

$$\vec{N} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (I.35)$$

зависящий только от точки, выбранной на данной поверхности [Рис. I.6](#). Так как левая часть равенства [I.34](#) может быть представлена в виде скалярного произведения векторов  $\vec{N}$  и  $\dot{\vec{r}}(t)$ , то равенство примет вид

$$\left( \vec{N} \cdot \dot{\vec{r}}(t) \right) = 0. \quad (I.36)$$

Назовем *особыми точками поверхности* точки, в которых  $\vec{N} = 0$ , а остальные ее точки - обыкновенными. В обыкновенных точках поверхности равенство [I.34](#) представляет условие перпендикулярности касательного вектора кривой и вполне определенного вектора  $\vec{N}$ , связанного с данной точкой поверхности. На поверхности через данную точку можно провести сколько угодно кривых и для всех этих кривых будет иметь место условие [I.34](#). Следовательно, векторы касательных этих кривых все будут перпендикулярны одному направлению, т.е., будут расположены в одной плоскости.

Итак: Все прямые, касающиеся поверхности в обыкновенной точке, лежат в одной плоскости.

**Определение ОI.9.** *Касательной плоскостью поверхности в ее обыкновенной точке называется геометрическое место прямых, касающихся поверхности в этой точке.*

Чтобы получить уравнение касательной плоскости, примем во внимание, что она проходит через данную точку поверхности  $\vec{r}$ , а ее нормальный вектор определится равенством [I.35](#). Поэтому, обозначив радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости через

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

можем записать ее уравнение в виде

$$\left( \vec{N} \cdot \vec{r} - \vec{r}_0 \right) = 0, \quad (\text{I.37})$$

или в координатах

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0. \quad (\text{I.38})$$

Прямая, проходящая через точку прикосновения перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью поверхности*. Каноническое уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}. \quad (\text{I.39})$$

### I.5.2 Особая точка поверхности

В особой точке поверхности частные производные от левой части ее уравнения по координатам точек одновременно обращаются в нуль

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0, \quad (\text{I.40})$$

и равенство I.34 не позволяет сделать заключения о расположении касательных прямых, проходящих через эту точку. Для того, чтобы охарактеризовать это расположение будем дифференцировать I.34 по параметру  $t$ . Это дифференцирование приведет нас к новому тождеству

$$\begin{aligned} F_{xx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + F_{yy} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + F_{zz} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + 2F_{xy} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 2F_{yz} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} + 2F_{zx} \frac{dz}{dt} \frac{dx}{dt} + \\ + F_x \frac{d^2x}{dt^2} + F_y \frac{d^2y}{dt^2} + F_z \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

левая часть которого в особой точке не будет содержать трех последних членов.

Запишем уравнение касательных прямых, проходящих через особую точку в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda \frac{dx_0}{dt}; \\ y - y_0 &= \lambda \frac{dy_0}{dt}; \\ z - z_0 &= \lambda \frac{dz_0}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

## 1.5. Поверхности

и подставим выражение производных в левую часть равенства 1.41. После сокращения на  $\frac{1}{\lambda^2}$  равенство 1.41 примет в особой точке вид уравнения

$$F_{xx}(x-x_0)^2 + F_{yy}(y-y_0)^2 + F_{zz}(z-z_0)^2 + 2F_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + 2F_{yz}(y-y_0)(z-z_0) + 2F_{zx}(z-z_0)(x-x_0) = 0, \quad (1.43)$$

которому удовлетворяют координаты точек всех прямых, касающихся поверхности в этой точке. Если среди вторых производных есть отличные от нуля, то уравнение 1.42 есть уравнение конуса второго порядка.

Этот конус может быть мнимым и тогда особая точка изолирована, т.е. не содержит в своей окрестности других точек поверхности.

Если конус действительный, то поверхность имеет в его вершине коническую форму. Такую точку можно получить, например, слегка деформируя этот конус, искривив его образующие так, чтобы все линии, бывшие его образующими, касались их в его вершине.

Наконец, уравнение 1.43 может выражать две плоскости. Эти плоскости будут действительными, например, в том случае, когда особая точка принадлежит линии самопересечения поверхности. При одновременном обращении в нуль всех вторых производных дифференцирование уравнения 1.41 приведет к уравнению конуса, образованного касательными прямыми, порядок этого конуса будет выше второго. Порядок этого конуса называется порядком особой точки.

### 1.5.3 Неявное задание пространственной кривой

Пространственную кривую можно рассматривать, как кривую пересечения двух поверхностей. Задав эти поверхности уравнениями:

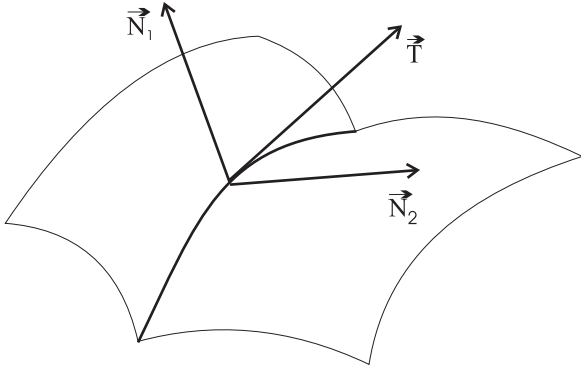
$$\varphi(x, y, z) = 0; \quad \psi(x, y, z) = 0, \quad (1.44)$$

определим кривую как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют одновременно этим двум уравнениям.

Чтобы перейти от явного задания к параметрическому, можно поступить так. Разрешим уравнения относительно каких-либо двух переменных, например,  $y$  и  $z$  и примем третью переменную  $x$  за параметр. Тогда вместо 1.44 будем иметь

$$x = t; \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.45)$$

это, очевидно, дает частный случай параметрического представления кривой.



**Рис. I.7.** Неявное задание пространственной кривой

Касательную кривой можно найти, не переходя к ее параметрическому представлению. Действительно, рассматриваемая кривая лежит на обеих поверхностях и ее касательный вектор ортогонален нормальным векторам обеих поверхностей  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ , вычисленным для соответствующей точки. Если эти поверхности не имеют в точках кривой общей касательной плоскости, то векторы их нормалей неколлинеарны, и их касательный вектор  $\vec{T}$  кривой может быть получен их векторным произведением [Рис. I.7](#)

$$\vec{T} = [\vec{N}_1 \vec{N}_2]. \quad (\text{I.46})$$

Нормальные векторы поверхностей вычислим, пользуясь формулой [I.34](#), так что координатное выражение касательного вектора будет иметь вид

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} \quad (\text{I.47})$$

## I.6 Соприкосновение кривых и поверхностей

### I.6.1 $n$ -параметрическое семейство кривых

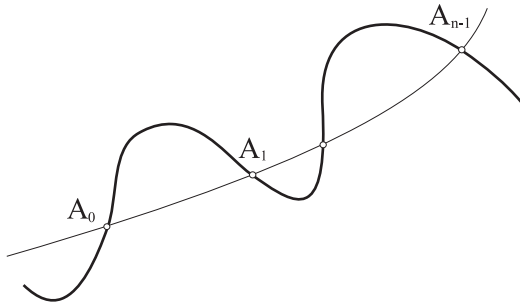
Уравнение вида

$$F(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (\text{I.48})$$

где  $x$  и  $y$  координаты точки, а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  независимые параметры, задает некоторую плоскую кривую, при каждой фиксированной системе значений этих параметров. Меняя эти значения, мы будем получать различные кривые, которые в своей совокупности образуют семейство, зависящее от  $n$  параметров. Примером семейства, зависящего от двух параметров, является совокупность всех прямых плоскости. Действительно, уравнение этого







**Рис. I.8.** *Соприкосновение кривых*

Возьмем на кривой  $n$  точек  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  Рис. I.8 и проведем через них кривую семейства, т.е. определим значения параметров, соответствующие этой кривой.

Предположим теперь, что точки  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  кривой неограниченно сближаются между собою, так, например, чтобы все они стремились к неподвижной точке  $A_0$ . В таком случае кривая семейства, проходящая через эти точки, будет изменять и свою форму и свое положение, а соответствующие ей значения параметров будут, вообще говоря, стремиться к некоторым предельным значениям  $a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$ .

**Определение OI.10.** *Кривую семейства*

$$F(x, y, a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0) = 0,$$

соответствующую этим предельным значениям, назовем предельным положением кривой семейства, проходящей через  $n$  неограниченно сближающихся точек данной кривой, или кривой семейства, которая соприкасается кривой в точке  $A_0$ .

*Порядком соприкосновения называется число параметров семейства, уменьшенное на единицу.*

Чтобы найти условия соприкосновения, предположим для определенности, что  $n = 3$ .

Пусть кривая задана уравнением

$$x = x(t); \quad y = y(t), \tag{I.50}$$

а кривая семейства, проходящая через три ее точки  $A_0, A_1, A_2$ , уравнением

$$F(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0. \tag{I.51}$$

Рассмотрим функцию

$$f(t, a_1, a_2, a_3) = F(x(t); y(t); a_1, a_2, a_3), \quad (\text{I.52})$$

полученную в результате подстановки координат произвольной точки кривой в левую часть уравнения кривой семейства. Если значения параметра  $t_0, t_1, t_2$  соответствуют точкам  $A_0, A_1, A_2$ , то для функции I.52 будем иметь

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, a_1, a_2, a_3) &= 0, \\ f(t_1, a_1, a_2, a_3) &= 0, \\ f(t_2, a_1, a_2, a_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.53})$$

так как кривая семейства по условию проходит через точки  $A_0, A_1, A_2$  и ее уравнение удовлетворяется при подстановке их координат.

Если функция  $f(t, a_1, a_2, a_3)$  непрерывна и дифференцируема, то, применяя к ней теорему Ролля, получим

$$\dot{f}(t'_0, a_1, a_2, a_3) = 0; \quad \dot{f}(t'_1, a_1, a_2, a_3) = 0, \quad (\text{I.54})$$

где  $t'_0$  и  $t'_1$  значения параметра, заключенные между  $t_0, t_1$ , и  $t_2$ .

Применяя теорему Ролля вторично, получим

$$\ddot{f}(t''_0, a_1, a_2, a_3) = 0. \quad (\text{I.55})$$

Предположим теперь, что точки  $A_1$  и  $A_2$  неограниченно приближаются к точке  $A_0$ . В таком случае параметры  $a_1, a_2, a_3$  стремятся к некоторым предельным значениям  $\overset{o}{a}_1, \overset{o}{a}_2, \overset{o}{a}_3$ , соответствующим соприкасающейся кривой семейства. Так как во все время их изменения условия I.53, I.54, I.55 имеют место, то они имеют место и для предельного расположения кривой семейства. Но при переходе к этому положению значения  $t_1$  и  $t_2$  параметра  $t$  стремятся к значению  $t_0$  вместе со всеми промежуточными значениями  $t'_0, t'$  и  $t''_0$ .

Таким образом, после перехода к пределу равенства I.53 - I.55 обращаются в соотношения

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, \overset{o}{a}_1, \overset{o}{a}_2, \overset{o}{a}_3) &= 0, \\ \dot{f}(t_0, \overset{o}{a}_1, \overset{o}{a}_2, \overset{o}{a}_3) &= 0, \\ \ddot{f}(t_0, \overset{o}{a}_1, \overset{o}{a}_2, \overset{o}{a}_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.56})$$

из которых можно определить значения параметров  $\overset{o}{a}_i$  для соприкасающейся кривой.



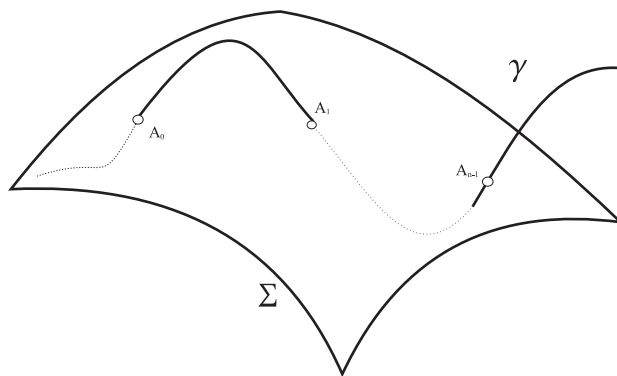
### I.6.3 Соприкосновение кривой и поверхности

Уравнение

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (I.58)$$

где  $x, y, z$  координаты точки пространства, а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  независимые параметры, определяет семейство поверхностей, зависящее от  $n$  параметров.

Подставляя в уравнение семейства координаты точек  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  и разрешая полученные соотношения относительно параметров, можно найти поверхность семейства, проходящую через  $n$  данных точек.



**Рис. I.9.** Соприкосновение кривой и поверхности

Теория соприкосновения кривой линии к поверхности, принадлежащей данному семейству, строится аналогично теории соприкосновения кривых.

Поверхность семейства, зависящего от  $n$  параметров, находится с данной пространственной кривой в соприкосновении  $n - 1$  порядка, если она совпадает с предельным положением поверхности семейства, проходящей через  $n$  неограниченно сближающихся точек этой кривой.

Чтобы найти поверхность семейства, соприкасающуюся с кривой, определенной параметрическими уравнениями,

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),$$

рассмотрим уравнение поверхности

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

семейства, проходящей через точки  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , расположенные на данной кривой Рис. I.9, и образуем вспомогательную функцию

$$f(t, a_1, a_2, \dots, a_n) = F(x(t); y(t); z(t); a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Так как функция должна обратиться в нуль при значениях параметра  $t$ , соответствующих точкам  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , то для нее имеют место равенства

$$\begin{aligned} f(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ \dot{f}(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(t_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \end{aligned}$$

аналогичные равенствам I.53. Рассуждая так же, как и ранее т.е. применяя соответствующее число раз теорему Ролля и переходя к пределу при условии неограниченного сближения точек  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , приходим к системе соотношений

$$\left. \begin{aligned} f(t_0, \overset{\circ}{a}_1, \overset{\circ}{a}_2, \dots, \overset{\circ}{a}_n) &= 0, \\ \dot{f}(t_0, \overset{\circ}{a}_1, \overset{\circ}{a}_2, \dots, \overset{\circ}{a}_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(t_0, \overset{\circ}{a}_1, \overset{\circ}{a}_2, \dots, \overset{\circ}{a}_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.59})$$

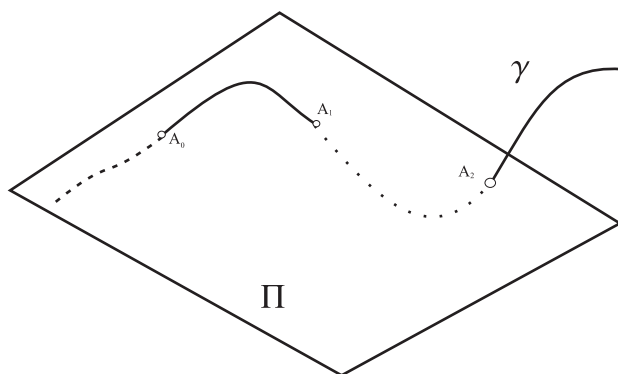
для которых и определим значения параметров  $\overset{\circ}{a}_1, \overset{\circ}{a}_2, \dots, \overset{\circ}{a}_n$ , соответствующие соприкасающейся поверхности.

# Глава II

## Сопровождающий трехгранник

### II.1 Соприкасающаяся плоскость

#### II.1.1 Определение соприкасающейся плоскости



**Рис. II.10.** Соприкосновение кривой и плоскости

**Определение ОП.1.** Соприкасающейся плоскостью кривой линии называется предельное положение плоскости, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки этой линии *Рис. II.10.*

Если уравнение соприкасающейся плоскости кривой

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

в ее точке

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$

имеет вид

$$\left( \vec{N} \cdot \vec{r} \right) + D = 0,$$

то согласно общей теории соприкосновения должны выполняться следу-

ющие условия:

$$\left( \left( \vec{N} \cdot \vec{r}(t) \right) + D \right)_{t=t_0} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \left( \vec{N} \cdot \vec{r}(t) \right) + D \right)_{t=t_0} = 0;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \left( \vec{N} \cdot \vec{r}(t) \right) + D \right)_{t=t_0} = 0.$$

Произведя дифференцирование и подстановку, получим три равенства:

$$\left( \vec{N} \cdot \vec{r}_0 \right) + D = 0, \tag{II.1}$$

$$\left( \vec{N} \cdot \dot{\vec{r}}_0 \right) = 0, \tag{II.2}$$

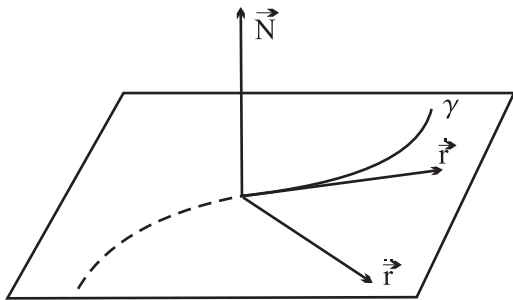
$$\left( \vec{N} \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \right) = 0. \tag{II.3}$$

Первое из них показывает, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку прикосновения, что совершенно очевидно.

Второе говорит, что вектор производной лежит в соприкасающейся плоскости. Если принять во внимание, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку  $A_0$ , то из этого следует: *соприкасающаяся плоскость кривой в данной ее точке проходит через касательную прямую, определенную для той же точки.*

Действительно, прямая  $A_0A_1$  стремилась занять положение касательной в то время, как содержащая ее плоскость  $A_0A_1A_2$  принимала положение соприкасающейся плоскости. В силу непрерывности очевидно, что прямая и плоскость и в пределе должны были сохранить соединенное положение.





**Рис. II.11.** Расположение кривой по отношению к соприкасающейся плоскости в точке соприкосновения

Равенство II.3 не может быть истолковано геометрически, так как для такого истолкования нет вектора второй производной. Однако, выраженный им факт весьма важен. При любой параметризации кривой вектор второй производной радиус-вектора кривой расположен в ее соприкасающейся плоскости (см. Рис. II.11). Если  $t$  время, а

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

уравнение движения, то вектор  $\ddot{\vec{r}}$  называется вектором ускорения движущейся точки. Вектор ускорения всегда расположен в соприкасающейся плоскости траектории движущейся точки. Таково механическое истолкование равенства II.3.

### II.1.2 Уравнение соприкасающейся плоскости

Соотношения II.2 и II.3 позволяют найти нормальный вектор соприкасающейся плоскости во всякой точке кривой, в которой векторы первой и второй производной неколлинеарны. Его можно положить равным их векторному произведению.

$$\vec{B} = \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right]. \quad (\text{II.4})$$

Вследствие этого уравнение соприкасающейся плоскости будет иметь вид

$$\left( \vec{r} - \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \ddot{\vec{r}}_0 \right) = 0, \quad (\text{II.5})$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0; \quad (\text{II.6})$$

уравнение теряет смысл для тех точек кривой, в которых

$$\left[ \dot{\vec{r}}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \right] = 0. \quad (\text{II.7})$$

Такие точки мы будем называть точками *спрямления*. Будем считать, что соприкасающаяся плоскость в этих точках не определена и в дальнейшем исключать их из рассмотрения, наравне с особыми точками кривой.

Однако такое исключение, очевидно, недопустимо для линии, которая вся состоит из точек спрямления. Исследуем ее.

Так как производная от первой производной коллинеарна ей, то по теореме [II.1](#) вектор  $\dot{\vec{r}}$  имеет постоянное направление и может быть представлен в виде

$$\dot{\vec{r}} = \lambda(t)\vec{a},$$

где  $\vec{a}$  постоянный вектор.

Интегрируя это соотношения и полагая

$$\mu(t) = \int \lambda(t)dt,$$

получим

$$\vec{r} = \mu\vec{a} + \vec{b},$$

где вектор  $\vec{b}$  играет роль постоянного интегрирования. Полученное уравнение показывает, что *линия, состоящая из точек спрямления есть прямая*. Неопределенность соприкасающейся плоскости в этом случае очевидна, так как три точки, расположенные на одной прямой, не определяют плоскости.

### II.1.3 Касательная плоскость и соприкасающаяся плоскость

Касательной плоскостью кривой называется всякая плоскость, содержащая касательную прямую. Плоскости, касающиеся кривой в данной точке, образуют пучок. Соприкасающаяся плоскость точки принадлежит этому пучку и является одной из касательных плоскостей. Выясним, каково отличие соприкасающейся плоскости от остальных плоскостей, которые мы будем называть *простыми* касательными плоскостями.

Уравнение всякой касательной плоскости можно представить в виде

$$\left( \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \right) = 0, \quad (\text{II.8})$$

## II.1. Соприкасающаяся плоскость

предположив, что  $\vec{n}$  любой единичный вектор, перпендикулярный касательной прямой, т.е. подчинив его единственному условию

$$\left( \vec{n} \cdot \dot{\vec{r}}_0 \right) = 0. \quad (\text{II.9})$$

Возьмем на кривой точку  $M$ , близкую к точке прикосновения  $M_0$ . Обозначив через  $t$  значения параметра, соответствующее положению точки  $M$ , и положив

$$\Delta t = t - t_0,$$

разложим радиус-вектор  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$  по формуле Тейлора

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 \Delta t^2 + \vec{Q} \Delta t^3.$$

Расстояние от точки  $M$  до касательной плоскости будет равно результату подстановки  $\vec{r}(t)$  в левую часть нормального уравнения плоскости

$$d = \left( \vec{n} \cdot (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \right)$$

или

$$d = \frac{1}{2} \left( \vec{n} \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \right) \Delta t^2 + \left( \vec{n} \cdot \vec{Q} \right) \Delta t^3. \quad (\text{II.10})$$

Если точка  $M$  приближается к точке  $M_0$ , то  $d$  стремится к нулю вместе с  $\Delta t$ . Порядок малости расстояния зависит прежде всего от того, обращается ли в нуль произведение  $\left( \vec{n} \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \right)$ . Но оно обращается в нуль в том и только в том случае, если  $\vec{n}$  есть нормальный вектор соприкасающейся плоскости. Таким образом можно сделать следующее заключение. Если точка кривой приближается к точке прикосновения, то:

1. Расстояние ее от *простой* касательной плоскости есть бесконечно малое 2-го порядка по отношению к приращению параметра.
2. Расстояние точки от *соприкасающейся* плоскости есть бесконечно малое, по крайней мере, третьего порядка по отношению к тому же приращению параметра.

### II.1.4 Расстояние от точки кривой до соприкасающейся плоскости

Чтобы точнее оценить расстояние от точки кривой до соприкасающейся плоскости, продолжим разложение радиуса-вектора точки  $M$ , положив

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 \Delta t^2 + \frac{1}{6} \dddot{\vec{r}}_0 \Delta t^3 + \vec{Q}_1 \Delta t^4.$$

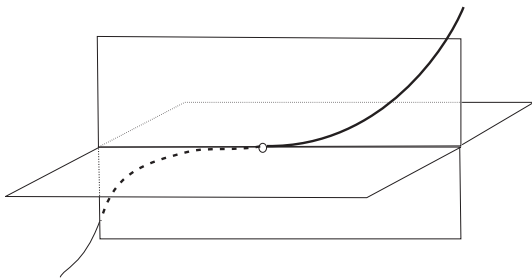
После подстановки  $\vec{r}(t)$  в левую часть уравнения соприкасающейся плоскости, получим

$$d = \frac{1}{6} \left( \vec{n} \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \right) \Delta t^3 + \left( \vec{n} \cdot \vec{Q}_1 \right) \Delta t^4. \quad (\text{II.11})$$

Коэффициент при  $\Delta t^3$  может обратиться в нуль только в отдельных точках кривой, которые мы будем называть *точками уплощения*. Таким образом: во всех точках кривой, не являющихся точками уплощения, расстояние от точки кривой, стремящейся к точке прикосновения, до соприкасающейся плоскости есть бесконечно малое третьего порядка, по сравнению с приращением параметра.

Оценка расстояния точки кривой от касательной плоскости позволяет прийти к важным заключениям, об их взаимном расположении. Если точка  $M$  движется по кривой в определенном направлении и проходит через точку  $M_0$ , то приращение параметра меняет при этом свой знак на обратный.

Это изменение знака не влияет на знак результата подстановки  $\vec{r}$  в уравнение простой касательной плоскости, так как главная часть  $d$  содержит  $\Delta t$  в четной степени.



**Рис. II.12.** Расстояние от точки кривой до соприкасающейся плоскости

Наоборот, результат той же подстановки в уравнении соприкасающейся плоскости в точке, не являющейся точкой уплощения, меняет знак вместе с  $\Delta t$ . Но изменение знака  $d$  показывает, что точка  $M$ , проходя через точку прикосновения, переходит с одной стороны соприкасающейся плоскости на ее другую сторону.

Таким образом:

1. Вблизи точки прикосновения *простой* касательной плоскости кривая расположена по одну сторону от этой плоскости.
2. Вблизи точки прикосновения кривая расположена по разные стороны от соприкасающейся плоскости, если данная точка не является точкой уплощения (Рис. II.12).

### II.1.5 Точки уплощения

В точке уплощения вектор  $\vec{r}^{\dots}$  перпендикулярен нормальному вектору  $\vec{B}$  соприкасающейся плоскости. Но этому же вектору перпендикулярны и векторы двух первых производных. Таким образом точка уплощения характеризуется компланарностью первых трех производных или равенством:

$$\left( \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right) = 0. \quad (\text{II.12})$$

Если это равенство выполняется в отдельных точках кривой, то в случае необходимости мы можем исключить их из рассмотрения. Другое дело, если вся кривая состоит из этих точек. Исследуем такую линию. Из тождественного равенства нулю смешанного произведения II.12 следует, что вектор  $\dot{\vec{r}}$ , изменяясь, остается параллельным данной плоскости. Этой же плоскости параллелен и вектор  $\ddot{\vec{r}}$ . Значит, ее нормальный вектор совпадает с нормальным вектором соприкасающейся плоскости и при этом постоянен.

Вследствие этого

$$\left( \vec{n} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \vec{n} \vec{r} \right) = 0,$$

или

$$\left( \vec{n} \vec{r} \right) + c = 0,$$

таким образом радиус-вектор точки кривой удовлетворяет уравнению постоянной плоскости, в которой кривая лежит всеми своими точками.

Итак: Кривая, состоящая из точек уплощения, есть плоская кривая. Плоскость, в которой она расположена, является соприкасающейся плоскостью во всякой точке этой кривой.

## II.2 Основной трехгранник

**Определение OII.2.** *Нормалью пространственной кривой называется всякая прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку прикосновения.*

Таким образом в каждой своей точке кривая имеет бесчисленное множество нормалей. Все они расположены в одной плоскости, перпендикулярной

касательной прямой, эту плоскость называют *нормальной плоскостью* кривой.

Среди нормалей выделяют две.

1. *Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью.*

1. *Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется главной бинормалью.*

Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется *сопровождающим, основным* или *натуральным трехгранником* кривой. Гранями основного трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости:

1. *соприкасающаяся плоскость, содержащая касательную и главную нормаль.*

2. *нормальная плоскость, содержащая главную нормаль и бинормаль.*

3. *третья плоскость, содержащая бинормаль и касательную, называется спрямляющей плоскостью.*

Если точка кривой задана, то для определения граней и ребер основного трехгранника нужно уметь вычислять их направляющие векторы. Направляющий вектор касательной равен первой производной

$$\vec{T} = \dot{\vec{r}}. \quad (\text{II.13})$$

Направляющий вектор бинормали равен векторному произведению векторов первой и второй производной

$$\vec{B} = \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right]. \quad (\text{II.14})$$

Направляющий вектор главной нормали перпендикулярен вектору касательной и вектору бинормали. Поэтому его можно положить равным их векторному произведению

$$\vec{N} = \left[ \overset{\rightarrow}{\dot{\vec{r}}} \left[ \overset{\rightarrow}{\dot{\vec{r}}} \overset{\rightarrow}{\ddot{\vec{r}}} \right] \right]. \quad (\text{II.15})$$

## II.3 Натуральная параметризация кривой

### II.3.1 Длина дуги

Длина дуги кривой линии определяется как *предел периметра ломаной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к нулю.*

Найдем способ вычисления длины дуги, линии, заданной параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Для этого разобьем данную дугу  $AB$  на  $n$  частей точками  $A_1, A_2, \dots, A_n \equiv B$  и впишем в нее ломаную линию с вершинами в этих точках. Каждое звено этой ломаной линии будет хордой кривой, и его длина будет равна абсолютной величине приращения радиуса-вектора кривой, соответствующего переходу от точки номера  $i - 1$  к точке номера  $i$ .

$$A_{i-1}A_i = |\Delta\vec{r}_i|.$$

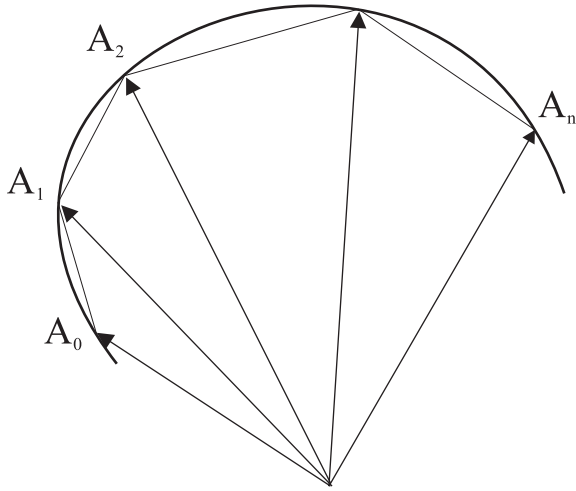
Длина вписанной ломаной будет равна

$$S_n = \sum_{i=1}^n |\Delta\vec{r}_i|. \quad (\text{II.16})$$

Если приращение  $|\Delta\vec{r}_i|$  соответствует приращению  $\Delta t_i$  параметра, то ту же сумму можно представить в виде

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i, \quad (\text{II.17})$$

если при этом предположить, что номера точек возрастают вместе с возрастанием параметра, так что  $\Delta t_i$  положительно.



**Рис. II.13.** Длина дуги как параметр

Но разность между отношением приращений и производной, взятой при каком-либо промежуточном значении  $t$  на промежутке  $\Delta t_i$ , стремится к нулю вместе с этим промежутком, так как предел обоих равен производной в начальной точке этого промежутка. Разность между абсолютными величинами того же отношения и производной

$$\left| \frac{\Delta r_i}{\Delta t_i} - |\dot{\vec{r}}(t'_i)| \right| = \alpha_i \rightarrow 0,$$

очевидно, тоже будет бесконечно малой величиной.

Представим сумму  $S_n$  в следующем виде:

$$S_n = \sum_{i=1}^n |\dot{\vec{r}}(t'_i)| \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta t_i.$$

Из непрерывности производной  $\dot{\vec{r}}(t)$  следует, что при достаточно малом  $\Delta t_i$  все  $\alpha_i$  по абсолютной величине могут быть сделаны меньше любого наперед заданного числа  $\epsilon$ , одного и того же для всех  $i$ . Так что

$$|\alpha_i| < \epsilon,$$

но в таком случае

$$\left| \sum \alpha_i \Delta t_i \right| \leq \sum |\alpha_i| \Delta t_i \leq \epsilon \sum \Delta t_i = \epsilon(t - t_0).$$

Таким образом, вторая сумма становится и остается меньше любого наперед заданного положительного числа при стремлении к нулю промежутков  $\Delta t_i$ . Но вследствие этого предел второй суммы равен нулю и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim \sum_{i=1}^n |\dot{\vec{r}}(t'_i)| \Delta t_i.$$



### II.3. Натуральная параметризация кривой

Но сумма в правой части есть интегральная сумма для функции  $|\dot{\vec{r}}|$ . Откуда следует

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{r}}(t)| dt, \quad (\text{II.18})$$

и мы получили удобную для вычисления формулу длины дуги. В координатной записи это выражение имеет вид:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (\text{II.19})$$

#### II.3.2 Длина дуги как параметр

Выберем на кривой, параметризованной с помощью произвольного параметра  $t$ , некоторую точку  $A_0$ , соответствующую значению параметра  $t = t_0$ , и назовем ее *начальной точкой*. Длина дуги, имеющей начало в точке  $A_0$  и конец в произвольной точке кривой  $A$ , определится формулой

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\vec{r}}| dt. \quad (\text{II.20})$$

Она определяет  $s$  как однозначную и непрерывную функцию параметра  $t$ .

Так как производная этой функции

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

положительна во всех не особых точках кривой, то эта функция монотонно возрастает при возрастании значения параметра. Отсюда следует, что между точками кривой и значениями длины дуги, описываемой от начальной точки, можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. Заметим, что точкам кривой, расположенным по разные стороны начальной точки, соответствуют различные значения параметра, так как при  $t < t_0$  значение  $s$ , определяемое интегралом II.20, будет отрицательным, а при  $t > t_0$  оно будет положительным.

Ввиду того что точки кривой и значения длины дуги  $s$  находятся во взаимно однозначном и непрерывном соответствии,  $s$  можно принять за новый

параметр. Этот параметр, как мы увидим ниже, особенно удобен для изучения кривой по ее уравнению и называется *натуральным параметром кривой*.

Итак, значение натурального параметра для некоторой точки кривой равно по величине длине дуги кривой между некоторой точкой, принятой за начальную, и данной точкой, знак же его определяется в зависимости от выбора направления движения по кривой, условно принятого за положительное.

### II.3.3 Производные радиуса-вектора по натуральному параметру

В отличие от производных, берущихся по произвольному параметру, будем обозначать производные по натуральному параметру штрихом, так

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}' ; \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{r}'' ;$$

и т.д.

Применяя формулу преобразования переменной, получим

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\vec{r}} \frac{dt}{ds},$$

но дифференцирование интеграла II.18 дает

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}|. \quad (\text{II.21})$$

Поэтому

$$\vec{r}' = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}. \quad (\text{II.22})$$

Но при делении вектора на его абсолютную величину получается единичный вектор. Таким образом, *первая производная радиуса-вектора точки кривой по натуральному параметру есть единичный вектор, направленный по касательной*.

Этому результату можно придать геометрическую формулировку. Так как производная равна пределу отношения приращения радиуса-вектора и дуги, а абсолютная величина приращения радиуса-вектора равна длине хорды, то из равенства

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1$$

### II.3. *Натуральная параметризация кривой*

следует, что предел отношения хорды к стягиваемой ею дуге равен единице, если длина дуги стремится к нулю.

Обратно, если производная по некоторому параметру по абсолютной величине равна единице, то этот параметр натуральный. Действительно, в этом случае

$$s = \int_0^t |\dot{\vec{r}}| dt = \int_0^t dt = t.$$

Вектор второй производной по натуральному параметру

$$\vec{r}'' = \frac{d}{ds}(\vec{r}')$$

равен производной от вектора постоянной длины и, следовательно, перпендикулярен ему. Но вектор первой производной направлен по касательной. Значит перпендикулярный ему вектор второй производной направлен по нормали, а так как он должен, кроме того лежать в соприкасающейся плоскости, то эта нормаль - главная.

Вектор второй производной от радиуса вектора точки кривой по натуральному параметру направлен по главной нормали.

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то направляющие векторы основного трехгранника определяют формулами

$$\vec{T} = \vec{r}'; \quad \vec{B} = \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}'' \right]; \quad \vec{N} = \vec{r}'', \quad (\text{II.23})$$

среди которых последняя значительно проще соответствующей ей формулы II.15, пригодной при любом выборе параметра.

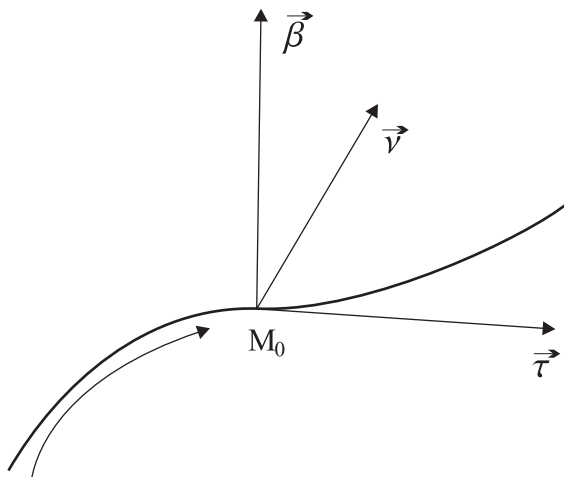
# Глава III

## Формулы Френе - Серре

### III.1 Единичные векторы основного трехгранника

Основной трехгранник позволяет связать с каждой точкой кривой прямоугольную систему координат, оси которой совпадают с касательной, главной нормалью и бинормалью. Чтобы определить их ориентацию введем единичные векторы, направленные по этим осям в положительную сторону.

Предположим, что кривая отнесена к натуральному параметру.



**Рис. III.14.** Единичные векторы основного трехгранника

1. Единичный вектор касательной  $\vec{\tau}$  определим так, чтобы он совпадал с первой производной радиуса-вектора по натуральному параметру

$$\vec{\tau} = \vec{r}' . \quad (\text{III.1})$$

2. Единичный вектор главной нормали  $\vec{\nu}$  определим так, чтобы его ориентация совпадала с ориентацией вектора второй производной по натуральному параметру

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} . \quad (\text{III.2})$$

3. Единичный вектор бинормали  $\vec{\beta}$  определим так, чтобы тройка векторов  $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$  была правой

[Рис. III.14.](#)

### III.2. Формулы Френе - Серре

Так как векторы основного трехгранника единичны и ортогональны, то их скалярные квадраты равны единице, а их произведение между собой равно нулю.

$$\vec{\tau}^2 = \vec{\nu}^2 = \vec{\beta}^2 = 1; \quad (\vec{\tau} \vec{\nu}) = (\vec{\nu} \vec{\beta}) = (\vec{\beta} \vec{\tau}) = 0. \quad (\text{III.3})$$

Векторные произведения двух различных векторов тройки, следующие друг за другом в круговом порядке; касательная - главная нормаль - бинормаль - касательная, равны третьему вектору тройки, так как это имеет место для координатных векторов всякой правой системы координат

$$[\vec{\tau} \vec{\nu}] = \vec{\beta}; \quad [\vec{\nu} \vec{\beta}] = \vec{\tau}; \quad [\vec{\beta} \vec{\tau}] = \vec{\nu}. \quad (\text{III.4})$$

При изменении направления возрастания дуг, т.е. при замене натурального параметра

$$s_1 = -s \quad (\text{III.5})$$

векторы  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\beta}$  изменяются так

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{d\vec{r}}{ds} = -\vec{\tau}, \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1} \left( \frac{d\vec{r}}{ds_1} \right) = -\frac{d}{ds} \left( -\frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2},$$

откуда

$$\vec{\nu}_1 = \vec{\nu}. \quad (\text{III.7})$$

Наконец

$$\vec{\beta}_1 = [\vec{\tau} \vec{\nu}_1] = [-\vec{\tau} \vec{\nu}] = -\vec{\beta}. \quad (\text{III.8})$$

Итак:

При изменении направления возрастания дуг векторы касательной и бинормали меняют свою ориентацию, а вектор главной нормали сохраняет ее.

## III.2 Формулы Френе - Серре

Векторы основной тройки меняются при движении точки по кривой. Чтобы охарактеризовать это изменение, нужно уметь вычислять их производные по натуральному параметру. Особенно удобно знать разложения этих производных по векторам основной тройки.

Проще всего получить производную вектора касательной, так как

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{r}') = \vec{r}'' ,$$

а вектор второй производной направлен по главной нормали, ориентирован так же, как и вектор  $\vec{\nu}$ . Поэтому

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad (\text{III.9})$$

где  $k$  - некоторая положительная величина, зависящая от  $s$ .

Будем искать теперь разложение производной вектора бинормали. Этот вектор определим как векторное произведение  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\nu}$  и будем дифференцировать это соотношение, принимая во внимание III.9

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[ \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\nu} \right] + \left[ \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\nu}}{ds} \right] = k \left[ \vec{\nu} \cdot \vec{\nu} \right] + \left[ \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\nu}}{ds} \right] = \left[ \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\nu}}{ds} \right].$$

Так как векторное произведение перпендикулярно каждому из своих сомножителей, то полученный результат показывает, что  $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$  перпендикулярно  $\vec{\tau}$ .

С другой стороны,  $\vec{\beta}$  — единичный вектор, поэтому его производная перпендикулярна его самому.

Но будучи перпендикулярна касательной и бинормали,  $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$  должна быть направлена по главной нормали. Обозначая коэффициент пропорциональности -  $\kappa$ , получим

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}. \quad (\text{III.10})$$

Наконец, вектор главной нормали определим, перемножая векторно  $\vec{\beta}$  и  $\vec{\tau}$  и дифференцируя это произведение, принимая во внимание III.9 и III.10.

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \left[ \frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{\tau} \right] + \left[ \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right] = -\kappa \left[ \vec{\nu} \cdot \vec{\tau} \right] + k \left[ \vec{\beta} \cdot \vec{\nu} \right].$$

Наконец, вектор главной нормали определим, перемножая векторно  $\vec{\beta}$  и  $\vec{\nu}$  и дифференцируя это произведение, принимая во внимание III.9 и III.10.

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \left[ \frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{\tau} \right] + \left[ \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right] = -\kappa \left[ \vec{\nu} \cdot \vec{\tau} \right] + k \left[ \vec{\beta} \cdot \vec{\nu} \right].$$

### III.2. Формулы Френе - Серре

Но вследствие формул III.4 векторные произведения в правой части можно заменить векторами основной тройки, следовательно:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\kappa\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \quad (\text{III.11})$$

Объединяя предыдущие результаты, получим систему формул, называемых формулами Френе - Серре:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}; \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}; \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}. \quad (\text{III.14})$$

Представим формулы Френе-Серре в матричном виде. Для этого изменим обозначение векторов сопровождающего трехгранника:

$$\vec{e}_1 = \vec{\tau}; \quad \vec{e}_2 = \vec{\nu}; \quad \vec{e}_3 = \vec{\beta}.$$

Тогда формулы (??)- (III.14) можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = k\vec{e}_2; \quad (\text{III.15})$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds} = -k\vec{e}_1 + \kappa\vec{e}_3; \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\kappa\vec{e}_2. \quad (\text{III.17})$$

Вводя матрицу  $\Omega$ :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.18})$$

заметим, что она *антисимметрична* и определяется двумя коэффициентами  $k$  и  $\kappa$ , которые называются *кривизной* и *кручением* кривой; их геометрическое значение и способ вычисления будут даны ниже.

С помощью введенной матрицы  $\Omega$  формулы Френе - Серре можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \Omega_i^k \vec{e}_k, \quad (\text{III.19})$$

или в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \Omega \mathbf{e} \quad (\text{III.20})$$

Вводя так называемый *вектор Дарбу*:

$$\vec{\zeta} = \kappa \vec{e}_1 + k \vec{e}_3, \quad (\text{III.21})$$

эти формулы можно также записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \left[ \begin{array}{c} \vec{\zeta} \\ \vec{e}_i \end{array} \right], \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (\text{III.22})$$

Заметим также, что в виде (III.19) или (III.20) формулы Френе-Серре справедливы для кривой и в случае любого *риманова* пространства размерности  $n$ , где под матрицей  $\Omega$  следует понимать антисимметрическую матрицу размерности  $n \times n$ . Векторы  $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  в этом случае называются *первой, второй, ..., (n-1) нормальными кривой*, соответственно, а соответствующие коэффициенты матрицы - *первой, второй, ..., (n-1) кривизнами* этой кривой.

### III.3 Разложение производных по натуральному параметру

Формулы Френе - Серре позволяют просто определить коэффициенты разложения производных радиуса-вектора по векторам основного трехгранника. Будем исходить из известных формул, дающих выражение первых двух производных

$$\vec{r}' = \vec{\tau}, \quad (\text{III.23})$$

$$\vec{r}'' = k\vec{\nu}. \quad (\text{III.24})$$

Дифференцируя последнюю из них и пользуясь формулой Френе, получим

$$\frac{d}{ds}(\vec{r}'') = k'\vec{\nu} + k(-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}),$$

$$\vec{r}''' = -k^2\vec{\tau} + k'\vec{\nu} + k\kappa\vec{\beta}. \quad (\text{III.25})$$

Таким же образом можно найти разложение производных более высоких порядков.



### III.3. Разложение производных по натуральному параметру

Рассмотрим первые члены разложения радиуса-вектора точки кривой в ряд Тейлора по степеням длины дуги, отсчитываемой от точки  $A_0$  :

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}_0' s + \frac{1}{2} \vec{r}_0'' s^2 + \frac{1}{6} \vec{r}_0''' s^3 + \vec{O}(s^4). \quad (\text{III.26})$$

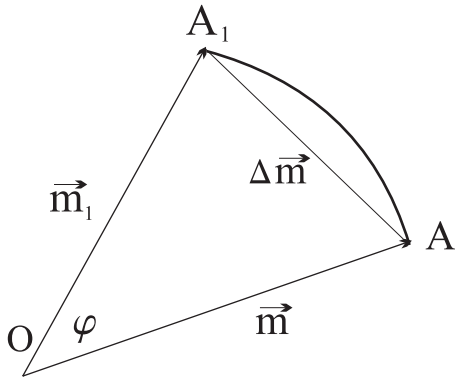
Подставляя выражение производных и собирая коэффициенты при одинаковых векторах, получим разложение по степеням разности  $s$  проекций  $\vec{r} - \vec{r}_0$  на оси основного трехгранника. Если принять эти оси за координатные, совместив ось  $Ox$  с касательной, а ось  $Oy$  с главной нормалью, а ось  $Oz$  с бинормалью, то разложение соответствующих координат будет иметь вид

$$x = s - \frac{k^2}{6} s^3 + \vec{O}_1(s^4), \quad (\text{III.27})$$

$$y = \frac{1}{2} k s^2 + \frac{k'}{6} s^3 + \vec{O}_2(s^4), \quad (\text{III.28})$$

$$z = \frac{1}{6} k \kappa s^3 + \vec{O}_3(s^4). \quad (\text{III.29})$$

### III.4 Лемма о единичном векторе



**Рис. III.15.** К лемме о единичном векторе

Пусть единичный вектор  $\vec{m}$ , изменяясь получает приращение  $\Delta\vec{m}$  и становится равен (Рис. III.15)

$$\vec{m}_1 = \vec{m} + \Delta\vec{m}.$$

Поместив начальную точку единичных векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{m}_1$  в точку  $O$ , проведем из нее как из центра, окружность, соединяющую концы  $\vec{m}$  и  $\vec{m}_1$ . Длина дуги  $AA_1$  этой окружности

$$\overset{\frown}{AA_1} = \varphi$$

будет равен углу поворота  $\vec{m}$ , а длина хорды

$$AA_1 = |\Delta\vec{m}|$$

абсолютной величине приращения вектора  $\vec{m}$ .

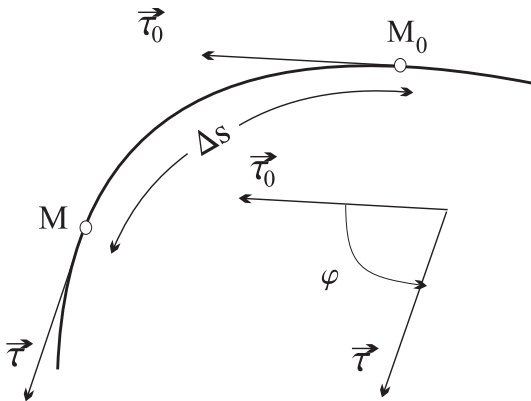
Так как предел

$$\lim \frac{\overset{\frown}{AA_1}}{AA_1}$$

хорды к дуге будет равен единице при  $\overset{\frown}{AA_1} \rightarrow 0$ , то предел отношения абсолютной величины приращения единичного вектора к углу поворота этого вектора равен единице, если этот угол стремится к нулю:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{m}|}{\varphi} = 1. \quad (\text{III.30})$$

## III.5 Геометрический смысл кривизны кривой



**Рис. III.16.** Геометрический смысл кривизны

Направление касательной изменяется при движении точки по кривой. Чтобы измерить скорость этого изменения возьмем касательные в концах некоторой дуги [Рис. III.16](#), найдем угол  $\varphi$  между ними и поделим этот угол на длину  $\Delta s$  дуги  $MM_0$ . Устремляя теперь точку  $M_1$  к точке  $M$ , найдем предел отношения

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s} = k. \quad (\text{III.31})$$

Величину  $k$  называется кривизной кривой в данной ее точке. Итак:

Кривизна кривой в данной ее точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.

Кривизна совпадает с коэффициентом  $k$  в формулах Френе - Серре. Действительно, из первой формулы следует, что положительная величина

$$k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \tau|}{\varphi} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

но предел отношения абсолютной величины приращения единичного вектора касательной к углу его поворота равен единице, а второй множитель совпадает с кривизной, и наше утверждение доказано. Измеряя скорость изменения направления касательной, кривизна показывает, насколько отклоняется кривая по своей форме от формы прямой линии. Чем больше кривизна — тем сильнее это отклонение. Для прямой линии кривизна, очевидно, равна нулю во всех ее точках, так как направляющий вектор прямой не меняет своего направления. Покажем, что справедливо и обратное положение.

Если кривизна линии равна нулю во всех ее точках, то эта линия — прямая.

Действительно, для рассматриваемой линии

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim \frac{\varphi}{\Delta S} = 0,$$

откуда

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 = \text{Const}.$$

Но если

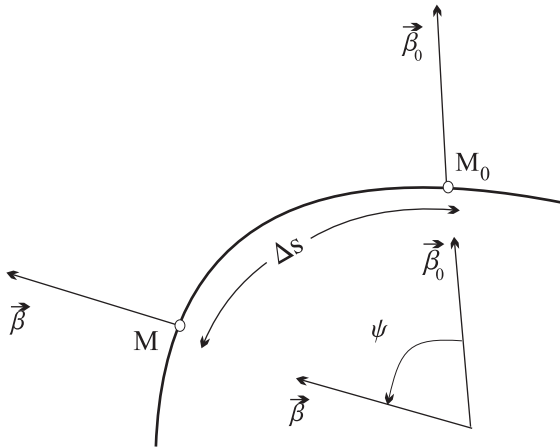
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}_0,$$

то

$$\vec{r} = \vec{\tau}_0 s + \vec{r}_0,$$

а это есть уравнение прямой линии.

## III.6 Геометрический смысл кручения кривой



**Рис. III.17.** Геометрический смысл кручения

Согласно III.14 кручение есть коэффициент разложения скорости изменения вектора бинормали по основному трехграннику кривой. Из III.14 следует:

$$|\kappa| = \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right|.$$

С другой стороны по определению производной:

$$\left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{\beta}|}{\Delta s},$$

где  $\Delta s$  — длина дуги, стягивающейся к точке  $M_0$ , а  $\Delta\vec{\beta}$  — соответствующее ей приращение единичного вектора бинормали (см. Рис. III.17).

Но согласно лемме о единичном векторе абсолютная величина приращения единичного вектора  $\Delta\vec{\beta}$  может быть заменена в пределе отношением угла  $\psi$  поворота вектора  $\vec{\beta}$  на дуге  $\Delta s$ . Таким образом:

$$|\kappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\psi}{\Delta s}. \quad (\text{III.32})$$

Абсолютная величина кручения в данной точке кривой равна пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.

Рассмотрим кривую  $\Gamma$ , кручение которой во всех точках равно нулю. Для такой кривой из третьей формулы Френе - Серре III.14 получим:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0 \implies \vec{\beta} = \vec{\beta}_0 = \text{Const}. \quad (\text{III.33})$$

Но касательный вектор  $\vec{\tau} = \vec{r}'$  ортогонален вектору бинормали:

$$\left( \vec{\tau} \vec{\beta} \right) = 0 \implies \left( \vec{r}' \cdot \vec{\beta} \right).$$

Поэтому вследствие III.33:

$$\frac{d}{ds} \left( \vec{\beta}_0 \cdot \vec{r} \right) = 0 \implies \left( \vec{\beta}_0 \cdot \vec{r} \right) = \text{Const} \quad (\text{III.34})$$

— радиус-вектор произвольной точки кривой удовлетворяет уравнению плоскости с вектором нормали  $\vec{N} = \vec{\beta}_0$ .

Итак:

Кривая с нулевым кручением есть плоская кривая.

## III.7 Формулы для вычисления кривизны и кручения

Чтобы вычислить кривизну и кручение кривой, заданной своим параметрическим уравнением, воспользуемся формулами III.23, III.24, III.25. Из них без труда получаются следующие соотношения

$$\vec{r}' = \vec{\tau}, \quad (\text{III.35})$$

$$\left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}'' \right] = k \left[ \vec{\tau} \vec{\nu} \right] = k\vec{\beta}, \quad (\text{III.36})$$

$$\left( \vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''' \right) = \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}'' \right] \vec{r}''' = k^2 \kappa. \quad (\text{III.37})$$

Эти соотношения позволяют выразить кривизну и кручение через производные вектора  $\vec{r}$  по натуральному параметру.

Для того, чтобы получить формулы, содержащие производные по произвольному параметру, преобразуем переменные и получим

$$\vec{r}' = \dot{\vec{r}} t', \quad (\text{III.38})$$

$$\vec{r}'' = \ddot{\vec{r}} (t')^2 + \dot{\vec{r}} t'', \quad (\text{III.39})$$

$$\vec{r}''' = \ddot{\vec{r}} (t')^3 + 3 \ddot{\vec{r}} t' t'' + \dot{\vec{r}} t'''. \quad (\text{III.40})$$

Произведя перемножение и принимая во внимание, что все произведения, содержащие равные множители, обращаются в нуль, будем иметь:

III.7. Формулы для вычисления кривизны и кручения

$$\vec{r} = \dot{\vec{r}} t', \quad (\text{III.41})$$

$$k\vec{\beta} = \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right] (t')^3, \quad (\text{III.42})$$

$$k^2\kappa = \left( \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right) (t')^6. \quad (\text{III.43})$$

Сравним абсолютные величины правой и левой части в формуле III.41, а потом и III.42

$$t' = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}, \quad (\text{III.44})$$

$$k = \frac{\left| \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right] \right|}{|\dot{\vec{r}}|^3}. \quad (\text{III.45})$$

Такова формула, определяющая кривизну. Формула III.43 дает для кручения

$$\kappa = \frac{\left( \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right)}{k^2 |\dot{\vec{r}}|^6}, \quad (\text{III.46})$$

или после замены кривизны ее выражением

$$\kappa = \frac{\left( \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right)}{\left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right]^2}. \quad (\text{III.47})$$

Формула III.45 показывает, что равенство нулю кривизны характеризует точку спрямления. Таким же образом из III.47 следует, что точки уплощения характеризуются равенством нулю кручения в этой точке.

В координатной записи выражение III.45 и III.47 принимают вид:

$$k = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \dot{y} & \dot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \dot{x} \\ \dot{z} & \dot{x} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{array} \right|^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{III.48})$$

$$\kappa = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \dot{y} & \dot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \dot{x} \\ \dot{z} & \dot{x} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{array} \right|^2}. \quad (\text{III.49})$$

### III.8 Кривизна плоской кривой

Плоскость называется ориентированной, если у нее различаются внешняя и внутренняя стороны.

Так, например, плоскость  $xOy$  можно считать ориентированной так, что ее внешняя сторона определяется положительным направлением оси  $Oz$ .

В ориентированной плоскости можно различать положительное и отрицательное направление вращения и приписывать углу этих вращений соответствующий знак.

Считают, что вращение положительно, если рассматриваемое с внешней стороны плоскости оно совершается в направлении, обратном движению часовой стрелки. Рассмотрим кривую в ориентированной плоскости  $xOy$  правой системы координат. Единичный касательный вектор этой кривой, указывающий направление возрастания параметра, можно представить в виде

$$\vec{e}(\alpha) = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  есть угол между положительным направлением оси  $Ox$  и вектором  $\vec{e}(\alpha)$ .

Вектор

$$\vec{e}_1(\alpha) = \vec{e}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

направлен по нормали то же кривой и получен из вектора  $\vec{e}(\alpha)$  его поворотом на прямой угол положительного направления.

Дифференцируя равенство

$$\vec{r}' = \vec{\tau} = \vec{e}(\alpha),$$

получим

$$\vec{r}'' = k\vec{\nu} = \vec{e}_1(\alpha) \frac{d\alpha}{ds}.$$

Величину

$$k_\alpha = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{III.50}$$

которая может отличаться от кривизны только знаком, будем называть *относительной кривизной*.

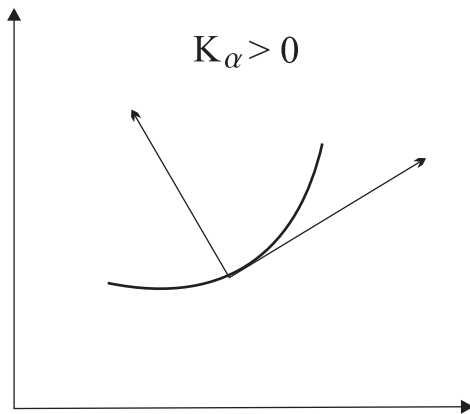
Относительная кривизна будет положительна, если вектор главной нормали  $\vec{\nu}$  совпадает с вектором  $\vec{e}_1(\alpha)$  и отрицательна если  $\vec{\nu} = -\vec{e}_1(\alpha)$ .



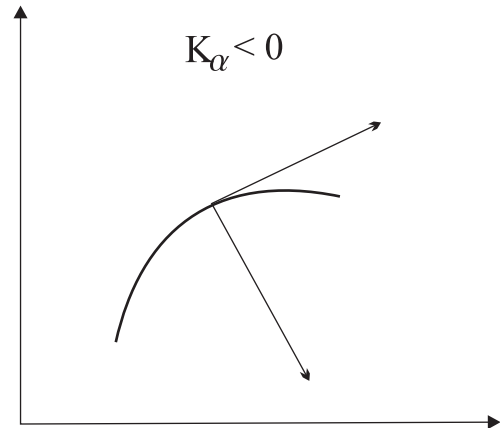
### III.8. Кривизна плоской кривой

Так как вектор главной нормали определяет направление вогнутости, то истолкованию знака относительной кривизны можно придать следующую форму.

Относительная кривизна положительна, если наблюдатель движущийся по внешней стороне плоскости в направлении возрастания параметра, имеет вогнутость кривой по свою левую руку, и отрицательна в противоположном случае [Рис.III.18](#).



**Рис.III.18a.** Кривизна плоской кривой  $k_{alpha} > 0$



**Рис.III.18b.** Кривизна плоской кривой  $k_{alpha} < 0$

Чтобы вычислить относительную кривизну, приложим формулу [III.42](#) к рассматриваемому случаю кривой, расположенной в плоскости  $xOy$

$$k\vec{\beta} = \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right] t'^3 = (x\ddot{y} - y\ddot{x})(t')^3 \vec{k}.$$

С другой стороны

$$k\vec{\beta} = \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}'' \right] = \left( \vec{e}(\alpha) \cdot \vec{e}_1(\alpha) \right) k_\alpha = \vec{k} k_\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$k_\alpha = (x\ddot{y} - y\ddot{x})(t')^3.$$

Если параметр  $t$  возрастает вместе с возрастанием  $s$ , то  $t$  положительно, но

$$t' = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

откуда

$$k_\alpha = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad (\text{III.51})$$

причем корню в знаменателе придается арифметическое значение. В частности, если кривая задана уравнением

$$y = f(x),$$

где  $x$  играет роль параметра, то в формуле следует положить

$$\dot{x} = 1; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx}; \quad \ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

откуда

$$k_\alpha = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}. \quad (\text{III.52})$$

Знак *относительной кривизны* совпадает со знаком производной  $\frac{d^2y}{dx^2}$  и определяет направление вогнутости кривой. Если  $k_\alpha$  положительна, то вогнутость направлена в сторону возрастания ординат, а при отрицательной  $k_\alpha$  в противоположную сторону. Точка перегиба характеризуется обращением в нуль  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , а вместе с тем и кривизны, то есть является точкой спрямления плоской кривой. Величина обратная кривизне есть *радиус кривизны* кривой

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Точка, определенная радиус-вектором

$$\vec{\rho}_c = \vec{r} + \rho\vec{\nu},$$

называется *центром кривизны* данной кривой.

# Глава IV

## Натуральные уравнения кривой

### IV.1 Натуральные уравнения

Инвариантами произвольной кривой является ее длина дуги, кривизна и кручение. Действительно, при любом преобразовании кривой или при перемещении кривой относительно системы координат они не могут измениться. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить их определение. Длина дуги определяется как предел длины периметра вписанной, а кривизна и кручение как пределы отношений углов поворота касательной или бинормали к длине дуги. Но длина и углы не меняются при передвижении кривой или при преобразовании координат, а вследствие этого дуга, кривизна и кручение остаются неизменными.

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то ее кривизна и кручение являются функциями этого параметра

$$k = k(s); \quad \kappa = \kappa(s). \quad (\text{IV.1})$$

Система этих двух соотношений называется *натуральными уравнениями кривой*. Так как натуральное уравнение связывает инварианты кривой, то оно не меняется при преобразовании координат или при перемещении кривой относительно этой системы. Основное значение натуральных уравнений состоит в том, что задание их вполне характеризует форму кривой, так что две кривые с одинаковыми натуральными уравнениями необходимо совпадают по своей форме и могут отличаться только положением пространства.

### IV.2 Кривые с общими натуральными уравнениями

Предположим, что нам даны две кривые  $\gamma$  и  $\gamma_1$ . Если на этих кривых можно ввести натуральные параметры  $s$  и  $s_1$  так, чтобы в точках, отвечающих

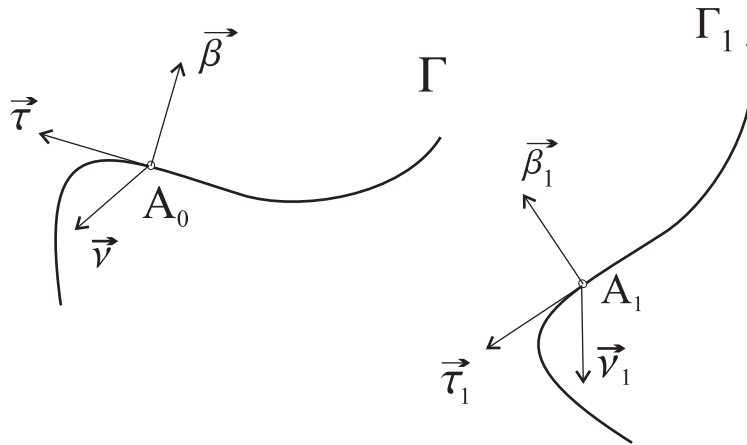
одинаковым значениям этих параметров, совпадали их кривизны  $k_1$  и  $k$  и их кручения  $\kappa_1$  и  $\kappa$  т.е., чтобы

$$k_1(s_1) = k(s); \quad \kappa_1(s_1) = \kappa(s) \quad (\text{IV.2})$$

при

$$s = s_1,$$

то мы будем говорить, что их натуральные уравнения совпадают. Докажем, что при этом условии кривые могут отличаться только положением в пространстве. Иными словами, одну из них, например  $\Gamma_1$ , можно переместить так, что она всеми своими точками совпадет с кривой  $\Gamma$ . Переместим кривую  $\Gamma_1$  так, чтобы ее точка  $A_1$ , отвечающая значению параметра  $s_1 = s_0$ , совпадала с точкой  $A_0$  кривой  $\Gamma$ , отвечающей тому же значению параметра  $s$ . После этого будем вращать  $\Gamma_1$  вокруг этой точки до тех пор, пока векторы ее основного трехгранника, взятые в той же точке, не совпадут с векторами трехгранника кривой  $\Gamma$ . Этого, очевидно, можно достигнуть, так как обе тройки правые и образованы единичными и взаимно ортогональными векторами [Рис.IV.19](#).



**Рис.IV.19.** *Кривые с общими натуральными уравнениями*

Отмечая ноликом значения векторов в точке  $A_0$ , будем иметь

$$\vec{r}_1^0 = \vec{r}^0; \quad \vec{\tau}_1^0 = \vec{\tau}^0; \quad \vec{\nu}_1^0 = \vec{\nu}^0; \quad \vec{\beta}_1^0 = \vec{\beta}^0.$$

Мы должны показать, что эти равенства, которые по построению имеют место для значений  $s_1 = s = s_0$ , справедливы и при любом другом значении параметра. Для этого рассмотрим комбинацию

$$\vec{\tau}\vec{\tau}_1 + \vec{\nu}\vec{\nu}_1 + \vec{\beta}\vec{\beta}_1 = \sigma$$

IV.2. Кривые с общими натуральными уравнениями

и найдем ее производную по параметру  $s$ , пользуясь формулами Серре - Френе и принимая во внимание IV.2. Но эта производная

$$\frac{d\sigma}{ds} = k\vec{\nu}\vec{\tau}_1 + (-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta})\vec{\nu}_1 - \kappa\vec{\nu}\vec{\beta}_1 + k\vec{\tau}\vec{\nu}_1 + \vec{\nu}(-k\vec{\tau}_1 + \kappa\vec{\beta}_1) - \kappa\vec{\beta}\vec{\nu}_1 = 0,$$

откуда следует, что

$$\sigma = \text{Const},$$

т.е. не зависит от  $s$ . Однако при  $s = s_0$  имеем равенство

$$\sigma_0 = \vec{\tau}_0^2 + \vec{\nu}_0^2 + \vec{\beta}_0^2 = 3,$$

вследствие чего  $\sigma = 3$  при любом значении  $s$ .

Скалярные произведения единичных векторов равны косинусу угла между ними, а сумма трех косинусов может равняться трем тогда и только тогда, если каждый из этих косинусов равен единице. Отсюда следует, что при любом значении  $s$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}; \quad \vec{\nu}_1 = \vec{\nu}; \quad \vec{\beta}_1 = \vec{\beta}.$$

Используем первое из этих равенств переписав его в виде

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}_1}{ds_1}.$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$\vec{r}_1(s) = \vec{r}(s) + \vec{c},$$

где  $\vec{c}$  постоянный вектор. Но по условию при  $s = s_0$   $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}$  совпадают. Отсюда следует, что  $\vec{c} = 0$ , а

$$\vec{r}_1(s) = \vec{r}(s)$$

при любом значении  $s$ . Таким образом кривая  $\Gamma_1$  после соответствующего перемещения совпала с кривой  $\Gamma$  и могла отличаться от нее только положением в пространстве.

# Глава V

## Задачи дифференциальной геометрии кривых

### V.1 Общие задачи о кривых

Основные формулы

$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{u}) = \lambda \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\vec{u}, \quad (\text{V.1})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\vec{v}) = \vec{u} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\vec{v}, \quad (\text{V.2})$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} = \left[ \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} \right]. \quad (\text{V.3})$$

Полезна также формула Эйлера:

$$|\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}|^2 + |(\vec{a} \vec{b})|^2 \equiv 1.$$

**Пример IV.1.** Вычислить кривизну и кручение кривой:

$$\vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t + \vec{c},$$

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - не коллинеарные векторы.

### Решение

Дифференцируя, найдем:

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{a} \sin t + \vec{b} \cos t; \quad \ddot{\vec{r}} = -\vec{a} \cos t - \vec{b} \sin t; \quad \dddot{\vec{r}} = \vec{a} \sin t - \vec{b} \cos t.$$

### V.1. Общие задачи о кривых

Таким образом, найдем:

$$[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}] = [\vec{a} \cdot \vec{b}]; \quad (\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = 0.$$

Таким образом, кручение кривой равно нулю, стало быть, кривая - плоская. Вычисляя кривизну кривой по формуле:

$$k = \frac{|[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}]|}{|\dot{\vec{r}}|^3},$$

найдем:

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{a^2 \sin^2 t - 2(\vec{a} \vec{b}) \sin t \cos t + b^2 \cos^2 t} \Rightarrow$$
$$k = \frac{|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|}{\left(\sqrt{a^2 \sin^2 t - 2(\vec{a} \vec{b}) \sin t \cos t + b^2 \cos^2 t}\right)^3}.$$

**Пример IV.2.** Доказать, что годограф функции

$$\vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t + \vec{c}$$

есть эллипс, расположенный в плоскости, проходящей через точку  $M_0(\vec{r}_0) | \vec{r}_0 = \vec{c}$  и содержащей векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если эти векторы не коллинеарны между собой.

### Решение

Тот факт, что эта линия лежит в плоскости, мы доказали выше. Введем в указанной плоскости  $\Pi(M_0; \vec{a}, \vec{b})$  систему декартовых координат  $xOy$  с началом в точке  $M_0(\vec{r}_0)$ : Тогда:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t.$$

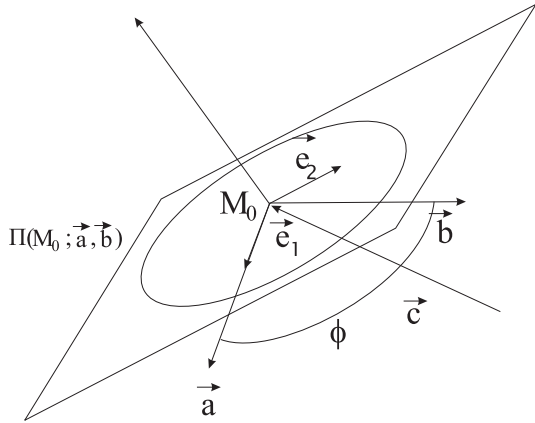


Рис.V.20. К задаче ПIV.2

Выберем в качестве орта первой координатной оси:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

а в качестве второго орта - вектор, лежащий в плоскости  $\Pi(M_0; \vec{a}, \vec{b})$  и ортогональный вектору  $\vec{e}_1$  (см. Рис.V.20):

$$\vec{e}_2 = \frac{\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{b} & \vec{a} \end{bmatrix}}{|\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{b} & \vec{a} \end{bmatrix}|}.$$

Вводя теперь координаты точки  $M$  на плоскости:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t,$$

и приравнивая коэффициенты при линейно - независимых векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в правой и левой частях этого векторного равенства, найдем координаты точки кривой:

$$\xi = |\vec{a}| \cos t + \frac{(\vec{a} \vec{b})}{|\vec{a}|} \sin t; \quad \eta = \frac{|\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}|}{|\vec{a}|} \sin t.$$

Учитывая, что

$$|\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}| = ab \sin \phi; \quad (\vec{a} \vec{b}) = ab \cos \phi,$$

где  $\phi$  - угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а  $a = |\vec{a}|$  и  $b = |\vec{b}|$  - длины этих векторов, получим параметрические уравнения кривой:

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos t + b \sin \phi \sin t; \\ \eta &= b \cos \phi \sin t, \end{aligned}$$

где  $\xi$  и  $\eta$  - прямоугольные координаты плоскости  $\Pi(M_0, \vec{a}, \vec{b})$ . Разрешая эти уравнения относительно  $\cos t$  и  $\sin t$ , найдем:

$$\sin t = \frac{\eta}{b \sin \phi}; \quad \cos t = \frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{a} \operatorname{ctg} \phi. \quad (\text{V.4})$$



## V.2. Кривая и касательная

возводя в квадрат обе части соотношений (V.4) и складывая, получим:

$$\frac{(\xi \sin \phi - \eta \cos \phi)^2}{a^2 \sin^2 \phi} + \frac{\eta^2}{b^2 \sin^2 \phi} = 1.$$

Этой кривой *второго порядка* на плоскости  $\Pi(M_0; \vec{a}, \vec{b})$  соответствует положительный определитель квадратичной формы:

$$\det(B) = \left( \frac{1}{ab \sin \phi} \right)^2;$$

поэтому кривая является эллипсом. При  $\phi = \frac{\pi}{2}$  полуоси эллипса направлены вдоль осей  $\xi$  и  $\eta$  и равны  $a = |\vec{a}|$ ,  $b = |\vec{b}|$ .

## V.2 Кривая и касательная

### Основные формулы

Если кривая задана параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{V.5}$$

то направление касательной определяется вектором производной

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{V.6}$$

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \tag{V.7}$$

где  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  - точка касания.

## V.3 Поверхность и ее касательные

### Основные формулы

Из аналитической геометрии известно, что поверхность выражается уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \tag{V.8}$$

связывающим координаты ее точек. Вектор нормали

$$\vec{N} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \tag{V.9}$$

где  $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$ .

Каноническое уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}. \quad (\text{V.10})$$

В особой точке поверхности частные производные от левой части ее уравнения по координатам точек одновременно обращаются в нуль

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0. \quad (\text{V.11})$$

Пространственную кривую можно рассматривать как кривую пересечения двух поверхностей. Задав эти поверхности уравнениями:

$$\varphi(x, y, z) = 0; \quad \psi(x, y, z) = 0, \quad (\text{V.12})$$

определим кривую как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют одновременно обоим этим уравнениям.

Касательный вектор  $\vec{T}$  кривой может быть получен их векторным умножением

$$\vec{T} = [\vec{N}_1 \vec{N}_2]. \quad (\text{V.13})$$

Нормальные векторы поверхностей вычислим, пользуясь формулой V.9 так что координатное выражение касательного вектора будет иметь вид

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}. \quad (\text{V.14})$$

## V.4 Соприкосновение кривых и поверхностей

### Основные формулы

Уравнение

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (\text{V.15})$$

где  $x, y, z$  координаты точки пространства, а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  независимые параметры, определяем *семейство поверхностей*, зависящее от  $n$  параметров.

Чтобы найти поверхность семейства, соприкасающуюся с кривой  $\Gamma$ , определенной параметрическими уравнениями,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$



назовем ее *начальной точкой*. Длина дуги, имеющей начало в точке  $A_0$  и конец в произвольной точке кривой  $A$ , определится формулой

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\vec{r}}| dt. \quad (\text{V.21})$$

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то направляющие векторы основного трехгранника определяют формулами

$$\vec{T} = \vec{r}'; \quad \vec{B} = [\vec{r}' \cdot \vec{r}'' ] \quad \vec{N} = \vec{r}'' . \quad (\text{V.22})$$

1. Единичный вектор касательной  $\vec{\tau}$ , определим так, чтобы он совпадал с первой производной радиуса-вектора по натуральному параметру

$$\vec{\tau} = \vec{r}' . \quad (\text{V.23})$$

Единичный вектор главной нормали  $\vec{\nu}$ , определим так, чтобы его ориентация совпадала с ориентацией вектора второй производной по натуральному параметру

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} . \quad (\text{V.24})$$

3. Единичный вектор бинормали  $\vec{\beta}$  ориентируем так, чтобы тройка векторов  $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\}$  была правой:

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau} \ \vec{\nu}] . \quad (\text{V.25})$$

Введенные векторы удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^2 = \vec{\nu}^2 = \vec{\beta}^2 = 1; \\ (\vec{\tau} \ \vec{\nu}) = (\vec{\nu} \ \vec{\beta}) = (\vec{\beta} \ \vec{\tau}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

$$[\vec{\nu} \ \vec{\beta}] = \vec{\tau}; \quad [\vec{\beta} \ \vec{\tau}] = \vec{\nu}. \quad (\text{V.27})$$

**Пример IV.3.** Составить уравнение соприкасающейся плоскости конической винтовой линии

$$\vec{r}(t) = (t \cos t, -t \sin t, at) \quad (\text{V.28})$$

в начале координат.

### Решение

Уравнение соприкасающейся плоскости (V.17) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{V.29})$$

Начало координат  $(0, 0, 0)$  соответствует значению  $t = 0$ . Вычисляя производные радиуса-вектора (V.28), получим:

$$\dot{\vec{r}} = (\cos t - \sin t, -\sin t - t \cos t, a); \quad \ddot{\vec{r}} = (-2 \sin t - t \cos t, -2 \cos t + t \sin t, 0).$$

Таким образом, в начале координат:

$$\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, a); \quad \ddot{\vec{r}}(0) = (0, -2, 0).$$

Записывая уравнение соприкасающейся плоскости (V.29):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

найдем общее уравнение:

$$-ax + z = 0.$$

**Пример ПIV.4.** Найти соприкасающуюся плоскость кривой пересечения двух поверхностей:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \Phi(x, y, z) &= 0, \\ \Sigma_2 : \Psi(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

В частности найти соприкасающуюся плоскость кривой пересечения сферы  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  и цилиндра  $C: x^2 + y^2 = R^2$ , не прибегая к параметризации этой кривой.

### Решение

Касательный вектор,  $\vec{T}$ , кривой пересечения равен:

$$\vec{T} = [\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi],$$

где  $\nabla F$  - так называемый вектор *градиента функции*  $F$ :

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Предположим, что кривая  $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  параметризована некоторым параметром  $t$ . Тогда

$$\dot{\vec{r}} = \lambda \vec{T}.$$

Вторая производная радиуса-вектора тогда равна:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d \dot{\vec{r}}}{dt} = \lambda \frac{d\vec{T}}{dt} = \lambda \left( \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) = \lambda^2 (\vec{T} \vec{\nabla}) \vec{T}.$$

Таким образом, нормальный вектор соприкасающейся плоскости, т.е., вектор бинормали равен<sup>1</sup>:

$$\vec{B} = [\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}] = [\vec{T} \cdot (\vec{T} \vec{\nabla}) \vec{T}].$$

Обратимся к конкретному примеру. Вычисляя, найдем (опуская несущественные множители) :

$$\vec{\nabla} \Phi = (x, y, z); \quad \vec{\nabla} \Psi = (x, y, 0).$$

$$\vec{T} = [\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi] = (-yz, xz, 0) \rightarrow (-y, x, 0).$$

Таким образом:

$$(\vec{T} \vec{\nabla}) = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$(\vec{T} \vec{\nabla}) \vec{T} = -(x, y, 0).$$

Окончательно найдем:

$$[\vec{T} \cdot (\vec{T} \vec{\nabla}) \vec{T}] = -(0, 0, x^2 + y^2) = -R^2(0, 0, 1) \implies$$

$$\vec{\beta} = (0, 0, 1).$$

Это означает, что соприкасающаяся плоскость будет параллельна координатной плоскости  $XOY$  в любой точке кривой. Найдя любую точку кривой  $\Gamma$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad x^2 + y^2 = R^2 \implies z = 0,$$

---

<sup>1</sup>множители вида  $\lambda$  /мы отбрасываем.

## V.6. Формулы Френе - Серре

приходим к тому, что эта плоскость и является в нашем случае соприкасающейся:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\beta}) = (x - x_0) \cdot 0 + (y - y_0) \cdot 0 + z \cdot 1 = 0 \implies z = 0.$$

**Пример IV.5.** Найдите единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой:

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \quad (\text{V.30})$$

в начале координат.

### Решение

Найдем производные радиуса-вектора (V.30):

$$\dot{\vec{r}} = (1, 2t, 3t^2); \quad \ddot{\vec{r}} = (0, 2, 6t).$$

Началу координат соответствует значение параметра  $t = 0$ . Таким образом, в начале координат:

$$\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0); \quad \ddot{\vec{r}} = (0, 2, 0).$$

Таким образом, единичные векторы касательной,  $\vec{\tau}$ , и бинормали,  $\vec{\beta}$ , равны:

$$\begin{aligned} \vec{T} = \vec{\tau} = \dot{\vec{r}}(0) &= (1, 0, 0); \\ \vec{B} = [\dot{\vec{r}}(0) \cdot \ddot{\vec{r}}(0)] &= (0, 0, 2) \implies \vec{\beta} = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Вектор главной нормали,  $\vec{\nu}$ , равен:

$$\vec{\nu} = \left[ \begin{array}{c} \vec{\tau} \\ \vec{\beta} \end{array} \right] = (1, 0, 0).$$

Итак, в начале координат основные единичные векторы  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\beta}$  совпадают с осями координат.

## V.6 Формулы Френе - Серре

### Основные формулы

Формулы Френе-Серре имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' &= k\vec{\nu}; \\ \vec{\nu}' &= -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}; \\ \vec{\beta}' &= -\kappa\vec{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

**Пример IV.6.** Параметризовать винтовую линию с помощью натурального параметра и найти вектор ее главной нормали.

### Решение

Цилиндрическая винтовая линия описывается параметрическими уравнениями:

$$\vec{r} = a\vec{e}(\varphi) + b\varphi\vec{k} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi).$$

Вычисляя первую производную этого вектора, найдем:

$$\dot{\vec{r}} = a\vec{e}_1(\varphi) + b\vec{k} = (-a \sin \varphi, a \cos \varphi, b).$$

Таким образом, длина дуги равна:

$$s = \int_0^t |\dot{\vec{r}}| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отсюда найдем:

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, подставляя эту связь в уравнение винтовой линии, осуществим ее натуральную параметризацию:

$$\vec{r} = a\vec{e}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\vec{k}.$$

Как известно, при этом единичный вектор главной нормали

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|},$$

причем

$$k = |\vec{r}''| -$$

- кривизна кривой. Таким образом, найдем :

$$\vec{r}'' = -\frac{a}{a^2 + b^2}\vec{e}(\varphi),$$

$$|\vec{r}''| = k = \frac{a}{a^2 + b^2},$$



$$\vec{\nu} = \vec{e}(\varphi).$$

**Пример ПV.7.** Найти векторы основного трехгранника и составить формулы Френе-Серре для цилиндрической винтовой линии.

### Решение

На основании решения примера ПV.6, имеем

$$\vec{\tau} = \vec{r}' = \frac{a\vec{e}(\varphi) + b\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} = -\vec{e}(\varphi)$$

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau} \vec{\nu}] = \frac{a\vec{k} - b\vec{e}(\varphi)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Коэффициент

$$k = |\vec{r}''| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (\text{V.32})$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{\beta}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{b\vec{e}(\varphi)}{a^2 + b^2} = -\kappa\vec{\nu},$$

откуда следует, что

$$\kappa = -\frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (\text{V.33})$$

Таким образом формулы Серре-Френе имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \frac{a}{a^2 + b^2}\vec{\nu}, \\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} &= -\frac{a}{a^2 + b^2}\vec{\tau} + \frac{b}{a^2 + b^2}\vec{\beta}, \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} &= -\frac{b}{a^2 + b^2}\vec{\nu}. \end{aligned}$$

## V.7 Кривизна и кручение кривой

### Основные формулы

Кривизна кривой в данной точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке:

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta S} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|. \quad (\text{V.34})$$

Абсолютная величина кручения в данной точке кривой равна пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги:

$$|\kappa| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\psi}{\Delta S} = \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right|. \quad (\text{V.35})$$

Если кривая задана в общей параметризации  $\vec{r} = \vec{r}(b)$ , то формулы для вычисления кривизны и кручения принимают вид:

$$k = \frac{\left| \left[ \begin{array}{c} \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \end{array} \right] \right|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \quad (\text{V.36})$$

$$\kappa = \frac{\left( \begin{array}{c} \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \end{array} \right)}{\left| \left[ \begin{array}{c} \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \end{array} \right] \right|^2}. \quad (\text{V.37})$$

В координатной записи выражение V.36 и V.37 принимают вид:

$$k = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{array} \right|^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{V.38})$$

$$\kappa = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{array} \right|^2}. \quad (\text{V.39})$$

**Пример IV.8.** Вычислить кривизну кривой

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t.$$

### Решение

Для вычисления кривизны воспользуемся формулой V.38

Имеем

$$\dot{x} = -3 \cos^2 t \sin t, \quad \dot{y} = 3 \sin^2 t \cos t, \quad \dot{z} = -2 \sin 2t;$$

$$\ddot{x} = 6 \sin^2 t \cos t - 3 \cos^3 t, \quad \ddot{y} = 6 \sin t \cos^2 t - 3 \sin^3 t, \quad \ddot{z} = -4 \cos 2t.$$

Проделав необходимые вычисления, получим

$$k = \frac{6}{25 |\sin 2t|}.$$

**Пример IV.9.** Показать, что кривая

$$x = 1 + 3t + 2t^2, \quad y = 2 - 2t + 5t^2, \quad z = 1 - t^2$$

плоская, и найти уравнение плоскости, в которой расположен ее образ.

### Решение

Подсчитывая производные, имеем

$$\dot{\vec{r}}(t) = (3 + 4t, -2 + 10t, -2t);$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (4, 10, -2);$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 0, 0).$$

Поэтому кручение кривой

$$\kappa = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{[\dot{\vec{r}}]^2} = 0.$$

Как мы показали ранее, всякая кривая, кручение которой равно нулю, плоская. Чтобы непосредственно установить, что наша кривая плоская, вместе с тем определить уравнение плоскости, в которой лежит кривая, можно, подсчитывая уравнение ее соприкасающейся плоскости, обнаружить, что это

уравнение не зависит от параметра  $t$ . Гораздо проще непосредственно исключить параметр  $t$  из уравнений, определяющих нашу кривую:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ y-2 & -2 & 5 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $2x + 3y + 19z - 27 = 0$ .

**Пример ПV.10.** Доказать, что формулы Френе V.31 можно записать в виде

$$\dot{\vec{\tau}} = [\vec{\zeta}, \vec{\tau}]; \quad \dot{\vec{\nu}} = [\vec{\zeta}, \vec{\nu}]; \quad \dot{\vec{\beta}} = [\vec{\zeta}, \vec{\beta}].$$

Найти вектор  $\vec{\zeta}$  (вектор Дарбу). См. также (III.21).

### Решение

Разложим вектор  $\vec{\zeta}$  по ортонормированному базису векторов сопровождающего трехгранника кривой:

$$\vec{\zeta} = a\vec{\tau} + b\vec{\nu} + c\vec{\beta}.$$

Имеем

$$[\vec{\zeta}, \vec{\tau}] = -b\vec{\beta} + d\vec{\nu} = k\vec{\nu},$$

откуда  $b = 0$ ,  $d = k$ . Далее

$$[\vec{\zeta}, \vec{\nu}] = a\vec{\beta} - d\vec{\tau} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta},$$

откуда  $a = \kappa$ . Остается проверить последнюю формулу. Имеем

$$[\vec{\zeta}, \vec{\beta}] = [\kappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}, \vec{\beta}] = \kappa[\vec{\tau}, \vec{\beta}] = -\kappa\vec{\nu}.$$

Итак

$$\vec{\zeta} = \kappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}.$$

Вектор  $\vec{\zeta}$  имеет простой кинематический смысл — это вектор угловой скорости вращения сопровождающего трехгранника при движении вдоль кривой (если под временем понимать длину дуги этой кривой).

**Пример ПV.11.** Найти выражение для кривизны кривой, заданной полярным уравнением:

$$\vec{r} = \rho(\phi)\vec{e}(\varphi), \quad \text{где } \vec{e}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \text{ — круговая векторная функция.}$$

### Решение

Принимая в качестве параметра  $t$  полярный угол:  $t = \phi$ , найдем:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \vec{e}(\varphi) + 2\rho \vec{e}'(\varphi), \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho) \vec{e}(\varphi) + 2\dot{\rho} \vec{e}_1(\varphi) \\ \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right] &= (2\dot{\rho}^2 + \rho^2 - \rho\ddot{\rho}) \vec{k}, \\ |\dot{\vec{r}}| &= (\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2},\end{aligned}$$

откуда получим:

$$k = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2}}.$$

## V.8 *Натуральные уравнения кривой*

### **Основные формулы**

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то ее кривизна и кручение являются функциями этого параметра

$$k = k(s); \quad \kappa = \kappa(s). \quad (\text{V.40})$$

Система этих двух соотношений называется *натуральными уравнениями кривой*.

**Пример ПV.12.** *Составить натуральные уравнения кривой*

$$x = ct, \quad y = \sqrt{2}c \ln t, \quad z = ct^{-1}.$$

### Решение

Прежде всего найдем зависимость между параметром  $t$  и натуральном параметром  $s$ . Имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 \left( 1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} \right) dt^2 = \frac{c^2(t^2 + 1)^2}{t^4} dt^2,$$

т.е.

$$ds = \frac{c(t^2 + 1)}{t^2} dt.$$

Поэтому

$$s = c \int_{t_0}^t \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = c \left( t - \frac{1}{t} \right) - c \left( t_0 - \frac{1}{t_0} \right).$$

Полагая  $t_0 = 1$ , получим

$$s = c \left( t - \frac{1}{t} \right).$$

Из этого равенства нетрудно найти  $t$  как функцию  $s$  :

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}.$$

Уравнение кривой в натуральном параметре имеет вид:

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}, \quad y = \sqrt{2}c \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}, \quad z = \frac{2c^2}{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}.$$

Вычисляя теперь кривизну и кручение данной кривой, как функции параметра  $s$ , найдем ее натуральные уравнения:

$$k = \kappa = \frac{c\sqrt{2}}{s^2 + 4c^2}.$$

## Глава VI

# Дифференциальная геометрия кривых в пакете Maple

### VI.1 Maple-процедура вычисления производных векторной функции скалярного аргумента

Введем **процедуры вычисления** первых трех производных векторной функции скалярного аргумента:<sup>1</sup>

```
> restart;
```

При этом необходимо соблюдать следующие правила

```
> df:=(f,t)->diff(f,t);
```

```
> df(sin(t),t);
```

$$df := (f, t) \rightarrow \text{diff}(f, t) \\ \cos(t)$$

Итак, с помощью введенной процедуры вычисления первой

производной функции введем **процедуру вычисления первой**

**производной радиуса-вектора**  $r(x,y,z)$ ,  $dr(x,y,z)$ :

```
> r:=(x,y,z)->[x,y,z];
```

```
> dr:=(x,y,z,t)->[df(x,t),df(y,t),df(z,t)];
```

```
> dr(cos(t),sin(t),t,t);
```

$$r := (x, y, z) \rightarrow [x, y, z] \\ dr := (x, y, z, t) \rightarrow [df(x, t), df(y, t), df(z, t)] \\ [-\sin(t), \cos(t), 1]$$

---

<sup>1</sup>В этой главе использованы собственные Maple-программы Автора а также студентов математического факультета, выполнявших дипломные работы под его руководством.

Аналогично введем **процедуры вычисления второй и третьей**

**производных** радиуса-вектора:

```
> d2f:=(f,t)->diff(f,t$2);
> d2f(cos(t),t);
> d2r:=(x,y,z,t)->[d2f(x,t),d2f(y,t),d2f(z,t)];
> d2r(cos(t),sin(t),t,t);
> d3f:=(f,t)->diff(f,t$3);
> d3f(cos(t),t);
> d3r:=(x,y,z,t)->[d3f(x,t),d3f(y,t),d3f(z,t)];
> d3r(cos(t),sin(t),t,t);
```

$$d2f := (f, t) \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} f \\ -\cos(t)$$

$$d2r := (x, y, z, t) \rightarrow [d2f(x, t), d2f(y, t), d2f(z, t)] \\ [-\cos(t), -\sin(t), 0]$$

$$d3f := (f, t) \rightarrow \frac{d^3}{dt^3} f \\ \sin(t)$$

$$d3r := (x, y, z, t) \rightarrow [d3f(x, t), d3f(y, t), d3f(z, t)] \\ [\sin(t), -\cos(t), 0]$$

## VI.2 Процедура вычисление кривизны кривых

Действия с векторами производятся с помощью библиотеки **linalg**, которую подключим командой: **with(linalg)**: Вычислим длины,  $l_1$  и  $l_2$ , векторов первой и второй производной с помощью команды скалярного произведения **innerprod(a,b)**. Для этого создадим процедуру вычисления длины вектора, Mod(a):

```
> Mod:=(a)->simplify(sqrt(linalg[innerprod](a,a))):
```

Приведем пример:

```
> Mod([cos(t),sin(t),t]);
> Mod(d2r(cos(t),sin(t),t,t));
```

$$\sqrt{t^2 + 1} \\ 1$$

Создадим процедуры вычисления модуля первой и второй производных радиуса-вектора:



### VI.3. Процедура вычисления кручения кривых

```
> mod_dr := (x, y, z, t) -> Mod(dr(x, y, z, t)) :  
> mod_d2r := (x, y, z, t) -> Mod(d2r(cos(t), sin(t), t, t)) ;  
    mod_d2r := (x, y, z, t) -> Mod(d2r(cos(t), sin(t), t, t))
```

Приведем пример:

```
> mod_dr(cos(t), sin(t), t, t) ;  
> mod_d2r(cos(t), sin(t), t, t) ;  
     $\sqrt{2}$   
    1
```

Введем процедуры вычисления векторных произведений первых и вторых производных

с помощью команды **crossprod(a,b)** и модуля векторного произведения:

```
> dvec_12 := (x, y, z, t) -> linalg[crossprod](dr(x, y, z, t), d2r(x, y, z, t)) ;  
> mod_dvec_12 := (x, y, z, t) -> Mod(dvec_12(x, y, z, t)) :  
    dvec_12 := (x, y, z, t) -> linalg_crossprod(dr(x, y, z, t), d2r(x, y, z, t))
```

По формуле учебника А.П.Нордена "Дифференциальная геометрия"

создадим, наконец, процедуру вычисления кривизны кривой,  $k := (x, y, z, t)$ :

```
> k := (x, y, z, t) -> simplify(mod_dvec_12(x, y, z, t) / mod_dr(x, y, z, t)^3) :
```

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую винтовую линию:

$$x = a \cos(t), y = a \sin(t), z = bt$$

:

```
> k(a*cos(t), a*sin(t), b*t, t) ;  
     $\frac{\sqrt{(b^2 + a^2)} a^2}{(b^2 + a^2)^{3/2}}$ 
```

## VI.3 Процедура вычисления кручения кривых

Для вычисления кручения  $\kappa(t)$  введем процедуру вычисления смешанного произведения первых трех производных

радиусов-векторов кривых как результат скалярного произведения от векторного произведения

первых двух производных и третьей производной радиуса-вектора:

$([r' \ r'' \ r'''])$

```
> comb_123:=(x,y,z,t)->
> simplify(linalg[innerprod](dvec_12(x,y,z,t),d3r(x,y,z,t))):
```

В качестве примера вычислим смешанное произведение первых трех производных

радиуса-вектора цилиндрической винтовой линии:

```
> comb_123(a*cos(t),a*sin(t),b*t,t);
      b a^2
```

С помощью формулы книги А.П.Нордена "Лекции по дифференциальной геометрии" создадим процедуру вычисления кручения кривой:

```
> kappa:=(x,y,z,t)->simplify(comb_123(x,y,z,t)/mod_dvec_12(x,y,z,t)^2)
```

В качестве примера вычислим кручение цилиндрической винтовой линии:

```
> kappa(a*cos(t),a*sin(t),b*t,t);
      b
     -----
    b^2 + a^2
```

Таким образом, мы создали процедуры вычисления кривизны и кручения для произвольной параметризованной кривой.

## VI.4 Пример исследования кривых

### Винтовая линия на гиперboloиде

Рассмотрим однополостной гиперboloид вращения:

$$x = a \operatorname{ch}(u) \cos(v), \quad y = a \operatorname{ch}(u) \sin(v), \quad z = a \operatorname{sh}(u)$$

и зададим на нем винтовую линию с помощью внутренних уравнений:

#### VI.4. Пример исследования кривых

$$u = \alpha t, v = \beta t$$

, -

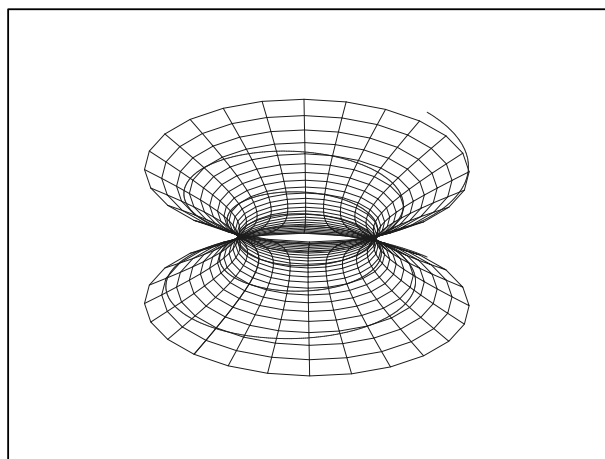
- тем самым мы получим винтовую линию на однополостном гиперboloиде

вращения:

```
> Hyp:=(a,u,v)->[a*cosh(u)*cos(v),a*cosh(u)*sin(v),a*sinh(u)]:
> Hyp(a,u,v);
      [a cosh(u) cos(v), a cosh(u) sin(v), a sinh(u)]
> Line_1:=(a,alpha,beta,t)->Hyp(a,alpha*t,beta*t):
> Line_1(a,alpha,beta,t);
> Line_1(1,0.1,1,t);
      [a cosh(alpha t) cos(beta t), a cosh(alpha t) sin(beta t), a sinh(alpha t)]
      [cosh(0.1 t) cos(t), cosh(0.1 t) sin(t), sinh(0.1 t)]
```

Изобразим однополостной гиперboloид с винтовой линией:

```
> Hyp_G:=plot3d(Hyp(1,u,v),u=-1.5..1.5,v=0..2*Pi,style=WIREFRAME,color
> BLUE):
> Line_1G:=plots[spacecurve](Line_1(1,0.1,1,t),t=-5*Pi..5*Pi,color=NA
> thickness=2,numpoints=2000):
> plots[display](Hyp_G,Line_1G);
```



**Рис. VI.21.** Спираль на гиперboloиде вращения

Вычислим теперь кривизну и кручение этой линии:

```
> 'k'=k(op(Line_1(a,alpha,beta,t)),t);
> 'кappa'=kappa(op(Line_1(a,alpha,beta,t)),t);
```

$$k = (a^4(3 \cosh(\alpha t)^4 \alpha^2 \beta^4 + 2 \cosh(\alpha t)^4 \alpha^4 \beta^2 - 4 \cosh(\alpha t)^2 \beta^4 \alpha^2 + 4 \beta^2 \alpha^4 - 7 \alpha^4 \cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + \cosh(\alpha t)^4 \beta^6 + \alpha^6))^{(1/2)} / (a^2 (\cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + 2 \cosh(\alpha t)^2 \alpha^2 - \alpha^2) \sqrt{a^2 (\cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + 2 \cosh(\alpha t)^2 \alpha^2 - \alpha^2)})$$

$$\kappa = \alpha \cosh(\alpha t) \beta (2 \alpha^4 + \alpha^2 \cosh(\alpha t)^2 \beta^2 - 4 \beta^2 \alpha^2 + \cosh(\alpha t)^2 \beta^4) / (a(3 \cosh(\alpha t)^4 \alpha^2 \beta^4 + 2 \cosh(\alpha t)^4 \alpha^4 \beta^2 - 4 \cosh(\alpha t)^2 \beta^4 \alpha^2 + 4 \beta^2 \alpha^4 - 7 \alpha^4 \cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + \cosh(\alpha t)^4 \beta^6 + \alpha^6))$$

Проверим, симметричны ли эти формулы при замене  $z$  на  $-z$ ,

или,  $t$  на  $-t$ :

```
> simplify(k(op(Line_1(a,alpha,beta,t)),t)-k(op(Line_1(a,alpha,beta,t),t)));
0
> simplify(kappa(op(Line_1(a,alpha,beta,t)),t)-kappa(op(Line_1(a,alpha,beta,t),t)));
0
```

- функции симметричны. Вычислим пределы этих функций на бесконечности:

```
> simplify(limit(k(op(Line_1(a,alpha,beta,t)),t),t=infinity),
> assume(alpha>0,beta>0,a>0));
> simplify(limit(kappa(op(Line_1(a,alpha,beta,t)),t),t=infinity),
> assume(alpha>0,beta>0,a>0));
```

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (a^4(3 \cosh(\alpha t)^4 \alpha^2 \beta^4 + 2 \cosh(\alpha t)^4 \alpha^4 \beta^2 - 4 \cosh(\alpha t)^2 \beta^4 \alpha^2 + 4 \beta^2 \alpha^4 - 7 \alpha^4 \cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + \cosh(\alpha t)^4 \beta^6 + \alpha^6))^{(1/2)} / (a^2 (\cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + 2 \cosh(\alpha t)^2 \alpha^2 - \alpha^2) \sqrt{a^2 (\cosh(\alpha t)^2 \beta^2 + 2 \cosh(\alpha t)^2 \alpha^2 - \alpha^2)})$$

$$0$$

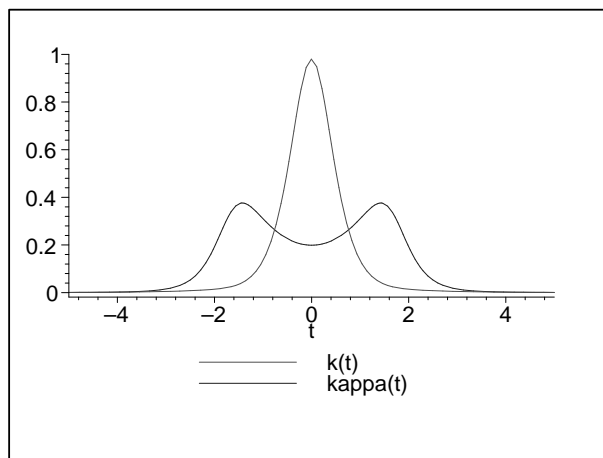
- кривизна и кручение винтовой линии на бесконечности равны нулю.

Так как формулы для кривизны и кручения получились громоздкими,

дадим их графическое представление:

## VI.5. Исследование кривых в евклидовом пространстве по их натуральным уравнениям

```
> plot([k(op(Line_1(1,1,0.1,t)),t),kappa(op(Line_1(1,1,0.1,t)),t)],  
> t=-5..5,color=[red,blue],legend=['k(t)', 'kappa(t)'],axes=FRAME);
```



**Рис. VI.22.** Графики кривизны и кручения кривой

## VI.5 Исследование кривых в евклидовом пространстве по их натуральным уравнениям

Пусть дана кривая  $\Gamma$  своими натуральными уравнениями:

$\kappa$

$= \kappa(s)$ , где  $k$  - кривизна кривой,  $\kappa$  - ее кручение,  $s$  - натуральный параметр (длина дуги кривой).

### VI.5.1 Задание кривой

#### и производные по натуральному параметру

Предположим, что нам известны параметрические уравнения кривой в натуральной параметризации, т.е., заданы три функции:

$$x = X(s);$$

$$y = Y(s);$$

$$z = Z(s);$$

```
> restart;
```

```
> R(s):=[X(s),Y(s),Z(s)];
```

$$R(s) := [X(s), Y(s), Z(s)]$$

Определим теперь производные этой векторной функции по аргументу  $s$ .

Производные первого порядка от функции  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  определяются командой  $\mathbf{diff}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ ,

производные  $n$ -го порядка - командой  $\mathbf{diff}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{x}\$n)$ :

**Производные первого порядка:**

```
> tau_1(s):=[diff(X(s),s),diff(Y(s),s),diff(Z(s),s)];
      tau_1(s):=[d/ds X(s), d/ds Y(s), d/ds Z(s)]
```

Но мы знаем, что вектор  $\tau_1$  имеет единичную длину, т.е.:

$$|\tau_1|=1$$

поэтому координаты этого вектора можно параметризовать двумя переменными:

$$\left\{ \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)); \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)); \frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)) \right\}$$

,

где  $\Phi(s)$ ,  $\Theta(s)$  - произвольные функции натурального параметра.

Сделаем указанные подстановки и вычислим затем производную радиуса вектора:

```
> DR:=
> {diff(X(s),s)=cos(Phi(s))*cos(Theta(s)),diff(Y(s),s)=sin(Phi(s))*co
> Theta(s), diff(Z(s),s)=sin(Theta(s))};
```

$$DR := \left\{ \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)) \right\}$$

и запишем производную радиуса вектора,  $\tau(s)$ , с помощью новых переменных:

```
> tau(s):=subs(DR,tau_1(s));
> u(s):=tau(s)[1];v(s):=tau(s)[2];w(s):=tau(s)[3];
      tau(s):=[cos(Phi(s))cos(Theta(s)),sin(Phi(s))cos(Theta(s)),sin(Theta(s))]
      u(s):=cos(Phi(s))cos(Theta(s))
      v(s):=sin(Phi(s))cos(Theta(s))
      w(s):=sin(Theta(s))
```

**Производные второго порядка:**

```
> R2(s):=[diff(u(s),s),diff(v(s),s),diff(w(s),s)];
```

$$R2(s) := \left[ -\sin(\Phi(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) - \cos(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right), \right. \\ \left. \cos(\Phi(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) - \sin(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right), \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \right]$$

Производные третьего порядка:

```
> R3(s):=[diff(u(s),s$2),diff(v(s),s$2),diff(w(s),s$2)];
```

$$\begin{aligned} R3(s) := & [-\cos(\Phi(s)) \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right)^2 \cos(\Theta(s)) - \sin(\Phi(s)) \left(\frac{d^2}{ds^2} \Phi(s)\right) \cos(\Theta(s)) \\ & + 2 \sin(\Phi(s)) \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) - \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)^2 \\ & - \cos(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d^2}{ds^2} \Theta(s)\right), -\sin(\Phi(s)) \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right)^2 \cos(\Theta(s)) \\ & + \cos(\Phi(s)) \left(\frac{d^2}{ds^2} \Phi(s)\right) \cos(\Theta(s)) - 2 \cos(\Phi(s)) \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) \\ & - \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)^2 - \sin(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d^2}{ds^2} \Theta(s)\right), \\ & -\sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)^2 + \cos(\Theta(s)) \left(\frac{d^2}{ds^2} \Theta(s)\right)] \end{aligned}$$

### VI.5.2 Вычисление кривизны и кручения кривой

Предполагая, что параметрические уравнения кривой  $\Gamma$  известны, вычислим ее кривизну и кручение по стандартным формулам дифференциальной геометрии

(см. А.П.Норден "Дифференциальная геометрия Изд-во *Учпедгиз*, 1948 г, Москва).

При этом скалярное и векторное произведения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  вычисляем с помощью

команд **innerprod(a,b)** и **crossprod(a,b)** библиотеки **linalg**, соответственно:

```
> k(s):=sqrt(simplify(linalg[innerprod](R2(s),R2(s))));
```

$$k(s) := \sqrt{\left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)^2}$$

С помощью команды **scalarmul(a, alpha)** библиотеки **linalg** производим умножение вектора

$\mathbf{r}''(s)$  на число  $\alpha$  - тем самым получаем единичный вектор  $\nu$  сопровождающего трехгранника

кривой:.

```
> nu(s):=linalg[scalarmul](R2(s),1/k(s));
```

$$\nu(s) := \left[ \begin{array}{l} \frac{-\sin(\Phi(s)) \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right) \cos(\Theta(s)) - \cos(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)}{\sqrt{\%1}}, \\ \frac{\cos(\Phi(s)) \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right) \cos(\Theta(s)) - \sin(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)}{\sqrt{\%1}}, \frac{\cos(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)}{\sqrt{\%1}} \end{array} \right]$$

$$\%1 := \left(\frac{d}{ds} \Phi(s)\right)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right)^2$$

Убедимся в том, что первая и вторая производные радиуса-вектора ортогональны

(так как вторая производная есть производная от единичного вектора  $\tau$ ):

> simplify(linalg[innerprod](tau(s), nu(s)));

0

Вычислим векторное произведение этих же векторов:

> V\_DR\_D2R(s) := linalg[crossprod](tau(s), R2(s));

$$\begin{aligned}
 V\_DR\_D2R(s) := & \left[ \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \right. \\
 & - \sin(\Theta(s)) \left( \cos(\Phi(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) - \sin(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \right), \\
 & \sin(\Theta(s)) \left( -\sin(\Phi(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) - \cos(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \right) \\
 & - \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right), \\
 & \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)) \left( \cos(\Phi(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) - \sin(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \right) \\
 & - \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)) \\
 & \left. \left( -\sin(\Phi(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) - \cos(\Phi(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

С помощью скалярного умножения полученного результата и вектора третьей производной

получим кручение кривой  $\kappa(s)$ :

> kappa(s) := simplify(linalg[innerprod](V\_DR\_D2R(s), R3(s))/k(s)^2);

$$\begin{aligned}
 \kappa(s) := & \left( \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right)^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \right. \\
 & - \left. \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \left( \frac{d^2}{ds^2} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) + \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d^2}{ds^2} \Theta(s) \right) \right) / \left( \right. \\
 & \left. \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right)^2 \right) \\
 \kappa(s) := & \left( \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d^2}{ds^2} \Theta(s) \right) - \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) \left( \frac{d^2}{ds^2} \Phi(s) \right) \cos(\Theta(s)) \right. \\
 & \left. + 2 \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right)^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) + \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right)^3 \cos(\Theta(s))^2 \right) / \left( \right. \\
 & \left. \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

### VI.5.3 Формирование системы дифференциальных уравнений

Напомним, что натуральные уравнения кривой — это пара уравнений:

$$k = k(s)$$

$$; \kappa = \kappa(s),$$

где  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  в правых частях заданы как функции натурального параметра  $s$ . Правые части этих уравнений мы будем задавать, а левые части



этих уравнений определяются дифференциальными выражениями, которые мы получили выше. Таким образом, мы получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций —  $\Phi(s)$  и  $\Theta(s)$ . Для численного интегрирования этой системы необходимо привести ее к нормальному виду, т.е., к системе ОДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производных. Для этого обозначим первые производные от искомых функций с помощью новых функций,  $\Phi_S(s)$  и  $\Theta_S(s)$ :  $\frac{d\Phi(s)}{ds} = \Phi_S(s)$ ;  $\frac{d\Theta(s)}{ds} = \Theta_S(s)$ :

> D1:=diff(Phi(s),s)=Phi[S](s);D2:=diff(Theta(s),s)=Theta[S](s);

$$D1 := \frac{d}{ds} \Phi(s) = \Phi_S(s)$$

$$D2 := \frac{d}{ds} \Theta(s) = \Theta_S(s)$$

Подставим эти значения производных в выражения для кривизны и кручения  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  с помощью команды **subs(подстановка, выражение)**:

> K(s):=subs({D1,D2},k(s));

> K1(s):=subs({D1,D2},kappa(s));

$$K(s) := \sqrt{\Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \Theta_S(s)^2}$$

$$K1(s) := (\sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right)) / (\Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \Theta_S(s)^2)$$

Введем заданные функции кривизны и кручения:

$$k(s) = \psi(s)$$

;

$$\kappa(s) = \xi(s)$$

и, избавляясь от радикалов с учетом неотрицательности кривизны кривой,

получим уравнения на функции  $\Phi_S(s)$  и  $\Theta_S(s)$ :

> EQ1:=K(s)^2=psi(s)^2;

> K\_2:=subs(EQ1,K1(s)=xi(s));

$$EQ1 := \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \Theta_S(s)^2 = \psi(s)^2$$

$$K_2 := (\sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right)) / \psi(s)^2 = \xi(s)$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по натуральному параметру

> K\_1:=diff(EQ1,s);

$$K\_1 := 2 \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^2 \left(\frac{d}{ds} \Phi_S(s)\right) - 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) + 2 \Theta_S(s) \left(\frac{d}{ds} \Theta_S(s)\right) = 2 \psi(s) \left(\frac{d}{ds} \psi(s)\right)$$

и разрешим полученную систему уравнений относительно первых производных

функций  $\Phi_S(s)$  и  $\Theta_S(s)$  с помощью команды **solve(система уравнений, {неизвестные} )**:

> Sys:=solve({K\_2,K\_1},{diff(Phi[S](s),s),diff(Theta[S](s),s)});

$$\begin{aligned} Sys := & \left\{ \frac{d}{ds} \Phi_S(s) = (\Phi_S(s)^3 \sin(\Theta(s))^3 \cos(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) \right. \\ & + \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s))^3 \Phi_S(s)^3 \Theta_S(s) + \Phi_S(s) \sin(\Theta(s))^2 \psi(s) \left(\frac{d}{ds} \psi(s)\right) \\ & - \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \Theta_S(s) - \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) \\ & - 2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^3 \Phi_S(s) + \cos(\Theta(s)) \xi(s) \psi(s)^2 \Theta_S(s) \\ & \left. - \Phi_S(s) \psi(s) \left(\frac{d}{ds} \psi(s)\right) \right\} / \left( (\sin(\Theta(s))^2 - 1) (\Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \Theta_S(s)^2) \right), \\ \frac{d}{ds} \Theta_S(s) = & -(\Phi_S(s)^4 \cos(\Theta(s))^3 \sin(\Theta(s))^3 - \Phi_S(s)^4 \cos(\Theta(s))^3 \sin(\Theta(s)) \\ & + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^3 \xi(s) \psi(s)^2 - 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^3 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \\ & - \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s))^3 \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) \Theta_S(s) \\ & + \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left(\frac{d}{ds} \Theta(s)\right) \Theta_S(s) - \psi(s) \left(\frac{d}{ds} \psi(s)\right) \Theta_S(s) \sin(\Theta(s))^2 \\ & + \psi(s) \left(\frac{d}{ds} \psi(s)\right) \Theta_S(s) \right) / \left( \right. \\ & \left. \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^2 \sin(\Theta(s))^2 - \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s))^2 + \Theta_S(s)^2 \sin(\Theta(s))^2 - \Theta_S(s)^2 \right) \} \end{aligned}$$

Создадим теперь нормальную систему дифференциальных уравнений относительно

неизвестных функций  $\Phi(s)$ ,  $\Theta(s)$ ,  $\Phi_S(s)$  и  $\Theta_S(s)$ , объединяя полученные уравнения

с определениями **DR** функций  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $Z(s)$  через функции  $\Phi(s)$ ,  $\Theta(s)$  с помощью

команды **union**:

> System0:=DR union {D1,D2,K\_1,K\_2\*psi(s)^2};

$$\begin{aligned} \text{System0} := \{ & \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \\ & \frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)), \frac{d}{ds} \Phi(s) = \Phi_S(s), \frac{d}{ds} \Theta(s) = \Theta_S(s), 2 \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \\ & - 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) + 2 \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = 2 \psi(s) \left( \frac{d}{ds} \psi(s) \right), \\ & \sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) \\ & + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = \xi(s) \psi(s)^2 \} \end{aligned}$$

#### VI.5.4 Начальные условия

Как известно, (см., например, А.П.Норден "Дифференциальная геометрия Учпедгиз,

1948, Москва) кривые с одинаковыми натуральными уравнениями конгруэнтны,

т.е., всегда существует движение, которое переводит одну кривую в другую.

Пользуясь движениями, всегда можно задать начальные условия таким образом,

чтобы при нулевом значении натурального параметра  $s$  кривая проходила через

начало координат ( $\Phi(0) = 0, \Theta(0) = 0$ ) в направлении, например, оси  $OX$ :

$$(\Phi_S(0) = 1, \Theta_S(0) = 0):$$

> `Inits:=`

> `{X(0)=0,Y(0)=0,Z(0)=0,Phi(0)=0,Theta(0)=0,Phi[S](0)=1,Theta[S](0)=0`

> `};`

$$\text{Inits} := \{X(0) = 0, Y(0) = 0, Z(0) = 0, \Phi(0) = 0, \Theta(0) = 0, \Phi_S(0) = 1, \Theta_S(0) = 0\}$$

#### VI.5.5 Задание натуральных уравнений кривой

Зададим теперь конкретные натуральные уравнения кривой, т.е., конкретизируем

функции  $\psi(s)$  и  $\xi(s)$ . Рассмотрим несколько примеров:

##### Кривая 1

> `Natur1:={psi(s)=1,xi(s)=0};`

$$\text{Natur1} := \{\psi(s) = 1, \xi(s) = 0\}$$

##### Кривая 2

> `Natur2:={psi(s)=s^2/(1+s^4),xi(s)=-s^2/(1+s^2)};`

$$\text{Natur2} := \left\{ \psi(s) = \frac{s^2}{1+s^4}, \xi(s) = -\frac{s^2}{1+s^2} \right\}$$

**Кривая 3** (А.П.Норден "Дифференциальная геометрия стр. 90).

$$\begin{aligned} > \text{Natur3} := \{\text{psi}(s) = \cos(s), \text{xi}(s) = \sin(s)\}; \\ \text{Natur3} &:= \{\psi(s) = \cos(s), \xi(s) = \sin(s)\} \end{aligned}$$

**Кривая 4** (цилиндрическая винтовая линия):

$$\begin{aligned} > \text{Natur4} := \{\text{psi}(s) = 1, \text{xi}(s) = 1\}; \\ \text{Natur4} &:= \{\psi(s) = 1, \xi(s) = 1\} \end{aligned}$$

и подстановками сформируем четыре соответствующие нормальные системы

обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} > \text{System1} := \text{simplify}(\text{subs}(\text{Natur1}, \text{System0})); \\ > \text{System2} := \text{simplify}(\text{subs}(\text{Natur2}, \text{System0})); \\ > \text{System3} := \text{simplify}(\text{subs}(\text{Natur3}, \text{System0})); \\ > \text{System4} := \text{simplify}(\text{subs}(\text{Natur4}, \text{System0})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{System1} &:= \left\{ \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \right. \\ &\frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)), \frac{d}{ds} \Phi(s) = \Phi_S(s), \frac{d}{ds} \Theta(s) = \Theta_S(s), 2 \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \\ &- 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) + 2 \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = 2 \left( \frac{d}{ds} 1 \right), \\ &\sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) \\ &\left. + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{System2} &:= \left\{ \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \right. \\ &\frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)), 2 \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \\ &- 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) + 2 \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = \frac{2 s^2 \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{s^2}{1+s^4} \right) \right)}{1+s^4}, \\ &\sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) \\ &\left. + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = -\frac{s^6}{(1+s^2)(1+s^4)^2}, \frac{d}{ds} \Phi(s) = \Phi_S(s), \frac{d}{ds} \Theta(s) = \Theta_S(s) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{System3} := \{ & \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \\ & \frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)), \frac{d}{ds} \Phi(s) = \Phi_S(s), \frac{d}{ds} \Theta(s) = \Theta_S(s), \sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 \\ & + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) \\ & + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = \sin(s) \cos(s)^2, 2 \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \\ & - 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) + 2 \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = 2 \cos(s) \left( \frac{d}{ds} \cos(s) \right) \\ & \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{System4} := \{ & \sin(\Theta(s)) \Phi_S(s)^3 \cos(\Theta(s))^2 + 2 \sin(\Theta(s)) \Theta_S(s)^2 \Phi_S(s) \\ & - \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \cos(\Theta(s)) + \Phi_S(s) \cos(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = 1, \\ & \frac{d}{ds} X(s) = \cos(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Y(s) = \sin(\Phi(s)) \cos(\Theta(s)), \frac{d}{ds} Z(s) = \sin(\Theta(s)), \\ & \frac{d}{ds} \Phi(s) = \Phi_S(s), \frac{d}{ds} \Theta(s) = \Theta_S(s), 2 \Phi_S(s) \cos(\Theta(s))^2 \left( \frac{d}{ds} \Phi_S(s) \right) \\ & - 2 \Phi_S(s)^2 \cos(\Theta(s)) \sin(\Theta(s)) \left( \frac{d}{ds} \Theta(s) \right) + 2 \Theta_S(s) \left( \frac{d}{ds} \Theta_S(s) \right) = 2 \left( \frac{d}{ds} 1 \right) \} \end{aligned}$$

## VI.5.6 Создание процедуры численного интегрирования

### нормальной системы ОДУ

Система ОДУ решается с помощью команды **dsolve(система ОДУ union Начальные условия,**

**type=numeric,method=classical,output=listprocedur)** — при этом получаем численные решения

классическим методом, который является комбинацией методов Эйлера, Хейца, Рунге-Куддта и

Адамса-Бэшфорда, причем решения выводятся в виде списка. Как называют вычисления, этот

комбинированный метод дает лучшие результаты, чем стандартный метод Рунге-Куддта в случаях,

когда кривая имеет много изгибов.

```

> Sol[1]:= dsolve(System1 union Inits,
> {X(s),Y(s),Z(s),Phi(s),Theta(s),Phi[S](s),Theta[S](s)},type=numeric
> method=classical,output=listprocedure);
> Sol[2]:= dsolve(System2 union Inits,
> {X(s),Y(s),Z(s),Phi(s),Theta(s),Phi[S](s),Theta[S](s)
> },type=numeric,method=classical, output=listprocedure);
> Sol[3]:=
> dsolve(System3 union Inits,
> {X(s),Y(s),Z(s),Phi(s),Theta(s),Phi[S](s),Theta[S](s)
> },type=numeric,method=classical, output=listprocedure);
> Sol[4]:= dsolve(System4 union Inits,
> {X(s),Y(s),Z(s),Phi(s),Theta(s),Phi[S](s),Theta[S](s)
> },type=numeric,method=classical, output=listprocedure);

```

$$Sol_1 := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Phi_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Theta(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Theta_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), X(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ Y(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), Z(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc})]$$

$$Sol_2 := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Phi_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Theta(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Theta_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), X(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ Y(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), Z(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc})]$$

$$Sol_3 := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Phi_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Theta(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Theta_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), X(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ Y(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), Z(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc})]$$

$$Sol_4 := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Phi_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \Theta(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ \Theta_S(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), X(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), \\ Y(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc}), Z(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{end proc})]$$

### Запись решений и проверка:

Выводим решения с помощью подстановки их в нужные функции

и проверяем работу программы:

VI.5. Исследование кривых в евклидовом пространстве по их натуральным уравнениям

```

> x_1:= subs(Sol[1],X(s)):y_1:= subs(Sol[1],Y(s)):z_1:=
> subs(Sol[1],Z(s)):z_1(1);
> x_2:= subs(Sol[2],X(s)):y_2:= subs(Sol[2],Y(s)):z_2:=
> subs(Sol[2],Z(s)):y_2(2);
> x_3:= subs(Sol[3],X(s)):y_3:= subs(Sol[3],Y(s)):z_3:=
> subs(Sol[3],Z(s)):x_3(2);
> x_4:=subs(Sol[4],X(s)):y_4:= subs(Sol[4],Y(s)):z_4:=
> subs(Sol[4],Z(s)):x_4(2);y_4(2);z_4(2);

```

0.

1.41614689782120973

1.43887729209254922

1.10984504675916495

0.977140636178750688

0.886914506666004798

**Создание последовательности решений и их графическое представление**

Создаем последовательности решений с помощью команды

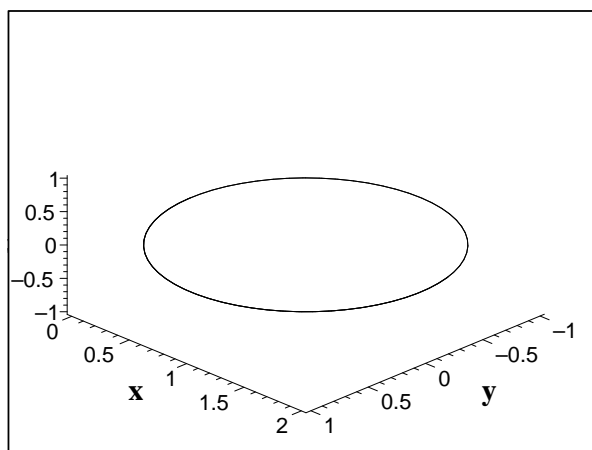
`seq([f(i/m)],i=0..n)` и с помощью команды `spacecurve` библиотеки `plots`

строим графики кривых:

```

> p1_xyz:=[seq([x_1(i/10),y_1(i/10),z_1(i/10)],i=0..160)]:
> plots[spacecurve](p1_xyz,color=black,thickness=2,axes=FRAME,titlefont=
> [TIMES,BOLD,14],labelfont=[TIMES,BOLD,14],labels=[y,x,z]);

```

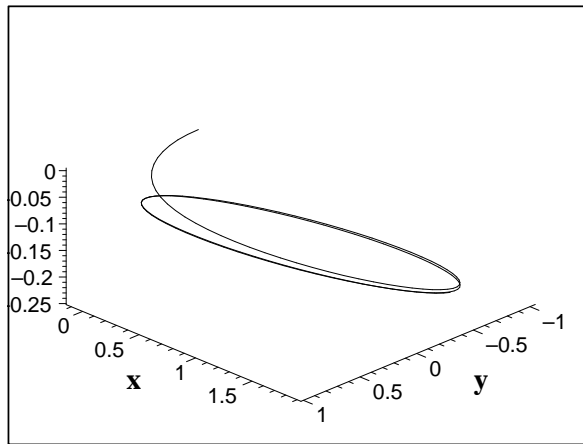


**Рис. VI.23.** Кривая

$Natur1:=\psi(s) = 1, \xi(s) = 0$  –  
окружность единичного радиуса.

Как и следует из теории, - кривая с постоянной кривизной является окружностью.

```
> p2_xyz:= [seq([x_2(i/10),y_2(i/10),z_2(i/10)],i=0..160)]:
> plots[spacecurve](p2_xyz,color=black,thickness=2,axes=FRAME,titlefont=
> [TIMES,BOLD,14],labelfont=[TIMES,BOLD,14],labels=[y,x,z]);
```

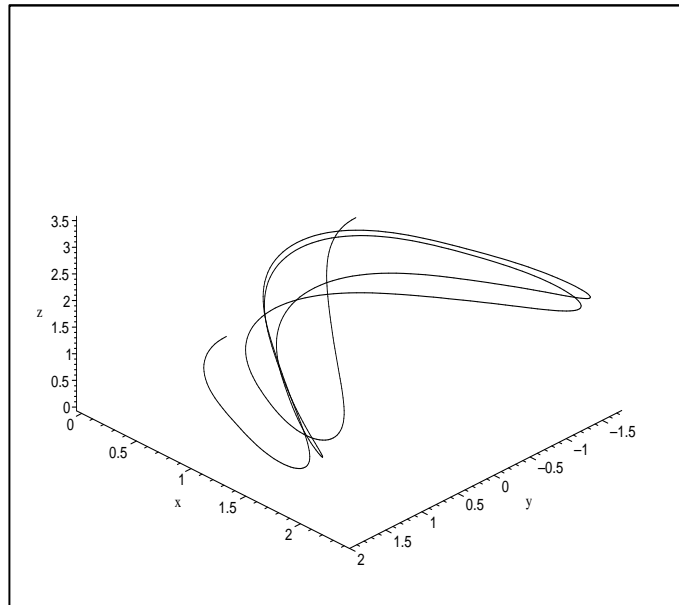


**Рис. VI.24.** Кривая  $Natur2 := [\psi(s) = s^2/(1 + s^4), \xi(s) = -s^2/(1 + s^2)]$  – деформированная винтовая линия.

Из рисунка видно, что эта кривая - деформированная винтовая линия - винтовая линия с переменным шагом и наклонной осью.

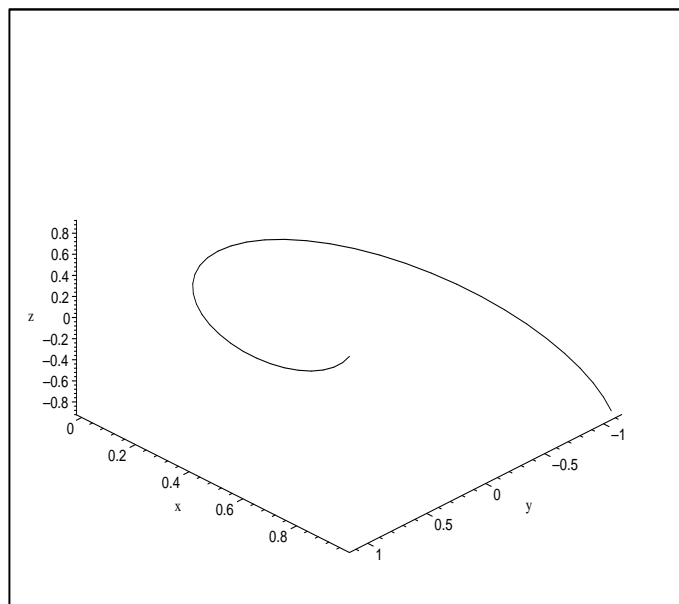
```
> p3_xyz:= [seq([x_3(Pi*i/100),y_3(Pi*i/100),z_3(Pi*i/100)],i=0..500)]:
> plots[spacecurve](p3_xyz,color=black,thickness=2,axes=FRAME,titlefont=
> [TIMES,BOLD,14],labelfont=[TIMES,BOLD,14],labels=[y,x,z]);
```





**Рис. VI.25.** Кривая  $Natur3$ :  
 $Natur3 := [\psi(s) = \cos(s), \xi(s) = \sin(s)]$  –  
 «кривая Нордена».

```
> p4_xyz := [seq([x_4(i/10), y_4(i/10), z_4(i/10)], i=-20..20)]:
plots[spacecurve](p4_xyz, color=black, thickness=2, axes=FRAME, titlefont=
[TIMES, BOLD, 14], labelfont= [TIMES, BOLD, 14], labels=[y, x, z]);
```



**Рис. VI.26.** Кривая  $Natur4 := [\psi(s) = 1, \xi(s) = 1]$  – цилиндрическая винтовая линия.

## Часть II

# Дифференциальная геометрия поверхностей

## Глава VII

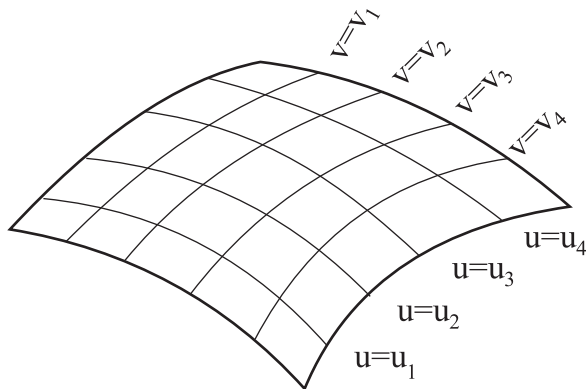
# Первая квадратичная форма поверхности

### VII.1 Криволинейные координаты

Предположим, что на поверхности задано некоторое семейство линий, зависящих от одного параметра. Будем называть это семейство *правильным* в некоторой области точек поверхности, если через каждую точку этой области проходит одна и только одна линия семейства.

Если на поверхности заданы два семейства линий, то мы будем говорить, что они образуют сеть в той области, в которой оба они правильны, причем, будем предполагать, что в этой области линии различных семейств не совпадают между собою и не касаются друг друга и пересекаются только в одной точке.

Предположим, что на поверхности задана сеть, удовлетворяющая всем этим условиям. Пусть линия одного семейства этой сети определяется значением параметра  $u$ , а линия другого семейства значением параметра  $v$   
[Рис.VII.27](#).



**Рис.VII.27.** Криволинейным координатам поверхности

Так как через каждую точку области проходят вполне определенные линии каждого семейства, то всякой точке соответствуют вполне определенные значения параметров  $u$  и  $v$ . С другой стороны, задание этих параметров, соответствующих кривым пересекающимся в точке области, определит положение этой точки. Вследствие этого значения параметров  $u$  и  $v$ , определяющих кривые сети, пересекающиеся в данной точке поверхности, называются криволинейными координатами этой точки.

Сами эти линии и образованная ими сеть называются координатными.

Вдоль координатной линии изменяется только одна криволинейная координата, другая же остается постоянной.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры, начиная с декартовой координатной сети плоскости, которая является как бы прообразом всех остальных.

1. Семейство прямых, параллельных между собою, очевидно, будет правильным во всей плоскости. Два таких семейства, образованных прямыми различных направлений (например, ортогональных между собою), образуют сеть. Параметризуя эти семейства так, чтобы каждой прямой соответствовало, например, значение расстояния этой прямой от некоторой, принятой за начальную, и приписывая этому расстоянию знак, зависящий от того, на какую сторону от начальной прямой взята данная, мы и получим обычную декартову систему координат [Рис.VII.28](#).

VII.1. Криволинейные координаты

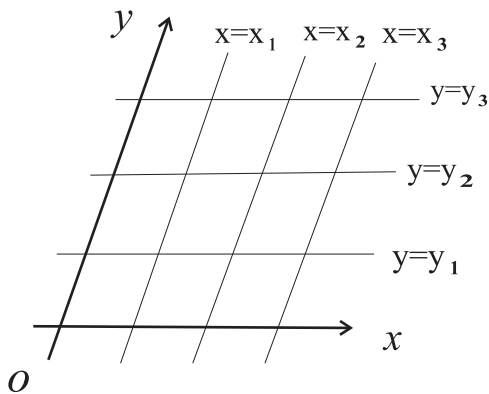


Рис.VII.28а. Декартова система координат

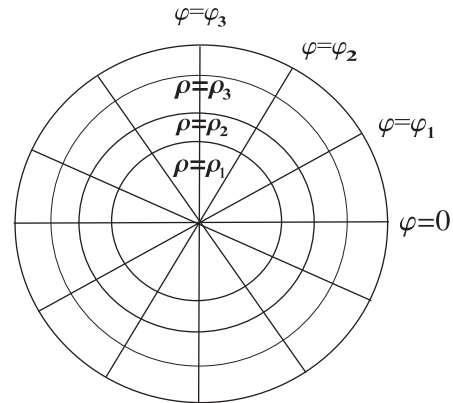
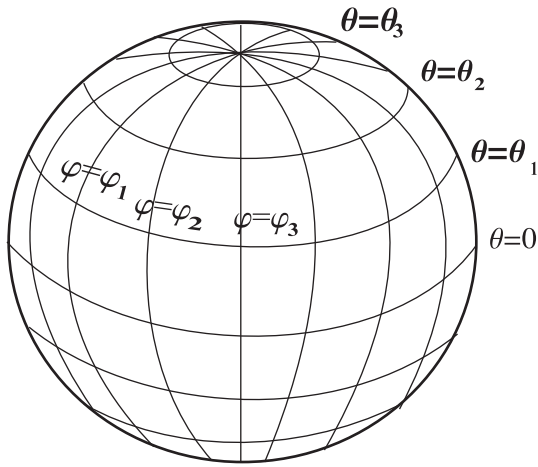


Рис.VII.28b. Полярная система координат

2. Рассмотрим сеть, образованную прямыми некоторого собственного пучка и семейством концентрических окружностей с центрами в вершине этого пучка. Оба семейства будут правильными во всей плоскости за исключением вершины пучка. Такую исключительную точку мы будем в дальнейшем называть особой точкой координатной сети. Параметризуем семейство прямых, принимая за параметр угол между некоторой прямой, принятой за начальную, и данной прямой пучка, а семейство окружностей параметризуем, относя каждой из них значение ее радиуса. Система криволинейных координат, которую мы получим, таким образом совпадает с полярной ??.

3. В качестве третьего примера рассмотрим так называемые географические координаты на сфере. Зафиксировав полярную ось - один из диаметров этой сферы - рассмотрим семейство меридианов, т.е. больших кругов, полученных от пересечения поверхности сферы плоскостями, содержащими этот диаметр, и параметризуем его, приняв за параметр долготу, т.е. угол между плоскостью меридиана, принятого за начальный, и плоскостью данного меридиана. Второе семейство параллелей получим, пересекая поверхность сферы плоскостями, перпендикулярными избранному вначале диаметру. Это семейство будет содержать один большой круг - экватор. За параметр второго семейства примем широту - угловую меру дуги меридиана, заключенную между плоскостью экватора и плоскостью данной параллели, приписав ему знак в зависимости от того, на каком полушарии северном или южном расположена параллель. Оба семейства будут правильными на всей поверхности сферы за исключением полюсов, т.е. точек пересечения поверхности сферы с полярной осью [Рис.VII.29](#).

## VII.2 Параметрическое уравнение поверхности



**Рис.VII.29.** Географические координаты на сфере

Если на поверхности введены криволинейные координаты, то говорят также, что поверхность параметризована. В таком случае, всякой паре значений параметров  $u$ , и  $v$ , соответствует определенная точка поверхности. Значение радиуса-вектора этой точки вполне определяется заданием значений независимых переменных  $u$ , и  $v$ , и мы можем сказать, что векторная переменная  $\vec{r}$  является функцией двух скалярных аргументов  $u$ , и  $v$ , и записать это следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (\text{VII.1})$$

Зависимость радиуса-вектора точки параметризованной поверхности от криволинейных координат этой точки называется параметрическим уравнением поверхности. Найдем параметрические уравнения поверхности, соответствующие трем примерам предыдущего параграфа.

1. Пусть  $\vec{r}_0$  есть радиус-вектор начала, а  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  координатные векторы декартовой системы координат плоскости. Обозначая через  $u$  и  $v$ , декартовы координаты, соответствующие этой системе, получим параметрическое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v. \quad (\text{VII.2})$$

2. Предположим теперь, что  $\vec{r}_0$  есть радиус-вектор полюса,  $\vec{i}$  есть единичный вектор, направленный по полярной оси, а  $\vec{j}$  единичный вектор, перпендикулярный этой оси. Обозначив как обычно через  $\varphi$  и  $\rho$  полярные координаты точки на плоскости, получим ее параметрическое уравнение в координатах

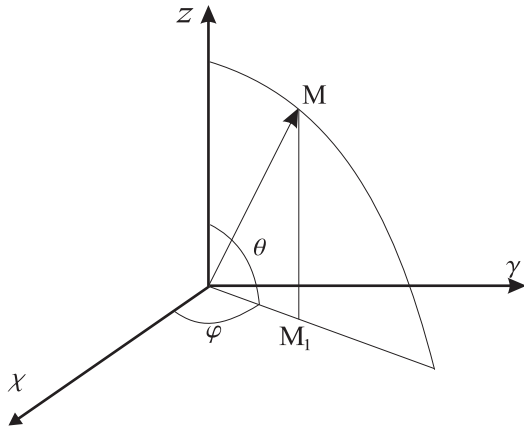
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \rho(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \rho \vec{e}(\varphi). \quad (\text{VII.3})$$

VII.2. Параметрическое уравнение поверхности

3. Предположим для простоты, что центр сферы радиуса  $a$ , совпадает с началом прямоугольной системы координат, координатные векторы которых есть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .



**Рис.VII.30.** Сферическая система координат

Начальный меридиан поместим в плоскости  $xOz$  и будем отчитывать долготу  $\varphi$  от положительного направления оси  $Ox$  к положительному направлению оси  $Oy$ . Экваториальную плоскость будем считать совмещенной с плоскостью  $xOz$ , а широту  $\theta$  примем положительной для точек с положительными аппликатами  $z$  и отрицательной в противоположном случае.

Проекция радиуса-вектора точки  $M$  сферы на ось  $oz$ , и плоскость  $xoy$ , будут соответственно равны

$$z = R \sin \theta,$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = R \cos \theta,$$

проекции вектора  $\overrightarrow{OM_1}$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  будут

$$x = |\overrightarrow{OM_1}| \cos \varphi,$$

$$y = |\overrightarrow{OM_1}| \sin \varphi.$$

Таким образом, параметрическое уравнение сферы в географических координатах имеет вид

$$\vec{r} = R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$$

или

$$\vec{r} = R(\vec{e}(\varphi) \cos \theta + \vec{k} \sin \theta). \quad (\text{VII.4})$$

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание общего характера. В анализе и при изложении элементов теории поверхностей часто задают поверхность уравнением

$$z = f(x, y). \quad (\text{VII.5})$$

Легко видеть, что это уравнение следует считать частным случаем параметрического. Действительно, принимая за параметры абсциссу и ординату точки поверхности, можем написать ее параметрическое уравнение в следующем виде

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y)). \quad (\text{VII.6})$$

В дальнейшем будем называть такое параметрическое задание элементарным. Следует оговориться, что при элементарном задании однозначность соответствия между значением параметров и точками поверхности имеет место только при однозначности функции  $z = f(x, y)$  и там, где эта однозначность существенна, приходится рассматривать поверхность как бы составленной из отдельных частей, отвечающих отдельным однозначным ветвям функции. Так, например, в уравнении сферы

$$\vec{r} = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

два значения радикала соответствуют двум полушариям, расположенным по разные стороны плоскости  $xOy$ .

### VII.3 Касательные прямые к поверхности

В дальнейшем будем рассматривать только такие поверхности в параметрическом уравнении, которых функция  $\vec{r}(u, v)$  имеет частные производные, по крайней мере, первых двух порядков. Предполагая это, решим задачу о нахождении *касательной прямой* поверхности.

Прямая касается поверхности, если она касается некоторой кривой, принадлежащей поверхности. Допустим, что поверхность задана параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (\text{VII.7})$$

а принадлежащая ей кривая в свою очередь параметризована с помощью параметра  $t$ . В таком случае каждому значению этого параметра соответствует некоторая точка кривой, а ее положению на поверхности соответствуют в свою очередь определенные значения криволинейных координат  $u$  и  $v$ .

Таким образом, криволинейные координаты точек кривой, расположенные на поверхности, являются функциями параметра  $t$ . Соответствующую систему соотношений

$$u = u(t); \quad v = v(t) \quad (\text{VII.8})$$

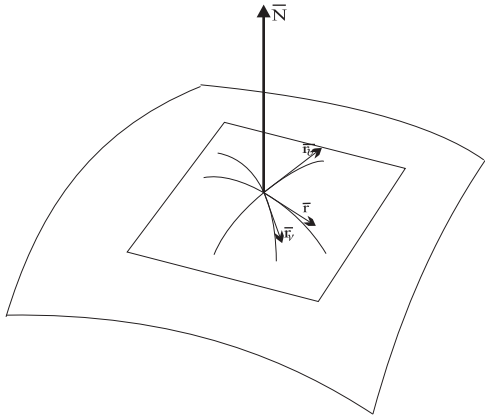


### VII.3. Касательные прямые к поверхности

Будем называть внутренними уравнениями кривой на поверхности. Внутренние уравнения вполне характеризуют кривую, если задано параметрическое уравнение поверхности, так как подстановка VII.8 и VII.7 приводит нас к уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad (\text{VII.9})$$

являющемуся параметрическим уравнением данной линии.



**Рис.VII.31.** Касательные прямые к поверхности

Касательный вектор этой кривой, а следовательно, и направляющий вектор прямой, касающейся поверхности, получим обычным приемом, дифференцируя радиус-вектор  $\vec{r}$  по параметру  $t$ . Однако, при этом, примем во внимание, что в силу VII.9  $\vec{r}$  зависит от  $t$  через средство аргументов  $u$  и  $v$ , получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} \right) + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \right). \quad (\text{VII.10})$$

Правая часть этого выражения представляет собою линейную комбинацию двух векторов, которые для краткости обозначают так

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \vec{r}_u; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v \quad (\text{VII.11})$$

и называются *координатными векторами*, соответствующими той точке, криволинейные координаты которой подставляются при их вычислении. Легко видеть, что *координатные векторы есть векторы касательных к координатным линиям* Рис.VII.31.

Действительно, рассмотрим одну из координатных линий. Ее параметрические уравнения можно представить в виде

$$u = \text{Const}; \quad v = t.$$

Применяя к этому случаю формулу VII.10, получим

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_v.$$

Аналогичный получаем и для другой координатной линии

$$u = t; \quad v = \text{Const}.$$

Таким образом, формула VII.11 показывает, что направляющий вектор всякой прямой, касающейся поверхности в данной точке, является линейной комбинацией координатных векторов, соответствующих этой точке, а его направление определяется отношением  $du$  и  $dv$ , т.е. дифференциалов криволинейных координат, соответствующих направлению кривой, которой касается данная прямая.

## VII.4 Касательная плоскость к поверхности

Так как все касательные векторы, соответствующие данной точке поверхности, выражаются линейно через координатные, то все они компланарны, следовательно, все прямые, касающиеся поверхности в данной точке, располагаются в одной плоскости — *касательной плоскости поверхности*.

Чтобы получить уравнение касательной плоскости, примем во внимание, что она содержит векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  и ее нормальный вектор им перпендикулярен. Поэтому этот вектор может быть положен равным

$$\vec{N} = [\vec{r}_u \vec{r}_v]. \quad (\text{VII.12})$$

Правая часть не может быть равна нулю там, где существует правильная координатная сеть, так как по условию ее определения координатные линии не могут касаться друг друга, и векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  неколлинеарны. Исключим из рассмотрения и точки, в которых векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  обращаются в нуль, так как эти точки будут особыми для параметризации координатных линий. Мы будем называть особой точкой параметризованной поверхности точку, в которой  $[\vec{r}_u \vec{r}_v] = 0$  и исключим в дальнейшем эти точки из нашего рассмотрения. Обозначив радиус-вектор текущей точки касательной плоскости через  $\vec{r}$ , а радиус-вектор точки прикосновения через  $\vec{r}_0$ , получим уравнение касательной плоскости в виде равенства нулю смешанного произведения

$$\left( \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r} - \vec{r}_0 \right) = 0. \quad (\text{VII.13})$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку прикосновения, называется *нормалью*, а ее направляющий вектор VII.13 — нормальным вектором поверхности.

## VII.5 Длина дуги на поверхности

Вычислим длину дуги линии, расположенной на поверхности. Для этого воспользуемся внутренним уравнением кривой VII.8 и подстановкой VII.9. Найдем сначала дифференциал дуги. Так как

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{r}^2, \\ d\vec{r} &= \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \end{aligned}$$

то

$$ds^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2.$$

Вводя обозначения

$$\vec{r}_u^2 = E; \quad \vec{r}_u \vec{r}_v = F; \quad \vec{r}_v^2 = G, \quad (\text{VII.14})$$

получим

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (\text{VII.15})$$

Если мы хотим вычислить длину дуги, ограниченную точками кривой, соответствующими значениями параметра  $t_1$  и  $t_2$ , то она выразится интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

Подставляя вместо  $ds$  его выражение из VII.15 и вводя явно переменную интегрирования  $t$ , получим окончательно

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (\text{VII.16})$$

Зная внутреннее уравнение кривой, мы должны выразить  $u$  и  $v$  через  $t$  в выражениях  $E, F, G$ , найти производные  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{dv}{dt}$ , подставить все это в подынтегральную функцию VII.16 и задача сведется к вычислению интеграла вида

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

## VII.6 Первая квадратичная форма поверхности

Выражение VII.15 квадрата дифференциала дуги играет основную роль во всей теории поверхностей. Правая часть его представляет квадратичную форму

$$\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (\text{VII.17})$$

с коэффициентами, являющимися функциями точки поверхности и с переменными  $du$  и  $dv$  — дифференциалами криволинейных координат, которые зависят от направления кривой, проходящей через данную точку. Форма  $\varphi_1$  называется *первой основной квадратичной формой поверхности*. Кроме того, ее еще называют для краткости просто *линейным элементом* поверхности, подчеркивая этим, что знание ее является основой для вычисления длин дуг. Действительно, если линейный элемент задан, т.е. заданы его коэффициенты  $E, F, G$  в функции  $u$  и  $v$  известно внутреннее уравнение кривой, то ее дугу можно вычислить даже в том случае, если параметрическое уравнение поверхности неизвестно. Отметим некоторые важные неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты линейного элемента. Из равенств

$$E = \vec{r}_u^2; \quad G = \vec{r}_v^2$$

следует, что для всякой неособенной точки поверхности

$$E > 0; \quad G > 0. \quad (\text{VII.18})$$

Применяя тождество Лагранжа, получим

$$\left[ \begin{matrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{matrix} \right]^2 = \vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - \left( \begin{matrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{matrix} \right)^2 = EG - F^2.$$

Выражение в правой части есть дискриминант линейного элемента. Во всякой неособенной точке  $\left[ \begin{matrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{matrix} \right] \neq 0$ . Поэтому

$$EG - F^2 > 0. \quad (\text{VII.19})$$

Из неравенств VII.18 и VII.19 следует, что основная квадратичная форма положительна и не может обратиться в нуль при значении переменных  $du$  и  $dv$ , не равных нулю одновременно. Квадратичные формы, обладающие этим свойством, называются *положительно-определенными*.

## VII.7 Угол между двумя линиями на поверхности

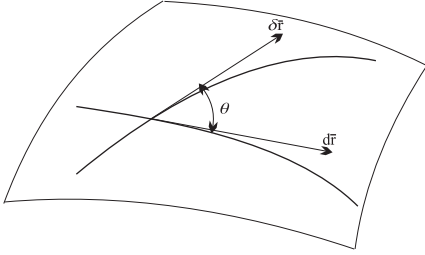
Если две кривые пересекаются, то углом между ними называют угол между их касательными в точке пересечения. Предположим, что кривые лежат на

VII.7. Угол между двумя линиями на поверхности

одной поверхности и пересекаются в некоторой точке. Касательные векторы этих кривых

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$$

будем различать, употребляя различные обозначения для дифференциалов криволинейных координат, соответствующих изменениям последних вдоль рассматриваемых линий [Рис.VII.32](#).



Искомый угол  $\theta$  определится по обычной формуле

$$\cos \theta = \frac{d\vec{r} \Delta\vec{r}}{|d\vec{r}| |\Delta\vec{r}|},$$

**Рис.VII.32.** Угол между двумя линиями

в которой следует положить

$$|d\vec{r}| = ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \Delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}$$

$$\begin{aligned} d\vec{r} \Delta\vec{r} &= (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) = \vec{r}_u^2 du\delta u + \vec{r}_u \vec{r}_v (du\delta v + dv\delta u) + \vec{r}_v^2 dv\delta v = \\ &= Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos \theta = \frac{Edu\delta v + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \quad (\text{VII.20})$$

Полученная формула показывает, что на данной поверхности угол двух кривых зависит только от отношения дифференциалов криволинейных координат, взятых вдоль кривых в точках их пересечения. Кроме того, следует заметить, что для определения угла, так же как и в случае вычисления дуги, не нужно знать параметрического уравнения поверхности, а достаточно считать известным выражение ее линейного элемента.

Из формулы [VII.20](#) легко получить выражение *координатного угла*, т.е. для этих линий можно считать

$$du = 0; \quad dv \neq 0$$

$$\delta u \neq 0; \quad \delta v = 0,$$

откуда

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (\text{VII.21})$$

В частности, для того, чтобы координатные линии пересекались под прямым углом, т.е. чтобы они образовывали *ортогональную сеть*, необходимо и достаточно, чтобы

$$F = 0$$

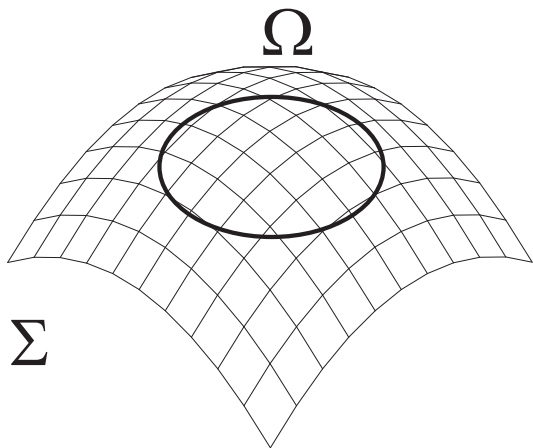
а линейный элемент имел вид

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \quad (\text{VII.22})$$

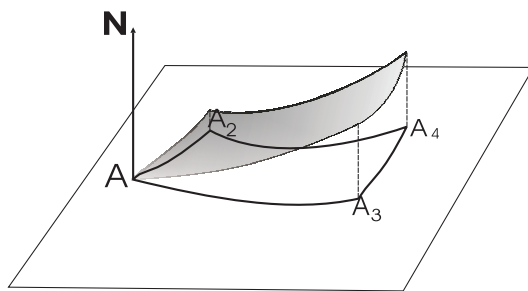
Такой вид имеют линейные элементы плоскости в прямоугольных и полярных координатах и сферы в координатах географических, так как во всех этих случаях условие ортогональности выполнено.

## VII.8 Площадь поверхности

Определение длины дуги кривой линии сводится к вычислению суммы длин прямолинейных отрезков с последующим переходом к пределу. Аналогичным образом и определение площади частей криволинейной поверхности сводится к измерению площадей плоских фигур. Предположим, что на поверхности задана некоторая замкнутая область  $\Omega$  (Рис.VII.33). Разобьем эти области на частичные области  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ .



**Рис.VII.33а.** К вычислению площади поверхности  $\Omega \subset \Sigma$



**Рис.VII.33б.** Отдельный элемент  $\Sigma_i$  поверхности

Во внутренней точке каждой из этих областей построим касательную плоскость и спроектируем на нее соответствующую частичную область. Пусть

VII.8. Площадь поверхности

площадь плоской области, получившейся проектированием  $\Omega_i$ , есть  $\Delta S_i$ . Составим сумму всех этих площадей

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

Предел этой суммы при неограниченном возрастании числа частичных областей и при стягивании каждой области к точке называется площадью области  $\Omega$  на поверхности. Наметим теперь в общих чертах ход рассуждений, сводящих вычисление площади  $S$  к интегралу. Параметризуем поверхность в области  $\Omega$  и выберем границы частичных областей так, чтобы они совпадали с координатными линиями. Рассмотрим одну из этих областей, предположив, что ограничивающие ее линии пересекаются в точках

$$A(u, v); \quad A_1(u + \Delta u, v); \quad A_2(u, v + \Delta v); \quad A_3(u + \Delta u, v + \Delta v).$$

Будем проектировать ее на касательную плоскость в точке  $A$ . Радиусы-векторы угловых точек  $A_1$  и  $A_2$  равны

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= \vec{r}(u + \Delta u, v) = \vec{r}(u, v) + \vec{r}_u \Delta u + \epsilon_1 \Delta u \\ \overrightarrow{OA_2} &= \vec{r}(u, v + \Delta v) = \vec{r}(u, v) + \vec{r}_v \Delta v + \epsilon_2 \Delta v, \end{aligned}$$

где  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  стремятся к нулю вместе с  $\Delta u$  и  $\Delta v$ .

Отсюда следует, что пренебрегая малым более высокого порядка, мы можем принять проекции векторов  $\overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{AA_2}$  на касательную плоскость, равными векторам  $\vec{r}_u \Delta u$  и  $\vec{r}_v \Delta v$ . Отбросив малые высшего порядка, заменим площадь проекции площадью параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{r}_u \Delta u$  и  $\vec{r}_v \Delta v$  как на сторонах, и получим

$$\Delta S_i = |[\vec{r}_u \vec{r}_v]| \Delta u \Delta v + \epsilon.$$

Имея в виду, что  $\epsilon$  есть бесконечно малая более высокого порядка, чем площадь проекции частичной области, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} s_n = \lim \sum_{i=1}^n |[\vec{r}_u \vec{r}_v]|_i \Delta u \Delta v,$$

где  $\Delta \Omega = \Delta u \Delta v$ . Таким образом, площадь области  $\Omega$  поверхности выражается двойным интегралом

$$S = \iint_D dudv \quad (\text{VII.23})$$

или так как

$$\left[ \begin{matrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{matrix} \right]^2 = \vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2,$$

то

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (\text{VII.24})$$

Последнее выражение площади показывает, что для ее вычисления достаточно знание линейного элемента поверхности.

## VII.9 Задачи на первую квадратичную форму поверхности

### Основные формулы

Пусть поверхность  $\Sigma$  задана своими параметрическими уравнениями:

$$\Sigma : \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Образует частные производные радиуса - вектора:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},$$

определим скалярные произведения:

$$\vec{r}_u^2 = E; \quad \vec{r}_v^2 = G; \quad (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = F$$

и квадратичную форму:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (\text{VII.25})$$

которая называется *первой квадратичной формой поверхности*. Коэффициенты этой формы образуют матрицу квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

В неособых точках поверхности матрица  $G$  невырождена:

$$\det \|G\| \neq 0.$$

Векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ , являясь касательными к координатным линиям поверхности, являются и касательными векторами поверхности. Вектор нормали к поверхности определяется как:

$$\vec{N} = \left[ \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right].$$



**Пример ПVII.1.** Составить уравнение касательной плоскости сферы.

**Решение**

Уравнение сферы в сферических координатах:

$$\vec{r} = R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

Вычислим частные производные:

$$\vec{r}_\varphi = R(-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0);$$

$$\vec{r}_\theta = R(-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Таким образом, найдем вектор нормали к сфере в произвольной ее точке  $M_0$ :

$$\vec{N}_0 = [\vec{r}_\varphi \vec{r}_\theta] = R\vec{r}_0; \implies \vec{N} = \vec{r}_0 -$$

- нормальный вектор к сфере совпадает с ее радиусом-вектором. Уравнение касательной плоскости в точке касания  $M_0$  сферы имеет вид:

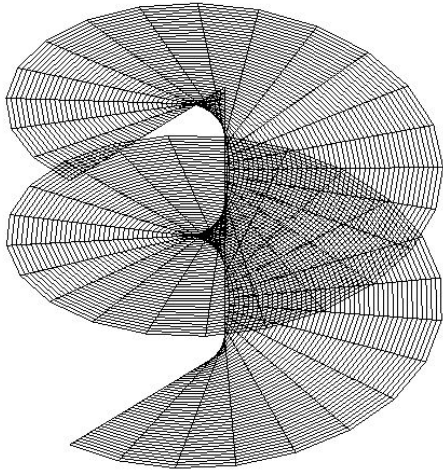
$$(\vec{N}_0, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \implies (\vec{r}_0, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Отсюда с учетом уравнения сферы ( $r_0^2 = R^2$ ) получим окончательно уравнение касательной плоскости:

$$(\vec{r}, \vec{r}_0) = R^2.$$

**Пример ПVII.2.** Найти первую квадратичную форму геликоида (см. [Рис. VII.34](#)).

$$\vec{r} = \vec{e}(\varphi)t + a\varphi\vec{k}. \tag{VII.26}$$



**Рис. VII.34.** Геликоид: два витка

### Решение

Вычисляя частные производные от радиуса-вектора (VII.26), найдем:

$$\begin{aligned}\vec{r}_t &= \vec{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0); \\ \vec{r}_\varphi &= (-t \sin \varphi, t \cos \varphi, a).\end{aligned}$$

Таким образом:

$$E = (\vec{r}_t, \vec{r}_t) = 1; \quad F = (\vec{r}_t, \vec{r}_\varphi) = 0;$$

$$G = (\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\varphi) = t^2 + a^2.$$

Первая квадратичная форма геликоида равна:

$$ds^2 = dt^2 + (a^2 + t^2)d\varphi^2. \quad (\text{VII.27})$$

# Глава VIII

## Внутренняя геометрия поверхности

### VIII.1 Наложимость поверхностей

**Определение OVIII.1.** Две поверхности  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  называются *наложимыми*, если между их точками  $M$  и  $M'$  можно установить такую биекцию  $\Phi$ :

$$\Phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma', \quad \Phi M = M', \quad (\text{VIII.1})$$

при которой длины всех соответствующих дуг линий, расположенных на этих поверхностях, равны между собою:

$$s(M_1M_2) = s'(\Phi(M_1)\Phi(M_2)). \quad (\text{VIII.2})$$

Если две поверхности наложимы друг на друга, то одну из них можно получить *изгибанием* другой, аналогично тому, как изгибается гибкая, но нерастяжимая ткань.

Сформулируем аналитический признак наложимости поверхностей. Предположим, что поверхности  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  наложимы. Пусть поверхность  $\Sigma$  параметризована с помощью параметров  $u, v$ , т.е., каждой ее точке  $M \in \Sigma_1$  соответствуют внутренние координаты  $(u, v)$ .

Внутренние координаты поверхности  $\Sigma'$  установим по соответствию  $\Phi$ , полагая, что точка  $M' = \Phi(M) \in \Sigma'$  имеет те же внутренние координаты, что и точка  $M$ . Такую параметризацию двух поверхностей будем называть *общей параметризацией по отношению к наложимости*. Пусть в этих координатах первые квадратичные формы поверхностей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  равны:

$$\Sigma : \quad ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2, \quad (\text{VIII.3})$$

$$\Sigma' : \quad ds'^2 = E'(u, v)du^2 + 2F'(u, v)dudv + G'(u, v)dv^2. \quad (\text{VIII.4})$$

Пусть теперь  $\Gamma \in \Sigma$ :

$$\Gamma : \quad u = u(t), \quad v = v(t)$$

— произвольная кривая поверхности  $\Sigma$ . Ее образом на поверхности  $\Sigma'$  будет кривая  $\Gamma' \in \Sigma'$ :

$$\Gamma' : \quad u = u(t), \quad v = v(t).$$

Пусть концевым точкам  $M_1$  и  $M_2$  дуги  $\overset{\smile}{M_1 M_2}$  кривой  $\Gamma$  соответствуют значения  $t_1$  и  $t_2$  параметра  $t$ . Запишем условие VIII.2 наложимости поверхностей  $\Sigma$   $\Sigma'$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}. \quad (\text{VIII.5})$$

Так как равенство VIII.5 должно иметь место при любых значениях параметров  $t_1$  и  $t_2$ , то для его справедливости необходимо выполнение условия:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2. \quad (\text{VIII.6})$$

Но данное условие должно выполняться для любых значений  $du$  и  $dv$ , так как оно должно быть справедливым для любых кривых  $\Gamma$ . Но две квадратичные формы тождественно равны лишь при условии равенства их коэффициентов:

$$E'(u, v) = E(u, v); \quad F'(u, v) = F(u, v); \quad G'(u, v) = G(u, v). \quad (\text{VIII.7})$$

Таким образом, мы доказали теорему:

**Теорема TVIII.1.** *Для того, чтобы две поверхности были наложимы, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая параметризация этих поверхностей, при которой в точках этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами были равны соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм.*

Достаточность доказывается элементарно.

## VIII.2 Преобразование первой квадратичной формы поверхности при изменении внутренних координат поверхности. Понятие о тензорах.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как преобразуется матрица первой квадратичной формы поверхности при переходе от одной криволинейной системы координат к другой. Пусть  $\{x^1, x^2\}$  — некоторая координатная сеть поверхности  $\Sigma$ , а  $\{x^{1'}, x^{2'}\}$  — некоторая другая координатная сеть этой же поверхности. Пусть далее, коэффициенты первой квадратичной формы поверхности относительно координат  $\{x^1, x^2\}$  равны:

$$g_{11} = E(x^1, x^2); \quad g_{12} = g_{21} = F(x^1, x^2); \quad g_{22} = G(x^1, x^2), \quad (\text{VIII.8})$$

а коэффициенты первой квадратичной формы относительно координат  $\{x^{1'}, x^{2'}\}$  равны:

$$g_{1'1'} = E'(x^{1'}, x^{2'}); \quad g_{1'2'} = g_{2'1'} = F'(x^{1'}, x^{2'}); \quad g_{2'2'} = G'(x^{1'}, x^{2'}). \quad (\text{VIII.9})$$

Тогда квадрат дифференциала длины дуги произвольной кривой на поверхности имеет вид относительно этих двух координатных систем:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (i, k = \overline{1, 2}); \quad (\text{VIII.10})$$

$$ds'^2 = g_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'}, \quad (i', k' = \overline{1, 2}). \quad (\text{VIII.11})$$

Поскольку длина дуги кривой не зависит от выбора системы координат на поверхности, должно выполняться равенство:

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'} \quad (\text{VIII.12})$$

для произвольных дифференциалов координат.

Пусть координаты  $\{x^1, x^2\}$  и  $\{x^{1'}, x^{2'}\}$  связаны между собой по закону:

$$x^{1'} = f^1(x^1, x^2); \quad x^{2'} = f^2(x^1, x^2). \quad (\text{VIII.13})$$

Вычисляя дифференциалы штрихованных координат, как дифференциалы сложных функций, найдем:

$$dx^{1'} = \frac{\partial f^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^1}{\partial x^2} dx^2; \quad (\text{VIII.14})$$

$$dx^{2'} = \frac{\partial f^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^2}{\partial x^2} dx^2, \quad (\text{VIII.15})$$

или короче:

$$dx^{i'} = A_k^{i'} dx^k, \quad (\text{VIII.16})$$

где введена квадратная *матрица преобразования* от старых координат к новым:

$$A : \quad A^{i'k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}. \quad (\text{VIII.17})$$

Аналогично можно получить и обратное соотношение:

$$dx^i = A_{k'}^i dx^{k'}, \quad (\text{VIII.18})$$

где введена *матрица обратного преобразования*:

$$A^{-1} : \quad A^{ik'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}. \quad (\text{VIII.19})$$

Очевидно, что эти матрицы являются взаимобратными:

$$A_k^{i'} A_{j'}^k = \delta_{j'}^{i'}; \quad A_k^{i'} A_{i'}^j = \delta_k^j \implies AA^{-1} = E. \quad (\text{VIII.20})$$

Для невырожденности преобразований VIII.13 необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке поверхности выполнялось условие:

$$\det \|A\| = \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right| \neq 0. \quad (\text{VIII.21})$$

**Определение OVIII.2.** Величины  $a^i$  и  $a^{i'}$   $i, i' = \overline{1, n}$ , связанные законом преобразования:

$$a^{i'} = A_k^{i'} a^k, \quad (\text{VIII.22})$$

называются компонентами контрвариантных векторов.

Таким образом:

Дифференциалы координат являются компонентами контрвариантного вектора.

Рассмотрим теперь преобразование частных производных скалярной функции

VIII.2. Преобразование первой квадратичной формы

$\varphi(x^1, x^2)$  при преобразовании координат VIII.13. Используя правило вычисления производных сложной функции, найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \implies$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = A_k^{i'} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}}.$$

Умножая последнее соотношение на  $A_j^k$  и суммируя по индексу  $k$ , получим вследствие соотношений VIII.20:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}. \quad (\text{VIII.23})$$

**Определение OVIII.3.** Величины  $a_i$  и  $a_{i'}$ ,  $i, i' = \overline{1, n}$ , связанные законом преобразования:

$$a_{i'} = A_{i'}^k a_k, \quad (\text{VIII.24})$$

называются компонентами ковариантных векторов.

Таким образом:

Частные производные скалярной функции являются компонентами ковариантного вектора.

Применяя теперь в уравнении VIII.12 закон преобразования VIII.16 дифференциалов координат, получим равенство:

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{i'k'} A_i^{i'} A_k^{k'} dx^{i'} dx^{k'}. \quad (\text{VIII.25})$$

Это соотношение должно выполняться для любых дифференциалов координат, поэтому должны совпадать и коэффициенты соответствующих квадратичных форм:

$$g_{ik} = A_i^{i'} A_k^{k'} g_{i'k'}. \quad (\text{VIII.26})$$

Искомый закон обратного преобразования имеет вид:

$$g_{i'k'} = A_{i'}^i A_{k'}^k g_{ik}. \quad (\text{VIII.27})$$

**Определение OVIII.4.** Величины  $a_{ik}$  и  $a_{i'k'}$ ,  $i, k, i', k' = \overline{1, n}$ , связанные законом преобразования:

$$a_{i'k'} = A_{i'}^i A_k^k a_{ik}, \quad (\text{VIII.28})$$

называются компонентами ковариантных тензоров второй валентности.

Обобщая сказанное выше, дадим определение:

**Определение OVIII.5.** Величины  $a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  и  $a_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}$ , связанные законом преобразования:

$$a_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_p}^{i_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad (\text{VIII.29})$$

называются компонентами тензоров валентности  $(p+q)$ ,  $p$  раз контрвариантных и  $q$  раз ковариантных. Также пишут  $a[p-q]$ .

Понятие тензоров обобщает понятие векторов. Таким образом:

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности образуют компоненты симметричного дважды ковариантного тензора.

Этот тензор называется *метрическим тензором*, а соответствующая ему первая квадратичная форма поверхности называется также *метрикой поверхности* или *метрической формой поверхности*.

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - два произвольных вектора касательной плоскости поверхности. Тогда их можно разложить по базису  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$  этой плоскости:

$$\vec{a} = \vec{r}_u a^1 + \vec{r}_v a^2; \quad \vec{b} = \vec{r}_u b^1 + \vec{r}_v b^2,$$

где  $a^i, b^k$  ( $i, k = \overline{1, 2}$ ) — внутренние координаты векторов на поверхности.

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned} \left( \vec{a} \vec{b} \right) &= \vec{r}_u^2 a^1 b^1 + \left( \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right) (a^1 b^2 + a^2 b^1) + \vec{r}_v^2 a^2 b^2 \implies \\ \left( \vec{a} \vec{b} \right) &= E a^1 b^1 + F (a^1 b^2 + a^2 b^1) + G a^2 b^2. \end{aligned} \quad (\text{VIII.30})$$

С учетом определения метрического тензора получим для векторов, лежащих в касательной плоскости к поверхности, окончательное выражение:

$$\left( \vec{a} \vec{b} \right) = g_{ik} a^i b^k. \quad (\text{VIII.31})$$



### VIII.3. Задачи внутренней геометрии

Таким образом, для векторов, лежащих на поверхности, метрический тензор полностью определяет скалярное произведение.

## VIII.3 Задачи внутренней геометрии поверхности

Свойства поверхностей принято разделять на две группы. Совокупность этих свойств, сохраняющихся при изгибании поверхности, образует ее *внутреннюю геометрию*, а все остальные свойства, существенно зависящие от формы поверхности во внешнем пространстве, называются *внешними*. Таким образом:

Наложимые поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию.

Задачами внутренней геометрии поверхности являются задачи, полностью определяемые первой квадратичной формой. Все эти задачи сводятся к следующим четырем основным задачам внутренней геометрии поверхности:

1. Вычисление длин дуг кривых на поверхности;
2. Вычисление угла между двумя пересекающимися линиями на поверхности;
3. Вычисление площади части поверхности;
4. Нахождение кратчайших линий на поверхности (геодезических линий).

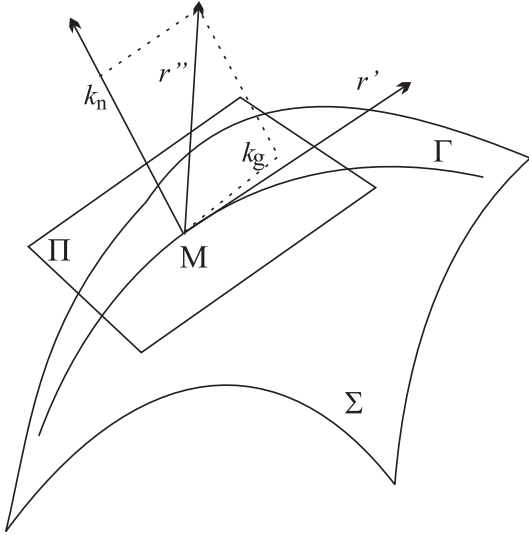
Первые три задачи мы рассматривали выше, теперь перейдем к рассмотрению четвертой.

## VIII.4 Геодезическая кривизна и геодезические линии

### VIII.4.1 Определение геодезической кривизны

**Определение OVIII.6.** Геодезической кривизной  $k_g$  линии  $\Gamma$  на поверхности в некоторой ее точке называется абсолютная величина проекции второй производной радиуса-вектора этой кривой на касательную плоскость:

$$k_g = |Pr_{кас. пл.} \vec{r}''| \quad (\text{VIII.32})$$



**Рис. VIII.35.** Геодезическая и нормальная кривизна линий на поверхности

Получим выражение для геодезической кривизны линии

$$\Gamma : \quad \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \quad (\text{VIII.33})$$

на поверхности  $\Sigma$ . Нормальный вектор к поверхности выражается через касательные векторы к координатным линиям:

$$\vec{N} = \left[ \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right]. \quad (\text{VIII.34})$$

Нормальная проекция вектора ускорения равна:

$$\text{Pr}_{\vec{N}} \vec{r}'' = \frac{(\vec{r}'' \cdot \vec{N})}{|\vec{N}|}.$$

Таким образом, согласно определению VIII.32 по теореме Пифагора получим:

$$k_g^2 = (\vec{r}'' )^2 - \frac{(\vec{r}'' \cdot \vec{N})^2}{|\vec{N}|^2} \equiv \frac{1}{|\vec{N}|^2} \left( |\vec{N}|^2 - (\vec{r}'' \cdot \vec{N})^2 \right).$$

Применяя здесь тождество Лагранжа:

$$\vec{a}^2 \vec{b}^2 = [\vec{a} \vec{b}]^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2,$$

получим более удобное выражение для геодезической кривизны линии:

$$k_g^2 = \frac{1}{|\vec{N}|^2} \left[ \vec{r}'' \cdot \vec{N} \right]^2 \implies k_g = \frac{1}{|\vec{N}|} \left| \left[ \vec{r}'' \cdot \vec{N} \right] \right|. \quad (\text{VIII.35})$$

Используя VIII.34 и затем — формулу раскрытия двойного векторного произведения:

$$\left[ \vec{a} \left[ \vec{b} \vec{c} \right] \right] = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

получим с учетом определения коэффициентов первой квадратичной фор-

мы:

$$k_g^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left( E \left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_v \right)^2 - 2F \left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_v \right) \left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_u \right) + G \left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_u \right)^2 \right). \quad (\text{VIII.36})$$

Заметим, что поскольку геодезическая кривизна определяется проекцией вектора ускорения на касательную плоскость, то она должна полностью определяться коэффициентами первой квадратичной формы и их производными<sup>1</sup>, таким образом, геодезическая кривизна поверхности не изменяется при изгибании.

### VIII.4.2 Геодезические линии и уравнения геодезических линий

**Определение OVIII.7.** *Линия  $\Gamma$  поверхности  $\Sigma$  называется геодезической, если ее геодезическая кривизна во всех точках равна нулю.*

Таким образом, согласно VIII.35 для геодезической линии:

$$\left| \left[ \vec{r}'' \cdot \vec{N} \right] \right| = 0.$$

Но вектор нулевой длины имеет и нулевые координаты, следовательно:

$$\left[ \vec{r}'' \cdot \vec{N} \right] = \vec{0}. \quad (\text{VIII.37})$$

Применяя здесь формулу упрощения двойного векторного произведения, найдем:

$$\vec{r}_u \left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_v \right) - \vec{r}_v \left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_u \right) = \vec{0}.$$

Поскольку векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  в неособых точках поверхности неколлинеарны, то в последнем выражении должны обращаться в нуль скалярные произведения. Таким образом, получим для геодезической линии уравнения:

$$\left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_u \right) = 0; \quad (\text{VIII.38})$$

$$\left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_v \right) = 0. \quad (\text{VIII.39})$$

Вычисляя скалярные произведения, получим, например:

$$\left( \vec{r}'' \cdot \vec{r}_u \right) =$$

<sup>1</sup>В этом факте мы убедимся ниже.

$$\left( \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_u \right) u'^2 + 2 \left( \vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_u \right) u'v' + \left( \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u \right) v'^2 + \vec{r}_u^2 u'' + \left( \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right) v''$$

Таким образом получаем систему двух уравнений:

$$\frac{1}{2} \partial_u E u'^2 + \partial_v E u'v' + \left( \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u \right) v'^2 + E u'' + F v'' = 0; \quad (\text{VIII.40})$$

$$\frac{1}{2} \partial_v G v'^2 + \partial_u G u'v' + \left( \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v \right) u'^2 + F u'' + G v'' = 0. \quad (\text{VIII.41})$$

Далее произведем преобразования:

$$\begin{aligned} \left( \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u \right) &= \partial_v \left( \vec{r}_v \cdot \vec{r}_u \right) - \left( \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv} \right) \implies \\ \left( \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u \right) &= \partial_v F - \frac{1}{2} \partial_u G. \end{aligned} \quad (\text{VIII.42})$$

Аналогично:

$$\left( \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v \right) = \partial_u F - \frac{1}{2} \partial_v E. \quad (\text{VIII.43})$$

Используя соотношения VIII.42, VIII.43 в уравнениях VIII.40, VIII.42, приведем последние к виду:

$$\frac{1}{2} \partial_u E u'^2 + \partial_v E u'v' + \left( \partial_v F - \frac{1}{2} \partial_u G \right) v'^2 + E u'' + F v'' = 0 \quad (\text{VIII.44})$$

$$\frac{1}{2} \partial_v G v'^2 + \partial_u G u'v' + \left( \partial_u F - \frac{1}{2} \partial_v E \right) u'^2 + F u'' + G v'' = 0 \quad (\text{VIII.45})$$

Введем теперь так называемые *символы Кристоффеля I-го рода*:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (\text{VIII.46})$$

По определению символы Кристоффеля I-го рода симметричны по первым двум индексам:

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}. \quad (\text{VIII.47})$$

Таким образом, вычисляя, найдем:

$$\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \partial_u E; \quad \Gamma_{11,2} = \partial_u F - \frac{1}{2} \partial_v E; \quad \Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = \partial_v E;$$

$$\Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = \frac{1}{2} \partial_u G; \quad \Gamma_{22,1} = \partial_v F - \frac{1}{2} \partial_v G. \quad (\text{VIII.48})$$

VIII.4. Геодезическая кривизна и геодезические линии

Сравнивая VIII.48 с уравнениями VIII.44, VIII.45, приведем последние к виду:

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{kl,j} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (j, k, l = \overline{1, 2}). \quad (\text{VIII.49})$$

Пусть  $g^{ij}$  - коэффициенты матрицы  $G^{-1}$ , обратной к матрице первой квадратичной формы:

$$g^{ij} g_{kj} = \delta_{ik}. \quad (\text{VIII.50})$$

Можно показать, что величины  $g^{ij}$  образуют координаты симметричного контрвариантного тензора второй валентности.

Умножим уравнения VIII.49 на  $g^{ij}$  и просуммируем результат по индексу  $j$ , в результате получим уравнения:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (\text{VIII.51})$$

где введены так называемые *символы Кристоффеля II-го рода*:

$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{kl,j}, \quad (\text{VIII.52})$$

также симметричные по двум нижним индексам.

Уравнения VIII.52 называются *уравнениями геодезических линий*; они являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно координат  $x^i(s)$  точки геодезической линии.

Так как кривая  $\Gamma$  параметризована натуральным параметром  $t = s$ , то должны выполняться условия:

$$|\vec{r}'| = 1; \quad (\text{VIII.53})$$

$$\left( \vec{r}' \cdot \vec{r}'' \right) = 0. \quad (\text{VIII.54})$$

Расписывая соотношение VIII.53, получим так называемое *соотношение нормировки*:

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1 \implies g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 1. \quad (\text{VIII.55})$$

Однако, вследствие уравнений геодезических VIII.38, VIII.39 соотношение VIII.54, являющееся дифференциальным следствием соотношения нормировки VIII.53, выполняется тождественно. Таким образом, можно утверждать, что интегралом уравнений геодезических VIII.52 является:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \text{Const}. \quad (\text{VIII.56})$$

Это означает, что соотношение нормировки VIII.55 лишь уточняет значение этой постоянной, и, следовательно, одно из этих уравнений геодезических может быть заменено соотношением нормировки.

В заключении раздела заметим, что уравнения геодезических полностью определяются коэффициентами первой квадратичной формы и их первыми частными производными. Таким образом, исследование геодезических поверхности является задачей внутренней геометрии поверхности.

### VIII.5 Геодезическая линия как кратчайшая

Пусть  $\gamma$  — вещественная кривая поверхности  $\Sigma$ , заданная уравнениями  $x^i = f^i(t)$ , где  $x^i$  — внутренние координаты поверхности,  $t$  — вещественный параметр, и пусть  $A$  и  $B$  — две точки этой кривой, соответствующие значениям параметра  $t_0$  и  $t_1$ . Пусть далее

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (\text{VIII.57})$$

— первая квадратичная форма поверхности. Тогда длина этой кривой, заключенная между точками  $A$  и  $B$  равна:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (\text{VIII.58})$$

Уравнения

$$\bar{x}^i = x^i + \epsilon \delta x^i,$$

где  $\epsilon$  — бесконечно малая величина, а  $\delta x^i$  — функции от  $x^i$ , такие, что

$$\delta x^i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1 \quad (\text{VIII.59})$$

определяет новую кривую  $\bar{C}$ , близкую к  $\gamma$  и проходящую через те же точки  $A$  и  $B$ .

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) dt, \quad (\text{VIII.60})$$

где  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ , а  $\varphi$  — аналитические функции от  $2n$  аргументов. Если  $\bar{I}$  — соответствующий интеграл для кривой  $\bar{C}$ , то разлагая функцию  $\varphi$  в ряд Тейлора, получим:

$$\bar{I} - I = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right] dt + \dots,$$

где  $\delta \dot{x}^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^j} \dot{x}^j$ , а ненаписанные члены имеют второй и более высокий порядок относительно  $\epsilon$ . Если мы запишем, что

$$\delta I = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right] dt, \quad (\text{VIII.61})$$

то, интегрируя второе подинтегральное слагаемое по частям используя формулу VIII.59, получим

$$\delta I = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i dt. \quad (\text{VIII.62})$$

Об интеграле говорят, что он *стационарен*, а соответствующая ему кривая  $\Gamma$  называется *экстремалью*, если первая вариация  $\delta I$  равна нулю для любой системы функций  $\delta x^i$ , удовлетворяющих условиям VIII.59. Из формулы VIII.62 следует, что, необходимым и достаточным для этого условием будет равенство

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0. \quad (\text{VIII.63})$$

Это условие известно под названием уравнений *Эйлера*. Применим этот общий результат к интегралу VIII.58: В этом случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} = \frac{g_{ij} \dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} = \frac{g_{ij} \dot{x}^j}{\frac{ds}{dt}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k}{\frac{ds}{dt}}.$$

Подставив эти значения в уравнение VIII.63, получим

$$g_{ij} \ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k - g_{ij} \dot{x}^j \frac{\frac{d^2 s}{ds}}{\frac{ds}{dt}} = 0.$$

Применяя символы Кристоффеля, составленные для формы VIII.57, можно этим уравнениям придать вид

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{jk,i} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - g_{ij} \frac{dx^j}{dt} \frac{\frac{d^2 s}{ds}}{\frac{ds}{dt}} = 0. \quad (\text{VIII.64})$$

Умножая на  $g^{il}$  и суммируя по  $i$ , найдем, что

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \frac{dx^l}{dt} \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} = 0. \quad (\text{VIII.65})$$

Если вместо произвольного параметра  $t$  использовать длину дуги  $s$ , то уравнения VIII.65 принимают вид

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (\text{VIII.66})$$

Таким образом, экстремальными интеграла VIII.58, в котором параметр  $t$  представляет длину дуги  $s$ , являются интегральные кривые системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений VIII.66.

Умножим уравнения VIII.66 на

$$g_{il} \frac{dx^l}{ds}$$

и просуммируем результат. При этом надо учесть, что вследствие симметричности квадратичной формы

$$g_{il} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^l}{ds} \\ g_{il} \frac{dx^l}{ds} \frac{d^2 x^i}{ds^2} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g_{il} \frac{dx^i}{ds} - \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^l}{ds} \frac{dg_{il}}{ds}.$$

Таким образом, получим тождество:

$$g_{il} \frac{dx^l}{ds} \frac{d^2 x^i}{ds^2} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g_{il} \frac{dx^i}{ds} - \partial_m g_{il} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds}. \quad (\text{VIII.67})$$

Учтем также, что

$$g_{il} \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk,l} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

Таким образом, получим из VIII.66:

$$\frac{d}{ds} \left( g_{il} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^l}{ds} \right) = 0 \implies \\ g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \text{Const}. \quad (\text{VIII.68})$$



### VIII.5. Геодезическая линия как кратчайшая

Это означает, что величина:

$$\chi = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

является *интегралом* уравнений геодезических линий. Таким образом соотношение нормировки:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1,$$

возникающее при натуральной параметризации кривой и означающее факт нормировки вектора касательной, не противоречит уравнениям геодезической линии, а лишь уточняет значение постоянной в формуле VIII.68.

В качестве примера рассмотрим геодезические линии евклидовой плоскости и кругового цилиндра. Первая квадратичная форма евклидовой плоскости есть:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (\text{VIII.69})$$

следовательно, матрица первой квадратичной формы единичная и постоянная. Вследствие этого символы Кристоффеля как первого, так и второго рода евклидовой плоскости в *декартовых координатах* равны нулю. Но тогда уравнения геодезических линий евклидовой плоскости принимают вид:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0. \quad (\text{VIII.70})$$

Как известно из математического анализа, необходимым и достаточным условием равенства нулю второй производной функции на отрезке является линейность этой функции, т.е:

$$x = \alpha s + x_0; \quad y = \beta s + y_0, \quad (\text{VIII.71})$$

где  $\alpha, \beta, x_0, y_0$  - произвольные константы. Но уравнения VIII.71 относительно декартовых координат являются параметрическими уравнениями прямой линии на плоскости.

Таким образом, мы доказали теорему:

**Теорема TVIII.2.** *Геодезическими линиями евклидовой плоскости являются прямые линии и только они.*

Рассмотрим теперь геодезические линии на круговом цилиндре радиуса  $a$ , метрика которого в цилиндрических координатах имеет вид:

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (\text{VIII.72})$$

Поскольку матрица первой квадратичной формы цилиндра постоянна, то и в этом случае символы Кристоффеля обращаются в нуль, а, следовательно, решениями уравнений геодезических будут линейные функции:

$$\varphi = \alpha s + \varphi_0; \quad z = \beta s + z_0, \quad (\text{VIII.73})$$

Исключая отсюда натуральный параметр, получим:

$$z = \sigma \varphi + z_0. \quad (\text{VIII.74})$$

Возвращаясь к цилиндрическим координатам в пространстве, найдем параметрические уравнения геодезических цилиндра:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi; \\ y &= a \sin \varphi; \quad , \\ z &= \sigma \varphi + z_0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.75})$$

т.е., получим уравнения винтовой цилиндрической линии.

Таким образом, справедлива теорема:

**Теорема TVIII.3.** *Геодезическими линиями кругового цилиндра являются винтовые линии и только они.*

## VIII.6 Задачи внутренней геометрии поверхности

### Основные формулы

Пусть кривая  $\Gamma$  на поверхности задана параметрическими уравнениями:

$$\Gamma : \quad u = u(t); \quad v = v(t).$$

Тогда длина этой линии определяется по формуле:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt.$$

Пусть на поверхности наряду с линией  $\Gamma$  задана своими параметрическими уравнениями и линия  $\bar{\Gamma}$ :

$$\bar{\Gamma} : \quad u = \bar{u}(\tau), \quad v = \bar{v}(\tau)$$

VIII.6. Задачи внутренней геометрии поверхности

и пусть эти линии пересекаются в некоторой точке  $M_0$  :

$$M_0 = \Gamma \cap \bar{\Gamma} \implies u(t_0) = \bar{u}(\tau_0); v(t_0) = \bar{v}(\tau_0).$$

Углом между линиями на поверхности в точке их пересечения называется угол между их касательными векторами. Косинус угла между этими линиями вычисляется по формуле:

$$\cos \Theta = \frac{E\dot{u}_0\dot{\bar{u}}_0 + F(\dot{u}_0\dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{u}}_0\dot{v}_0) + G\dot{v}_0\dot{\bar{v}}_0}{\sqrt{E\dot{u}_0^2 + 2F\dot{u}_0\dot{v}_0 + G\dot{v}_0^2}\sqrt{E\dot{\bar{u}}_0^2 + 2F\dot{\bar{u}}_0\dot{\bar{v}}_0 + G\dot{\bar{v}}_0^2}}.$$

Площадь части поверхности  $\Omega$  вычисляется по формуле:

$$S = \int \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

**Пример PVIII.1.** Найти уравнения сферических локсодром, т.е., кривых всюду имеющих один и тот же угол по отношению к меридианам.

Решение

Параметрические уравнения сферы радиуса  $R$  имеет вид:

$$\vec{r} = R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

При этом пусть искомая кривая  $\Gamma$  задана параметрическими уравнениями:

$$\Gamma : \quad \varphi = \varphi(t); \theta = \theta(t).$$

Меридиан задается уравнением:

$$\bar{\Gamma} : \quad \varphi = \varphi_0.$$

Пусть эти кривые пересекаются в некоторой точке  $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ . Касательный вектор к меридиану в этой точке равен:

$$\vec{T}_m = \vec{r}_\theta |_{M_0} = R(-\cos \varphi_0 \sin \theta_0, -\sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

Нормируя его на единицу, получим:

$$\vec{t}_m = (-\cos \varphi_0 \sin \theta_0, -\sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

Касательный вектор к искомой кривой равен:

$$\vec{T} = \vec{r}_t = R(-\sin \varphi \cos \theta \dot{\varphi} - \cos \varphi \sin \theta \dot{\theta}, \cos \varphi \cos \theta \dot{\varphi} - \sin \varphi \sin \theta \dot{\theta}, \cos \theta \dot{\theta})_{M_0}.$$

Длина этого вектора равна:

$$|\vec{T}| = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2}.$$

Полагая теперь  $t = \theta$  и избавляясь от несущественного множителя, найдем:

$$\vec{T} = (-\sin \varphi \cos \theta \varphi' - \cos \varphi \sin \theta, \cos \varphi \cos \theta \varphi' - \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)_{M_0}$$

и

$$|\vec{T}| = \sqrt{1 + \varphi'^2 \cos^2 \theta},$$

где обозначено  $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}$ . Вычисляя, найдем:  $(\vec{T}, \vec{\tau}_m) = 1$ .

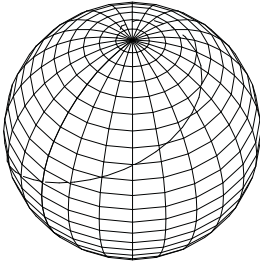
Таким образом, если  $\alpha$  - угол между искомой линией и меридианом, то:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \cos^2 \theta}}.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, нетрудно получить соотношение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m} = \cos \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \implies \quad (\text{VIII.76})$$

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} = m d\varphi, \quad (\text{VIII.77})$$



**Рис. VIII.36.** Сферическая локсодрома

где  $m$  - согласно условию задачи произвольная константа, так как постоянен угол между локсодромой и меридианом. Интегрируя это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, найдем уравнение локсодромы:

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = ce^{m\varphi}.$$

**Пример PVIII.2.** Вычислить площадь поверхности тора, заданного параметрическими уравнениями

$$\vec{r} = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

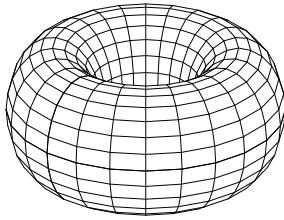


Рис. VIII.37. Тор

**Решение**

Прежде всего вычислим частные производные радиуса-вектора и коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\vec{r}_u = (-(a+b \cos v) \sin u, (a+b \cos v) \cos u, 0);$$

$$\vec{r}_v = (-b \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, b \cos v).$$

Поэтому

$$E = (a+b \cos v)^2; \quad F = 0, \quad G = b^2.$$

Тогда по формуле (VII.24) площадь поверхности тора равна:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} du dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} b(a + b \cos v) dv \right\} du = \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b \cos v) dv = 2\pi b (av + b \sin v) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

**Пример PVIII.3.** Найти угол под которым кривые

$$\rho = Ae^{m\varphi} \tag{VIII.78}$$

пересекают прямолинейные образующие кругового конуса, имеющего первую квадратичную форму:

**Решение**

Конус задается следующими параметрическими уравнениями:

$$\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho \operatorname{ctg} \Omega),$$

где  $2\Omega$  - угол при вершине конуса, а  $\rho$  - полярный радиус. Вычисляя производные радиуса-вектора, получим:

$$\vec{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, \operatorname{ctg} \Omega),$$

$$\vec{r}_\varphi = \rho(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Таким образом:

$$E = (\vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\rho) = \frac{1}{\sin^2 \Omega}; \quad F = (\vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\varphi) = 0; \quad G = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi) = \rho^2.$$

Окончательно приведем первую квадратичную форму конуса к виду:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{\sin^2 \Omega} + \rho^2 d\varphi^2. \quad (\text{VIII.79})$$

Для образующей  $\delta\varphi = 0; \rho = t$ , для линии же (VIII.78):  $\varphi = \tau, \rho = Ae^{m\varphi}$ ,  $d\rho = m\rho d\tau$ . В точке пересечения  $M_0$  этих линий  $\rho_0 = Ae^{m\varphi_0}$ . Для направляющего вектора образующей в точке пересечения получим:

$$\vec{r}'_t(\rho_0, \varphi_0) = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, \operatorname{ctg} \Omega);$$

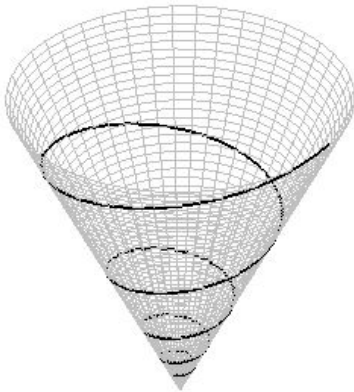
а для направляющего вектора линии (VIII.78) в точке пересечения получим:

$$\vec{r}'_\tau(\rho_0, \varphi_0) = \rho_0(m \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0, m \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0, m \operatorname{ctg} \Omega).$$

Таким образом:

$$|\vec{r}'_t|_{M_0} = \frac{1}{\sin \Omega}; \quad |\vec{r}'_\tau|_{M_0} = \rho_0 \sqrt{\frac{m^2}{\sin^2 \Omega} + 1};$$

$$(\vec{r}'_t \cdot \vec{r}'_\tau)_{M_0} = \frac{m}{\sin \Omega}.$$



**Рис.VIII.38.** Коническая локсодрома (VIII.78):  
 $A = 1, m = 0, 1$

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\vec{r}'_t \cdot \vec{r}'_\tau)_{M_0}}{|\vec{r}'_t|_{M_0} |\vec{r}'_\tau|_{M_0}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{m^2 + \sin^2 \Omega}} \end{aligned}$$

(= Const). Т.е., линии (VIII.78) пересекаются с образующими конуса под постоянным углом:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\sin \Omega}{m}.$$

Таким образом, линии (VIII.78) являются коническими локсодромами.

**Пример PVIII.4.** Вычислить геодезическую кривизну параллели на сфере.

### Решение

Геодезическую кривизну будем вычислять по формуле (VIII.35), согласно которой:

$$k_g = \left| \left[ \vec{r}'' \vec{m} \right] \right|,$$

где  $\vec{m}$  - орт нормали. Сферу зададим параметрическими уравнениями с помощью географических координат:

$$\vec{r} = R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi), \quad \text{где } \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда параллель сферы,  $\Gamma$ , будет задаваться уравнением

$$\theta = \theta_0,$$

т.е.:

$$\Gamma : \quad \vec{r} = R(\cos \varphi \cos \theta_0, \sin \varphi \cos \theta_0, \sin \theta_0),$$

- параметром параллели является полярный угол  $\varphi$ .

Вычислим производные радиуса вектора на параллели:

$$\vec{r}'_\varphi = R(-\sin \varphi \cos \theta_0, \cos \varphi \cos \theta_0, 0); \vec{r}'_\theta = R(-\cos \varphi \sin \theta_0, -\sin \varphi \sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

Вычисляя векторное произведение  $[\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\theta]$  и нормируя его, получим:

$$\vec{m} = (\cos \varphi \cos \theta_0, \sin \varphi \cos \theta_0, \sin \varphi) \quad \left( = \frac{\vec{r}}{R} - \right.$$

- очевидный результат: вектор нормали к любой точке сферы коллинеарен радиусу-вектору, направленного из центра сферы к этой точке. Таким же очевидным способом мы можем провести и натуральную параметризацию параллели, так как из простых геометрических рассуждений видно, что ее длина равна  $2\pi R \cos \theta_0$ . Однако, в методических целях получим этот результат формально. Вычислим дифференциал радиуса-вектора вдоль параллели:

$$d\vec{r} = R \cos \theta_0 (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi.$$

Таким образом, дифференциал длины дуги параллели равен:

$$ds = |d\vec{r}| = R \cos \theta_0 d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, получим предыдущий результат. Таким образом, для параллели:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{R \cos \theta_0} \frac{d}{d\varphi}.$$

Выполняя простое дифференцирование, найдем для параллели:

$$\vec{r}'' = \frac{1}{R \cos \theta_0} (\cos \varphi, \sin \varphi, 0).$$

Окончательно найдем:

$$[\vec{m}, \vec{r}'' ] = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{R} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \implies$$

$$k_g = |[\vec{m}, \vec{r}'' ]| = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{R}.$$



## Глава IX

# Вторая квадратичная форма поверхности

### IX.1 Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве

Пусть задана поверхность в трехмерном евклидовом пространстве и  $(x_0, y_0, z_0)$  - неособая точка на ней. Предположим сначала, что ось  $z$  нормальна к касательной плоскости к поверхности в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , в этом случае оси  $x$  и  $y$  ей параллельны. Тогда поверхность локально около точки  $(x_0, y_0, z_0)$  задается уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$  с

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} = 0,$$

т.е.

$$\vec{\nabla} f \Big|_{x=x_0, y=y_0} = 0.$$

Рассмотрим второй дифференциал функции  $z = f(x, y)$ , т.е.  $d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$  и составим матрицу  $a_{ij} = f_{x^i x^j}$ , где  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  (эта матрица называется *гессианом*). Рассмотрим эту матрицу квадратичной формы в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  в которой  $\vec{\nabla} f = 0$ .

**Определение OIX.1.** Главными кривизнами поверхности  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0$  :

$(x_0, y_0, z_0)$ , в которой  $\vec{\nabla} f = 0$ , называются *собственные числа матрицы*  $(a_{ij})$ . *Гауссовой кривизной* называется *детерминант матрицы*  $(a_{ij})$  в этой точке, а *средней кривизной* называется *след матрицы* в этой точке: *след*  $a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$ ,  $k_1$  и  $k_2$  - *собственные числа*, *гауссова кривизна*  $K = k_1 k_2 = \det(a_{ij}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ .

Гауссова кривизна поверхности зависит только от внутренних метрических свойств этой поверхности.

Мы определили понятие кривизны в специальных координатах, связанных с изучаемой точкой: ось  $z$  нормальна к поверхности, а оси  $x$  и  $y$  касательны к ней в этой точке или, локально,  $z = f(x, y)$  и  $\vec{\nabla}f = 0$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Для определения этих величин в произвольных координатах обратимся к теории кривизны линий на поверхности. Пусть поверхность задана в параметрической форме

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (\text{IX.1})$$

Тогда  $\left[ \begin{smallmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{smallmatrix} \right] = \left| \left[ \begin{smallmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{smallmatrix} \right] \right| \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности,  $|\vec{n}| = 1$ . Рассмотрим кривую  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$  на поверхности. Мы имеем:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}, \quad \ddot{\vec{r}} = (\vec{r}_{uu} \dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv} \dot{u}\dot{v} + \vec{r}_{vv} \dot{v}^2) + (\vec{r}_u \ddot{u} + \vec{r}_v \ddot{v}).$$

Так как  $\vec{r}_u \perp \vec{n}$  и  $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ , мы получаем

$$\left( \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} \right) = (\vec{r}_{uu} \cdot \vec{n}) \dot{u}^2 + 2(\vec{r}_{uv} \cdot \vec{n}) \dot{u}\dot{v} + (\vec{r}_{vv} \cdot \vec{n}) \dot{v}^2 = b_{11} \dot{u}^2 + 2b_{12} \dot{u}\dot{v} + b_{22} \dot{v}^2. \quad (\text{IX.2})$$

*Вывод.* Нормальная проекция ускорения  $(\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n})$  - это квадратичная форма от вектора скорости  $(\dot{u}, \dot{v})$  в локальных координатах  $u = x^1, v = x^2$ .

Положим  $b_{11} = L, b_{12} = M, b_{22} = N$ . Имеем

$$\left( \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} \right) dt^2 = b_{ij} dx^i dx^j = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$$

**Определение OIX.2.** Выражение  $\left( \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} \right) dt^2$  называется второй квадратичной формой поверхности IX.1.

Пусть линия  $u(t), v(t)$  отнесена к натуральному параметру  $t = s$ . Согласно формулам Френе мы имеем для кривой  $\vec{r} = \vec{r}(t) = r(u(t), v(t))$

$$\vec{r}'' = \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = k \vec{\nu},$$

где  $\vec{n}$  - главная нормаль к кривой,  $k$  - кривизна кривой. Поэтому

$$\left( \vec{r}'' \cdot \vec{n} \right) = k \left( \vec{\nu} \cdot \vec{n} \right) = k \cos \theta,$$

### IX.1. Кривизна кривых на поверхности

где  $\theta$  -угол между  $\vec{\nu}$  и  $\vec{n}$ . Отсюда мы получаем

$$k \cos \theta (ds)^2 = \left( \vec{r}'' \cdot \vec{n} \right) ds^2 = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 = b_{ij} dx^i dx^j,$$

$x^1 = u, x^2 = v$ , где  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$ .

Вывод

$$k \cos \theta = \frac{b_{ij} dx^i dx^j}{g_{ij} dx^i dx^j}, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \quad (\text{IX.3})$$

Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема ТІХ.1.** *Кривизна кривой на поверхности в трехмерном пространстве, умноженная на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью кривой, совпадает с отношением значений второй и первой квадратичных форм на касательном векторе к кривой.*

**Следствие СІХ.1.** *Если кривая является сечением поверхности с помощью нормальной плоскости, то  $\cos \theta = 1$  и*

$$k = \frac{b_{ij} dx^i dx^j}{g_{ij} dx^i dx^j}. \quad (\text{IX.4})$$

### Инварианты пары квадратичных форм.

Итак, в каждой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

$$1) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{IX.5})$$

$$2) \quad \left( \vec{r}'' \cdot \vec{n} \right) dt^2 = b_{ij} dx^i dx^j. \quad (\text{IX.6})$$

При этом форма  $ds^2$  положительна. Какие инварианты пары квадратичных форм нам известны из алгебры? Рассмотрим на плоскости пару квадратичных форм, из которых одна положительна. Пусть матрицы квадратичных форм имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{IX.7})$$

$(g_{21} = g_{21}, b_{21} = b_{12})$ . Составим уравнение

$$\det(Q - \lambda G) = 0 \quad (\text{IX.8})$$

или

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0.$$

Корни  $\lambda_1, \lambda_2$  этого уравнения называются *собственными числами пары квадратичных форм*. Решим линейные уравнения

$$\left. \begin{aligned} (b_{11} - \lambda_i g_{11})\chi_i^1 + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\chi_i^2 &= 0, \\ (b_{12} - \lambda_i g_{12})\chi_i^1 + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\chi_i^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.9})$$

где  $\chi_i^1, \chi_i^2$  - неизвестные. Если  $\lambda_1, \lambda_2$  - собственные числа, то система IX.9 имеет нетривиальные решения

$$\vec{f}_1 = (\chi_1^1, \chi_1^2), \quad \vec{f}_2 = (\chi_2^1, \chi_2^2).$$

Направления векторов  $f_1, f_2$  называются *главными направлениями* пары квадратичных форм;  $f_1$  соответствует  $\lambda_1$  и  $f_2$  соответствует  $\lambda_2$ .

Как и прежде скалярные произведения  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$  базисных векторов плоскости обозначаются через  $g_{ij}$   $i, j = \overline{1, 2}$  (при этом риманова метрика задается формой  $g_{ij}$ ).

**Лемма ЛIX.1.** *Если собственные числа пары квадратичных форм различны, то главные направления ортогональны.*

Мы имеем два главных направления  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$ .

$$\vec{f}_1 = \chi_1^1 \vec{e}_1 + \chi_1^2 \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \chi_2^1 \vec{e}_1 + \chi_2^2 \vec{e}_2.$$

Их ортогональность означает по определению, что

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = g_{ij} \chi_1^i \chi_2^j = 0.$$

**Доказательство:**  $\langle\langle$  Выберем пару векторов плоскости  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$  таких, что  $(\vec{d}_i, \vec{d}_j) = \gamma_{ij}$ . Это можно сделать в силу положительной определенности квадратичной формы с матрицей  $g_{ij}$ , так как ее можно привести линейным преобразованием к сумме квадратов. Вторую квадратичную форму мы рассмотрим теперь в новом базисе  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ , считая, что

$$\vec{e}_i = a_i^j \vec{d}_j, \quad A = (a_i^j). \quad (\text{IX.10})$$

IX.1. Кривизна кривых на поверхности

В новом базисе  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ , для матриц  $\bar{G}$  и  $\bar{Q}$  первой и второй квадратичных форм мы имеем:

$$1) \bar{G} = \|\|(\vec{d}_i \vec{d}_j)\|\| = (\gamma_{ij}) \text{ или}$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и значит,  $G = AA^T$ .

$$2) Q = A\bar{Q}A^T.$$

Так как  $G = AA^T$  и  $Q = A\bar{Q}A^T$ , то

$$Q - \lambda G = A(\bar{Q} - \lambda \cdot 1)A^T,$$

$$\det(Q - \lambda G) = (\det A)^2 \det(\bar{Q} - \lambda \cdot 1). \quad (\text{IX.11})$$

Заметим, что  $\det A = \det A^T = \sqrt{g} = \sqrt{\det G} \neq 0$ . Поэтому уравнение IX.8 эквивалентно уравнению

$$\det(\bar{Q} - \lambda \cdot 1) = 0. \quad (\text{IX.12})$$

Решение любого из этих уравнений с собственными числами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  дают главные направления  $f_1$  и  $f_2$ . В базисе  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  скалярное произведение евклидово. Оно задается единичной матрицей  $\bar{G} = 1 = (\gamma_{ij})$ . Из курса алгебры известно, что квадратичную форму  $\bar{Q}$  можно вращением привести к форме, задаваемой диагональной матрицей, а собственные векторы  $f_1, f_2$  последней ортогональны в обычном евклидовом смысле. Лемма доказана.  $\}}\}$

### Свойства второй квадратичной формы.

Вернемся к первой и второй квадратичным формам поверхности в трехмерном евклидовом пространстве:

$$g_{ij}dx^i dx^j = ds^2, \quad (\text{IX.13})$$

$$b_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \quad (\text{IX.14})$$

Отношения этих квадратичных форм есть кривизна нормального сечения.

**Определение OIX.3.** Собственные числа  $k_1, k_2$  этой пары квадратичных форм называются главными кривизнами поверхности в изучаемой точке. Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной  $K$  поверхности, а полусумма их  $H$  - средней кривизной поверхности:

$$K = k_1 k_2; \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (\text{IX.15})$$

### Главные кривизны поверхности, заданной явным уравнением

Пусть поверхность задана в виде  $z = f(x, y)$ , и пусть в изучаемой точке  $(x_0, y_0)$  имеем  $f_x = f_y = 0$  (ось  $z$  нормальна к касательной плоскости к поверхности в этой точке:

$$\vec{n} = (0, 0, 1).$$

). Пусть  $x = u, y = v, z = f(u, v)$ . Для первой и второй квадратичных форм мы получаем (в изучаемой точке  $x_0, y_0$ )

$$\begin{aligned} (I) \quad g_{11} &= 1, g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0 \quad (g_{ij} = \gamma_{ij}), \\ (II) \quad L &= b_{11} = \left( \vec{r}_{uu} \vec{n} \right) = f_{xx}(x_0, y_0), \\ M &= b_{12} = \left( \vec{r}_{uv} \vec{n} \right) = f_{xy}(x_0, y_0), \\ N &= b_{22} = \left( \vec{r}_{vv} \vec{n} \right) = f_{yy}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (IX.16)$$

Здесь вектор  $\vec{n}$  совпадает с единичным вектором вдоль оси  $Oz$ . Итак, в исследуемой точке вторая квадратичная форма имеет вид

$$b_{ij} dx^i dx^j = f_{x^i y^j} dx^i dx^j = d^2 f. \quad (IX.17)$$

Гауссова кривизна в этом случае совпадает с детерминантом

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа получаются из уравнения

$$(f_{xx} - \lambda)(f_{yy} - \lambda) - (f_{xy})^2 = 0,$$

так как  $g_{ij} = \gamma_{ij}$ .

Касательная поверхность в этой точке параллельна плоскости  $(x, y)$ . Главные направления можно получить, решая уравнения

$$(f_{x^i x^j} - \lambda_1 \gamma_{ij}) \chi_1^j = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad f_1, \quad (IX.18)$$

$$(f_{x^i x^j} - \lambda_2 \gamma_{ij}) \chi_2^j = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad f_2. \quad (IX.19)$$

IX.1. Кривизна кривых на поверхности

Так как  $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ , мы можем взять единичные векторы главных направлений за новые оси координат  $x', y'$ , т.е., совершить вращение в плоскости  $(x, y)$ . Необходимо лишь, чтобы было  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

В новых координатах  $(z, x', y')$  имеем:

$$z = f(x(x', y'), y(x', y')),$$

где

$$x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi, \quad y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,$$

и  $\varphi$  — угол поворота.

В этих новых координатах вторая квадратичная форма поверхности в данной точке принимает вид:

$$\lambda_1(dx')^2 + \lambda_2(dy')^2. \quad (\text{IX.20})$$

Для кривизны нормального сечения получаем формулу:

$$k = \frac{\lambda_1(dx')^2 + \lambda_2(dy')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}. \quad (\text{IX.21})$$

Касательный вектор  $\vec{t}$  к нормальному сечению поверхности в данной точке имеет вид:

$$\vec{t} = \left( \frac{dx'}{ds}, \frac{dy'}{dt} \right).$$

Поэтому мы имеем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(dx')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{(dy')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}, \quad (\text{IX.22})$$

где  $\alpha$  — угол между осью  $Ox$  и касательным к нормальному сечению вектором  $\vec{t}$ .

Итак, можно доказать теорему:

**Теорема ГІХ.2.** Кривизна нормального сечения описывается формулой Эйлера:

$$k = \lambda_1 \cos^2 \alpha_1 + \lambda_2 \cos^2 \alpha_2, \quad (\text{IX.23})$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — главные кривизны, а  $\alpha_i$  — углы между касательным к нормальному сечению вектором и соответствующими главными направлениями.

*Замечание.* При изменении направления оси  $Oz$  на противоположное знак главных кривизн также изменяется.

## IX.2 Формулы для кривизн

Если поверхность задана явным уравнением:

$$z = f(x, y),$$

то мы найдем, полагая  $x = u, y = v$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (1, 0, f_x), \quad \vec{r}_v = (0, 1, f_y), \\ \left[ \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right] &= (-f_x, -f_y, 1) \\ \vec{r}_{uu} &= (0, 0, f_{xx}), \quad \vec{r}_{uv} = (0, 0, f_{xy}), \quad \vec{r}_{vv} = (0, 0, f_{yy}), \\ \vec{n} &= \frac{\left[ \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right]}{\left| \left[ \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \right] \right|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \end{aligned} \quad (\text{IX.24})$$

$$\begin{aligned} L = b_{11} &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = b_{12} = b_{21} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ N = b_{22} &= \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned} \quad (\text{IX.25})$$

Отсюда получаем:

$$b_{ij} dx^i dx^j = \frac{f_{x^i x^j} dx^i dx^j}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad (x^1 = u = x, x^2 = v = y) > \quad (\text{IX.26})$$

Для коэффициентов  $g_{ij}$  мы получим:

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y; \quad g_{22} = 1 + f_y^2, \quad (\text{IX.27})$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2. \quad (\text{IX.28})$$

Имеет место теорема:

**Теорема ТІХ.3.** Гауссова кривизна поверхности равна отношению определителей второй и первой квадратичных форм:

$$K = \frac{\det \|B\|}{\det \|G\|} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (\text{IX.29})$$



## IX.2. Формулы для кривизн

В частности, если поверхность задана в виде графика  $z = f(x, y)$ , то имеет место формула:

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \quad (\text{IX.30})$$

**Доказательство:**  $\langle\langle$  Собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определялись из уравнения IX.8

$$\det(Q - \lambda G) = 0,$$

где:

$$Q = \|b_{ij}\| = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

— матрица второй квадратичной формы,

$$G = \|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

— матрица первой квадратичной формы. Матрица  $G$  невырождена и положительно определена, поэтому она имеет обратную матрицу  $G^{-1}$ , такую что

$$G^{-1}G = E.$$

Тогда:

$$\det(Q - \lambda G) \equiv \det(G(G^{-1}Q - \lambda E)) = \det(G) \det(G^{-1}Q - \lambda E).$$

Так как собственные числа характеристических уравнений:

$$\det(Q - \lambda G) = 0$$

и

$$\det(G^{-1}Q - \lambda E) = 0$$

совпадают, а с другой стороны произведение всех собственных чисел матрицы равно ее определителю, то получаем:

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \det(G^{-1}Q) = \frac{\det Q}{\det G}. \quad (\text{IX.31})$$

Отсюда следует, что гауссова кривизна равна отношению определителей матриц второй и первой квадратичных форм.

Далее, если поверхность задана в виде  $z = f(x, y)$ , то коэффициенты  $b_{ij}, g_{ij}$  определяются формулами IX.24. Вычисляя определители и составляя их отношения, получаем искомую формулу для гауссовой кривизны.  $\gg$

**Следствие СІХ.2.** Если поверхность задана в виде графика  $z = f(x, y)$ , то знак гауссовой кривизны  $K$  совпадает со знаком определителя

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2,$$

так как:

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

### ІХ.3 Классификация точек поверхности

Выберем для данной точки  $M_0$  поверхности  $\Sigma$  ортонормированный репер  $(M_0; x, y, z)$ , так чтобы ось  $M_0z$  была нормалью к поверхности. Тогда вблизи данной точки поверхность можно задать явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

причем в точке  $M_0$ :

$$f_x(M_0) = f_y(M_0) = 0.$$

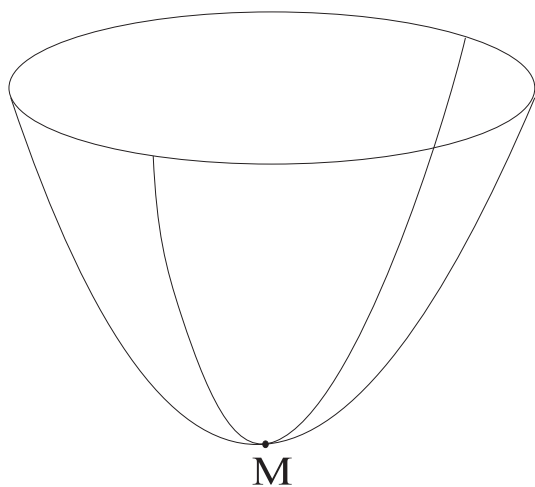
Таким образом в точке  $M_0$  получим:

$$g_{ij}(M_0) = \delta_{ij},$$

так как  $g_{11} = 1 + f_x^2, g_{12} = f_x f_y, g_{22} = 1 + f_y^2$ .

Но тогда в данной точке:

$$L = b_{11} = f_{xx}; \quad M = b_{12} = f_{xy}; \quad N = b_{22} = f_{yy},$$



**Рис. IX.39.** Строение поверхности вблизи эллиптической точки

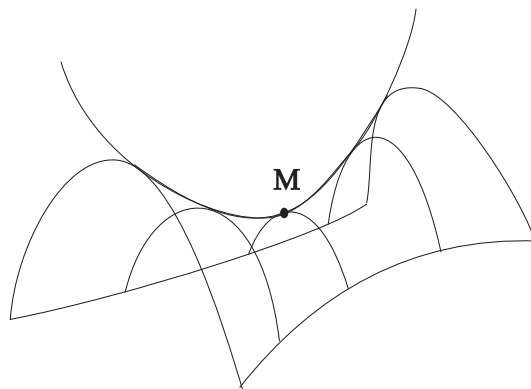
Точки, в которых  $K > 0$ , называются *эллиптическими точками*. Это условие реализуется в двух случаях:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ : (минимум функции  $f(x, y)$  в точке  $M_0$ .) или  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ : (максимум функции  $f(x, y)$  в точке  $M_0$ .) Вблизи эллиптических точек поверхность имеет вид эллипсоида. Поверхность, состоящая из одних эллиптических точек, является выпуклой.

Эллиптические точки поверхности, в которых главные кривизны совпадают:

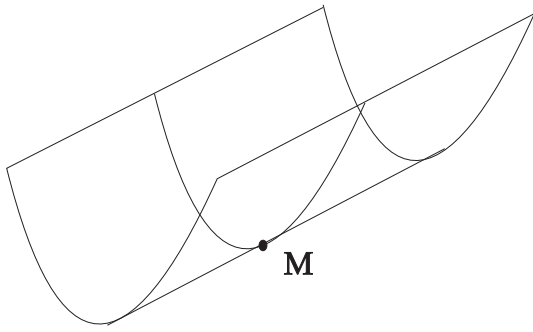
$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (\text{IX.32})$$

называются *омбилическими точками*, или, *точками закругления*.

Точки, в которых  $K < 0$ , называются гиперболическими. Это условие реализуется в двух случаях:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  или  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ; в этих точках поверхность имеет форму седла (гиперболоида).



**Рис. IX.40.** Строение поверхности вблизи гиперболической точки



**Рис. IX.41.** Строение поверхности вблизи параболической точки

Точки, в которых  $K = 0$ , называются параболическими. Такие точки возникают в случаях, когда  $\lambda_1 = 0$  или  $\lambda_2 = 0$ ; вблизи этих точек поверхность имеет вид цилиндра.

## IX.4 Задачи на вторую квадратичную форму поверхности

### Основные формулы

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

где коэффициенты  $L$ ,  $M$ ,  $N$  определяются соотношениями:

$$L = (\vec{m} \cdot \vec{r}_{uu}); \quad M = (\vec{m} \cdot \vec{r}_{uv}); \quad N = (\vec{m} \cdot \vec{r}_{vv}),$$

где  $\vec{m}$  - единичный вектор нормали к поверхности. Поскольку

$$\vec{m} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2},$$

то

$$L = \frac{(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2}}; \quad M = \frac{(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2}}; \quad N = \frac{(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2}},$$

или в координатах

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

#### IX.4. Задачи на вторую квадратичную форму поверхности

Составим матрицу  $B$  второй квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

а также  $\lambda$  - матрицу пары квадратичных форм:

$$\bar{B} = B - \lambda G = \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix}$$

и определим *собственные векторы*  $\vec{u}_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) пары квадратичных форм:

$$(B - \lambda G)U = 0.$$

Эти векторы будем называть *направлениями кривизн*, а соответствующие им собственные значения  $\lambda_1 = k_1$ ,  $\lambda_2 = k_2$  — *главными кривизнами* поверхности в точке.

Величины:

$$K = k_1 k_2$$

называются *гауссовыми кривизнами*, а величины —

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

— *средними кривизнами*.

**Пример ПХ.1.** Вычислить вторую квадратичную форму, главные кривизны, среднюю и гауссову кривизны геликоида (см. (VII.26)):

$$\vec{r} = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, a\varphi.) \quad (\text{IX.33})$$

#### Решение

Воспользуемся результатами задачи ПVII.2:

$$\begin{aligned} \vec{r}_t &= \vec{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0); \\ \vec{r}_\varphi &= (-t \sin \varphi, t \cos \varphi, a). \end{aligned} \quad ,$$

$$E = 1; \quad F = 0; \quad G = t^2 + a^2.$$

Первая квадратичная форма геликоида равна:

$$ds^2 = dt^2 + (a^2 + t^2)d\varphi^2. \quad (\text{IX.34})$$

Вычислим вектор нормали к поверхности геликоида:

$$\vec{N} = [\vec{r}_t, \vec{r}_\varphi] = N := (a \sin \varphi, -a \cos \varphi, t).$$

Вычисляя длину этого вектора, найдем:

$$|\vec{N}| = \sqrt{a^2 + t^2}.$$

Таким образом, орт нормали,  $\vec{m}$ , есть:

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}(a \sin \varphi, -a \cos \varphi, t).$$

Вторые производные радиуса-вектора равны:

$$\vec{r}_{tt} = 0, \quad \vec{r}_{t\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \quad \vec{r}_{\varphi\varphi} = (-t \cos \varphi, -t \sin \varphi, 0).$$

Получим отсюда коэффициенты второй квадратичной формы:

$$B_{tt} = (\vec{m}, \vec{r}_{tt}) = 0; \quad B_{t\varphi} = (\vec{m}, \vec{r}_{t\varphi}) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + t^2}}; \quad B_{\varphi\varphi} = (\vec{m}, \vec{r}_{\varphi\varphi}) = 0.$$

Составим  $\lambda$ -матрицу:

$$\|B - \lambda G\| = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{a}{\sqrt{a^2 + t^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + t^2}} & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение:

$$\det(B - \lambda G) = 0,$$

найдем его корни:

$$\lambda_1 = \frac{-a}{a^2 + t^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a}{a^2 + t^2}.$$

Эти собственные числа и являются главными кривизнами геликоида; его средняя ( $H$ ) и полная (гауссова,  $K$ ) кривизны равны:

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 0; \quad K = \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{a^2}{(a^2 + t^2)^2} < 0.$$

**Пример ПИХ.2.** Исследовать характер точек параболоида вращения и выяснить, существуют ли на нем точки закругления.

### Решение

Напомним, что точками закругления называются такие эллиптические точки, в которых главные кривизны совпадают. Параметрические уравнения параболоида вращения можно записать в виде:

$$\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, a\rho^2).$$

Проводя вычисления, аналогичные предыдущим, найдем:

$$\vec{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2a\rho); \quad \vec{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0);$$

$$\vec{r}_{\rho\rho} = (0, 0, 2a); \quad \vec{r}_{\rho\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \quad \vec{r}_{\varphi\varphi} = (-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, 0).$$

Вектор нормали равен:

$$\vec{N} = [\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi] = (-2a\rho^2 \cos \varphi, -2a\rho^2 \sin \varphi, \rho) \implies$$

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}} (-2\rho a \cos \varphi, -2\rho a \sin \varphi, 1).$$

Таким образом. найдем:

$$\|G\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 + a^2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}} & 0 \\ 0 & \frac{2a\rho^2}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$\lambda_1 = \frac{2a}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}}; \quad \frac{2a\rho^2}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}(\rho^2 + a^2)}.$$

Отсюда следует, что

1. всюду на параболоиде  $K > 0$ , следовательно, все его точки эллиптические;
2. Уравнение

$$\lambda_1 = \lambda_2 \implies 1 = \frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}$$

не имеет решений ни при каких значениях  $a \neq 0$ , следовательно, точек закругления не существует.



# Глава X

## Геометрия поверхностей вращения

В этой главе на примере поверхностей вращения мы продемонстрируем основные понятия, введенные выше.

### X.1 Первая квадратичная форма поверхности вращения

Поверхность вращения,  $\Sigma$ , можно задать некоторой осью вращения  $OO'$  (осью симметрии) и плоской кривой  $\gamma$ , расположенной в плоскости  $\Pi$ , содержащей ось симметрии (см. [Рис.X.42](#)).

Кривая  $\gamma$  называется образующей линией (или проще, образующей) поверхности вращения. Если в качестве оси вращения выбрать ось  $Oz$  цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi; \\y &= \rho \sin \varphi; \\z &= z\end{aligned}\tag{X.1}$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  - полярный радиус,  $\varphi$  - полярный угол, то уравнение поверхности вращения можно записать в виде:

$$\rho = \rho(z); \quad \varphi \in [0, 2\pi],\tag{X.2}$$

т.е., задать одной функцией  $\rho(z)$ . Выберем в качестве внутренних координат поверхности координаты  $x^1 = u = \varphi$  и  $x^2 = v = z$ . Линии  $z = \text{Const}$  называются *параллелями* поверхности вращения, а линии  $\varphi = \text{Const}$  - *меридианами* поверхности вращения.

Вычислим производные радиуса-вектора [X.1](#):

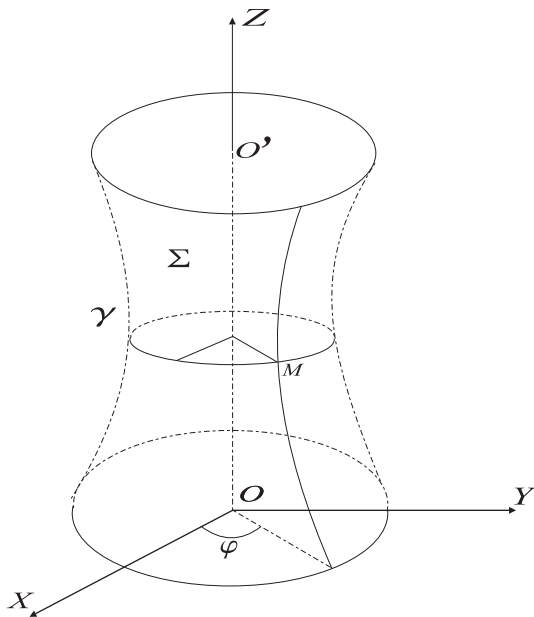
$$\begin{aligned} \vec{r}_u = \vec{r}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0); \\ \vec{r}_v = \vec{r}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (\rho' \cos \varphi, \rho' \sin \varphi, 1) \end{aligned} \quad , \quad (X.3)$$

где

$$\rho' = \frac{d\rho}{dz}.$$

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности вращения:

$$E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = \rho^2; \quad G = \vec{r}_z \cdot \vec{r}_z = 1 + \rho'^2; \quad F = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_z) = 0. \quad (X.4)$$



**Рис. X.42.** Поверхность вращения

Таким образом первая квадратичная форма поверхности вращения в координатах  $\varphi, z$  принимает вид:

$$ds^2 = \rho^2(z)d\varphi^2 + (1 + \rho'^2(z)dz^2), \quad (X.5)$$

а матрица первой квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} \rho^2(z) & 0 \\ 0 & 1 + \rho'^2(z) \end{pmatrix} \quad (X.6)$$

диагональна, т.е.:

Параллели и меридианы поверхности вращения ортогональны между собой.

Площадь части поверхности вращения, заключенной между ее параллелями  $z = z_0, z = z_1$  и меридианами  $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$ , вычисляется по формуле:

## Х.2. Вторая квадратичная форма

$$S = \int_{\Omega} \int \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho(x) \sqrt{1 + \rho'(z)^2} d\varphi =$$

$$(\varphi_1 - \varphi_0) \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + \rho'(z)^2} dz. \quad (\text{X.7})$$

Заметим, что вводя вместо  $z$  новую внутреннюю координату  $\eta$ :

$$\eta = \int \frac{\sqrt{1 + \rho'^2(z)}}{\rho} d\rho, \quad (\text{X.8})$$

метрику поверхности вращения можно привести к *конформно - плоскому виду*:

$$ds^2 = \rho^2(\eta)(d\varphi^2 + d\eta^2). \quad (\text{X.9})$$

## Х.2 Вторая квадратичная форма поверхности вращения

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы поверхности вращения. Сначала найдем вектор нормали к поверхности вращения:

$$\vec{N} = \left( \vec{r}_{\varphi} \cdot \vec{r}_z \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ \rho' \cos \varphi & \rho' \sin \varphi & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos \varphi, \sin \varphi, -\rho'). \quad (\text{X.10})$$

Тогда единичный вектор нормали равен:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2}} (\cos \varphi, \sin \varphi, -\rho'). \quad (\text{X.11})$$

Заметим, что выбранное направление единичного вектора нормали соответствует внешней нормали.

Вычисляя вторые производные радиуса-вектора [X.1](#), найдем:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\varphi\varphi} &= -\rho(\cos \varphi, \sin \varphi, 0), ; \\ \vec{r}_{\varphi z} &= \rho'(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), ; \\ \vec{r}_{zz} &= \rho''(\cos \varphi, \sin \varphi, 0). \end{aligned} \quad (\text{X.12})$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} L &= \left( \vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi\varphi} \right) = -\frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho'^2}}; \\ M &= \left( \vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi z} \right) = 0; \\ N &= \left( \vec{n} \cdot \vec{r}_{zz} \right) = \frac{\rho''}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \end{aligned} \quad (\text{X.13})$$

- матрица второй квадратичной формы диагональна:

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2}} \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & \rho'' \end{pmatrix}. \quad (\text{X.14})$$

Следовательно, главные направления совпадают с направлением координатных линий  $\varphi$  и  $z$  на поверхности. Характеристическое уравнение для собственных чисел принимает вид:

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & 0 \\ 0 & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{X.15})$$

следовательно, собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$ , а, значит, и главные кривизны  $k_1, k_2$  равны:

$$k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{1}{\rho\sqrt{1 + \rho'^2}} \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{\rho''}{(1 + \rho'^2)^{3/2}}. \quad (\text{X.16})$$

Гауссова кривизна поверхности вращения равна:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN}{EG} = -\frac{\rho''}{\rho(1 + \rho'^2)^2}. \quad (\text{X.17})$$

Таким образом, знак гауссовой кривизны поверхности вращения полностью определяется знаком второй производной полярного радиуса,  $\rho''$ . В частности, для цилиндра  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} : \quad \rho = \text{Const}, \quad \rho' = 0, \quad \rho'' = 0 :$$

$$B = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е., гауссова кривизна цилиндра равна нулю:  $K = k_1 k_2 = 0$ .

### Х.3. Геодезические поверхности вращения

Для однополостного гиперболоида вращения  $\mathcal{H}_1$ :

$$\mathcal{H}_1 : \quad \rho = \operatorname{ch} t, \quad z = \operatorname{sh} t \implies$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{dz} = \operatorname{th} t,$$

$$\rho'' = \frac{d\rho'}{dz} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t} \implies \rho'' \geq 0.$$

Таким образом, согласно формуле X.17:

Гауссова кривизна однополостного гиперболоида вращения отрицательна.

### Х.3 Геодезические поверхности вращения

Получим уравнения геодезических линий для поверхности вращения. Метрический тензор этой поверхности имеет вид X.6:

$$G = \|g_{ik}\| = \begin{pmatrix} \rho^2(z) & 0 \\ 0 & 1 + \rho'^2(z) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя символы Кристоффеля I-го рода относительно метрического тензора  $g_{ik}$  по формуле:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}),$$

заметим, что отличными от нуля являются лишь символы Кристоффеля, в которых дважды встречается координата  $\phi$ . Таким образом найдем, полагая  $\varphi = x^1, z = x^2$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,1} &= \Gamma_{12,2} = \Gamma_{22,1} = 0; \\ \Gamma_{12,1} &= -\Gamma_{11,2} = \rho\rho'; \\ \Gamma_{22,2} &= \rho'\rho''. \end{aligned} \tag{X.18}$$

Обратная матрица  $G^{-1}$  метрического тензора, соответствующая контрвариантному метрическому тензору, имеет вид:

$$G^{-1} = \|g^{ik}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \rho'^2} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя символы Кристоффеля II-го рода по формуле:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ij,l},$$

найдем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0; \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{d \ln \rho}{dz}; \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\rho \rho'}{1 + \rho'^2}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\rho' \rho''}{1 + \rho'^2}. \end{aligned} \quad (\text{X.19})$$

Таким образом, уравнения геодезических линий

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (\text{X.20})$$

в случае поверхности вращения принимают вид:

$$(i = 1) \quad \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \frac{d \ln \rho}{dz} \frac{d\varphi}{ds} \frac{dz}{ds} = 0; \quad (\text{X.21})$$

$$(i = 2) \quad \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{\rho \rho'}{1 + \rho'^2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{\rho' \rho''}{1 + \rho'^2} \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 0. \quad (\text{X.22})$$

Поделив обе части первой квадратичной формы X.6 поверхности вращения на  $ds^2$ , получим *соотношение нормировки*, выражающее факт единичности вектора касательной к геодезической  $|\vec{r}'| = 1$  :

$$1 = \rho^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + (1 + \rho'^2) \left( \frac{dz}{ds} \right)^2. \quad (\text{X.23})$$

Как мы отмечали, соотношение нормировки не противоречит уравнениям геодезической, поэтому им можно заменить одно из этих уравнений. Нам удобно заменить им более громоздкое уравнение X.22.

Итак:

Геодезические линии поверхности вращения определяются совместными решениями пары дифференциальных уравнений, X.21 и X.23.

Приступим к решению этих уравнений. Линии

$$\varphi = \text{Const} \quad (\text{X.24})$$

### Х.3. Геодезические поверхности вращения

являются меридианами поверхности вращения; для них:

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (\text{X.25})$$

Подстановка X.25 в уравнение X.21 обращает последнее в тождество, подстановка X.25 в соотношение нормировки X.23 приводит к дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{1}{1 + \rho'^2} \implies \quad (\text{X.26})$$

$$\frac{dz}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2}}. \quad (\text{X.27})$$

Таким образом, выбирая знак в правой части уравнения X.27, получим уравнение с разделяющимися переменными, которое всегда решается в квадратурах:

$$\int \sqrt{1 + \rho'^2(z)} dz = s. \quad (\text{X.28})$$

Решая X.28, найдем функцию  $z = z(s)$  и, таким образом, полностью решим задачу. Отсюда можно сделать следующий важный вывод: *все меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.*

Проверим, не будут ли и параллели  $z = \text{Const}$  поверхности вращения геодезическими. Подставляя

$$\frac{dz}{ds} = 0$$

в уравнение X.22, получим:

$$\rho' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0.$$

Поскольку в этом случае  $\varphi'_s \neq 0$ , то должно быть:

$$\rho'(z) = 0. \quad (\text{X.29})$$

Таким образом, *только те параллели поверхности вращения являются геодезическими линиями, которым соответствует экстремум функции  $\rho(z)$ .* В частности, все параллели кругового цилиндра  $\rho = \text{Const}$  являются геодезическими.

Пусть теперь геодезическая линия  $\gamma$  не является меридианом поверхности вращения, т.е.:

$$\frac{d\varphi}{ds} \neq 0.$$

Поделив тогда обе части уравнения X.21 на  $\frac{d\varphi}{ds}$  и учитывая очевидные соотношения:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} \bigg/ \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \ln \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|; \quad 2 \frac{d \ln \rho}{dz} \frac{dz}{ds} = \frac{d \ln \rho^2}{ds},$$

приведем уравнение X.21 к виду:

$$\frac{d}{ds} \ln \left| \rho^2 \frac{d\varphi}{ds} \right| = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем его *первый интеграл*:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{Const} \quad (= \beta). \quad (\text{X.30})$$

Выражая из X.30 производную  $\frac{d\varphi}{ds}$  и подставляя найденное значение в соотношение нормировки X.23, получим из последнего:

$$\left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = \frac{\rho^2 - \beta^2}{\rho^2(1 + \rho'^2)}. \quad (\text{X.31})$$

Поскольку левая часть X.31 неотрицательна, то должно быть:

$$\rho \geq |\beta|. \quad (\text{X.32})$$

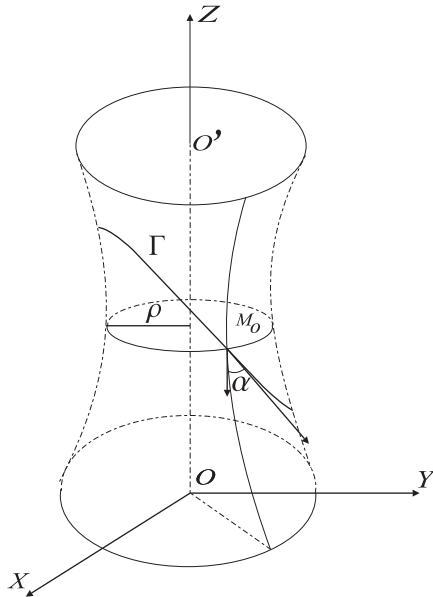


Рис. X.43. К теореме Клеро

Для выяснения геометрического смысла полученных результатов вычислим косинус угла между геодезической линией  $\gamma$  и линией меридиана  $\varphi = \text{Const}$  в точке их пересечения. Касательный вектор к линии меридиана  $\vec{T}$  есть:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dz} = (\rho' \cos \varphi, \rho' \sin \varphi, 1).$$

Длина этого вектора равна  $|\vec{T}| = \sqrt{1 + \rho'^2}$ . Единичный касательный вектор к линии меридиана есть:

$$\vec{\tau}_z = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{1}{1 + \rho'^2} (\rho' \cos \varphi, \rho' \sin \varphi, 1).$$

Единичный касательный вектор к геодезической  $\gamma$  есть:



### Х.3. Геодезические поверхности вращения

$$\vec{\tau}_\gamma = \vec{r}' = \left( \rho' \frac{dz}{ds} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}, \rho' \frac{dz}{ds} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds}, \frac{dz}{ds} \right).$$

Вычисляя косинус угла  $\alpha$  между меридианом и геодезической линией (см. Рис.Х.43), найдем:

$$\cos \alpha = \left( \vec{\tau}_z \cdot \vec{r}' \right) = \sqrt{1 + \rho'^2} \frac{dz}{ds}. \quad (\text{X.33})$$

Подставляя выражение X.33 в соотношение нормировки X.23, приведем его к виду:

$$\rho \frac{d\varphi}{ds} = \sin \alpha. \quad (\text{X.34})$$

Используя теперь это выражение в соотношении X.30, приведем последнее к окончательному виду:

$$\rho \sin \alpha = \text{Const} \quad (= \rho_0 \sin \alpha_0). \quad (\text{X.35})$$

Хотя при выводе X.35 мы полагали  $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$ , т.е.,  $\alpha \neq 0$ , тем не менее, последний результат справедлив и для этого случая  $\text{Const} = 0$ .

Таким образом, мы доказали важную теорему — *теорему Клеро*:

**Теорема ТХ.1.** *Для того, чтобы линия была геодезической поверхности вращения, необходимо и достаточно, чтобы произведение синуса угла между ею и меридианом на расстояние ее точки от оси вращения было постоянным.*

С учетом X.34 перепишем условие X.32 в более удобном виде:

$$\rho \geq \rho_0 \sin \alpha_0, \quad (\text{X.36})$$

где  $\rho_0$  — расстояние от оси вращения некоторой фиксированной точки  $M_0$  геодезической линии,  $\alpha_0$  — угол между геодезической и меридианом в этой точке. Если при смещении из точки  $M_0$  функция  $\rho(z)$  возрастает, то соотношение X.36 не налагает ограничений на радиус  $\rho$ . Если же функция  $\rho(z)$  убывает (т.е. уменьшается расстояние до оси вращения), то угол  $\alpha$  должен расти. И при  $\rho \rightarrow \rho_0 / \sin \alpha_0$  угол должен стремиться к прямому.

## Х.4 Геометрия сферы

В качестве конкретного примера геометрии поверхности вращения рассмотрим геометрию сферы. В сферических координатах:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta; \\ y &= r \sin \varphi \cos \theta; \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0, \infty) \quad (\text{X.37}) \\ z &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

параметрические уравнения сферы радиуса  $R$  получаются при  $r = R$ :

$$\vec{r} = R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta). \quad (\text{X.38})$$

Отметим, что сферические координаты на сфере, т.е., ее внутренние координаты  $\varphi$  и  $\theta$  называются *географическими координатами*, соответственно, *долготой* и *широтой*. Заметим, что в географических координатах всюду на сфере:

$$\cos \theta \geq 0. \quad (\text{X.39})$$

Для вычисления геометрических характеристик сферы в соответствующих формулах предыдущего раздела необходимо положить:

$$\rho = R \cos \theta; \quad z = R \sin \theta, \quad (\text{X.40})$$

откуда дифференцированием, например, получим:

$$\rho' = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{d\theta} \bigg/ \frac{dz}{d\theta}, \implies \rho' = -\operatorname{tg} \theta; \quad (\text{X.41})$$

$$\rho'' = \frac{d\rho'}{d\theta} \bigg/ \frac{dz}{d\theta}, \implies \rho'' = -\frac{1}{R \cos^3 \theta}. \quad (\text{X.42})$$

Подсчитывая с помощью [X.41](#) выражение  $1 + \rho'^2$ , получим:

$$1 + \rho'^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}. \quad (\text{X.43})$$

### Х.4.1 Метрика сферы

Вычисляя метрику сферы согласно формулам [X.5](#), [X.6](#), найдем:

$$ds^2 = R^2(\cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (\text{X.44})$$

Х.4. Геометрия сферы

$$G = R^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.45})$$

Таким образом, определитель первой квадратичной формы сферы

$$\det \|G\| = R^4 \cos^2 \theta \quad (\text{X.46})$$

обращается в нуль в точках

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (\text{X.47})$$

Эти точки являются *особыми точками* географической системы координат и называются *северным*,  $N$ , и *южным*,  $S$ , полюсами сферы, соответственно.

Вычислим с помощью метрики X.44 длину меридиана, отсчитываемую от северного полюса  $\theta = \pi/2$  до некоторой параллели  $\theta = \theta_0$ . На меридиане  $\varphi = \text{Const}$ , поэтому согласно X.44:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 \implies ds = -R d\theta$$

(знак соответствует уменьшению значения  $\theta$ ). Таким образом, интегрируя, найдем:

$$s = \int_{-\pi/2}^{\theta_0} R d\theta = R \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right). \quad (\text{X.48})$$

Вычислим теперь длину всей параллели, соответствующей углу  $\theta_0$ . На параллели  $\theta = \text{Const} = \theta_0$ , поэтому согласно X.44 получим:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \theta_0 d\varphi^2 \implies ds = R \cos \theta_0 d\varphi$$

(мы выбрали положительное направление обхода параллели) и, следовательно:

$$s = \int_0^{2\pi} R \cos \theta_0 d\varphi = 2\pi R \cos \theta_0. \quad (\text{X.49})$$

С другой стороны параллель сферы можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных (по сфере) от северного полюса сферы. Таким образом, параллель сферы с точки зрения ее внутренней геометрии является ее окружностью. Тогда радиусом этой окружности будет служить длина меридиана. Положим далее для удобства

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0 = \psi,$$

тогда  $\cos \theta_0 = \sin \psi$  и введем радиус этой окружности,  $\bar{R}$  и ее длину  $C$ :

$$C = s, \quad \bar{R} = s = R\psi. \quad (\text{X.50})$$

Тогда из X.48 и X.49 получим выражение для отношения этих величин:

$$\frac{C}{\bar{R}} = \frac{2\pi \sin \psi}{\psi}. \quad (\text{X.51})$$

Поскольку

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

мы приходим к важному выводу:

Отношение длины любой окружности на сфере к радиусу этой окружности меньше  $2\pi$ :

$$\frac{C}{\bar{R}} < 2\pi.$$

Заметим, что это отношение стремится к  $2\pi$  при стремлении радиуса окружности к нулю. Таким образом, в малых частях сферы геометрия стремится к геометрии евклидовой плоскости.

Вычислим также площадь части сферы, учитывая, что для метрики сферы X.44 определитель матрицы первой квадратичной формы равен X.46:

$$\sqrt{g} = R^4 \cos^2 \theta.$$

Таким образом, площадь части сферы вычисляется по формуле:

$$S = R^2 \int_{\Omega} \int \cos \theta d\varphi d\theta. \quad (\text{X.52})$$

Вычислим площадь северной приполярной части сферы, отсекаемой параллелью  $\theta = \theta_0$ . Проводя интегрирование по  $\varphi$ , получим:

$$S = 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta.$$

Таким образом, найдем:

$$S = 2\pi R^2 (1 - \sin \theta_0). \quad (\text{X.53})$$

#### Х.4. Геометрия сферы

С точки зрения внутренней геометрии сферы эта площадь является площадью круга радиуса X.48:

$$\bar{R} = R \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right).$$

Выражая площадь круга через его радиус, получим из X.53:

$$S = 2\pi R^2 \left( 1 - \cos \frac{\bar{R}}{R} \right).$$

Переходя к половинному аргументу косинуса, получим окончательно:

$$S = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\bar{R}}{2R}. \quad (\text{X.54})$$

#### Х.4.2 Кривизна сферы

Согласно формуле X.13 на 164 найдем выражения для главных кривизн сферы:

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{R}. \quad (\text{X.55})$$

Таким образом, главные кривизны сферы постоянны и равны, что выражает свойства изотропии сферы (независимость ее геометрических свойств от направления на сфере). Гауссова кривизна также постоянна и положительна:

$$K = R^2 > 0. \quad (\text{X.56})$$

Таким образом, сфера является примером поверхности *постоянной положительной гауссовой кривизны*.

#### Х.4.3 Основные формулы для сферы

Из методических соображений, а также для закрепления материала вычисление всех геометрических величин для сферы проведем заново. геодезических для сферы проведем заново.

Дифференцируя X.37, получим:

$$\vec{r} = R(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta); \quad (\text{X.57})$$

$$\vec{r}_\varphi = -R \cos \theta (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0); \quad (\text{X.58})$$

$$\vec{r}_\theta = R(-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta); \quad (\text{X.59})$$

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = -R \cos \theta (\cos \varphi, \sin \varphi, 0); \quad (\text{X.60})$$

$$\vec{r}_{\varphi\theta} = R \sin \theta (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad (= -\text{tg } \theta \vec{r}_\varphi); \quad (\text{X.61})$$

$$\vec{r}_{\theta\theta} = -R(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \quad (-\vec{r}). \quad (\text{X.62})$$

Заметим, что среди этих векторов есть две пары коллинеарных между собой:  $\vec{r}, \vec{r}_{\theta, \theta}$  и  $\vec{r}_{\varphi}, \vec{r}_{\varphi \theta}$ . Далее найдем вектор нормали:

$$\vec{N} = \left[ \vec{r}_{\varphi} \cdot \vec{r}_{\theta} \right] = -R \cos \theta \vec{r}. \quad (\text{X.63})$$

Последний результат, свидетельствующий о том, что вектор нормали к сфере коллинеарен ее радиусу-вектору, геометрически вполне очевиден.

Единичный вектор внешней нормали к сфере есть:

$$\vec{n} = \frac{-\vec{N}}{|\vec{N}|} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta). \quad (\text{X.64})$$

Вычислим также необходимые в дальнейшем смешанные произведения.

$$\left( \vec{r}, \vec{r}_{\varphi}, \vec{r}_{\varphi \theta} \right) = \left( \vec{r}, \vec{r}_{\varphi}, \vec{r}_{\theta \theta} \right) = \left( \vec{r}, \vec{r}_{\theta}, \vec{r}_{\theta \theta} \right) = 0; \quad (\text{X.65})$$

$$\left( \vec{r}, \vec{r}_{\varphi}, \vec{r}_{\varphi \varphi} \right) = R^3 \cos^2 \theta \sin \theta; \quad (\text{X.66})$$

$$\left( \vec{r}, \vec{r}_{\theta}, \vec{r}_{\varphi \varphi} \right) = 0; \quad (\text{X.67})$$

$$\left( \vec{r}, \vec{r}_{\theta}, \vec{r}_{\varphi \theta} \right) = -R^3 \sin \theta; \quad (\text{X.68})$$

$$\left( \vec{r}, \vec{r}_{\theta}, \vec{r}_{\varphi} \right) = 0. \quad (\text{X.69})$$

Вычисляя коэффициенты второй квадратичной формы, найдем:

$$L = \left( \vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi \varphi} \right) = -R \cos^2 \theta; \quad M = \left( \vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi \theta} \right) = 0; \quad N = \left( \vec{n} \cdot \vec{r}_{\theta \theta} \right) = -R.$$

Вычисляя затем главные кривизны, получим известные уже нам формулы X.55 и X.56 на 173.

#### X.4.4 Геодезические сферы

Для нахождения геодезических сферы воспользуемся формулой X.30 на стр. 168, а также формулами X.40 на 170, связывающими цилиндрические и сферические координаты. Таким образом, получим для первого интеграла:

$$\cos^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} = \text{Const} \quad \left( = \frac{1}{R} \cos^2 \theta_0 \sin \alpha_0 \right). \quad (\text{X.70})$$

Полагая  $\varphi = x^1, \theta = x^2$ , получим символы Кристоффеля I-го рода и II-го рода для метрики сферы:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,1} &= \Gamma_{12,2} = \Gamma_{22,1} = \Gamma_{22,2} = 0; \\ \Gamma_{12,1} &= -\Gamma_{11,2} = -R^2 \cos \theta \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{X.71})$$

Х.4. Геометрия сферы

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0; \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\operatorname{tg} \theta; \\ \Gamma_{11}^2 &= \cos \theta \sin \theta.\end{aligned}\tag{X.72}$$

Выпишем первое уравнение геодезической линии  $i = 1(\varphi)$ :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} - 2 \operatorname{tg} \theta \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0,\tag{X.73}$$

а вместо второго уравнения используем соотношение нормировки, которое получается из X.44:

$$\frac{1}{R^2} = \cos^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2.\tag{X.74}$$

Полагая, как и ранее в X.73  $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$  и поделив обе части уравнения на эту величину, получим первый интеграл:

$$\cos^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} = \operatorname{Const}.\tag{X.75}$$

Проводя необходимые громоздкие вычисления, можно придти к окончательному результату. Однако, для нахождения геодезических линий сферы проще всего воспользоваться условием равенства нулю геодезической кривизны VIII.37:

$$\left[ \vec{r}'' \cdot \vec{N} \right] = \vec{0}\tag{X.76}$$

и полученными выше формулами X.57, X.63, из которых следует, что вектор нормали к сфере коллинеарен ее радиусу - вектору:

$$\vec{N} = \lambda \vec{r}.\tag{X.77}$$

Таким образом, для геодезических сферы выполняется условие:

$$\left[ \vec{r} \cdot \vec{r}'' \right] = \vec{0}.\tag{X.78}$$

Но тогда для для любых точек геодезических сферы равно нулю и смешанное произведение:

$$\left( \vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'' \right) = 0.\tag{X.79}$$

Запишем это уравнение в виде:

$$\left( \vec{r} \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}'' \right] \right) = 0.\tag{X.80}$$

Используя формулы Главы III, связывающие векторы сопровождающего трехгранника кривой, и формулы Френе - Серре:

$$\vec{r}' = \vec{\tau}; \quad \vec{r}'' = k\vec{\nu}; \quad \left[ \vec{\tau} \cdot \vec{\nu} \right] = \vec{\beta},$$

запишем уравнение X.80 в виде:

$$\left( \vec{r} \cdot \vec{\beta} \right) = 0, \quad (\text{X.81})$$

где  $\vec{\beta}$  — вектор бинормали геодезической.

Продифференцируем соотношение X.81 по натуральному параметру:

$$\left( \vec{r}' \cdot \vec{\beta} \right) + \left( \vec{r} \cdot \vec{\beta}' \right) = 0.$$

Используя определение единичного вектора касательной  $\vec{\tau} = \vec{r}'$ , условие ортогональности векторов основного трехгранника

$$\left( \vec{\tau} \cdot \vec{\beta} \right) = 0$$

а также формулу Френе - Серре III.14, получим:

$$\kappa \left( \vec{r} \cdot \vec{\nu} \right) = 0.$$

Таким образом, все геодезические сферы удовлетворяют условию:

$$\kappa = 0, \quad (\text{X.82})$$

т.е.:

Все геодезические сферы являются плоскими кривыми.

Но для плоских кривых вектор (см. раздел III.6):

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 = \text{Const}$$

— вектор бинормали является вектором нормали плоскости, в которой лежит кривая. Таким образом, уравнение геодезической сферы X.80 приводится к виду:

$$\left( \vec{r} \cdot \vec{\beta}_0 \right) = 0. \quad (\text{X.83})$$

Но это есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Сечение этой плоскости сферы и будет давать искомые геодезические линии.



#### Х.4. Геометрия сферы

Таковыми линиями будут являться *большие окружности сферы*, т.е., окружности, центр которых совпадает с центром сферы. Таким образом, мы доказали теорему.

**Теорема ТХ.2.** *Геодезическими сферы являются ее большие окружности и только они.*

#### Х.4.5 Стереографическая проекция сферы на плоскость

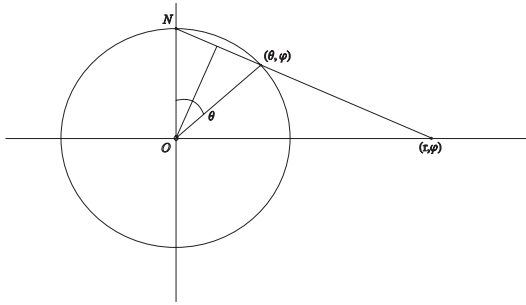
Рассмотрим отображение  $\Phi$  сферы  $\mathcal{S}$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

на плоскость  $\Pi : z = 0$  по следующему закону. Пусть точка сферы  $M \in \mathcal{S}$  — произвольная точка сферы, а  $N(0, 0, R)$  — северный полюс сферы. Проведем прямую  $(NM)$ , через северный полюс сферы и данную точку  $M$  до ее пересечения с плоскостью  $\Pi$ . Пусть  $M' = (NM) \cap \Pi$  — точка пересечения прямой  $(MN)$  с плоскостью  $\Pi$ . Точку  $M' \in \Pi$  будем называть образом точки  $M$  в *стереографической проекции сферы на плоскость*:

$$\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \Pi. \tag{X.84}$$

Введем на плоскости полярную систему координат  $\{\varphi, \rho\}$  с центром в точке  $O$  — центре сферы так, чтобы полярный угол  $\varphi$  совпал с полярным углом  $\varphi$  сферической системы координат.



**Рис.Х.44.** Стереографическая проекция сферы на плоскость

Тогда, если точка  $M \in \mathcal{S}$  имеет географические координаты  $(\varphi, \theta)$ , то ее стереографическая проекция,  $M' \in \Pi$ , имеет координаты

$$\left( \varphi, R \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right),$$

где  $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$  (см. Рис.Х.44). Введем также декартовы координаты на плоскости  $\Pi$  :

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

В стереографической проекции  $\Phi$  меридианы сферы отображаются в прямые плоскости  $\Pi$ , принадлежащие пучку  $\mathcal{P}(O)$ , а параллели сферы — в окружности плоскости:  $\rho = \operatorname{Const}$ . Северный полюс сферы является особой точкой в отображении  $\Phi$  — он отображается в окружность бесконечно большого радиуса.

Преобразуем метрику сферы X.44 к координатам плоскости. При этом  $d\varphi = d\varphi$ :

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{R^2}{R^2 + \rho^2}, \quad (\text{X.85})$$

$$d\theta = \frac{2Rd\rho}{R^2 + \rho^2}. \quad (\text{X.86})$$

Таким образом, получим для первой квадратичной формы сферы:

$$ds_{\mathcal{S}}^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + \rho^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2). \quad (\text{X.87})$$

Переходя к декартовым координатам  $x, y$ , найдем отсюда:

$$ds_{\mathcal{S}}^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2} ds_0^2, \quad (\text{X.88})$$

## Х.5. Геометрия псевдосферы

где

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 \quad (\text{X.89})$$

- первая квадратичная форма евклидовой плоскости.

Таким образом, в стереографической проекции мы получаем *конформно-плоский* вид метрики сферы, в котором удобнее проводить многие вычисления.

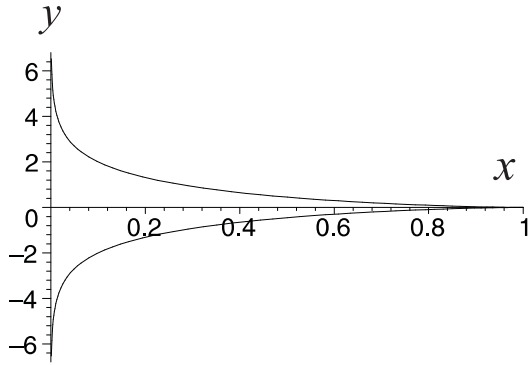
## Х.5 Геометрия псевдосферы

### Х.5.1 Трактриса и псевдосфера

Рассмотрим теперь пример поверхности вращения отрицательной кривизны. Для этого выберем в качестве образующей поверхности вращения линию, называемую *трактрисой*.

**Определение ОХ.1.** *Трактриса  $\mathcal{T}$  есть такая плоская кривая, что отрезок ее касательной между точкой касания и некоторой прямой  $d$  постоянен.*

*Прямая  $d$  называется базой трактрисы.*



**Рис.Х.45.** Трактриса с базой  $Ox$

Выведем параметрические уравнения, принимая в качестве базы ось  $Ox$  и вводя угол  $t$  между касательной к кривой и осью  $Ox$  а также постоянную длину отрезка касательной  $R$ . Таким образом (см. [Рис.Х.45](#)):

$$y = R \sin t, \quad \implies dy = R \cos t dt.$$

Но тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t \implies dx = \operatorname{ctg} t dy$$

Подставляя сюда  $dy$ , получим связь между дифференциалами  $x$  и  $t$ :

$$dx = R \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt. \quad (\text{X.90})$$

Интегрируя дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными [X.90](#), получим:

$$\begin{aligned} x &= R \int \frac{\cos^2 t dt}{\sin t} = R \int \left( \frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt = \\ &R \cos t + R \int \frac{dt}{\sin t}. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла перейдем к половинному аргументу в  $\sin t$ :

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{d\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|.$$

Таким образом, запишем решение дифференциального уравнения [X.90](#):

$$x = R \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + \operatorname{Const}.$$

Как видно из [Рис.Х.45](#), при  $x = 0$  угол наклона касательной равен нулю, поэтому и значение постоянной в последнем выражении также равно нулю.

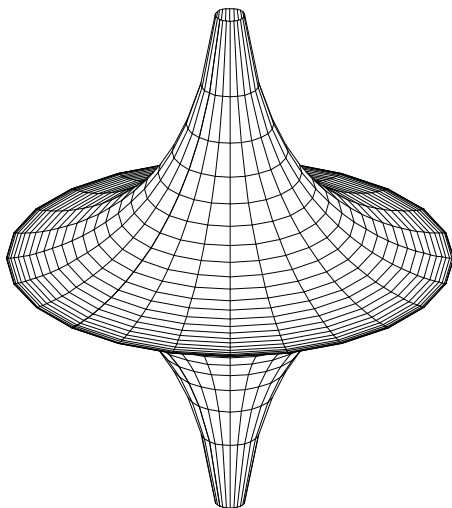
Х.5. Геометрия псевдосферы

Таким образом, получим параметрические уравнения трактрисы:

$$\begin{aligned} x &= R(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}); \\ y &= R \sin t, \end{aligned} \quad (t \in [-\pi/2, \pi/2]). \quad (\text{X.91})$$

Запишем полезное для дальнейшего соотношение, которое мы получили при вычислении этого интеграла:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \cos \theta + \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}. \quad (\text{X.92})$$



**Рис.Х.46.** Псевдосфера в евклидовом пространстве, полученная вращением трактрисы

**Определение ОХ.2.** Псевдосферой называется поверхность вращения трактрисы вокруг ее базы.

Получим теперь параметрические уравнения псевдосферы. Сделаем теперь замену:  $x \rightarrow z$ ;  $y \rightarrow \rho$ , где  $\rho$  — полярный радиус цилиндрической системы координат. Таким образом, параметрические уравнения псевдосферы в евклидовом пространстве принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= R \sin t \cos \varphi; \\ y &= R \sin t \sin \varphi; \\ z &= R \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{X.93})$$

### Х.5.2 Первая квадратичная форма псевдосферы

Вычисляя производные от радиуса-вектора X.93 с учетом формулы X.92, найдем:

$$\vec{r}_\varphi = R \sin t (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \quad (X.94)$$

$$\vec{r}_t = R \cos t (\cos \varphi, \sin \varphi, \operatorname{ctg} t).$$

Таким образом, найдем первую квадратичную форму псевдосферы:

$$ds^2 = R^2 (\operatorname{ctg}^2 t dt^2 + \sin^2 t d\varphi^2). \quad (X.95)$$

Перейдем от переменной  $t$  к более удобной переменной  $\rho$  — полярному радиусу:

$$\rho = R \sin t, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{ctg} t. \quad (X.96)$$

Тогда метрика X.95 преобразуется к более удобному виду:

$$ds^2 = R^2 \frac{d\rho^2}{\rho^2} + \rho^2 d\varphi^2 = R^2 \rho^2 \left[ \left( \frac{d\rho}{\rho^2} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{R} \right)^2 \right]. \quad (X.97)$$

Вводя, наконец, переменные:

$$x = \frac{\varphi}{R}; \quad y = \frac{1}{\rho}, \quad (X.98)$$

получим окончательно метрику псевдосферы в изотермическом виде, т.е., так называемую *метрику Клейна геометрии Лобачевского*:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (X.99)$$

Заметим, что метрику X.99 можно получить и как метрику именно псевдосферы:

$$z^2 - x^2 - y^2 = R^2 \quad (X.100)$$

в псевдоевклидовом пространстве:

$$ds^2 = dz^2 - dx^2 - dy^2 \quad (X.101)$$

(см., например, [8].)

Заметим, что первую квадратичную форму псевдосферы можно записать еще в двух эквивалентных видах — в виде *метрики Пуанкаре*:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} (dx^2 + dy^2) \quad (X.102)$$

### Х.5. Геометрия псевдосферы

и в виде метрики Лобачевского, в котором она и была первоначально получена Николаем Ивановичем Лобачевским в 1826 году:

$$ds^2 = R^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2). \quad (\text{X.103})$$

#### Х.5.3 Вторая квадратичная форма псевдосферы

Перемножая векторы X.94, найдем единичный вектор нормали к псевдосфере:

$$\vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_t \\ \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_t \end{bmatrix}}{\left| \begin{bmatrix} \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_t \\ \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_t \end{bmatrix} \right|} = (\cos \varphi \cos t, \sin \varphi \cos t, -\sin t).$$

Вторые частные производные радиуса-вектора равны:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\varphi\varphi} &= -R \sin t (\cos \varphi, \sin \varphi, 0); \\ \vec{r}_{\varphi t} &= R \cos t (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \\ \vec{r}_{tt} &= R \left( -\sin t \cos \varphi, -\sin t \sin \varphi, -2 \cos t - \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} \right) \end{aligned} \quad (\text{X.104})$$

Таким образом, вычисляя, найдем:

$$\begin{aligned} L &= (\vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi\varphi}) = -R \cos t \sin t; \\ M &= (\vec{n} \cdot \vec{r}_{t\varphi}) = 0; \\ N &= (\vec{n} \cdot \vec{r}_{tt}) = R \operatorname{ctg} t. \end{aligned} \quad (\text{X.105})$$

Учитывая выражение X.95 для первой квадратичной формы псевдосферы, найдем главные кривизны этой поверхности:

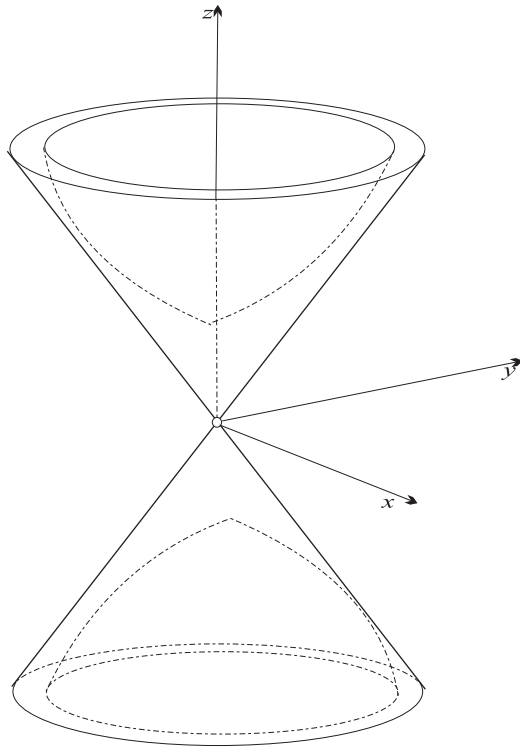
$$k_1 = -\frac{1}{R} \operatorname{ctg} t; \quad k_2 = \frac{1}{R} \operatorname{tg} t. \quad (\text{X.106})$$

Таким образом, гауссова кривизна псевдосферы равна:

$$K = -\frac{1}{R^2}, \quad (\text{X.107})$$

т.е.:

Гауссова кривизна псевдосферы отрицательна и постоянна.



**Рис. X.47.** Псевдосфера в псевдоевклидовом пространстве

#### X.5.4 Геодезические псевдосферы

Исследуем геодезические псевдосферы, используя для этой цели метрику Клейна X.99 как наиболее удобную. Матрица первой квадратичной формы равна:

$$G = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{X.108})$$

где мы положили:  $x = x^1, y = x^2$ . Вычисляя символы Кристоффеля I-го и II-го рода относительно метрики X.108, получим:

$$\Gamma_{11,1} = \Gamma_{21,2} = \Gamma_{22,1} = 0;$$

$$\Gamma_{11,2} = -\Gamma_{21,1} = -\Gamma_{22,2} = \frac{1}{y^3};$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0;$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$



X.5. Геометрия псевдосферы

Уравнения геодезических принимают вид:

$$(i = 1) : \quad \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0; \quad (\text{X.109})$$

$$(i = 2) : \quad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y} \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]. \quad (\text{X.110})$$

Полагая:

$$\frac{dx}{ds} = p; \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dp}{ds}, \quad (\text{X.111})$$

понизим порядок уравнений геодезических. Уравнение X.109 принимает вид:

$$\frac{dp}{ds} - \frac{2p}{y} \frac{dy}{ds} = 0 \implies$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y} \implies$$

$$\ln |p| = \ln p^2 + \ln |C|,$$

где  $C = \text{Const}$ .

Таким образом, получаем:

$$p = Cy^2 \implies$$

$$\frac{dx}{ds} = Cy^2. \quad (\text{X.112})$$

Используем теперь соотношение нормировки для метрики X.99, куда подставим найденный интеграл X.112:

$$1 = \frac{1}{y^2} \left[ C^2 y^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]. \quad (\text{X.113})$$

Разрешая X.113 относительно производной, получим:

$$\frac{dy}{ds} = \pm y \sqrt{1 - C^2 y^2} \quad (\text{X.114})$$

с условием:

$$|C|y \leq 1. \quad (\text{X.115})$$

Из X.114 найдем решение в квадратурах:

$$\int \frac{dy}{y \sqrt{1 - c^2 y^2}} = \pm s + C_1, \quad (\text{X.116})$$

где  $C_1 = \text{Const}$ . Удобнее, однако, исключить натуральный параметр и перейти к переменным  $x, y$  по формуле:

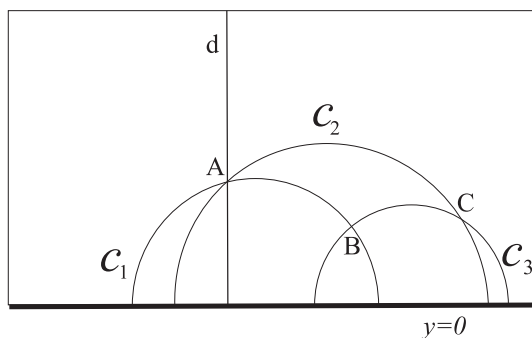
$$p = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{ds}.$$

Учитывая X.112, найдем решение:

$$(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2. \quad (\text{X.117})$$

При  $C_2 \neq 0$  получаем систему полуокружностей (так как  $y \geq 0$ ), при  $C_2 = 0$  получаем решение  $x = -C_2$ , т.е., “полупрямые”. Итак, справедлива следующая теорема:

**Теорема ТХ.3.** *Геодезическими псевдосферы на полуплоскости  $x, y | y \geq 0$  являются полупрямые  $x = \text{Const}$  и полуокружности с центром на прямой  $y = 0$ .*



**Рис.Х.48.** Модель Клейна плоскости Лобачевского

Полуокружности  $C_1, C_2, C_3$  и полупрямая  $d$  являются геодезическими полуплоскости  $y > 0$ , следовательно их можно интерпретировать, как прямые плоскости Лобачевского. Через любые две точки этой полуплоскости проходит лишь одна такая прямая: при вертикальном расположении точек - это будет полупрямая, при любом другом - полуокружность с центром на оси  $y = 0$  (такая полуокружность единственна). В точке  $A$  пересекаются три таких прямых, фигура  $ABC$ , образованная дугами трех полуокружностей, является треугольником плоскости Лобачевского.

# Глава XI

## Построение геодезической сети на псевдосфере средствами Maple

### XI.1 Задание псевдосферы и вычисление производных радиуса-вектора

Зададим параметрические уравнения верхней части псевдосферы, для чего введем **функции**  $x(t, \phi)$ ,  $y(t, \phi)$ ,  $z(t, \phi)$  двух параметров  $(t, \phi)$ , которые принимают следующие значения на верхней половине псевдосферы:  $t = 0.. \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = 0.. 2\pi$ :

```
> restart:with(linalg):with(tensor):
> x:=(t,phi)->sin(t)*cos(phi);
> y:=(t,phi)->sin(t)*sin(phi);
> z:=(t,phi)->-(cos(t)+ln(tan(t/2)));
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

$$\begin{aligned}x &:= (t, \phi) \rightarrow \sin(t) \cos(\phi) \\y &:= (t, \phi) \rightarrow \sin(t) \sin(\phi) \\z &:= (t, \phi) \rightarrow -\cos(t) - \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\end{aligned}$$

Зададим теперь радиус-вектор  $r$  произвольной точки псевдосферы в виде упорядоченного множества функций и вычислим от него частные производные с помощью команд **diff(r(t, phi), t)** и **diff(r(t, phi), phi)**:

```
> r:=(t,phi)->[x(t,phi),y(t,phi),z(t,phi)];
> r_t:=diff(r(t,phi),t);
> r_phi:=diff(r(t,phi),phi);
r := (t, phi) -> [x(t, phi), y(t, phi), z(t, phi)]
```

$$\begin{aligned}
r\_t &:= \left[ \cos(t) \cos(\phi), \cos(t) \sin(\phi), \sin(t) - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \right] \\
r\_phi &:= [-\sin(t) \sin(\phi), \sin(t) \cos(\phi), 0] \\
r &:= (t, \phi) \rightarrow [x(t, \phi), y(t, \phi), z(t, \phi)] \\
r\_t &:= \left[ \cos(t) \cos(\phi), \cos(t) \sin(\phi), \sin(t) - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{1}{2} t\right)^2}{\tan\left(\frac{1}{2} t\right)} \right] \\
r\_phi &:= [-\sin(t) \sin(\phi), \sin(t) \cos(\phi), 0]
\end{aligned}$$

## XI.2 Нахождение матрицы первой квадратичной формы псевдосферы

Сформируем теперь симметричную матрицу первой квадратичной формы и вычислим ее определитель.

```

> G:=array(1..2,1..2,symmetric,sparse);
      G := array(symmetric, sparse, 1..2, 1..2, [])

```

Зададим коэффициенты матрицы первой квадратичной формы псевдосферы  $G_{i,k}$  с помощью скалярных произведений производных радиуса-вектора  $(r_i r_k)$ , вычисляемых с помощью команды **innerprod(a,b)** библиотеки **linalg**, где a и b - векторы.

```

> G[1,1]:=simplify(innerprod(r_t,r_t));
> G[1,2]:=innerprod(r_t,r_phi);
> G[2,2]:=simplify(innerprod(r_phi,r_phi));

```

$$G_{1,1} := \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)^2}$$

$$G_{1,2} := 0$$

$$G_{2,2} := 1 - \cos(t)^2$$

Вычислим определитель матрицы G:

```

> DetG:=simplify(det(G));
      DetG := cos(t)^2

```

### XI.3. Вычисление символов Кристоффеля псевдосферы

и определим метрический тензор  $g_{ik}$  псевдосферы:

```
> g:=create([-1,-1],eval(G));
```

$$g := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)^2} & 0 \\ 0 & 1 - \cos(t)^2 \end{bmatrix}, \text{index\_char} = [-1, -1]])$$

## XI.3 Вычисление символов Кристоффеля псевдосферы

Определим внутренние координаты псевдосферы как упорядоченную последовательность

```
> coord:=[t,phi]:
```

Теперь с помощью команды **d1metric{G,coord}** библиотеки **tensor** вычислим первые частные производные,  $dG$ , метрического тензора, а также вычислим координаты контрвариантного метрического тензора  $g_{-1}$  (валентности  $[+1,+1]$ ), обратного к метрическому тензору  $g$  с помощью команды **invert(G,'detG')** библиотеки **tensor**:

```
> dg:=d1metric(g,coord);
```

```
> g_1:=invert(g,'detG');
```

```
dg := table([compts = array(cf1, 1..2, 1..2, 1..2, [
(1, 1, 1) = -\frac{2 \cos(t)}{\sin(t)^3}
(1, 1, 2) = 0
(1, 2, 1) = 0
(1, 2, 2) = 0
(2, 1, 1) = 0
(2, 1, 2) = 0
(2, 2, 1) = 2 \cos(t) \sin(t)
(2, 2, 2) = 0
]),
index\_char = [-1, -1, -1]
])
```

$$g\_1 := \text{table}([\text{compts} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin(t)^2} \end{bmatrix}, \text{index\_char} = [1, 1]])$$

С помощью найденных значений первых частных производных вычислим теперь символы Кристоффеля I-го рода, Cf1, применяя команду **Christoffel1(dG)** библиотеки **tensor**:

```
> CR1:=tensor[Christoffel1](dg):
```

На основе полученных значений для символов Кристоффеля I-го рода найдем символы Кристоффеля II-го рода, Cf2, с помощью команды **Christoffel2(g\_1,Cf1)** библиотеки **tensor**:

```
> CR2:=tensor[Christoffel2](g_1,CR1);
```

$$\begin{aligned} CR2 := & \text{table}([\text{compts} = \text{array}(cf2, 1..2, 1..2, 1..2, [ \\ & (1, 1, 1) = -\frac{1}{\sin(t) \cos(t)} \\ & (1, 1, 2) = 0 \\ & (1, 2, 1) = 0 \\ & (1, 2, 2) = -\frac{\sin(t)^3}{\cos(t)} \\ & (2, 1, 1) = 0 \\ & (2, 1, 2) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \\ & (2, 2, 1) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \\ & (2, 2, 2) = 0 \\ & ]), \\ & \text{index\_char} = [1, -1, -1] \\ & ]) \end{aligned}$$

Наконец, с помощью команды **geodesic\_eqn(coord,c,Cf2)** библиотеки получим уравнения геодезических:

```
> Geo:= tensor[geodesic_eqns](coord, s, CR2 );
```

$$Geo := \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{ds^2} t(s) \right) - \frac{\left( \frac{d}{ds} t(s) \right)^2}{\sin(t) \cos(t)} - \frac{\sin(t)^3 \left( \frac{d}{ds} \phi(s) \right)^2}{\cos(t)} = 0, \\ & \left( \frac{d^2}{ds^2} \phi(s) \right) + \frac{2 \cos(t) \left( \frac{d}{ds} t(s) \right) \left( \frac{d}{ds} \phi(s) \right)}{\sin(t)} = 0 \end{aligned} \right\}$$

## XI.4 Приведение уравнений геодезических к нормальной системе ОД У

Обозначим первые производные по натуральному параметру от внутренних координат псевдосферы за новые переменные,  $T(s)$  и  $\Phi(s)$ :

- >  $EQT := \text{diff}(t(s), s) = T(s)$ ;
- >  $EQP := \text{diff}(\phi(s), s) = \Phi(s)$ ;

$$EQT := \frac{d}{ds} t(s) = T(s)$$

$$EQP := \frac{d}{ds} \phi(s) = \Phi(s)$$

Подставим эти величины в уравнения геодезических:

- >  $GEOT := \text{subs}(\{EQT, EQP, t=t(s)\}, Geo[1])$ ;
- >  $GEOP := \text{subs}(\{EQT, EQP, t=t(s)\}, Geo[2])$ ;

$$GEOT := \left( \frac{d}{ds} T(s) \right) - \frac{T(s)^2}{\sin(t(s)) \cos(t(s))} - \frac{\sin(t(s))^3 \Phi(s)^2}{\cos(t(s))} = 0$$

$$GEOP := \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) + \frac{2 \cos(t(s)) T(s) \Phi(s)}{\sin(t(s))} = 0$$

При этом мы получили нормальную систему дифференциальных уравнений, т.е., систему дифференциальных уравнений I-го порядка  $(EQT, EQP, GEOT, GEOP)$ , разрешенных относительно производных:

$$\frac{d}{ds} t(s), \frac{d}{ds} \phi(s), \frac{d}{ds} T(s), \frac{d}{ds} \Phi(s).$$

Запишем теперь эти уравнения в виде системы уравнений:

- >  $GEO := \{EQT, EQP, GEOT, GEOP\}$ ;

$$GEO := \left\{ \frac{d}{ds} \phi(s) = \Phi(s), \left( \frac{d}{ds} T(s) \right) - \frac{T(s)^2}{\sin(t(s)) \cos(t(s))} - \frac{\sin(t(s))^3 \Phi(s)^2}{\cos(t(s))} = 0, \right.$$

$$\left. \left( \frac{d}{ds} \Phi(s) \right) + \frac{2 \cos(t(s)) T(s) \Phi(s)}{\sin(t(s))} = 0, \frac{d}{ds} t(s) = T(s) \right\}$$

## XI.5 Ввод группы начальных условий

### а). Линии "Ф"

- здесь изменяются только значения  $t(0)$ , при этом вектор касательной направлен вдоль параллелей:

- > In[P0] := {t(0)=0.1, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=1};
  - > In[P1] := {t(0)=0.2, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=1};
  - > In[P2] := {t(0)=0.3, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=1};
  - > In[P3] := {t(0)=0.4, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=1};
- $$In_{P_0} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = 1, t(0) = 0.1\}$$
- $$In_{P_1} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = 1, t(0) = 0.2\}$$
- $$In_{P_2} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = 1, t(0) = 0.3\}$$
- $$In_{P_3} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = 1, t(0) = 0.4\}$$

б). Линии "Ф<sub>-1</sub>" здесь также изменяются только значения  $t(0)$ , но при этом вектор касательной направлен в противоположную сторону вдоль параллелей:

- > In[P\_0] := {t(0)=0.1, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=-1};
  - > In[P\_1] := {t(0)=0.2, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=-1};
  - > In[P\_2] := {t(0)=0.3, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=-1};
  - > In[P\_3] := {t(0)=0.4, T(0)=0, phi(0)=0, Phi(0)=-1};
- $$In_{P_{-0}} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, t(0) = 0.1, \Phi(0) = -1\}$$
- $$In_{P_{-1}} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = -1, t(0) = 0.2\}$$
- $$In_{P_{-2}} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = -1, t(0) = 0.3\}$$
- $$In_{P_{-3}} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 0, \Phi(0) = -1, t(0) = 0.4\}$$

### в). Линии "Т"

- здесь изменяются лишь значения  $\phi(0)$ , при этом вектор касательной направлен вдоль меридианов:

- > In[T0] := {t(0)=Pi/12, T(0)=1, phi(0)=0, Phi(0)=0};
- > In[T1] := {t(0)=Pi/12, T(0)=1, phi(0)=Pi/3, Phi(0)=0};
- > In[T2] := {t(0)=Pi/12, T(0)=1, phi(0)=2\*Pi/3, Phi(0)=0};
- > In[T3] := {t(0)=Pi/12, T(0)=1, phi(0)=Pi, Phi(0)=0};
- > In[T4] := {t(0)=Pi/12, T(0)=1, phi(0)=4\*Pi/3, Phi(0)=0};
- > In[T5] := {t(0)=Pi/12, T(0)=1, phi(0)=5\*Pi/3, Phi(0)=0};

$$In_{T_0} := \{\phi(0) = 0, T(0) = 1, \Phi(0) = 0, t(0) = \frac{\pi}{12}\}$$

$$In_{T_1} := \{T(0) = 1, \Phi(0) = 0, t(0) = \frac{\pi}{12}, \phi(0) = \frac{\pi}{3}\}$$

$$In_{T_2} := \{T(0) = 1, \Phi(0) = 0, t(0) = \frac{\pi}{12}, \phi(0) = \frac{2\pi}{3}\}$$



$$In_{T_3} := \{T(0) = 1, \Phi(0) = 0, t(0) = \frac{\pi}{12}, \phi(0) = \pi\}$$

$$In_{T_4} := \{T(0) = 1, \Phi(0) = 0, t(0) = \frac{\pi}{12}, \phi(0) = \frac{4\pi}{3}\}$$

$$In_{T_5} := \{T(0) = 1, \Phi(0) = 0, t(0) = \frac{\pi}{12}, \phi(0) = \frac{5\pi}{3}\}$$

## XI.6 Изображение верхней половины псевдосферы и линий начальных условий

Изобразим параллели и меридианы, соответствующие заданию начальных условий, с помощью команды **spacecurve** библиотеки **plots**. Параллели, соответствующие большим значениям параметра  $t$  находятся ниже, а параллели с меньшим значением параметра  $t$  - выше:

```
> Ps[u]:=plot3d(r(t,phi),t=0..Pi/2,phi=0..2*Pi,style=PATCH,color=white,
> thickness=0): cir_1:=plots[spacecurve](r(Pi/12,phi),phi=0..2*Pi,
> color=black,thickness=2):
> cir_2:=plots[spacecurve](r(Pi/8,phi),phi=0..2*Pi,
> color=black,thickness=2):
> cir_3:=plots[spacecurve](r(Pi/4,phi),phi=0..2*Pi,
> color=black,thickness=2):
> cir_4:=plots[spacecurve](r(Pi/3,phi),phi=0..2*Pi,
> color=black,thickness=2):
> mer_1:=plots[spacecurve](r(t,0),t=0..Pi/2,color=black,thickness=2):
> mer_2:=plots[spacecurve](r(t,Pi/3),t=0..Pi/2,color=black,thickness=2):
> mer_3:=plots[spacecurve](r(t,2*Pi/3),t=0..Pi/2,color=black,thickness=2
> ):
> mer_4:=plots[spacecurve](r(t,Pi),t=0..Pi/2,color=black,thickness=2):
> mer_5:=plots[spacecurve](r(t,4*Pi/3),t=0..Pi/2,color=black,thickness=2
> ):
> mer_6:=plots[spacecurve](r(t,5*Pi/3),t=0..Pi/2,color=black,thickness=2
> ):

> plots[display](cir_1,cir_2,cir_3,cir_4,mer_1,mer_2,mer_3,mer_4,mer_5,
> mer_6,axes=FRAME, labels=[x,y,z],labelfont=
> [TIMES,BOLD,14],thickness=0,color=white,titlefont=
> [TIMES,BOLD,12])
```

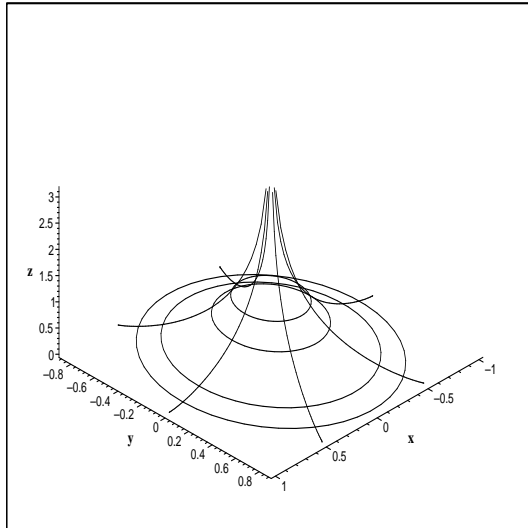


Рис. XI.49. Параллели и меридианы на псевдосфере

## XI.7 Процедуры численного интегрирования нормальной системы ОДУ

Здесь изложение идет по специальной методике профессора Игнатьева решения системы ОДУ численными методами в Maple! Численные решения нормальной системы дифференциальных уравнений получаются с помощью команды **dsolve(Система union Начальные Условия, {Переменные}, type=numeric, method=classical,output=listprocedure)**. При этом создается процедура численного решения нормальной системы дифференциальных уравнений классическим методом, комбинирующим известные основные методы численного решения нормальных систем дифференциальных уравнений с последующим выводом результатов интегрирования в виде списков:

**а. Решения для линий "Φ"**

```
> Sol0[Phi]:= dsolve(GEO union In[P0],{t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
> Sol1[Phi]:= dsolve(GEO union
> In[P1], {t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
> Sol2[Phi]:= dsolve(GEO union
> In[P2], {t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
> Sol3[Phi]:= dsolve(GEO union
> In[P3], {t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
```

$Sol0_{\Phi} := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

$Sol1_{\Phi} := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

$Sol2_{\Phi} := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

$Sol3_{\Phi} := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

**б). Решения для линий "Φ\_1"**

```
> Sol_0[Phi]:= dsolve(GEO union In[P_0],{t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
> Sol_1[Phi]:= dsolve(GEO
> union In[P_1], {t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
> Sol_2[Phi]:= dsolve(GEO union
> In[P_2], {t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
> Sol_3[Phi]:= dsolve(GEO union
> In[P_3], {t(s),phi(s),T(s),Phi(s)},
> type=numeric,method=classical,output=listprocedure);
```

$Sol_{\_0}_{\Phi} := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

```
Sol_1_Φ := [s = (proc(s) ... endproc), Φ(s) = (proc(s) ... endproc),
T(s) = (proc(s) ... endproc), φ(s) = (proc(s) ... endproc),
t(s) = (proc(s) ... endproc)]
```

```
Sol_2_Φ := [s = (proc(s) ... endproc), Φ(s) = (proc(s) ... endproc),
T(s) = (proc(s) ... endproc), φ(s) = (proc(s) ... endproc),
t(s) = (proc(s) ... endproc)]
```

```
Sol_3_Φ := [s = (proc(s) ... endproc), Φ(s) = (proc(s) ... endproc),
T(s) = (proc(s) ... endproc), φ(s) = (proc(s) ... endproc),
t(s) = (proc(s) ... endproc)]
```

**в). Решения для линий “Т”**

```
> Sol0[T] := dsolve(GEO union In[T0], {t(s), phi(s), T(s), Phi(s)},
> type=numeric, method=classical, output=listprocedure);
> Sol1[T] := dsolve(GEO union
> In[T1], {t(s), phi(s), T(s), Phi(s)},
> type=numeric, method=classical, output=listprocedure);
> Sol2[T] := dsolve(GEO union In[T2],
> {t(s), phi(s), T(s), Phi(s)},
> type=numeric, method=classical, output=listprocedure);
> Sol3[T] := dsolve(GEO union
> In[T3], {t(s), phi(s), T(s), Phi(s)},
> type=numeric, method=classical, output=listprocedure);
> Sol4[T] := dsolve(GEO union In[T4],
> {t(s), phi(s), T(s), Phi(s)},
> type=numeric, method=classical, output=listprocedure);
> Sol5[T] := dsolve(GEO union
> In[T5], {t(s), phi(s), T(s), Phi(s)},
> type=numeric, method=classical, output=listprocedure);
```

```
Sol0_T := [s = (proc(s) ... endproc), Φ(s) = (proc(s) ... endproc),
T(s) = (proc(s) ... endproc), φ(s) = (proc(s) ... endproc),
t(s) = (proc(s) ... endproc)]
```

```
Sol1_T := [s = (proc(s) ... endproc), Φ(s) = (proc(s) ... endproc),
T(s) = (proc(s) ... endproc), φ(s) = (proc(s) ... endproc),
t(s) = (proc(s) ... endproc)]
```

```
Sol2_T := [s = (proc(s) ... endproc), Φ(s) = (proc(s) ... endproc),
T(s) = (proc(s) ... endproc), φ(s) = (proc(s) ... endproc),
t(s) = (proc(s) ... endproc)]
```

$Sol3_T := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

$Sol4_T := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

$Sol5_T := [s = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \Phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $T(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}), \phi(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc}),$   
 $t(s) = (\text{proc}(s) \dots \text{endproc})]$

### Запись решений и проверка решений

Запись решений осуществляется с помощью подстановки решения в соответствующую величину:

```
> t_P0:=subs(Sol0[Phi],t(s)): phi_P0:=subs(Sol0[Phi],phi(s)):
> t_P1:=subs(Sol1[Phi],t(s)): phi_P1:=subs(Sol1[Phi],phi(s)):
> t_P2:=subs(Sol2[Phi],t(s)): phi_P2:=subs(Sol2[Phi],phi(s)):
> t_P3:=subs(Sol3[Phi],t(s)): phi_P3:=subs(Sol3[Phi],phi(s)):
> t_P3(0.5);t_P2(1);phi_P2(1);phi_P2(2);
0.407972228887300558
0.313565954681080339
0.972274405931570329
1.79692851570137124
> t_P_0:=subs(Sol_0[Phi],t(s)): phi_P_0:=subs(Sol_0[Phi],phi(s)):
> t_P_1:=subs(Sol_1[Phi],t(s)):
> phi_P_1:=subs(Sol_1[Phi],phi(s)):
> t_P_2:=subs(Sol_2[Phi],t(s)): phi_P_2:=subs(Sol_2[Phi],phi(s)):
> t_P_3:=subs(Sol_3[Phi],t(s)): phi_P_3:=subs(Sol_3[Phi],phi(s)):
> t_P_3(0.5);t_P_2(1);phi_P_2(1);phi_P_2(2);
0.407972228887300558
0.313565954681080339
-0.972274405931570329
-1.79692851570137124
> t_T0:=subs(Sol0[T],t(s)):phi_T0:=subs(Sol0[T],phi(s)):
> t_T1:=subs(Sol1[T],t(s)):phi_T1:=subs(Sol1[T],phi(s)):
> t_T2:=subs(Sol2[T],t(s)):phi_T2:=subs(Sol2[T],phi(s)):
> t_T3:=subs(Sol3[T],t(s)):phi_T3:=subs(Sol3[T],phi(s)):
> t_T4:=subs(Sol4[T],t(s)):phi_T4:=subs(Sol4[T],phi(s)):
> t_T5:=subs(Sol5[T],t(s)):phi_T5:=subs(Sol5[T],phi(s)):
> t_T0(0.1);t_T0(0.2);t_T0(0.3);t_T0(0.35);phi_T0(0.1);
> t_T3(0.1);t_T3(0.2);t_T3(0.3);t_T5(0.35);phi_T3(0.1);
0.383780149720260311
0.571777403808498619
0.893618550265845024
1.19269837961553014
0.
```

0.383780149720260311  
0.571777403808498619  
0.893618550265845024  
1.19269837961553014  
3.14159265358980022

## Создание последовательностей полученных решений

Последовательности решений создаем с помощью команды `seq(⟨⟩,⟨⟩)`:

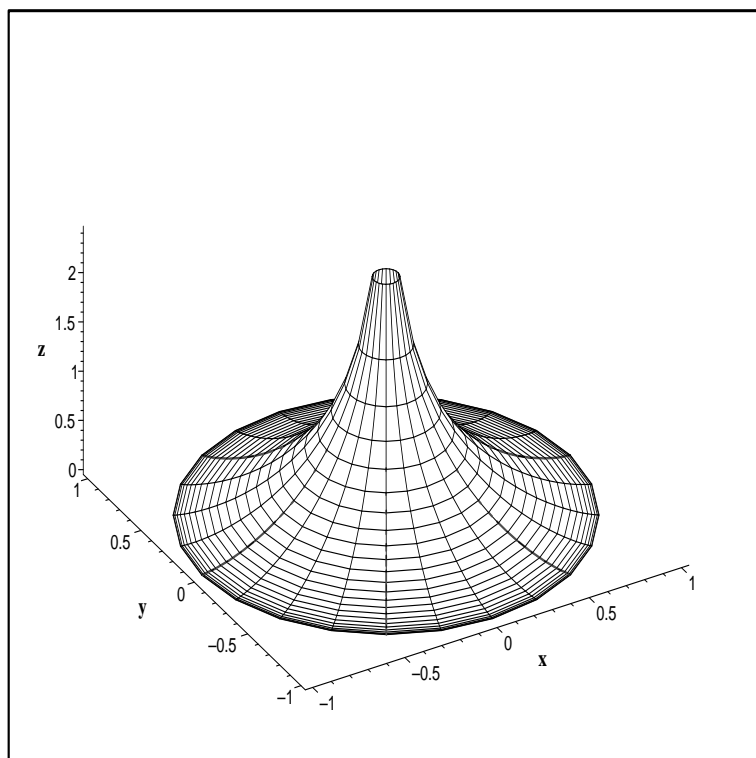
```
> r_T0:= [seq([x(t_T0(i/40),phi_T0(i/40)),y(t_T0(i/40),phi_T0(i/40)),z(t_
> _T0(i/40),phi_T0(i/40))], i=0..15)]:
> r_T1:= [seq([x(t_T1(i/40),phi_T1(i/40)),y(t_T1(i/40),phi_T1(i/40)),z(t_
> T1(i/40),phi_T1(i/40))], i=0..15)]:
> r_T2:= [seq([x(t_T2(i/40),phi_T2(i/40)),y(t_T2(i/40),phi_T2(i/40)),z(t_
> T2(i/40),phi_T2(i/40))], i=0..15)]:
> r_T3:= [seq([x(t_T3(i/40),phi_T3(i/40)),y(t_T3(i/40),phi_T3(i/40)),z(t_
> T3(i/40),phi_T3(i/40))], i=0..15)]:
> r_T4:= [seq([x(t_T4(i/40),phi_T4(i/40)),y(t_T4(i/40),phi_T4(i/40)),z(t_
> T4(i/40),phi_T4(i/40))], i=0..15)]:
> r_T5:= [seq([x(t_T5(i/40),phi_T5(i/40)),y(t_T5(i/40),phi_T5(i/40)),z(t_
> T5(i/40),phi_T5(i/40))], i=0..15)]:
```

## Создание графиков T-геодезических

Для создания графиков T-геодезических задаем их с помощью команды `spacecurve` а затем совмещаем их с помощью команды `display`:

```
> T0:=plots[spacecurve](r_T0,color=red,thickness=3):
> T1:=plots[spacecurve](r_T1,color=red,thickness=3):
> T2:=plots[spacecurve](r_T2,color=red,thickness=3):
> T3:=plots[spacecurve](r_T3,color=red,thickness=3):
> T4:=plots[spacecurve](r_T4,color=red,thickness=3):
> T5:=plots[spacecurve](r_T5,color=red,thickness=3):

> plots[display](T0,T1,T2,T3,T4,T5,Ps[u],axes=FRAME,labels=[x,y,z],labe
> lfont= [TIMES,BOLD,14],titlefont= [TIMES,BOLD,14],orientation=[-120,45]);
```



**Рис.XI.50.** Меридианы - это геодезические псевдосферы

Таким образом, в результате численного интегрирования убеждаемся в том, что меридианы псевдосферы являются ее геодезическими. Это является общим результатом для поверхностей вращения (А.П.Норден, «Дифференциальная геометрия»).

### Создание ( $\Phi$ , $\Phi_{-1}$ )- сети

Создадим сеть с помощью геодезических, направленных в начальных точках параллельно параллелям псевдосферы, соответственно вдоль них и противоположно им:

```
> r_P0:=[seq([x(t_P0(i/20),phi_P0(i/20)),y(t_P0(i/20),phi_P0(i/20)),z(t_
> _P0(i/20),phi_P0(i/20))], i=0..600)]:
> r_P1:=[seq([x(t_P1(i/20),phi_P1(i/20)),y(t_P1(i/20),phi_P1(i/20)),z(t_
> P1(i/20),phi_P1(i/20))], i=0..220)]:
> r_P2:=[seq([x(t_P2(i/20),phi_P2(i/20)),y(t_P2(i/20),phi_P2(i/20)),z(t_
> P2(i/20),phi_P2(i/20))], i=0..120)]:
> r_P3:=[seq([x(t_P3(i/20),phi_P3(i/20)),y(t_P3(i/20),phi_P3(i/20)),z(t_
> P3(i/20),phi_P3(i/20))], i=0..80)]:
```

```

> r_P_0:= [seq([x(t_P_0(i/20),phi_P_0(i/20)),y(t_P_0(i/20),phi_P_0(i/20)
> ), z(t_P_0(i/20),phi_P_0(i/20))], i=0..600)]:
> r_P_1:= [seq([x(t_P_1(i/20),phi_P_1(i/20)),y(t_P_1(i/20),phi_P_1(i/20))
> , z(t_P_1(i/20),phi_P_1(i/20))], i=0..220)]:
> r_P_2:= [seq([x(t_P_2(i/20),phi_P_2(i/20)),y(t_P_2(i/20),phi_P_2(i/20))
> , z(t_P_2(i/20),phi_P_2(i/20))], i=0..120)]:
> r_P_3:= [seq([x(t_P_3(i/20),phi_P_3(i/20)),y(t_P_3(i/20),phi_P_3(i/20))
> , z(t_P_3(i/20),phi_P_3(i/20))], i=0..80)]:
> P0:=plots[spacecurve](r_P0,color=black,thickness=3):
> P1:=plots[spacecurve](r_P1,color=black,thickness=3):
> P2:=plots[spacecurve](r_P2,color=black,thickness=3):
> P3:=plots[spacecurve](r_P3,color=black,thickness=3):
> P_0:=plots[spacecurve](r_P_0,color=black,thickness=3):
> P_1:=plots[spacecurve](r_P_1,color=black,thickness=3):
> P_2:=plots[spacecurve](r_P_2,color=black,thickness=3):
> P_3:=plots[spacecurve](r_P_3,color=black,thickness=3):
> plots[display](P0,P1,P2,P3,P_0,P_1,P_2,P_3,Ps[u],
> axes=FRAME,labels=[x,y,z],labelfont=[TIMES,BOLD,14],titlefont=
> [TIMES,BOLD,14],
> title='Геодезическая сеть на псевдосфере',orientation=[20,60]);

```

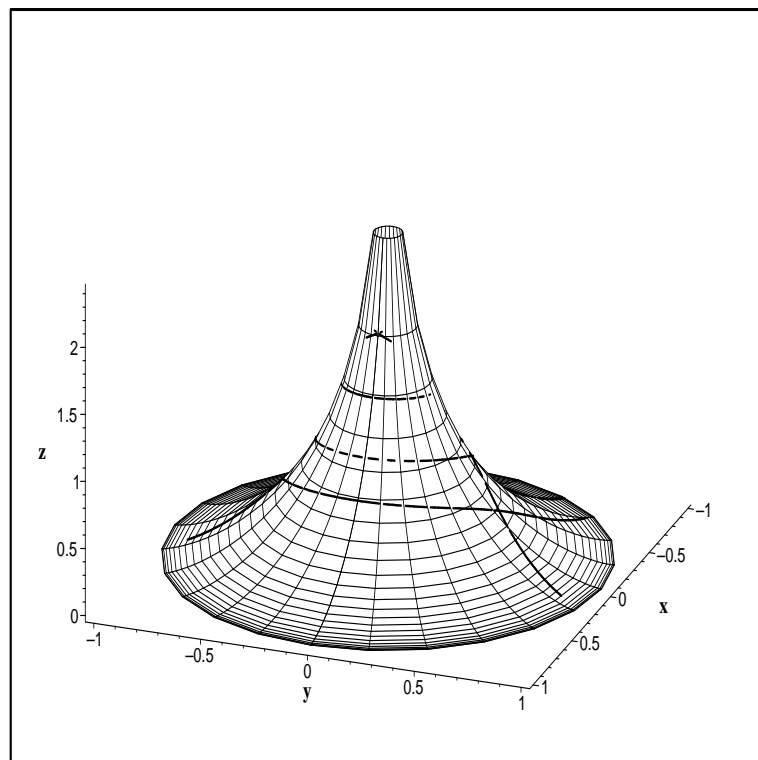


Рис. XI.51. Геодезическая сеть на псевдосфере



# Литература

- [1] Игнатъев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. I семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2000.
- [2] Игнатъев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. II семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2001.
- [3] Игнатъев Ю.Г. *Проективная геометрия. Курс лекций. III семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2001.
- [4] Игнатъев Ю.Г. *Аффинная геометрия. Курс лекций. II семестр.* Компьютерная версия, Казань, 1997.
- [5] А.П.Норден. *Дифференциальная геометрия*, Москва, Учпедгиз, 1948
- [6] А.П.Норден, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Москва, Учпедгиз, 1965.
- [7] А.П.Норден, *Краткий курс дифференциальной геометрии*, Москва, “Наука”, 1962.
- [8] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия*, Москва, “Наука”, 1979; Главы 1, 2.
- [9] *Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии*, под редакцией В.Т.Воднева, Минск, “Высшая школа”, 1970.
- [10] П.К.Рашевский. *Риманова геометрия и тензорный анализ*, М., “Наука”, 1964.
- [11] Л.П.Эйзенхарт. *Риманова геометрия*, М, “ГИФМЛ”, 1948.
- [12] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия. II*. М., “Просвещение”, 1975.
- [13] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия. Часть II*. М., “Просвещение”, 1987.

*Литература*

- [14] Погорелов А.В. *Геометрия*. М., “Наука”, 1984.
- [15] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М., “Наука”, 1987.
- [16] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П., Кузнецова Г.Б., Майоров В.М., Скопец З.А. *Сборник задач по геометрии*. М., “Просвещение”, 1990.

---

**Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей  
в евклидовом пространстве. Учебное пособие. IV  
семестр.**

Автор - **Ю.Г. Игнатъев**, доктор физ.-мат. наук, профессор,  
заслуженный деятель науки РТ  
Редактор - **А.Р. Самигуллина**

---

Научно-исследовательская лаборатория  
«Информационных технологий в математическом образовании»  
Казанского (Приволжского) федерального университета  
420035, г. Казань, ул. Кремлевская, 35  
Компьютерный набор и верстка в издательской системе  $\text{\LaTeX}2\epsilon$   
В.И.Ковтун.  
Стилевое оформление «*BIBLIO*» Ю.Г.Игнатъева