

УДК 539.3

## РАСЧЕТ УСИЛИВАЕМЫХ НАПРЯЖЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*М.Н. Серазутдинов, М.Н. Убайдуллоев*

### Аннотация

В статье описан вариационный метод расчета усиливаемых под нагрузкой тонкостенных стержневых систем открытого профиля. Приведены основные соотношения метода. Его основная особенность состоит в том, что он основан на использовании компонент деформаций для прямолинейной полосы, но применим для определения напряженно-деформированного состояния стержней, у которых продольная ось и срединная линия профиля поперечного сечения состоят как из прямолинейных, так и криволинейных участков. Представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния тонкостенного усиленного стержня при упругих и упругопластических деформациях.

**Ключевые слова:** тонкостенный стержень, открытый профиль, усиление стержня, напряженно-деформированное состояние.

В настоящей статье изложен метод определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных усиленных стержней открытого профиля. Ранее аналогичный подход использовался для расчета нетонкостенных стержней [1]. Метод является достаточно универсальным, так как основан на простейших соотношениях теории тонкостенных прямолинейных стержней открытого профиля [2]. Он может использоваться для расчета стержневых систем, элементами которых могут быть прямолинейные и криволинейные стержни с различной, в том числе и криволинейной, формой профиля.

Нами приняты основные допущения теории тонкостенных стержней с учетом сдвигов [2, 3]. В глобальной декартовой системе координат  $Oxyz$  (рис. 1) вводятся мера деформации  $\tilde{\beta}(x)$ , а также вектора перемещения и углов поворота с компонентами  $\tilde{u}_1(x)$ ,  $\tilde{u}_2(x)$ ,  $\tilde{u}_3(x)$  и  $\tilde{\varphi}_1(x)$ ,  $\tilde{\varphi}_2(x)$ ,  $\tilde{\varphi}_3(x)$ .

Деформации и напряжения вычисляются в локальной декартовой системе координат  $Mx_t y_t z_t$ , начало которой расположено на срединной линии поперечного сечения, ось  $My_t$  направлена по касательной к этой линии, а ось  $Mz_t$  лежит в плоскости поперечного сечения стержня (рис. 1). Используются формулы [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s), \\ \gamma_{x_t y_t} &= \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \rho(y_m, z_m) + \\ &+ \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_m, z_m) + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\gamma_{x_t z_t} = 0.$$

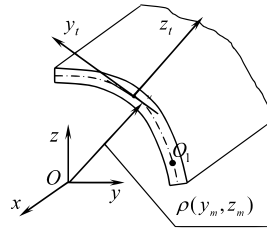


Рис. 1

Здесь  $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – компоненты вектора перемещения и углов поворота в локальной системе координат  $Mx_t y_t z_t$ ;  $\beta$  – мера депланации сечения;  $\rho(y_m, z_m) = y_m t_z - z_m t_y$  – длина перпендикуляра, проведенного из начала координат  $xyz$  к касательной к срединной линии сечения в точке  $M$ ;  $\omega(y, z) = \omega(s) = \int_0^s \rho ds$  – секториальная площадь профиля;  $t_y, t_z$  – направляющие косинусы осей  $My_t, Mz_t$ ;

$$y = y_m + y_t t_y + z_t t_z, \quad z = z_m + y_t t_z - z_t t_y, \quad t_y = dy/ds, \quad t_z = dz/ds.$$

Для описания НДС стержневой системы используется теория идеально пластического тела, согласно которой в тех точках сечения, где возникают упругие деформации, зависимость между напряжениями и деформациями описывается законом Гука

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{x_t y_t} = G\gamma_{x_t y_t}. \quad (2)$$

В точках же возникновения пластических деформаций, согласно критерию пластичности Губера – Мизеса,  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{x_t y_t}^2} = \sigma_T$ , а нормальные и касательные напряжения следует определять по формулам

$$\sigma_x^{pl} = \sigma_x/K, \quad \tau_{x_t y_t}^{pl} = \tau_{x_t y_t}/K, \quad (3)$$

где  $K = \sigma_i/\sigma_T$ ;  $\sigma_x$  и  $\tau_{x_t y_t}$  – напряжения, вычисленные с использованием закона Гука (2).

Из соотношений (1), (2) следует, что касательные напряжения и деформации сдвига можно представить в следующем виде:

$$\tau_{x_t y_t} = \tau + \tau_{x_t y_t}^k, \quad \gamma_{x_t y_t} = \gamma + \gamma_{x_t y_t}^k, \quad (4)$$

где  $\tau$  – постоянное по толщине стенки среднее касательное напряжение;  $\tau_{x_t y_t}^k$  – напряжение чистого кручения, распределенное по толщине стенки по линейному закону

$$\begin{aligned} \tau &= G\gamma, \quad \tau_{x_t y_t}^k = G\gamma_{x_t y_t}^k, \\ \gamma &= \left[ \frac{du_2(x)}{dx} - \varphi_3(x) \right] t_y + \left[ \frac{du_3(x)}{dx} + \varphi_2(x) \right] t_z + \left[ \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \beta(x) \right] \rho(y_m, z_m), \\ \gamma_{x_t y_t}^k &= G \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t. \end{aligned}$$

Расчет НДС усиливаемой конструкции состоит из следующих этапов.

1. Определяются ремонтные напряжения  $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$ , возникающие в элементах конструкции от нагрузок, действующих в период ремонта или усиления (ремонтных нагрузок);

2. Проводится расчет НДС конструкции с учетом усиления элементов сооружения, действия эксплуатационных нагрузок и наличия ремонтных напряжений.

Компоненты перемещений элементов стержневой конструкции определяются из вариационного уравнения

$$\delta U_e + \delta U_p - \delta W = 0, \quad (5)$$

где  $\delta U_e$  – вариация потенциальной энергии деформации стержневой системы в зоне упругих деформаций;  $\delta U_p$  – вариация потенциальной энергии в зоне пластических деформаций;  $\delta W$  – вариация работы внешних нагрузок.

С учетом напряжений  $\sigma_x^p$ ,  $\tau_{x_t y_t}^p$ , возникающих от воздействия ремонтных нагрузок, выражения для  $\delta U_e$  и  $\delta U_p$  имеют вид

$$\begin{aligned} \delta U_e = & \int_{l_e} \left[ \iint_{A^y} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^z \delta \gamma_{x_t y_t}^z) dA + \iint_{A^p} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^p \delta \gamma_{x_t y_t}^z) dA \right] dl + \\ & + \int_{l_p} \left[ \iint_{A_e^y} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^z \delta \gamma_{x_t y_t}^z) dA + \iint_{A_e^p} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^p \delta \gamma_{x_t y_t}^z) dA \right] dl, \quad (6) \\ \delta U_p = & \int_{l_p} \left[ \iint_{A_{pl}^y} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^p \delta \gamma_{x_t y_t}^z) dA \right] dl, \end{aligned}$$

где  $l_e$ ,  $l_p$  – длины участков стержней, в которых возникают соответственно упругие и упругопластические деформации;  $A^p$ ,  $A^y$  – площади поперечных сечений до и после усиления;  $A_e^y$ ,  $A_{pl}^y$  – площади областей поперечного сечения стержней, в которых возникают упругие и пластические деформации;  $A_e^p$  – площади сечений, в которых возникают упругие деформации и действуют ремонтные напряжения.

Отметим, что в выражениях (6) вместо напряжений и деформаций  $\tau_{x_t y_t}$ ,  $\gamma_{x_t y_t}$ , определяемых по формуле (4), используются  $\tau_{x_t y_t}^z = \tau + k^* \tau_{x_t y_t}^k$  и  $\gamma_{x_t y_t}^z = \gamma + k^* \gamma_{x_t y_t}^k$ , где  $k^*$  – коэффициент, введение которого связано с особенностями теории чистого кручения стержней открытого профиля. Как известно [3], при чистом кручении узкой полосы касательные напряжения  $\tau_{x_t y_t}$ ,  $\tau_{x_t z_t}$  вносят одинаковый вклад в величину момента чистого кручения  $H$ . Следовательно, напряжения  $\tau_{x_t z_t}$  должны вносить в величину потенциальной энергии деформации стержня такой же вклад, как и  $\tau_{x_t y_t}$ . Однако согласно принятой в теории тонкостенных стержней гипотезе безмоментности полагалось  $\tau_{x_t z_t} = 0$ . Для компенсации отсутствия в выражении (6) для потенциальной энергии деформации напряжения  $\tau_{x_t z_t}$ , в формулы  $\tau_{x_t y_t}$ ,  $\gamma_{x_t y_t}$  введен коэффициент  $k^*$  [2]. При расчетах следует полагать  $k^* = 2$ .

Вариация работы внешних сил, действующих на стержневую систему после усиления, определяется по формуле

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{l_c} [\tilde{q}_1^y(x) \delta \tilde{u}_1(x) + \tilde{q}_2^y(x) \delta \tilde{u}_2(x) + \tilde{q}_3^y(x) \delta \tilde{u}_3(x)] dl + \\ & + \sum_{k=1}^K [\tilde{F}_{1k}^y \delta \tilde{u}_1(x_k) + \tilde{F}_{2k}^y \delta \tilde{u}_2(x_k) + \tilde{F}_{3k}^y \delta \tilde{u}_3(x_k)] + \\ & + \sum_{j=1}^J [\tilde{M}_{1j}^y \delta \tilde{\varphi}_1(x_j) + \tilde{M}_{2j}^y \delta \tilde{\varphi}_2(x_j) + \tilde{M}_{3j}^y \delta \tilde{\varphi}_3(x_j)]. \end{aligned}$$

Здесь  $l_c$  – длина элементов стержневой системы;  $\tilde{q}_1^y$ ,  $\tilde{q}_2^y$ ,  $\tilde{q}_3^y$ ,  $\tilde{F}_{1i}^y$ ,  $\tilde{F}_{2i}^y$ ,  $\tilde{F}_{3i}^y$ ,  $\tilde{M}_{1k}^y$ ,  $\tilde{M}_{2k}^y$ ,  $\tilde{M}_{3k}^y$  – нагрузки, действующие на конструкцию после усиления.

Для вычисления интегралов, входящих в вариационное уравнение (5), применяется численное интегрирование с использованием квадратурной формулы Гаусса. Интегрирование проводится по длине стержней и площади их поперечных сечений с учетом зон упругих и пластических деформаций.

При использовании условия (5) стержневая система разбивается на  $N$  участков, на каждом из которых компоненты векторов перемещений, углов поворота и мера депланации представляются в виде рядов

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k^i = \sum_{m=1}^M C_{km}^i f_m(t), \quad \tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}_k^i = \sum_{m=1}^M D_{km}^i f_m(t), \quad \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1^i = \sum_{m=1}^M B_{1m}^i f_m(t).$$

Здесь  $k = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $C_{km}^i$ ,  $D_{km}^i$ ,  $B_{1m}^i$  – неизвестные постоянные;  $f_m(t)$  – функции формы;  $f_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$ ,  $f_2(t) = 3t^2 - 2t^3$ ,  $f_3(t) = t(1 - t^2)l$ ,  $f_4(t) = (t^3 - t^2)l$ ,  $f_m(t) = (1 - t)^2 t^{(m-3)}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $m = 5, 6, \dots, M$ .

Для определения коэффициентов  $C_{km}^i$ ,  $B_{1m}^i$ ,  $D_{km}^i$  из вариационного уравнения (5) получается система алгебраических уравнений. После решения этой системы уравнений перемещения деформации и напряжения вычисляются по приведенным выше формулам.

Размер области пластических деформаций в стержнях определяется итерационным методом. На первой итерации деформации считаются упругими ( $A_p^y = 0$ ), а на последующих итерациях в каждой точке интегрирования проверяется выполнение условия  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} < \sigma_T$ . При выполнении этого условия в точке возникают упругие деформации, а если  $\sigma_i \geq \sigma_T$ , то данная точка относится к области пластических деформаций, и напряжения следует вычислять по формулам (3). Итерационный процесс определения областей пластических деформаций заканчивается при выполнении условия  $|(M^{(n)} - M^{(n+1)})/M^{(n+1)}| \cdot 100\% \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная малая величина,  $M^{(n)}$ ,  $M^{(n+1)}$  – наибольшие изгибающие моменты в сечениях элементов стержневой системы на двух последующих итерациях.

Отметим, что использование формулы (2) для касательных напряжений позволяет достаточно точно вычислять интегральные характеристики. Однако для определения распределения по сечению стержня постоянных по толщине стенки касательных напряжений  $\tau$  следует применять формулы, которые получаются из уравнений равновесия отсеченной части стержня. В частности, если на боковых поверхностях стержня отсутствуют касательные напряжения, а точка отсчета  $O_1$  выбрана внутри сечения, то можно полагать

$$\tau = \tau^{otc} = E \left[ \frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} A_o + \frac{d\varphi_2(x)}{dx^2} S_{oy} - \frac{d^2 \varphi_3(x)}{dx^2} S_{oz} - \frac{d^2 \beta(x)}{dx^2} S_{o\omega} \right].$$

Здесь  $S_{oy} = \iint_{A_o} z dA$ ,  $S_{oz} = \iint_{A_o} y dA$ ,  $S_{o\omega} = \iint_{A_o} \omega dA$ ;  $A_o$  – площадь отсеченной части сечения.

Усилия и моменты, возникающие в поперечных сечениях стержня, вычисляются по формулам

$$N = \iint_{A_e^y} \sigma_x dA + \iint_{A_p^y} \sigma_x^{pl} dA, \quad Q_y = \iint_{A_e^y} \tau t_y dA + \iint_{A_p^y} \tau^{pl} t_y dA,$$

$$Q_z = \iint_{A_e^y} \tau t_z dA + \iint_{A_p^y} \tau^{pl} t_z dA, \quad M_y = \iint_{A_e^y} \sigma_x z dA + \iint_{A_p^y} \sigma_x^{pl} z dA,$$

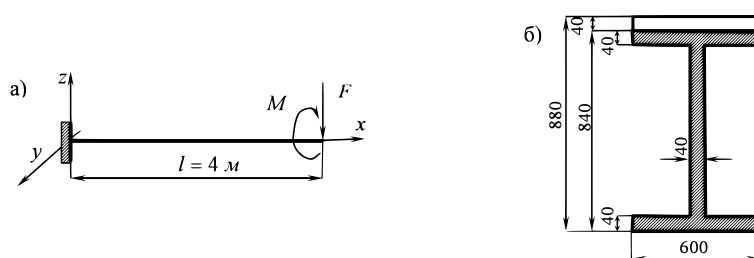


Рис. 2. Расчетная схема (а) и поперечное сечение стержня (б)

Табл. 1

## Результаты расчетов

Вычисленные параметры	$\varphi_1$ , рад	$\beta$ , $\text{м}^{-1}$	$B$ , $\text{кН}\cdot\text{м}^2$	$A_p$ , $\text{м}^2$
При действии ремонтных нагрузок $M^p = 40$ кНм, $F^p = 500$ кН				
Без учета деформации сечения	0.0478	–	–	0
С учетом деформации	0.0128	0.00465	117.0	0
После усиления стержня $M^y = 80$ кНм, $F^y = 1000$ кН				
Без учета деформации сечения	0.0491	–	–	0
С учетом деформации	0.0177	0.00637	198.0	0.00402

$$M_z = \iint_{A_e^y} \sigma_{xy} dA + \iint_{A_e^p} \sigma_x^{pl} y, dA,$$

$$B = \iint_{A_e^y} \sigma_x \omega dA + \iint_{A_e^p} \sigma_x^{pl} \omega dA, \quad H = k^* \iint_{A_e^y} \tau_{xtyt} z_t dA + k^* \iint_{A_{pl}^y} \tau_{xtyt}^{pl} z_t dA,$$

$$M_\omega = \iint_{A_e^y} (\tau^{otc} t_z y - \tau^{otc} t_y z) dA + \iint_{A_{pl}^y} (\tau^{pl} t_z y - \tau^{pl} t_y z) dA.$$

В табл. 1 приведены результаты расчета консольного стержня, нагруженного силой и крутящим моментом (рис. 2, а). При усилении стержня его сечение в виде двутавра увеличивается за счет присоединения к верхней полке двутавра стержня с прямоугольным поперечным сечением (рис. 2, б). Материал основного и усиливающего элементов – сталь № 3 ( $\sigma_T = 240$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа). До усиления на стержень действовали нагрузки  $M = M^p = 40$  кНм и  $F = F^p = 500$  кН, после усиления –  $M = M^y = 80$  кНм и  $F = F^y = 1000$  кН, эти нагрузки складываются из нагрузок, действующих в период ремонта и прикладываемых к конструкции после выполненного усиления.

В табл. 1 приведены максимальные значения угла закручивания стержня  $\varphi_1$ , деформации  $\beta$ , бимоменты  $B$ , которые получены для стержня до и после усиления, с учетом и без учета деформации сечения.

Как видно из представленных данных, учет деформации сечений стержня оказывает существенное влияние на характеристики НДС усиленного и неусиленного стержней. При расчете без учета деформации сечений стержня возникающие деформации и напряжения являются упругими ( $A_p = 0$ ). Если расчет выполняется с учетом деформации, то появляются зоны пластических деформаций ( $A_p = 0.00402$  м<sup>2</sup>). Таким образом, в случаях, подобных рассмотренному в примере, без учета деформации невозможно даже предсказать возникновение пластических деформаций в усиленном стержне.

### Summary

*M.N. Serazutdinov, M.N. Ubaydulloyev.* Calculation of Open Profile Thin-Walled Rod Systems Strengthened Under Load in Elastic and Plastic Deformations.

This paper presents a variational method for calculation of open profile thin-walled rod systems strengthened under load. The main relations of the method are described. The principal feature of the method is that it is based on the use of deformation components for a straight-line strip and also applicable for determining the stress-strain state of rods, the longitudinal axis and median line of cross-sectional profile of which consist of both straight-line and curved sections. Calculation results of the stress-strain state of thin-walled strengthened rod in elastic and elastic-plastic deformations are discussed.

**Keywords:** thin-walled rod, open profile, strengthening of rod, stress-strain state.

### Литература

1. *Серазутдинов М.Н., Хайруллин Ф.С.* Метод расчета криволинейных стержней // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 5. – С. 104–108.
2. *Серазутдинов М.Н.* Вариационные соотношения теории тонкостенных стержней открытого профиля // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2013. – Т. 16, № 5. – С. 216–223.
3. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. - М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.

Поступила в редакцию  
10.11.14

---

**Серазутдинов Мурат Нуриевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *serazmn@mail.ru*

**Убайдуллоев Маджид Насриевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *madgidpwn@rambler.ru*