Известия вузов. Математика
2008, №9, с. 3–10

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ю.Р. АГАЧЕВ

ОБ ОДНОМ СПЛАЙН-ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В работе для общей линейной краевой задачи решения некорректных интегродифференциальных уравнений произвольно фиксированного конечного порядка предлагается теоретическое обоснование одного варианта общего сплайнового проекционного метода. В частности, из полученных общих результатов выводится сходимость сплайн-методов коллокации и подобластей.

Ключевые слова: пространство Соболева, интегродифференциальное уравнение, полиномиальный сплайн, проекционный метод, сходимость.

УДК: 517.96 : 519.6

Abstract. In this paper we consider the general linear boundary value problem for ill-posed integrodifferential equations of an arbitrarily fixed finite order. We theoretically substantiate one version of the general spline-projection method. In particular, the obtained general results allow us to deduce the convergence of the spline methods of collocation and subdomains.

Keywords: Sobolev space, integrodifferential equation, polynomial spline, projection method, convergence.

Введение

Рассмотрим общую линейную краевую задачу

$$l_j(x) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{0.1}$$

для интегродифференциального уравнения

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} h_j(t,s) x^{(j)}(s) ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{0.2}$$

где m, p ($p > m \ge 0$) — целые числа, $l_j(x)$ — данные линейно-независимые функционалы над пространством $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций, известные функции $y(t)$, $g_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, и $h_j(t,s)$, $j = \overline{0, p}$, определены на $[-1, 1]$ и $[-1, 1]^2$ соответственно, а $x(t)$ — искомая функция.

Хорошо известно (см., напр., в [1]), что при $p > m \ge 0$ задача (0.1)–(0.2) является задачей некорректно поставленной в традиционных для дифференциальных уравнений парах функциональных пространств X искомых элементов и Y правых частей. Несмотря на этот факт в последнее время задачу (0.1)–(0.2) начали исследовать с точки зрения нахождения таких

Поступила 27.10.2006

пар (X, Y), в которых эта задача является корректной по Адамару. В работах [2], [3] исследование задачи (0.1)–(0.2) проведено в частном случае, когда $p = 1, m = 0$; это позволило обосновать ряд прямых сплайновых методов для указанной задачи. Здесь мы продолжаем исследования, начатые в работах [2], [3], применительно к общей задаче (0.1)–(0.2) и даем в паре обычных пространств Соболева обоснование в смысле [4], [5] одного варианта общего сплайнового проекционного метода и, как следствие, обоснование сплайн–методов коллокации и подобластей, построенных по произвольно фиксированной сетке узлов из промежутка $[-1, 1]$.

1. Вспомогательные результаты

1.1. Приведем некоторые результаты из общей теории приближенных методов функционального анализа. Они будут играть существенную роль при обосновании общего сплайн–проекционного метода решения исследуемой задачи.

Пусть X и Y — данные линейные нормированные пространства, а $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ — их произвольные конечномерные подпространства, размерности которых возрастают с ростом номера n.

Рассмотрим два операторных уравнения: точное —

$$Kx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y) \tag{1.1}$$

и соответствующее ему приближенное —

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, \quad y_n \in Y_n), \tag{1.2}$$

где y, y_n — данные, а x, x_n — искомые элементы, K и K_n — аддитивные и однородные операторы, действующие соответственно из X в Y и из X_n в Y_n.

Лемма 1 ([5]). *Пусть выполнены условия*

1) *оператор $K : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим,*
2) $\dim X_n = \dim Y_n = N(n) < \infty$ $(n = 1, 2, \dots)$,
3) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \to 0$, $n \to \infty$.

Тогда при всех n, удовлетворяющих неравенству

$$q_n \equiv \|K^{-1}\| \, \|K - K_n\| < 1, \quad K - K_n : X_n \longrightarrow Y,$$

приближенное уравнение (1.2) *имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, причем*

$$\|x_n^*\| \le \|K_n^{-1}\| \, \|y_n\|, \quad \|K_n^{-1}\| \le \|K^{-1}\|(1 - q_n)^{-1}.$$

Если, кроме того, выполнено условие

4) $\delta_n \equiv \|y - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$,

то приближенные решения $x_n^* \in X_n$ сходятся к точному решению $x^* \in X$ по норме пространства X. При этом погрешность приближенного решения может быть оценена любым из неравенств

$$\|K\|^{-1}\alpha_n \le \|x^* - x_n^*\| \le \alpha_n \|K^{-1}\|, \quad \alpha_n = \|(y - y_n) + (K_n - K)x_n^*\|,$$

$$\|x^* - x_n^*\| \le \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q_n}[\|y - y_n\| + q_n\|y\|] = O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Следствие. Пусть

1) $K = G + T, K_n = G + T_n$, где G, T и T_n — линейные операторы соответственно из X в Y и из X_n в Y_n;
2) существует аддитивный и однородный оператор P_n, отображающий Y в Y_n, причем $y_n = P_n y$, $P_n^2 = P_n$;

3) $G(X) = Y, G(X_n) = Y_n$ и существует непрерывный обратный $G^{-1} : Y \longrightarrow X$, $G^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$.

Тогда в условиях леммы 1 справедливо равенство

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(E - K_n^{-1}P_nT)G^{-1}(Gx^* - P_nGx^*) + K_n^{-1}(T_n - P_nT)G^{-1}P_nGx^*\|.$$

В частности, если $T_n = P_nT$, то для погрешности верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leq \|E - K_n^{-1}P_nT\|_{X\to X}\|G^{-1}\|_{Y\to X}\|Gx^* - P_nGx^*\|_Y.$$

1.2. Приведем необходимые для дальнейшего результаты из теории приближения функций в гильбертовом пространстве сплайн-функциями (см., напр., в [6]). Обозначим через $L_2 \equiv L_2(-1, 1)$ пространство функций, квадратично-суммируемых в интервале $(-1, 1)$. При $l \in \mathbb{N}$ через $W^lL_2 \equiv W^lL_2[-1, 1]$ будем обозначать пространство Соболева функций, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $l - 1$ и производную l-го порядка из пространства L_2. Нормы в этих пространствах введем обычным образом:

$$\|y\|_2 \equiv \|y\|_{L_2} = \left\{\int_{-1}^{+1} |y(t)|^2 dt\right\}^{1/2}, \quad y \in L_2; \quad \|y\|_{l;2} \equiv \|y\|_{W^lL_2} = \|y\|_2 + \|y^{(l)}\|_2, \quad y \in W^lL_2.$$

На отрезке $[-1, 1]$ возьмем сетку узлов

$$\Delta_n : -1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющую естественному условию

$$\|\Delta_n\| \equiv \max_{0\leq k\leq n}(t_{k+1} - t_k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть, далее, $C^{(l)}[-1, 1]$ есть пространство l раз $(l + 1 \in \mathbf{N})$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1, 1]$ функций $(C^{(0)} \equiv C)$, а $\mathbb{H}_N$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше $N, N + 1 \in \mathbb{N}$. Пусть $\varkappa$ — постоянная, равная нулю или единице. Зафиксируем число $q \in \mathbf{N}$ и введем множество $S_{\Delta_n,2q-1+\varkappa}$ сплайнов $s(t)$ порядка $2q - 1 + \varkappa$ с узлами из сетки Δ_n $(n \geq q)$, определяемое условиями

1) $s(t) \in \mathbb{H}_{2q-1+\varkappa}$ на каждом частичном промежутке (t_{i-1}, t_i), $i = \overline{2, n}$,
2) $s(t) \in \mathbb{H}_{q-1}$ на двух частичных промежутках $(-1, t_1)$ и $(t_n, 1)$,
3) $s(t) \in C^{(2q-2+\varkappa)}[-1, 1]$.

В силу выбора числа q множество $S_{\Delta_n,2q-1+\varkappa}$ представляет собой конечномерное подпространство пространства Соболева W^qL_2 размерности $n - \varkappa$.

Пусть $x(t)$ — произвольная непрерывная функция на $[-1, 1]$, а $(Sx)(t) \equiv S(x;t) \in S_{\Delta_n,2q-1}$ есть сплайн, интерполирующий функцию $x(t)$ в точках $\{t_k\}_{k=1}^n$ сетки Δ_n. Известно (см., напр., [6]), что интерполяционный сплайн $S(x;t)$ определяется единственным образом и обладает следующим свойством.

Лемма 2. *Пусть $x(t) \in W^qL_2$. Тогда для интерполяционного сплайна $S(x;t)$ имеет место экстремальное свойство*

$$\|x^{(q)} - (Sx)^{(q)}\|_2 = \min_{s\in S_{\Delta_n,2q-1}} \|x^{(q)} - s^{(q)}\|_2.$$

Из леммы 2 и свойств наилучших приближений (см., напр., в [7]) непосредственно вытекает

Следствие. Какова бы ни была функция $x \in W^qL_2$, интерполяционный сплайн $S(x;t)$ сходится к $x(t)$ в смысле

$$\|x^{(q)} - (Sx)^{(q)}\|_2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Лемма 3. *Пусть* $x \in W^q L_2$ *и* $S(x;t) \in S_{\Delta_n, 2q-1}$ *— интерполяционный сплайн для функции* $x(t)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|x - Sx\|_2 \le 2^{q/2} \|x^{(q)} - (Sx)^{(q)}\|_2.$$

Отметим, что лемма 3 может быть доказана с помощью многократного применения теоремы Ролля (см., напр., [8]) и очевидного соотношения

$$y(t) = \int_{\bar{t}}^{t} y'(\tau) d\tau, \quad y(\bar{t}) = 0,$$

справедливого для любой дифференцируемой в промежутке $(-1,1)$ функции $y(t)$.

1.3. *Полная непрерывность интегродифференциального оператора.* Рассмотрим интегродифференциальный оператор $T = B + H$, где

$$(Bx)(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t), \quad (Hx)(t) \equiv \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s) ds, \quad p > m. \tag{1.3}$$

Указанный оператор будем исследовать в паре функциональных пространств (X, Y), где $X = \overset{\circ}{W}{}^p L_2$ — подпространство функций из $W^p L_2$, удовлетворяющих краевым условиям (0.1), а $Y = W^r L_2$, где $r = p - m \ge 1$. В пространствах X и Y норму зададим формулами

$$\|y\|_Y \equiv \|y\|_{r;2} = \|y\|_2 + \|y^{(r)}\|_2, \quad y \in Y, \quad \|x\|_X = \|x^{(m)}\|_Y, \quad x \in X.$$

Лемма 4. *Пусть* $r = p - m \ge 1$ *и выполнены условия*
1) *функции* $g_k(t) \in W^r L_2$, $k = \overline{1,m}$,
2) *функции* $h_j(t,s) \in W^r L_2 \times L_1$, $j = \overline{0, p-1}$,
3) $h_p(t,s) \in W^r L_2 \times L_2$.

Тогда оператор $T : X \longrightarrow Y$ *вполне непрерывен.*

Введем оператор G m-кратного дифференцирования, т. е.

$$(Gx)(t) \equiv x^{(m)}(t), \quad x \in X. \tag{1.4}$$

Тогда в силу определения нормированных пространств X и Y оператор $G : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим. Последнее означает, что при выполнении условий леммы 4 задача (0.1)–(0.2) в паре пространств (X, Y) относится к классу операторных уравнений, приводящихся к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Поэтому к ней применима теория Фредгольма (см., напр., [9], [10]), из которой, в свою очередь, вытекает корректная постановка задачи в указанной паре функциональных пространств. Этот факт мы далее существенно будем использовать при теоретическом обосновании общего сплайн–проекционного метода для задачи (0.1)–(0.2).

2. Сплайн-проекционный метод

В паре пространств (X, Y) задачу (0.1)–(0.2) запишем в операторной форме

$$Kx \equiv Gx + Bx + Hx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{2.1}$$

где операторы G, B и H определены формулами (1.4), (1.3).

Пусть $Y_n \equiv Y_n(\varkappa) = S_{\Delta_n, 2r-1+\varkappa}$ — подпространство введенных выше сплайнов степени не выше $2r - 1 + \varkappa$ ($r = p - m \ge 1$) с узлами из сетки Δ_n, $X_n \equiv X_n(\varkappa)$ — подпространство сплайнов $s(t)$, удовлетворяющих краевым условиям (0.1) и обладающих свойствами
1) $s(t) \in \mathbb{H}_{m+2r-1+\varkappa}$ на каждом частичном промежутке (t_{i-1}, t_i), $i = \overline{2,n}$,
2) $s(t) \in \mathbb{H}_{m+r-1}$ на двух частичных промежутках $(-1, t_1)$ и $(t_n, 1)$,
3) $s(t) \in C^{(m+2r-2+\varkappa)}[-1,1]$.

Пусть $P_n : Y \longrightarrow Y_n$ — произвольно фиксированный оператор проектирования пространства Y на подпространство Y_n.

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать как точное решение операторного уравнения

$$K_n x_n \equiv G x_n + P_n B x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, \quad P_n y \in Y_n), \tag{2.2}$$

представляющего, как известно, уравнение сплайн-проекционного метода решения задачи (0.1)–(0.2).

Для метода (2.1), (2.2) имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

1) *функции* $y, g_k \in W^{p-m} L_2(-1,1)$, $k = \overline{1,m}$, $p \geq m+1$,
2) *функции* $h_j(t,s)$, $j = \overline{0, p-1}$, *имеют производную* $\frac{\partial^{p-m} h_j(t,s)}{\partial t^{p-m}} \in L_2 \times L_1$,
3) *существует производная* $\frac{\partial^{p-m} h_p(t,s)}{\partial t^{p-m}} \in L_2([-1,1]^2)$,
4) *проекционные операторы* $P_n : Y \longrightarrow Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, *ограничены по норме в совокупности,*
5) *задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение при любой правой части из* Y.

Тогда уравнение (2.2) *при всех* n, *начиная с некоторого натурального* n_0, *имеет единственное решение* $x_n^*(t)$. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$ *сходятся при* $n \to \infty$ *к точному решению* $x^*(t)$ *задачи* (0.1)–(0.2) *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O(E_{n,2r-1+\varkappa}(x^{*(m)})_Y), \quad r = p - m \geq 1, \tag{2.3}$$

где $E_{n,2r-1+\varkappa}(z)_Y$ *— наилучшее приближение функции* $z \in Y$ *сплайнами из подпространства* $Y_n = Y_n(\varkappa)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из леммы 4 и условий теоремы вытекает непрерывная обратимость оператора $K : X \longrightarrow Y$ уравнения (2.1). С другой стороны, подпространства X_n и Y_n, в которых задано уравнение (2.2), имеют одинаковую размерность $n - \varkappa$. Поэтому для доказательства утверждений теоремы согласно лемме 1 достаточно проверить близость правых частей уравнений (2.1) и (2.2) и операторов K и K_n на подпространстве X_n.

Для правых частей уравнений (2.1) и (2.2) с учетом предположения 4) теоремы имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_Y \leq 2 \ \ \|P_n\|_{Y \to Y} E_n(y)_Y = O\{E_n(y)_Y\} \to 0, \quad n \to \infty;$$
$$E_n(y)_Y = \inf_{y_n \in Y_n(\varkappa)} \|y - y_n\|_Y. \tag{2.4}$$

Возьмем теперь произвольное $x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, и рассмотрим

$$\|K x_n - K_n x_n\|_Y = \|T x_n - P_n T x_n\|_Y = \|x_n\|_X \cdot \|T z_n - P_n T z_n\|_Y,$$

где $T = B + H$, $z_n = x_n / \|x_n\|_X \in X_n$, $\|z_n\|_X = 1$. Поэтому с учетом леммы 4 о полной непрерывности оператора $T : X \longrightarrow Y$, оценки (2.4) и теоремы Гельфанда о равномерной сходимости на компакте сильно сходящейся последовательности линейных операторов в банаховом пространстве (см., напр., [4]) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \leq \sup_{u \in TS(0;1)} \|u - P_n u\|_Y \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $S(0;1)$ — единичный шар пространства X с центром в нуле.

Итак, все предположения леммы 1 выполнены, откуда получаем, что уравнение (2.2) однозначно разрешимо при всех натуральных n, для которых $q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\|_{Y \to X} < 1$. Более того, согласно той же лемме 1 операторы $K_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$ ограничены по норме в совокупности, а приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ в пространстве X

со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Для доказательства оценки (2.3) воспользуемся следствием леммы 1. Имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|(E - K_n^{-1} P_n T) G^{-1} (Gx^* - P_n G x^*)\|_X,$$

где E — единичный оператор в пространстве X. Отсюда и из (2.4) следует оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \big(1 + \|K_n^{-1}\| \, \|P_n\| \, \|T\|\big) \cdot \|G^{-1}\| \, \|Gx^* - P_n G x^*\|_Y = O\big\{E_{n,2r-1-\varkappa}(Gx^*)_Y\big\}. \qquad \square$$

3. Реализации общего проекционного метода

В этом разделе вкратце рассмотрим конкретные реализации исследованного в разделе 2 общего сплайн-проекционного метода решения задачи (0.1)–(0.2).

3.1. *Метод коллокации.* Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) будем искать в виде сплайна

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j t^j + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{(t - t_i)_+^{m+2r-1}}{(m + 2r - 1)!}, \tag{3.1}$$

где $t_+ \equiv \max(t; 0)$, $\{t_i\}$ — узлы сетки Δ_n, а $\{d_i\}$ удовлетворяют (см., напр., [6], с. 152) системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=1}^{n} d_i t_i^k = 0, \quad k = \overline{0, r-1}, \quad n \ge r. \tag{3.2}$$

Остальные неизвестные коэффициенты $\{c_j, d_i\}$ определим из СЛАУ

$$\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{kj} c_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} d_i = y_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3.3}$$

где

$$y_k = y(t_k), \quad \alpha_{kj} = (Kt^j)(t_k), \quad \beta_{ki} = \frac{1}{(m + 2r - 1)!} \big(K(t - t_i)_+^{m+2r-1}\big)(t_k). \tag{3.4}$$

Для вычислительной схемы (0.1), (0.2), (3.1)–(3.4) справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1)–3) *и* 5) *теоремы* 1. *Тогда СЛАУ* (3.2)–(3.4) *при всех натуральных n, начиная хотя бы с некоторого, имеет единственное решение $\{c_j^*, d_i^*\}$. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле* (3.1) *при $c_j = c_j^*$, $d_i = d_i^*$, сходятся при $n \to \infty$ к точному решению $x^*(t)$ задачи* (0.1)–(0.2) *в пространстве X со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n,r-1}(x^{*(p)})_2\}, \quad r = p - m \ge 1, \tag{3.5}$$

где $E_{n,r-1}(z)_2$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $z \in L_2$ сплайнами степени $r - 1$ на сетке Δ_n, являющимися постоянными на частичных промежутках $[-1, t_1]$ и $[t_n, 1]$.

Отметим, что утверждения теоремы 2 о разрешимости СЛАУ и сходимости приближенных решений к точному являются простым следствием теоремы 1, поскольку при $\varkappa = 0$ оператор $P_n = S_n : Y \longrightarrow Y_n$ сплайн-интерполирования по узлам $\{t_k\}_{k=1}^n$ согласно леммам 2 и 3 удовлетворяет условию 4) теоремы 1. Поэтому в доказательстве нуждается лишь оценка (3.5). Для этого заметим, что согласно лемме 3

$$\|y - P_n y\|_Y \le (2^{r/2} + 1) \|y^{(r)} - (P_n y)^{(r)}\|_2 = (2^{r/2} + 1) \cdot E_{n,r-1}(y^{(r)})_2, \quad y \in W^r L_2, \quad r = p - m \ge 1.$$

Поэтому из (2.3) и последнего неравенства вытекает

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n,2r-1}(x^{*(m)})_Y\} = O(E_{n,r-1}(x^{*(p)})_2). \qquad \square$$

Замечание. Из оценки (3.5) можно вывести утверждения о *равномерной сходимости* приближенных решений (3.1) к точному решению задачи (0.1)–(0.2). Для этого достаточно заметить, что из оценки (3.5) следует

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*\,(m)}\|_2 \le \|x^* - x_n^*\|_X = O(E_{n,r-1}(x^{*(p)})_2).$$

Поэтому, учитывая условия (0.1), при $k = \overline{0, m-1}$ находим

$$\|x^{*(k)} - x_n^{*(k)}\|_C \le 2^{(m-k)/2} \cdot \|x^{*(m)} - x_n^{*\,(m)}\|_2 \le 2^{(m-k)/2} \cdot \|x^* - x_n^*\|_X = O(E_{n,r-1}(x^{*(p)})_2). \quad (3.6)$$

3.2. *Метод подобластей.* Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) будем искать в виде сплайна

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j t^j + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{(t-t_i)_+^{m+2r}}{(m+2r)!}, \quad (3.7)$$

где $\{d_i\}$ удовлетворяют, как нетрудно показать, СЛАУ вида

$$\sum_{i=1}^{n} d_i t_i^k = 0, \quad k = \overline{0, r}, \quad n \ge r+1. \quad (3.8)$$

Остальные неизвестные коэффициенты $\{c_j, d_i\}$ определим из СЛАУ

$$\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{kj} c_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} d_i = y_k, \quad k = \overline{2, n}, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{gathered} y_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} y(t)dt, \quad \alpha_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (Kt^j)(t)dt, \\ \beta_{ki} = \frac{1}{(m+2r)!} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(K(t-t_i)_+^{m+2r}\big)(t)dt. \end{gathered} \quad (3.10)$$

Для вычислительной схемы (0.1), (0.2), (3.7)–(3.10) справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* 1)–3) *и* 5) *теоремы* 1. *Тогда СЛАУ* (3.8)–(3.10) *при всех достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *имеет единственное решение* $\{c_j^*, d_i^*\}$. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле* (3.7) *при* $c_j = c_j^*$, $d_i = d_i^*$, *сходятся при* $n \to \infty$ *к точному решению* $x^*(t)$ *задачи* (0.1)–(0.2) *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n,r}(x^{*(p)})_2\}, \quad r = p - m \ge 1, \quad (3.11)$$

где $E_{n,r}(z)_2$ *— наилучшее среднеквадратическое приближение функции* $z \in L_2$ *сплайнами степени* r *на сетке* Δ_n*, являющимися постоянными на частичных промежутках* $[-1, t_1]$ *и* $[t_n, 1]$.

Доказательство. При $\varkappa = 1$ введем оператор $\Pi_n : Y \longrightarrow Y_n \equiv Y_n(1)$, определяемый формулой

$$\Pi_n(\varphi; t) = \frac{d}{dt} S_n(f; \tau)d\tau, \quad f(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau,$$

где $S_n(f; t)$ — интерполяционный сплайн из подпространства $S_{\Delta_n, 2r+1}$.

Ясно, что выполняются соотношения

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Pi_n(\varphi;t)dt = S_n(f;t_j) - S_n(f;t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(t)dt, \quad j=\overline{2,n}.$$

Поэтому СЛАУ (3.8)–(3.10) эквивалентна операторному уравнению (2.2), заданному в паре подпространств (X_n, Y_n) при $\varkappa = 1$.

Из свойств оператора S_n следует

$$\|\varphi^{(r)} - (\Pi_n\varphi)^{(r)}\|_2 = \|f^{(r+1)} - (S_nf)^{(r+1)}\|_2 = E_{n,r}(f^{(r+1)})_2.$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_2 = \|f' - (S_nf)'\|_2 \le 2^{r/2}\|f^{(r+1)} - (S_nf)^{(r+1)}\|_2 = 2^{r/2}\|\varphi^{(r)} - (\Pi_n\varphi)^{(r)}\|_2.$$

Из последней оценки вытекает, что для любой функции $\varphi \in Y$

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_Y \le \big(2^{r/2}+1\big)E_{n,r}(\varphi^{(r)})_2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Следовательно, утверждения теоремы 3 о разрешимости СЛАУ и сходимости приближенных решений к точному также непосредственно следуют из теоремы 1, поскольку, как показано выше, при $\varkappa = 1$ оператор $P_n = \Pi_n : Y \longrightarrow Y_n$ удовлетворяет условию 4) теоремы 1. Оценка (3.11) легко выводится из полученного неравенства (3.12) и следствия к лемме 1. □

Литература

[1] Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов*, II // Изв. вузов. Математика. – 1968. – №10. – С. 21–29.

[2] Агачев Ю.Р. *Об оптимизации прямых методов решения обыкновенных интегродифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – №8. – С. 3–10.

[3] Агачев Ю.Р., Леонов А.И. *Решение одного класса интегро-дифференциальных уравнений методом механических квадратур* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – №8. – С. 3–7.

[4] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.

[5] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

[6] Лоран П.-Ж. *Аппроксимация и оптимизация.* – М.: Мир, 1975. – 496 с.

[7] Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1976. – 320 с.

[8] Никольский С.М. *Курс математического анализа.* Т. I. – М.: Наука, 1973. – 432 с.

[9] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[10] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1976. – 544 с.

Ю.Р. Агачев

доцент, кафедра теории функций и приближений,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

e-mail: jagachev@ksu.ru

Yu.R. Agachev

Associate Professor, Chair of Theory of Functions and Approximations,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: jagachev@ksu.ru