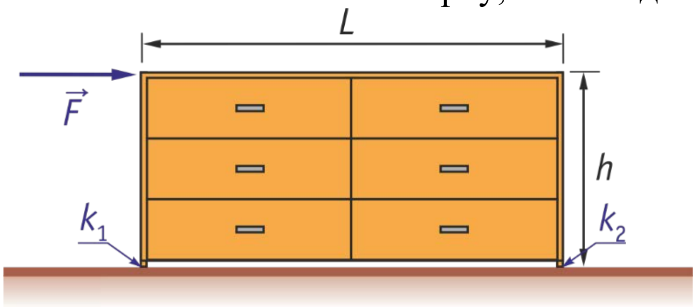
Межрегиональная предметная олимпиада
Казанского федерального университета
по предмету "Физика"
Очный тур
2016-2017 учебный год
10 класс

Задача.1. (20 баллов)
Два шарика одинакового размера с массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) связаны между собой нитью, длина которой значительно превышает радиусы шариков. Шарики сбросили с достаточно большой высоты. Определите натяжение нити при падении шариков в воздухе через достаточно большое время после бросания.
Задача.2. (20 баллов)
В открытой с обеих сторон горизонтальной трубе сечением S закреплены на расстоянии L друг от друга два поршня. Масса одного из них в два раза больше массы другого. Когда воздух, находившийся в сосуде между поршнями, был полностью выкачан, поршни освобождают. Определите, какое количество теплоты выделится при их неупругом соударении, если трением при движении поршней можно пренебречь? Атмосферное давление – p_0.
Задача.3. (20 баллов)
На конце соломинки, лежащей на гладком столе, сидит кузнечик. С какой наименьшей скоростью v он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Трение между столом и соломинкой отсутствует. Масса соломинки M, её длина L, масса кузнечика m.
Задача.4. (20 баллов)
Комод высотой h и шириной L стоит на полу опираясь на него продолжениями своих боковых стенок. Масса комода M равномерно распределена по объёму. Коэффициент трения левой стенки о пол равен k_1 правой - k_2. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к левой стенке в самом верху, чтобы сдвинуть комод с места?



Задача.5. (20 баллов)
При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель при КПД равном η потребляет ток силы I_1. Движение трамвая вниз по наклонному участку пути с той же скоростью происходит без потребления электроэнергии. Определите возможные значения силы тока, которую будет потреблять двигатель трамвая при движении по этому же наклонному участку пути вверх с той же скоростью. Выберите из найденных вариантов наиболее правдоподобный.

Решение задач

Задача.1. После достаточно большого времени шарики, вследствие действия силы трения **(4 балла)**, будут падать с одинаковой постоянной скоростью, причём тяжёлый будет находиться ниже. **(4 балла)** Второй закон Ньютона, записанный для каждого шарика в проекции на ось движения, даёт: $m_2g - T - F = 0$, $m_1g + T - F = 0$, где T – сила натяжения нити, F – сила сопротивления воздуха, действующая на каждый из шариков. **(6 баллов)**

Отсюда $T = (m_2 - m_1)g/2$. **(6 баллов)**

Задача.2. Пусть W_{k1}' и W_{k1}''– кинетические энергии первого поршня до и после столкновения, а W_{k2}' и W_{k2}''– кинетические энергии второго поршня до и после столкновения.

По условию задачи при движении поршней по трубе их потенциальная энергия не меняется, а трение отсутствует. Следовательно, количество тепла, выделившееся при их неупругом ударе, равно разности кинетических энергий поршней до и после столкновения:

$$Q = \left(W_{k1}'' + W_{k2}''\right) - \left(W_{k1}' + W_{k2}'\right).$$ **(3 балла)**

Поскольку диаметры поршней одинаковы и одинаковы величины давлений, сумма сил давления действующих на оба поршня равна нулю. **(3 балла)** Это означает, что суммарный импульс поршней не изменяется. **(3 балла)** Но начальный импульс был равен нулю, а после неупругого удара поршни должны двигаться с одной скоростью. Значит, после удара эта скорость равна нулю. Тогда, после удара:

$$W_{k1}'' + W_{k2}'' = 0 \text{ и } Q = W_{k1}' + W_{k2}'$$ **(3 балла)**

Кинетическая энергия до поршней до столкновения изменялась за счёт совершения работы силами давления атмосферного воздуха $F = p_0S$.

К моменту столкновения эта работа достигла величины:

$$A = Fx_1 + Fx_2 = F\left(x_1 + x_2\right) = FL = p_0SL$$ **(4 балла)**

где x_1 и x_2 – расстояния от начальных положений поршней до точки удара.

Таким образом: $Q = Lp_0S$. **(4 балла)**

Задача.3. Дальность полёта тела, брошенного под углом к горизонту, максимальна при угле бросания 45°. **(2 балла)** Если нас интересует минимальная скорость, с которой должен прыгнуть кузнечик, то она должна быть направлена под углом 45° к горизонту. Из закона сохранения импульса легко найти, что при прыжке кузнечика соломинка приобретает скорость $u = \frac{m}{M}\frac{v}{\sqrt{2}}$. **(3 балла)**

Поэтому горизонтальная составляющая скорости кузнечика относительно соломинки равна $v' = \frac{v}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$. **(3 балла)**

Время полёта кузнечика $t = \frac{v\sqrt{2}}{g}$. **(4 балла)**

За это время он пролетает расстояние L относительно соломинки.

Т.е. $\frac{v}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{v\sqrt{2}}{g} = L$. **(4 балла)**

Откуда $$v = \sqrt{\frac{M}{M+m}gL}. \text{ **(4 балла)**}$$

Задача.4. Условие сдвига комода:

$$F = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = k_1N_1 + k_2N_2, \text{ (2 балла)}$$

где $F_{\text{тр}1}$ и N_1 – силы трения и реакции опоры, действующие на левую опору, а $F_{\text{тр}2}$ и N_2 - на правую.

Если комод не опрокидывается, выполняется равенство моментов сил относительно центра масс комода:

$$\left(F + k_1N_1 + k_2N_2\right)\frac{h}{2} = \left(N_2 - N_1\right)\frac{L}{2}, \text{ (8 баллов)}$$

а также равенство: $N_2 + N_1 = Mg$

Решая систему полученных уравнений получим:

$$F = \frac{k_2 + k_1}{2\left(L + (k_1 - k_2)h\right)}LMg \text{ (5 баллов)}$$

В записанных уравнениях предполагалось, что комод не опрокидывается. Возможные равенство F бесконечности и смена знака F в последнем уравнении, соответствуют нарушению этого условия. **(5 баллов)**

Задача.5. Пусть: U_0 – напряжение в сети трамвайной линии; I_1 и I_2 – силы тока, потребляемого двигателем трамвая на горизонтальном и наклонном участке при движении вверх; R – полное сопротивление цепи электродвигателя и контактных проводов; $P_{\text{тр}}$ и $P_{\text{т}}$ – модули мощностей сил трения и тяжести.

При движении трамвая по горизонтальному участку пути мощность тока, потребляемая от сети, равна $P = U_0I_1$. **(1 балл)** Часть этой мощности теряется в виде джоулева тепла I_1^2R, выделяющегося на полном сопротивлении R. Поэтому КПД двигателя:

$$\eta = \frac{U_0I_1 - I_1^2R}{U_0I_1} = 1 - \frac{I_1R}{U_0}. \qquad \text{(1) (2 балла)}$$

Согласно закону сохранения и превращения энергии, при движении трамвая с постоянной скоростью по горизонтальному участку пути полезная мощность ηU_0I_1 должна быть равна мощности силы трения $P_{\text{тр}}$:

$$\eta U_0I_1 = P_{\text{тр}}. \qquad \text{(2) (2 балла)}$$

При движении трамвая вниз по наклонному участку пути с той же постоянной скоростью с выключенным двигателем абсолютное значение мощности сил трения должно быть равно мощности силы тяжести:

$$P_{\text{тр}} = P_{\text{т}}, \qquad (3),\ \textbf{(2 балла)}$$

а при движении по этому же наклонному участку пути вверх мощность, потребляемая из сети, будет расходоваться на джоулево тепло и на совершение работы против сил трения и тяжести:

$$U_0 I_2 = I_2^2 R + P_{\text{тр}} + P_{\text{т}} = I_2^2 R + 2\eta U_0 I_1,$$

$$I_2^2 \frac{R}{U_0} - I_2 + 2\eta I_1 = 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Здесь важно, что изменение знака работы силы тяжести привело к изменению процессов внутри электрической системы. В ней потёк больший ток, как следствие потребовалось ещё большая его мощность, чтобы скомпенсировать так же и рост потерь.

Из равенств (2) и (3) получим: $P_{\text{т}} = \eta U_0 I_1$.

Из выражения (1) найдём отношение $\dfrac{R}{U_0} = \dfrac{1-\eta}{I_1}$, и подставим его в последнее квадратное уравнение:

$$I_2^2 (1-\eta) - I_1 I_2 + 2\eta I_1^2 = 0. \ \textbf{(2 балла)}$$

Решая это уравнение относительно искомой силы тока I_2, получим:

$$I_2 = I_1 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}. \ \textbf{(1 балл)}$$

В этом выражении два «сюрприза»: во-первых – возможно два знака перед знаком радикала, во-вторых выражение под корнем больше нуля только при $\eta > 0{,}85$ и $\eta < 0{,}15$. **(3 балла)**

Ограничения на КПД, обусловлены условием задачи: упомянутые в условии равенства невозможны при других значениях КПД.Знак «-» перед корнем означает, что $I_2 < I_1$. Такая «экономия» может возникнуть, если при движении по прямой потери на джоулево тепло превосходили потери на трение. **(2 балла)** В реальном устройстве это трудно себе представить, так же, как и КПД электродвигателя меньше 15%.

В итоге получаем ответ:

$$I_2 = I_1 \frac{1 + \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}; \quad \text{при } \eta > 0{,}85. \ \textbf{(3 балла)}$$