

УДК 519.632.4

## К ВОПРОСУ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ СХОДИМОСТИ МНОГОСЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ

*С.И. Мартыненко*

### Аннотация

В статье рассмотрен ряд вопросов, связанных с доказательством сходимости многосеточных методов. Особое внимание уделяется универсальной многосеточной технологии как варианту геометрических многосеточных методов с проблемно-независимыми операторами переходов. Получены вид матрицы многосеточных итераций и оценка её нормы. Показана независимость количества многосеточных итераций от шага сетки и выполнено сравнение с классическими многосеточными методами.

**Ключевые слова:** геометрические многосеточные методы, универсальная многосеточная технология, сходимость.

### Введение

В отличие от простейших итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), многосеточные методы характеризуются достаточно сложной структурой матрицы итераций, поэтому доказательство их сходимости весьма трудоёмко. Предположим, что многосеточный метод применён для численного решения некоторой краевой задачи и рассмотрим простейшие двухуровневые алгоритмы. Предположим также, что для численного решения исходной краевой задачи используются два уровня сеток: нулевой (мелкая сетка) и первый (грубая сетка (или сетки) с большим шагом, чем у мелкой сетки). Разностный аналог исходной краевой задачи имеет вид

$$A_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0, \quad (1)$$

далее нижние индексы  $0, 1, \dots, l$  будут означать принадлежность к нулевому, первому,  $\dots$ ,  $l$ -му сеточным уровням соответственно. Номер уровня с самыми грубыми сетками обозначен как  $L^+$ .

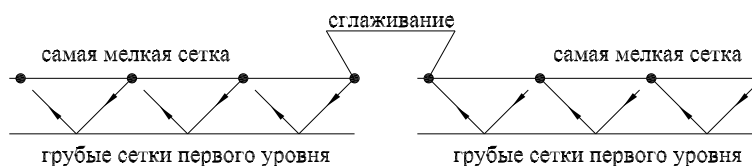


Рис. 1. Двухуровневые многосеточные алгоритмы

Сглаживающие итерации могут быть выполнены перед коррекцией поправки на грубой сетке (предварительное сглаживание), после коррекции (последующее сглаживание) или, как чаще всего бывает, и до, и после коррекции. Во всех трёх случаях матрица многосеточных итераций имеет разный вид, что затрудняет анализ сходимости многосеточных методов.

Рассмотрим два двухуровневых многосеточных алгоритма ( $L^+ = 1$ ), которые схематично показаны на рис. 1. В первом из них (рис. 1, слева) многосеточная итерация начинается со сглаживания на мелкой сетке, а значит, использует только предварительное сглаживание при отсутствии последующего. В качестве сглаживающей процедуры воспользуемся итерационным методом

$$W_0(\mathbf{u}_0^{(\nu+1)} - \mathbf{u}_0^{(\nu)}) = \mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(\nu)}$$

или

$$\mathbf{u}_0^{(\nu+1)} = (I - W_0^{-1}A_0) \mathbf{u}_0^{(\nu)} + W_0^{-1}\mathbf{b}_0. \quad (2)$$

Предполагается, что сглаживающие итерации сходятся, то есть норма матрицы сглаживающих итераций  $S_0$  удовлетворяет неравенству

$$\|S_0\| = \|I - W_0^{-1}A_0\| \leq \omega_0 < 1, \quad (3)$$

где  $\omega_0$ , как правило, зависит от величины шага сетки. Если точное решение  $\mathbf{u}_0 = A_0^{-1}\mathbf{b}_0$  СЛАУ (1) является фиксированной точкой итераций, то справедливо соотношение

$$\mathbf{u}_0^{(\nu)} - \mathbf{u}_0 = S_0^\nu(\mathbf{u}_0^{(0)} - \mathbf{u}_0), \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}_0^{(0)}$  есть начальное приближение.

Обозначим итерации предварительного сглаживания как  $\acute{\nu}$ , последующего – как  $\grave{\nu}$ . Полученное после сглаживания на мелкой сетке приближение к решению  $\mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})}$  удовлетворяет соотношению

$$A_0 \mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  есть невязка. Добавим к приближению  $\mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})}$  некоторую поправку  $\mathbf{c}_0$ , чтобы уничтожить невязку  $\mathbf{r}$ , то есть

$$A_0 \mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})}. \quad (5)$$

Полученную СЛАУ иногда называют записью исходной СЛАУ (1) в терминах «поправка – невязка».

Решение СЛАУ (5) потребует тех же вычислительных усилий, что и решение исходной СЛАУ (1). Поэтому для уменьшения вычислительной работы воспользуемся вспомогательной СЛАУ вида

$$A_1 \mathbf{c}_1 = \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})}), \quad (6)$$

которая получена в результате проецирования (5) на грубую сетку (сетки) первого уровня. Оператор сужения  $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}$ , проецирующий невязку с мелкой сетки на грубые сетки первого уровня, и матрица коэффициентов  $A_1$  могут быть построены разными способами [1].

Предположим, что на грубой сетке (сетках) СЛАУ (6) решена точно, то есть её решение имеет вид

$$\mathbf{c}_1 = A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})}).$$

Полученную поправку спроецируем с первого уровня на нулевой

$$\mathbf{c}_0 = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1 = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(\acute{\nu})}),$$

где  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0}$  – оператор продолжения (пролонгации), проецирующий поправку с грубых сеток первого уровня на мелкую сетку (нулевой уровень).

Согласно рис. 1 (слева) новое приближение к решению  $\mathbf{u}_0^{(1)}$  есть приближение после выполнения итераций  $\dot{\nu}$  предварительного сглаживания  $\mathbf{u}_0^{(\dot{\nu})}$  плюс спрлонгированная поправка  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1$ :

$$\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} \mathbf{c}_1 + \mathbf{u}_0^{(\dot{\nu})} = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(\dot{\nu})}) + \mathbf{u}_0^{(\dot{\nu})}.$$

Выражая  $\mathbf{u}_0^{(\dot{\nu})}$  из (4)

$$\mathbf{u}_0^{(\dot{\nu})} = S_0^{\dot{\nu}} \mathbf{u}_0^{(0)} + (1 - S_0^{\dot{\nu}}) \mathbf{u}_0 = S_0^{\dot{\nu}} \mathbf{u}_0^{(0)} + (1 - S_0^{\dot{\nu}}) A_0^{-1} \mathbf{b}_0$$

и полагая, что  $\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{u}_0^{(q+1)}$  есть новое значение после многосеточной итерации, а  $\mathbf{u}_0^{(0)} = \mathbf{u}_0^{(q)}$  – предыдущее значение, получаем следующую форму записи многосеточного метода:

$$\mathbf{u}_0^{(q+1)} = M \mathbf{u}_0^{(q)} + (I - d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}}) A_0^{-1} \mathbf{b}_0, \quad (7)$$

где матрица многосеточных итераций  $M$  имеет вид

$$M = d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}},$$

а

$$d_0 = A_0^{-1} - \mathcal{P}_{1 \rightarrow 0} A_1^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1}. \quad (8)$$

Пусть в случае, когда количество грубых сеток более одного ( $l > 1$ ),  $A_l$  есть матрица коэффициентов на сетке (сетках) уровня  $l$ ,  $S_l$  – матрица сглаживающих итераций,  $\nu_l$  – количество сглаживающих итераций,  $\mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}$  – оператор сужения, проецирующий невязку с более мелкой сетки (сеток) уровня  $l$  на более грубую сетку (сетки) уровня  $l+1$ ,  $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l}$  – оператор продолжения (пролонгации), проецирующий поправку с более грубой сетки (сеток) уровня  $l+1$  на более мелкую сетку (сетки) уровня  $l$ . Классический подход к доказательству сходимости многосеточных методов использует следующие свойства.

1. *Свойство сглаживания: существует функция  $\eta(\nu_l) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что  $\eta(\nu_l) \rightarrow 0$  при  $\nu_l \rightarrow \infty$  и*

$$\|A_l S_l^{\nu_l}\| \leq \eta(\nu_l) \|A_l\|. \quad (9)$$

2. *Свойство аппроксимации: существует константа  $C_A > 0$  такая, что*

$$\|A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}. \quad (10)$$

Свойства сглаживания и аппроксимации необходимо доказывать для каждого итерационного метода (Якоби, Зейделя и т. д.), а свойство аппроксимации – для метода конечных разностей и конечных элементов, причём для доказательства свойства аппроксимации важна геометрия области (подробнее см. [1]).

Если свойства сглаживания и аппроксимации выполняются, то многосеточный метод (7) сходится, причём независимо от величины шага сетки

$$\|M\| = \|d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}}\| \leq \|d_0\| \cdot \|A_0 S_0^{\dot{\nu}}\| \leq C_A \eta(\dot{\nu}).$$

Несколько иначе записывается многосеточный метод, схематично показанный на рис. 1 (справа). В этом случае отсутствует предварительное сглаживание и выполняются только итерации  $\dot{\nu}$  последующего сглаживания. В этом случае многосеточные итерации имеют вид

$$\mathbf{u}_0^{(q+1)} = M \mathbf{u}_0^{(q)} + A_0^{-1} (I - A_0 S_0^{\dot{\nu}} d) \mathbf{b}_0, \quad (11)$$

где

$$M = S_0^\nu d_0 A_0,$$

где матрица  $d_0$  определяется согласно (8). Очевидно, что в данном случае нельзя непосредственно показать независимость скорости сходимости данного многосеточного метода (11) от величины шага сетки при помощи свойств сглаживания и аппроксимации.

В общем случае при наличии предварительного и последующего сглаживаний многосеточные итерации двухуровневого метода записываются в виде

$$\mathbf{u}_0^{(q+1)} = S_0^\nu d A_0 S_0^\nu \mathbf{u}_0^{(q)} + (I - S_0^\nu d A_0 S_0^\nu) A_0^{-1} \mathbf{b}_0. \quad (12)$$

Таким образом, анализ сходимости многосеточных методов, основанный на свойствах сглаживания (9) и аппроксимации (10), может непосредственно применяться лишь в случае  $\dot{\nu} \neq 0$  и  $\dot{\nu} = 0$  (только предварительное сглаживание). Далее будет показано, как применить свойства сглаживания и аппроксимации для остальных случаев.

### 1. Вспомогательные утверждения

Для доказательства сходимости многосеточного метода (11) воспользуемся вспомогательной СЛАУ вида

$$A_0 \mathbf{v}_0 = A_0^{-1} \mathbf{b}_0, \quad \text{где } \mathbf{v}_0 = A_0^{-1} \mathbf{u}_0. \quad (13)$$

СЛАУ (13) понадобится исключительно для доказательства сходимости.

Предположим, что для решения вспомогательной СЛАУ (13) использован итерационный метод (2). Тогда

$$\mathbf{v}_0^{(\bar{\nu}+1)} = (I - W_0^{-1} A_0) \mathbf{v}_0^{(\bar{\nu})} + W_0^{-1} A_0^{-1} \mathbf{b}_0$$

или с учётом того, что  $\mathbf{v}_0 = A_0^{-1} \mathbf{u}_0$ ,

$$\mathbf{u}_0^{(\bar{\nu}+1)} = A_0 (I - W_0^{-1} A_0) A_0^{-1} \mathbf{u}_0^{(\bar{\nu})} + A_0 W_0^{-1} A_0^{-1} \mathbf{b}_0, \quad (14)$$

Матрица сглаживающих итераций в данном случае имеет вид

$$\bar{S}_0 = A_0 (I - W_0^{-1} A_0) A_0^{-1} = A_0 S_0 A_0^{-1} = I - A_0 W_0^{-1}, \quad (15)$$

где  $S_0$  – матрица итераций метода (2).

Нетрудно видеть, что из сходимости метода (2) следует сходимость метода (14), и наоборот. В самом деле из (15) следует, что

$$\bar{S}_0^\nu = (A_0 S_0 A_0^{-1})^\nu = A_0 S_0^\nu A_0^{-1}.$$

Тогда справедлива следующая оценка

$$\|\bar{S}_0^\nu\| = \|A_0 S_0^\nu A_0^{-1}\| \leq \|A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| \cdot \|S_0\|^\nu \leq \|A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| \omega_0^\nu.$$

Поскольку  $\omega < 1$ , то  $\|\bar{S}_0^\nu\| \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Аналогично доказывается обратное утверждение. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что норма матрицы сглаживающих итераций метода (14) удовлетворяет ограничению

$$\|\bar{S}_0\| = \|I - A_0 W_0^{-1}\| \leq \bar{\omega}_0 < 1. \quad (16)$$

В общем случае из того, что  $\bar{S}_0 \neq S_0$  следует  $\mathbf{u}_0^{(\bar{\nu})} \neq \mathbf{u}_0^{(\nu)}$  и  $\bar{\omega}_0$  зависит от величины шага сетки.

В дальнейшем понадобится следующая

**Теорема 1.** *Предположим, что в некоторой норме выполнено неравенство*

$$\|I - 2A_l W_l^{-1}\| \leq 1, \quad (17)$$

тогда справедливо свойство сглаживания, причём

$$\|A_l S_l^{\nu_l}\| \leq C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}} \|A_l\|. \quad (18)$$

**Доказательство.** Согласно определению матрицы сглаживающих итераций

$$S_l^{\nu_l} = (I - W_l^{-1} A_l)^{\nu_l} = [A_l^{-1} (I - A_l W_l^{-1}) A_l]^{\nu_l} = A_l^{-1} (I - A_l W_l^{-1})^{\nu_l} A_l,$$

откуда

$$A_l S_l^{\nu_l} = (I - A_l W_l^{-1})^{\nu_l} A_l. \quad (19)$$

Обозначим  $B = I - 2A_l W_l^{-1}$ , тогда

$$I - B = 2A_l W_l^{-1} \quad \text{и} \quad I + B = 2(I - A_l W_l^{-1}),$$

следовательно,

$$A_l S_l^{\nu_l} = \frac{1}{2^{\nu_l+1}} W_l A_l^{-1} (I - B)(I + B)^{\nu_l} A_l.$$

Отсюда имеем

$$\|A_l S_l^{\nu_l}\| \leq \frac{1}{2^{\nu_l+1}} \|W_l A_l^{-1}\| \cdot \|(I - B)(I + B)^{\nu_l}\| \cdot \|A_l\|. \quad (20)$$

Норму  $\|W_l A_l^{-1}\|$  можно оценить следующим образом:

$$S_l = I - W_l^{-1} A_l \Rightarrow I = W_l (I - S_l) A_l^{-1} = W_l A_l^{-1} \cdot A_l (I - S_l) A_l^{-1}.$$

Поскольку

$$A_l (I - S_l) A_l^{-1} = I - A_l S_l A_l^{-1} = I - \bar{S}_l$$

(последнее равенство следует из (15)), то

$$W_l A_l^{-1} = (I - \bar{S}_l)^{-1}.$$

Отсюда в силу (16) следует необходимая оценка

$$\|W_l A_l^{-1}\| = \|(I - \bar{S}_l)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\bar{S}_l\|} \leq \frac{1}{1 - \max \bar{\omega}_l} = C_w, \quad (21)$$

где  $C_w$  есть некоторая константа.

Для оценки  $\|(I - B)(I + B)^{\nu_l}\|$  воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 1 [2].** *Пусть для матрицы  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  выполнено неравенство  $\|B\| \leq 1$  в некоторой операторной норме. Тогда в той же норме*

$$\|(I - B)(I + B)^{\nu_l}\| \leq 2^{\nu_l+1} \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}, \quad \nu_l = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

С учётом (21) и (22) оценка (20) принимает вид (18).  $\square$

Заметим, что из (19) следует

$$A_l S_l^{\nu_l} A_l^{-1} = (I - A_l W_l^{-1})^{\nu_l} \Rightarrow \|A_l S_l^{\nu_l} A_l^{-1}\| \leq \begin{cases} C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}, & \nu_l \neq 0, \\ 1, & \nu_l = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Теперь покажем, как свойства сглаживания (18) и аппроксимации (10) в сочетании с оценкой (23) могут быть использованы для анализа многосеточных алгоритмов при различных комбинациях предварительных и последующих сглаживаний. Применяя многосеточный метод (12) к решению СЛАУ (13), получим

$$\mathbf{u}_0^{(q+1)} = A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1} \mathbf{u}_0^{(q)} + (I - A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1}) A_0^{-1} \mathbf{b}_0.$$

Отсюда с учётом (10), (18) и (23) нетрудно получить следующую оценку нормы матрицы многосеточных итераций:

$$\|M\| = \|A_0 S_0^{\dot{\nu}} d_0 A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1}\| \leq \|A_0 S_0^{\dot{\nu}}\| \cdot \|d_0\| \cdot \|A_0 S_0^{\dot{\nu}'} A_0^{-1}\|,$$

или

$$\|M\| \leq \begin{cases} C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \dot{\nu}'}} , & \dot{\nu} = 0 \text{ и } \dot{\nu}' \geq 1, \\ C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \dot{\nu}}} , & \dot{\nu} \geq 1 \text{ и } \dot{\nu}' = 0, \\ C_A C_w^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\dot{\nu} \dot{\nu}'}} , & \dot{\nu} \geq 1 \text{ и } \dot{\nu}' \geq 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что во всех случаях (когда проводятся только предварительное сглаживание  $\dot{\nu} = 0$  и  $\dot{\nu}' \geq 1$ , только последующее сглаживание  $\dot{\nu} \geq 1$  и  $\dot{\nu}' = 0$  и предварительное и последующее сглаживание  $\dot{\nu} \geq 1$  и  $\dot{\nu}' \geq 1$ ) скорость сходимости двухуровневого метода не зависит от величины шага сетки.

Далее вспомогательная СЛАУ (13) и оценки (18) и (23) будут использованы для анализа многосеточных итераций универсальной многосеточной технологии при отсутствии предварительного сглаживания.

## 2. Матрица многосеточных итераций

Классические многосеточные методы состоят из проблемно-зависимых компонент, оптимальная адаптация которых к решаемой задаче и определяет оптимальную (неулучшаемую) скорость сходимости. Адаптация компонент является достаточно сложной задачей, поэтому в [3–6] был предложен вариант геометрического многосеточного метода с проблемно-независимыми операторами перехода (сужения и продолжения). Универсальная многосеточная технология (УМТ) содержит сглаживание на особой иерархии сеток (так называемой многосеточной структуре). Каждый сеточный уровень  $l$  состоит из  $3^{dl}$  сеток ( $d = 2, 3$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots, L^+$ ), при этом самая мелкая сетка образует нулевой уровень ( $l = 0$ ), а самые грубые сетки – уровень  $L^+$ . Все сетки одного уровня не имеют общих узлов и граней контрольных объёмов, однако объединение всех сеток каждого уровня даёт самую мелкую сетку. Поэтому оператор пролонгации в УМТ не зависит от решаемой задачи. Контрольный объём на сетках уровня  $l$  состоит из  $3^{dl}$  контрольных объёмов на самой мелкой сетке, поэтому применение интегро-интерполяционного метода для аппроксимации краевых задач на многосеточных структурах позволяет получить проблемно-независимый оператор сужения. Основной многосеточный цикл

УМТ не содержит предварительного сглаживания, то есть многосеточная итерация начинается на уровне  $L^+$ , состоящем из самых грубых сеток, и завершается на нулевом уровне (самая мелкая сетка).

Ранее сходимость УМТ уже была доказана в [7], однако полученные оценки оказались достаточно грубы и не позволяли судить о скорости сходимости.

В УМТ на каждом сеточном уровне решаемая СЛАУ имеет вид

$$A_l \mathbf{c}_l = \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}), \quad l = 0, 1, 2, \dots, L^+. \quad (24)$$

где матрица коэффициентов  $A_l$  имеет блочную структуру, причём количество блоков равно количеству сеток, образующих данный уровень (то есть  $3^{dl}$ );  $\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}$  – проблемно-независимый оператор сужения, проецирующий невязку  $\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}$  с самой мелкой сети на сетки уровня  $l$ , и  $\mathbf{u}_0^{(q)}$  есть приближение к решению после  $q$ -й многосеточной итерации.

Отметим следующие свойства оператора сужения:

$$\mathcal{R}_{0 \rightarrow l} = \mathcal{R}_{l-1 \rightarrow l} \dots \mathcal{R}_{1 \rightarrow 2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow 1} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{0 \rightarrow 0} = I.$$

Продолжение (пролонгация) невязки с уровня  $l+1$  на уровень  $l$  в УМТ записывается в виде

$$\mathbf{c}_l = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1},$$

где  $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l}$  – проблемно-независимый оператор продолжения (пролонгации), которому соответствует матрица, осуществляющая перестановку компонент вектора поправки.

Пусть на сетках уровня  $l$  выполнено  $\nu_l$  сглаживающих итераций. Тогда выражение (4) принимает вид

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} = S_l^{\nu_l} (\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)}), \quad (25)$$

где  $\mathbf{c}_l$  есть точное решение (24):

$$\mathbf{c}_l = A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}), \quad (26)$$

$\mathbf{c}_l^{(0)} = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})}$  – начальное приближение (то есть поправка, спроецированная с предыдущего уровня  $l+1$  с более грубыми сетками) и  $S_l^{\nu_l}$  – матрица сглаживающих итераций. Преобразуем правую часть уравнения (25), добавляя и вычитая слагаемое  $\mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1}$ :

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)} = \mathbf{c}_l - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})} = \mathbf{c}_l + \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})}) - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1}. \quad (27)$$

С учётом (26) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_l - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1} &= A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l+1}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) = \\ &= [A_l^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l+1}] (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) = \\ &= [A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}] \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу  $\mathcal{R}_{0 \rightarrow l+1} = \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}$ . Обозначим

$$d_l = A_l^{-1} - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} A_{l+1}^{-1} \mathcal{R}_{l \rightarrow l+1}. \quad (28)$$

Заметим, что с учётом (28) свойство аппроксимации можно переписать в виде  $\|d_l\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}$ . Тогда

$$\mathbf{c}_l - \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} \mathbf{c}_{l+1} = d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}),$$

и выражение (27) принимает вид

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(0)} = \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})}) + d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}).$$

Полученное соотношение позволяет переписать (25) в рекуррентном виде

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} = S_l^{\nu_l} \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} (\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_{l+1}^{(\nu_{l+1})}) + S_l^{\nu_l} d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}). \quad (29)$$

Далее рассмотрим изменение поправки в ходе многосеточной итерации, начиная с уровня с самыми грубыми сетками  $L^+$  и заканчивая самой мелкой сеткой (нулевой уровень):

1. *Уровень  $L^+$* . Предположим, что на данном уровне сеточные уравнения решены точно:

$$\mathbf{c}_{L^+} = \mathbf{c}_{L^+}^{(\nu_{L^+})}. \quad (30)$$

2. *Уровень  $L^+ - 1$* . Выражение (29) с учётом (30) принимает вид

$$\mathbf{c}_{L^+-1} - \mathbf{c}_{L^+-1}^{(\nu_{L^+-1})} = S_{L^+-1}^{\nu_{L^+-1}} d_{L^+-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}). \quad (31)$$

3. *Уровень  $L^+ - 2$* . Выражение (29) с учётом (31) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{L^+-2} - \mathbf{c}_{L^+-2}^{(\nu_{L^+-2})} &= S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} \mathcal{P}_{L^+-1 \rightarrow L^+-2} (\mathbf{c}_{L^+-1} - \mathbf{c}_{L^+-1}^{(\nu_{L^+-1})}) + \\ &\quad + S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} d_{L^+-2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-2} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) = \\ &= S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} \mathcal{P}_{L^+-1 \rightarrow L^+-2} S_{L^+-1}^{\nu_{L^+-1}} d_{L^+-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-1} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) + \\ &\quad + S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} d_{L^+-2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-2} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) = Q_{L^+-2} (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}), \end{aligned}$$

где

$$Q_{L^+-2} = S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} \mathcal{P}_{L^+-1 \rightarrow L^+-2} S_{L^+-1}^{\nu_{L^+-1}} d_{L^+-1} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-1} + S_{L^+-2}^{\nu_{L^+-2}} d_{L^+-2} \mathcal{R}_{0 \rightarrow L^+-2}.$$

Продолжая выписывать разность между точным и приближённым значениями поправок на последующих уровнях, получим следующее соотношение:

$$\mathbf{c}_l - \mathbf{c}_l^{(\nu_l)} = Q_l (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}), \quad (32)$$

где матрица  $Q_l$  имеет вид

$$Q_l = \begin{cases} S_l^{\nu_l} (d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} + \mathcal{P}_{l+1 \rightarrow l} Q_{l+1}), & l = 0, 1, 2, \dots, L^+ - 2, \\ S_l^{\nu_l} d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}, & l = L^+ - 1. \end{cases} \quad (33)$$

На самой мелкой сетке ( $l = 0$ ) уравнение (32) с учётом (26) и равенства  $\mathcal{R}_{0 \rightarrow 0} = I$  может быть переписано в следующей форме:

$$\mathbf{c}_0^{(\nu_0)} = \mathbf{c}_0 - Q_0 (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) = (A_0^{-1} - Q_0) (\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}).$$



Тогда, прибавляя к предыдущему значению  $\mathbf{u}_0^{(q)}$  поправку  $\mathbf{c}_0^{(\nu_0)}$ , получим новое приближение к решению после выполненной многосеточной итерации

$$\mathbf{u}_0^{(q+1)} = \mathbf{u}_0^{(q)} + \mathbf{c}_0^{(\nu_0)} = \mathbf{u}_0^{(q)} + (A_0^{-1} - Q_0)(\mathbf{b}_0 - A_0 \mathbf{u}_0^{(q)}) = Q_0 A_0 \mathbf{u}_0^{(q)} + (A_0^{-1} - Q_0) \mathbf{b}_0,$$

где матрица  $Q_0$  задана согласно (33). Нетрудно видеть, что матрица многосеточных итераций УМТ имеет вид  $Q_0 A_0$ .

Чтобы использовать свойства сглаживания и аппроксимации для доказательства сходимости многосеточных итераций, применим УМТ к решению вспомогательной задачи (13)

$$\mathbf{v}_0^{(\bar{q}+1)} = Q_0 A_0 \mathbf{v}_0^{(\bar{q})} + (A_0^{-1} - Q_0) \mathbf{b}_0.$$

Тогда с учётом замены переменных  $\mathbf{v}_0^{(\bar{q})} = A_0^{-1} \mathbf{u}_0^{(\bar{q})}$  получим

$$\mathbf{u}_0^{(\bar{q}+1)} = A_0 Q_0 \mathbf{u}_0^{(\bar{q})} + (I - A_0 Q_0) A_0^{-1} \mathbf{b}_0.$$

Для последующего анализа матрицу многосеточных итераций  $M = A_0 Q_0$  удобнее переписать в рекуррентном виде

$$M = A_0 Q_0 = A_0 S_0^{\nu_0} d_0 + \sum_{l=1}^{L^+-1} \prod_{k=0}^{l-1} A_k S_k^{\nu_k} \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1} \cdot A_l S_l^{\nu_l} d_l \mathcal{R}_{0 \rightarrow l}, \quad (34)$$

где матрица  $d_l$  задана согласно (28).

Справедлива следующая теорема о сходимости УМТ.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены свойства сглаживания (18) и аппроксимации (10), и  $\|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}\| \leq C_{\mathcal{R}}$ . Тогда УМТ сходится, причём для нормы матрицы многосеточных итераций (34) справедлива оценка*

$$\|M\| \leq C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_0}} + C_A C_w C_{\mathcal{R}} \sum_{l=1}^{L^+-1} (C C_w)^l \prod_{k=0}^{l-1} \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_k}} \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}. \quad (35)$$

**Доказательство.** Из (34) вытекает, что

$$\|M\| \leq \|A_0 S_0^{\nu_0} d_0\| + \sum_{l=1}^{L^+-1} \prod_{k=0}^{l-1} \|A_k S_k^{\nu_k} \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1}\| \cdot \|A_l S_l^{\nu_l} d_l\| \cdot \|\mathcal{R}_{0 \rightarrow l}\|. \quad (36)$$

Используя свойство сглаживания (18) и свойство аппроксимации (10), записанное с учётом (28) в виде  $\|d_l\| \leq C_A \|A_l\|^{-1}$ , получим

$$\|A_l S_l^{\nu_l} d_l\| \leq \|A_l S_l^{\nu_l}\| \cdot \|d_l\| \leq C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L^+ - 1. \quad (37)$$

Далее, принимая во внимание (23), нетрудно получить оценку

$$\|A_k S_k^{\nu_k} \mathcal{P}_{k+1 \rightarrow k} A_{k+1}^{-1}\| \leq C \|A_k S_k^{\nu_k} A_k^{-1}\| \leq C C_w \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_k}}. \quad (38)$$

Тогда оценка (36) с учётом (37) и (38) принимает вид (35).  $\square$

Напомним, что все оценки получены в предположении, что на уровне, состоящем из самых грубых сеток  $l = L^+$ , сеточные уравнения решены точно. Выполняя достаточное количество сглаживающих итераций на каждом уровне, можно добиться сходимости многосеточных итераций ( $\|M\| \rightarrow 0$  при  $\nu_l \rightarrow \infty$ ), причём количество многосеточных итераций не зависит от величины шага самой мелкой сетки.

Важным частным случаем является выполнение одинакового количества сглаживающих итераций на каждом уровне:  $\nu_l = \nu$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, L^+ - 1$ . Тогда оценка (35) принимает вид

$$\|M\| \leq C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} + C_A C_w C_{\mathcal{R}} \sum_{l=1}^{L^+-1} (CC_w)^l \left( \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \right)^{l+1}.$$

Поскольку при достаточно больших  $\nu$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{L^+-1} (CC_w)^l \left( \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \right)^{l+1} &= CC_w \frac{2}{\pi\nu} \frac{1 - \left( CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \right)^{L^+-1}}{1 - CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}} < \\ &< CC_w \frac{2}{\pi\nu} \frac{1}{1 - CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}} = CC_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \frac{2}{\sqrt{2\pi\nu} - CC_w}, \end{aligned}$$

оценка (35) в случае  $\nu_l = \nu = \text{const}$  выглядит следующим образом:

$$\|M\| < C_A C_w \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left( 1 + \frac{2CC_w C_{\mathcal{R}}}{\sqrt{2\pi\nu} - CC_w} \right), \quad (39)$$

откуда нетрудно видеть, что скорость сходимости УМТ не зависит от величины шага сетки.

Следует заметить, что из оценки (35) можно получить более грубую оценку вида (39) в предположении, что  $\nu_l = \nu = \min_l \nu_l$ .

### 3. Вычислительный эксперимент

В качестве иллюстрации выполнено сравнение УМТ и V-цикла на примере решения первой краевой задачи для двухмерного уравнения Пуассона  $\Delta u = -f$  с точным решением  $Q(x)Q(y)$ , где  $Q(\xi) = 10(e^\xi + (1-e)\xi - 1)$ ,  $\xi = (x, y)$ . Для разностного представления оператора Лапласа использована стандартная пятиточечная аппроксимация. Результаты вычислительного эксперимента показаны на рис. 2, где  $R^{(a)} = \|A\mathbf{u}^{(a)} - \mathbf{b}\|_\infty$  – норма вектора невязки на самой мелкой сетке и  $E^{(a)} = \max_{ij} |u_{ij}^{(a)} - Q(x_i)Q(y_j)|$  – погрешность численного решения.

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что УМТ обладает главным свойством многосеточных методов, а именно независимостью количества многосеточных итераций от величины шага самой мелкой сетки. Из рис. 2 видно, что нет заметной разницы между сходимостью итераций V-цикла и УМТ. При использовании V-цикла выполнено три сглаживающие итерации при предварительном и последующем сглаживании, а при использовании УМТ – шесть сглаживающих итераций.

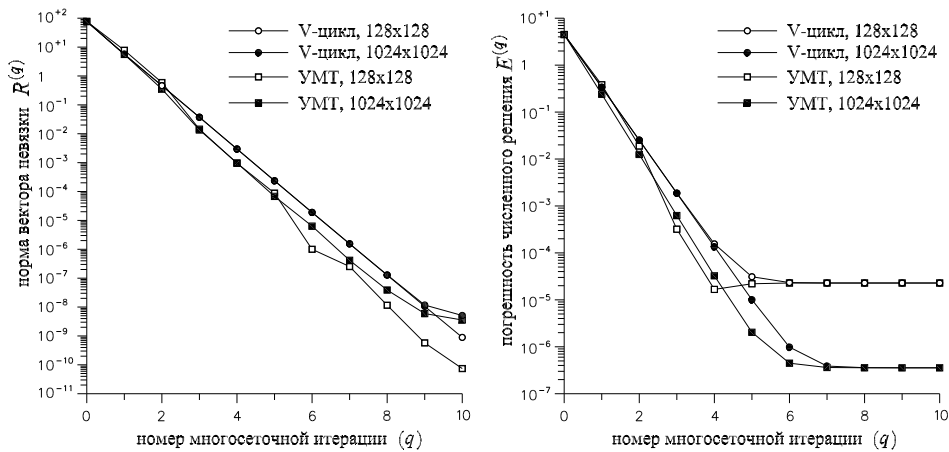


Рис. 2. Сходимость V-цикла и УМТ при решении уравнения Пуассона

Однако, несмотря на сходство в характере сходимости многосеточных итераций V-цикла и УМТ, есть разница в объёме вычислительной работы. Пусть вычислительная сетка состоит из  $(2^k + 1)^d$  узлов, где  $d = 2, 3$ . Тогда, не принимая во внимание вычисления, необходимые для реализации операторов переходов, получим, что увеличение времени счёта составит

$$\approx \left[ \frac{\lg(2^k + 1)}{\lg 3} \right] \frac{2^d - 1}{2^d + 1} \approx [0.63k] \frac{2^d - 1}{2^d + 1},$$

где квадратные скобки означают целую часть. В частности, при решении линейных двухмерных краевых задач ( $d = 2$ ) на сетке  $1025^2$  ( $k = 10$ ) и трёхмерных задач ( $d = 3$ ) на сетке  $129^3$  ( $k = 7$ ) можно ожидать, что время счёта увеличится в 3.6 и 3.1 раза соответственно. Увеличение вычислительных усилий в УМТ по сравнению с классическими многосеточными методами вызвано применением проблемно-независимых операторов переходов. Подсчёт объема вычислительной работы показывает, что вычислительная стоимость многосеточной итерации УМТ составит  $\alpha N \lg N$  арифметических операций, где  $N$  – число неизвестных, а  $\alpha$  – некоторая константа.

### Заключение

Выполненный анализ сходимости универсальной многосеточной технологии показал, что количество многосеточных итераций не зависит от величины шага самой мелкой сетки. Однако объём вычислительной работы, необходимой для выполнения каждой многосеточной итерации, выше аналогичного объёма в классических многосеточных методах из-за наличия проблемно-независимых операторов переходов.

Анализ сходимости УМТ не является полным, поскольку не доказано свойство аппроксимации из-за более сложной, по сравнению с классическими многосеточными методами, постановки граничных условий на грубых сетках.

Автор выражает признательность профессору М.П. Галанину (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) за поддержку исследований и критическое обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00109).

### Summary

*S.I. Martynenko.* On the Proving of Convergence of Multigrid Methods.

The paper deals with some problems concerning the proving of convergence of multigrid methods. Special attention is paid to the robust multigrid technique as a variant of geometric multigrid methods with problem-independent transfer operators. The matrix of multigrid iterations is obtained; its norm is estimated. A mesh-independent convergence rate is proved, and a comparison with the classical multigrid methods is performed.

**Key words:** geometric multigrid method, robust multigrid technique, convergence.

### Литература

1. *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 168 с.
2. *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. – 377 p.
3. *Мартыненко С.И.* Универсальная многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках // Вычисл. методы и программирование. – 2000. – Т. 1, № 1. – С. 83–102.
4. *Мартыненко С.И.* Формализация вычислений при численном решении краевых задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 76–90.
5. *Мартыненко С.И.* Универсальная многосеточная технология // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21, №9. – С. 66–79.
6. *Martynenko S.I.* Robust Multigrid Technique for Black Box Software // Comp. Meth. Appl. Math. – 2006. – V. 6, No 4. – P. 413–435.
7. *Мартыненко С.И.* К вопросу о сходимости универсальной многосеточной технологии // Матем. моделирование. – 2010. – Т. 22, № 10. – С. 18–34.

Поступила в редакцию  
01.10.12

---

**Мартыненко Сергей Иванович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела «Спецдвигатели и химмотология» Центрального института авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва.

E-mail: *Martynenko@ciam.ru*