УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 152, кн. 4* Физико-математические науки *2010*

УДК 539.3

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ. IV. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*А.И. Голованов*, *Ю.Г. Коноплев*, *Л.У. Султанов*

**Аннотация**

Настоящая работа является продолжением цикла статей «Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел» и посвящена конечноэлементной реализации алгоритма, который описан в первых трех частях. Приведены различные потенциалы упругих деформаций. На примере одного из них проведено численное численное исследование конечных деформаций.

**Ключевые слова:** конечные деформации, гиперупругость, метод конечных элементов.

## Введение

Первая часть цикла статей была посвящена общим вопросам нелинейной механики твердого деформируемого тела, рассмотрены основные положения кинематики конечных деформаций, приведены основные тензоры и соотношения, описывающие движение сплошной среды. Изложены основные виды вариационных уравнений, использующихся в численных методиках решения [1]. Вторая часть посвящена вопросу построения определяющих соотношений при конечных деформациях для гиперупругого изотропного материала, а также для слабосжимаемых материалов [2]. Третья часть посвящена описанию методики численной реализации исследования гиперупругих тел на основе метода последовательных нагружения, приводятся различные постановки и способы реализации алгоритмов решения [3].

В настоящей статье рассмотрен слабосжимаемый материал. Кинематика среды описывается левым тензором деформаций Коши – Грина. Приведены несколько вариантов законов сжимаемости и упругих потенциалов. Далее рассмотрен конкретный вид упругого потенциала, для которого приводится вывод определяющих соотношений, выражающих производную Трусдела напряжений Коши- Эйлера через деформации скорости. Использован вариант разрешающих уравнений на основе принципа виртуальных мощностей, записанного в текущей конфигурации. Для дискретизации уравнений применен восьмиузловой конечный элемент. Приведены все необходимые соотношения для вычислений. В качестве тестовой решена задача о плоском деформировании полосы, а также задачи о деформировании круглой и квадратной плит, находящихся под давлением.

## 1. Слабосжимаемый изотропный материал

Рассмотрим слабосжимаемый изотропный материал, кинематика среды будет определяться левым тензором деформаций Коши – Грина $(B)$. Тогда упругий потенциал запишется в следующем виде:

$$W = W\left(I_{1\widehat{B}}, I_{2\widehat{B}}\right) + W_0\left(J\right).$$

В результате имеем физические соотношения для тензора истинных напряжений в виде суммы шарового тензора и девиатора [2]:

$$(\Sigma) = \widehat{\psi}_0 (I) + 2 \left( \widehat{G}' \right),$$

где

$$\sigma_0 = \widehat{\psi}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial J}; \quad (\Sigma') = 2 \left( \widehat{G}' \right).$$

Для описания сжимаемости часто используют величину истинной сжимаемости в виде

$$k_c = \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\sigma_0} = \frac{d}{d\sigma_0} \ln J. \tag{1}$$

Если эту величину считать постоянной, из (1) следует закон сжимаемости при умеренных давлениях:

$$\sigma_0 = K \ln J, \tag{2}$$

где $K = 1/k_c$ – модуль объемного расширения. Для малых давлений (малых изменениях объема) из (1) получаем упрощенный закон сжимаемости:

$$\sigma_0 = \frac{K (J-1)}{J} = K \left( 1 - \frac{1}{J} \right) = K \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

В качестве других возможных законов сжимаемости в [4] предлагается использовать:

– закон Мурнагана (F. Murnaghan)

$$W_0 = \frac{K}{J} \left[ (J-1) + (k_c - 1)^{-1} \left( J^{1-k_c} - 1 \right) \right]; \tag{3}$$

– закон умеренных давлений

$$W_0 = K \left[ J \ln J - (J-1) \right];$$

– упрощенный закон

$$W_0 = \frac{K}{2} (J-1)^2. \tag{4}$$

В работе [5] предлагается закон, обобщающий неогуковский материал и материал Муни–Ривлина:

$$W_0 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{D_k} (J-1)^{2k}. \tag{5}$$

В работе [6] приводится выражение

$$W_0 = K \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right]. \tag{6}$$

В работах [7–9] используется потенциал

$$W_0 = \frac{K}{2} (\ln J)^2,$$

который приводит к закону (2). В работе [11] дано выражение

$$W_0 = \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 - \mu \ln J.$$

Отметим также потенциал [10]

$$W = \frac{2\mu}{\alpha_k \beta_k} \sum_{k=1}^{3} \left( J_k^{-\alpha_k \beta_k} - 1 \right).$$

Сдвиговые напряжения описывает функционал $W\left(I_{1\widehat{B}}, I_{2\widehat{B}}\right)$, простейший вид которого [9]:

$$W = \frac{\mu}{2}\left(I_{1\widehat{B}} - 3\right). \tag{7}$$

Отсюда следует

$$(\Sigma') = \mu\left(\widehat{B}'\right).$$

Дополнительные сведения о возможных формах потенциала упругой энергии изменения объема можно найти в [14]. Для справки приведем некоторые выражения потенциала $W\left(I_{1\widehat{B}}, I_{2\widehat{B}}\right)$. В паре с выражением (5) используется

$$W = \sum_{k=1}^{3} C_k \left(I_{1\widehat{B}} - 3\right)^k,$$

с выражением ( 6)

$$W = \sum_{k=1}^{5} \frac{C_k}{V_k^{2k-1}} \left(I_{1\widehat{B}}^k - 3^k\right),$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{20}; \quad C_3 = \frac{11}{1050}; \quad C_4 = \frac{19}{7000}; \quad C_5 = \frac{519}{673750}.$$

## 2. Физические соотношения и разрешающее уравнение для неогуковского материала

Рассмотрим пример построения физических соотношений для следующего потенциала упругих деформаций (здесь используются выражения (4) и (7)):

$$W = \frac{\mu}{2}\left(I_{1\widehat{B}} - 3\right) + \frac{K}{2}\left(J - 1\right)^2, \tag{8}$$

где $\mu$ – модуль сдвига. Запишем линеаризованное выражение для скорости изменения напряжений Коши–Эйлера [2]:

$$\left(\dot{\Sigma}\right) = 2\left\{\frac{1}{J}\left(\dot{B}\right)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right) + \frac{1}{J}\left[(B)\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial B^2}\right)\right]\cdot\cdot\left(\dot{B}\right) - \frac{1}{J}(B)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial B}\right) I_{1h}\right\},$$

которое можно преобразовать к виду:

$$\left(\dot{\Sigma}\right) = (\Lambda)\cdot\cdot(d) + (h)\cdot(\Sigma) + (\Sigma)\cdot(h)^T - (\Sigma)\, I_{1d}, \tag{9}$$

где

$$(\Lambda) = (\Lambda_{\Sigma'}) + (\Lambda_{\sigma_0}),$$

$$(\Lambda_{\Sigma'}) = \frac{4}{J}\,(B)\cdot\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial B \partial B}\right)\cdot(B) \;=$$

$$= \; 2\mu J^{-5/3}\left[\frac{1}{3} I_{1B}\left(C_{II}\right) - \frac{1}{3}(B)(I) - \frac{1}{3}(I)(B) + \frac{1}{9} I_{1B}(I)(I)\right],$$

$$(\Lambda_{\sigma_0}) = \frac{4}{J}\,(B)\cdot\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial B\partial B}\right)\cdot(B) \;=$$

$$= \;2K\left[\frac{1}{2}\,(J-1)\,(I)\,(I)+\frac{1}{2}J\,(I)\,(I)-(J-1)\,(C_{II})\right].$$

Таким образом, получим физические соотношения, выражающие производную Трусделла через деформацию скорости:

$$\left(\Sigma^{Tr}\right) = \left({}^k\Lambda\right)\cdot\cdot\,(d)\,. \tag{10}$$

Для решения задачи применяется метод последовательных нагружений [3]. В качестве основного используется вариационное уравнение принципа виртуальных мощностей, записанное в актуальном состоянии, которое для $k$-го состояния будет иметь вид [3]:

$$\int\limits_{V_k}\Big\{\left({}^k\dot{\Sigma}\right)\cdot\cdot\left(\delta^k d\right)+\left[{}^k\nabla_y\cdot{}^k\upsilon\right]\left({}^k\Sigma\right)\cdot\cdot\left(\delta^k d\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left({}^k\Sigma\right)\cdot\cdot\left[\left(\delta^k h\right)\cdot\left({}^k h\right)+\left({}^k h\right)^T\cdot\left(\delta^k h\right)^T\right]-\left[{}^k\nabla_y\cdot{}^k\upsilon\right]{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\Big\}\,dV_k+$$

$$+\int\limits_{S_k^\sigma}\Big\{{}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\left({}^k h\right)^T-\left[{}^k\nabla_y\cdot{}^k\upsilon\right]{}^k\mathbf{t}_n^*\Big\}\cdot\delta\upsilon\,dS_k=\int\limits_{V_k}{}^k\dot{\mathbf{f}}^*\cdot\delta\upsilon\,dV_k+\int\limits_{S_k^\sigma}{}^k\dot{\mathbf{t}}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS_k-$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V_k}\left({}^k\Sigma\right)\cdot\cdot\left(\delta^k d\right)\,dV_k-\int\limits_{V_k}{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\,dV_k-\int\limits_{S_k^\sigma}{}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS_k\right\}.$$

Подставляя в последнее уравнение физические соотношения (10), получим разрешающее уравнение

$$\int\limits_{V_k}\Big\{\left({}^k d\right)\cdot\cdot\left({}^k\Lambda\right)\cdot\cdot(\delta d)+\frac{1}{2}\left({}^k\Sigma\right)\cdot\cdot\left[(\delta h)^T\cdot\left({}^k h\right)+\left({}^k h\right)^T\cdot(\delta h)\right]-$$

$$-\left[{}^k\nabla_y\cdot{}^k\upsilon\right]{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\Big\}\,dV_k+\int\limits_{S_k^\sigma}\Big\{{}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\left({}^k h\right)^T-\left[{}^k\nabla_y\cdot{}^k\upsilon\right]{}^k\mathbf{t}_n^*\Big\}\cdot\delta\upsilon\,dS_k=$$

$$=\int\limits_{V_k}{}^k\dot{\mathbf{f}}^*\cdot\delta\upsilon\,dV_k+\int\limits_{S_k^\sigma}{}^k\dot{\mathbf{t}}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS_k-$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V_k}\left({}^k\Sigma\right)\cdot\cdot\left(\delta^k d\right)\,dV_k-\int\limits_{V_k}{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\,dV_k-\int\limits_{S_k^\sigma}{}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS_k\right\}. \tag{11}$$

Полученное уравнение является линейным относительно скорости ${}^k\upsilon$. Поэтому после численной дискретизации может быть получена система линейных алгебраических уравнений для соответствующих узловых значений проекций скоростей ${}^k\upsilon_i$. Так как исследуемые процессы не имеют явного динамического характера (ускорения не учитываются), то под временем можно понимать любой монотонно возрастающий параметр, определяющий изменение нагрузки. В таком аспекте вполне

уместно принять производную по времени как отношение приращения соответствующих величин, получаемые при переходе с $k$-го состояния в $(k+1)$-е. Например,

$$^k\upsilon = \frac{\Delta^k \mathbf{u}}{\Delta t}.$$

Теперь, в силу произвольности параметра $t$ вполне допустимо принять $\Delta t=1$. В результате из (11) получаем уравнения для приращений перемещений $\Delta^k\mathbf{u}$.

## 3. Конечноэлементная дискретизация

В качестве базового в настоящей работе используется трехмерный восьмиузловой изопараметричекий конечный элемент. Введем аппроксимацию геометрии и скорости

$$\begin{aligned} {}^k y^i\left(\xi^j\right) &= \sum_{t=1}^{8} {}^k y_t^i N_t\left(\xi^j\right), \\ {}^k \upsilon^i\left(\xi^j\right) &= \sum_{t=1}^{8} {}^k \upsilon_t^i N_t\left(\xi^j\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $N_t\left(\xi^j\right) = \frac{1}{8}\left(1+\xi_t^1\xi^1\right)\left(1+\xi_t^2\xi^2\right)\left(1+\xi_t^3\xi^3\right)$ – функция формы, $-1 \leqslant \xi^1, \xi^2, \xi^3 \leqslant 1$, ${}^k y_t^i$ – координаты узлов ($k$ – номер шага нагружения, $t$ – номер узла в элементе), $\xi_t^i = \pm 1$ – координаты соответствующих узлов в локальной системе координат, ${}^k\upsilon_t^i$ – скорости узлов.

Приведенные выше функции формы обладают свойствами полноты и конформности, то есть образуют полные полиномы и при стыковке двух элементов обеспечивают непрерывность функций ${}^k\upsilon^i$ и ${}^kR^i$. Для перехода от $\frac{\partial^k \upsilon}{\partial \xi^i}$ к $\frac{\partial^k \upsilon}{\partial^k y^i}$ строим матрицу Якоби $[A]$:

$${}^kA_{ji} = \frac{\partial^k y^i}{\partial \xi^j} = \sum_{t=1}^{8} {}^k y_t^i \frac{\partial N_t}{\partial \xi^j}.$$

Затем вычисляем матрицу, обратную к $[A]$, и с ее помощью находим искомые производные $\left[{}^kC\right] = \left[{}^kA\right]^{-1}$, $\frac{\partial}{\partial^k y^i} = {}^kC_{ij}\frac{\partial}{\partial \xi^j}$. Так, например, вычисляется производная от функции формы:

$$\frac{\partial N_t}{\partial y^i} = C_{ij}\frac{\partial N_t}{\partial \xi^j} = H_{t,i}. \tag{13}$$

Здесь и далее номер шага $k$ опущен.

Теперь с помощью (12) и (13) определим компоненты тензоров $(B)$, $(h)$, $(d)$:

$$B^{ij} = \sum_{t=1}^{8} y_t^i y_s^j N_{t,m} N_{s,m}, \tag{14}$$

$$h^{ij} = \frac{\partial \upsilon^i}{\partial y^j} = \upsilon^{i,j} = \frac{\upsilon_t^i N_t\left(\xi^j\right)}{\partial y^j} = \sum_{t=1}^{8} C_{jm}\upsilon_t^i \frac{\partial N_t\left(\xi^j\right)}{\partial \xi^m} =$$

$$= \sum_{t=1}^{8} C_{jm}\upsilon_t^i N_{t,m} = \sum_{t=1}^{8} \upsilon_t^i H_{t,j}, \tag{15}$$

$$d^{ij} = \frac{1}{2}\left(\upsilon^{i,j} + \upsilon^{j,i}\right) = \sum_{t=1}^{8} \frac{1}{2}\left(\upsilon_t^i H_{t,j} + \upsilon_t^j H_{t,i}\right). \tag{16}$$

Распишем слагаемые подынтегрального выражения в левой части уравнения (11):

$$(d)\cdot\cdot(\Lambda)\cdot\cdot(\delta d) = d^{ij}\Lambda_{jikl}\delta d^{lk} = \frac{1}{2}\left[\left(\upsilon^{i,j} + \upsilon^{j,i}\right) -\right]\Lambda_{jikl}\frac{1}{2}\left(\delta\upsilon^{l,k} + \delta\upsilon^{k,l}\right) =$$

$$= \upsilon^{i,j}\frac{1}{4}\left(\Lambda_{jilk} + \Lambda_{ijlk} + \Lambda_{jikl} + \Lambda_{ijkl}\right)\delta\upsilon^{k,l} =$$

$$= \upsilon_t^i H_{t,j}\frac{1}{4}\left(\Lambda_{jilk} + \Lambda_{ijlk} + \Lambda_{jikl} + \Lambda_{ijkl}\right)H_{s,l}\delta\upsilon_s^k,$$

$$\frac{1}{2}(\Sigma)\cdot\cdot\left[(\delta h)^T\cdot(h) + (h)^T\cdot(\delta h)\right] = \sigma_{ij}\upsilon^{n,i}\delta\upsilon^{n,j} = \sigma_{ij}\upsilon_t^n H_{t,i}H_{s,j}\delta\upsilon_s^n,$$

$$\left[{}^k\nabla_y\cdot{}^k\upsilon\right]{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon = \upsilon_t^m H_t^m f_q^i N_q N_s\delta\upsilon_s^i,$$

$$\mathbf{t}_n^*\cdot(h)^T - \left[\nabla_y\cdot\upsilon\right]\mathbf{t}_n^* = \left(\upsilon_t^i H_{t,j}t_{nj}^* - t_{nm}^*\upsilon_t^m H_{t,m}\right)\delta\upsilon_s^i.$$

Таким образом, (11) после аппроксимации принимает вид

$$\int\limits_V \{(d)\cdot\cdot(\Lambda)\cdot\cdot(\delta d) +$$

$$+\frac{1}{2}\left({}^k\Sigma\right)\cdot\cdot\left[(\delta h)^T\cdot\left({}^kh\right) + \left({}^kh\right)^T\cdot(\delta h)\right] - \left[\nabla_y\cdot\upsilon\right]\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\}\,dV =$$

$$= \iiint\limits_V \sum_{q,t,s=1}^{8}\sum_{k,l=1}^{3}\sum_{i,j=1}^{3}\left[\upsilon_t^i H_{t,j}\frac{1}{4}\left(\Lambda_{jilk} + \Lambda_{ijlk} + \Lambda_{jikl} + \Lambda_{ijkl}\right)H_{s,l}\delta\upsilon_s^k +\right.$$

$$\left. + \sigma_{ij}\upsilon_t^l H_{t,i}H_{s,j}\delta\upsilon_s^l - \upsilon_t^l H_t^l f_q^i N_q N_s\delta\upsilon_s^i\right]\det[J]\,d\xi^1 d\xi^3 d\xi^3. \tag{17}$$

$$\int\limits_{S^\sigma}\left\{\mathbf{t}_n^*\cdot(h)^T - \left[\nabla_y\cdot\upsilon\right]\mathbf{t}_n^*\right\}\cdot\delta\upsilon\,dS =$$

$$= \iint\limits_{S^\sigma}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{t=1}^{8}\left[\upsilon_t^i H_{t,j}t_{nj}^* - t_{ni}^*\upsilon_t^i H_{t,i}\right]\delta\upsilon_s^i\det[J]\,d\xi^1\,d\xi^3. \tag{18}$$

При вычислении интегралов используется схема численного интегрирования – интегрирование заменяется суммированием значений подынтегральных выражений в квадратурных точках, умноженных на весовые коэффициенты. Тогда после интегрирования (17), 18) получим матрицу левых частей $\{\delta\upsilon\}^T[K]\{\upsilon\}$. Используя соотношения аппроксимации (12), получаем вектор скорости узловых нагрузок, вектор невязки:

$$\int\limits_V \dot{\mathbf{f}}^*\cdot\delta\upsilon\,dV + \int\limits_{S^\sigma}\dot{\mathbf{t}}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS = \left\{\dot{P}\right\}^T\{\delta\upsilon\},$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_V(\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\,dV - \int\limits_V\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\,dV - \int\limits_{S^\sigma}\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS\right\} = \{H\}^T\{\delta\upsilon\}.$$

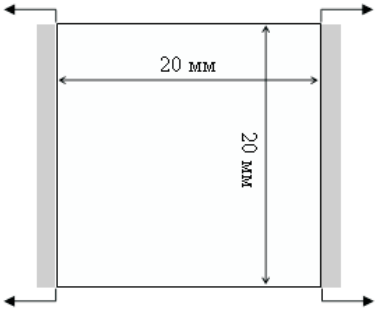


Рис. 1. Растяжение полосы

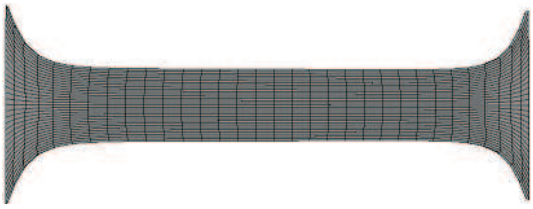

Рис. 2. Деформированное состояние полосы

Окончательно получается система линейных алгебраических уравнений на $k$-м шаге нагружения:

$$\left[{}^kK\right]\left\{\Delta^k u\right\} = \left\{\Delta^k P\right\} + \left\{{}^kH\right\}.$$

## 4. Численные примеры

Приведем результаты расчетов для упругого потенциала, заданного в виде (8).

Рассмотрена задача о плоской деформации квадратной полосы со сторонами $20 \times 20$ мм, $\mu = 0.4225$ Н/мм$^2$, $K = 5$ Н/мм$^2$ (рис. 1). По вертикальным краям полосы заданы перемещения. Так как полоса имеет две оси симметрии, то была рассмотрена четверть полосы с заданием соответствующих условий симметрии с разбиением на сетку конечных элементов $16 \times 16$.

Полоса в горизонтальном направлении была растянута в 3 раза, а в вертикальном – в 0.3712 (для среднего сечения) (рис. 2). Полученные результаты хорошо согласуются с решением этой задачи другими авторами [13] (0.3711).

Решена задача о деформировании круглой плиты под действием давления $q = 0.1128$ Н/мм$^2$. Радиус плиты 50 мм, толщина 10 мм, $\mu = 0.4225$ Н/мм$^2$, $K = 5$ Н/мм$^2$ . Граничные условия задавались следующим образом: верхнее ребро не имеет вертикального смещения, и в процессе деформирования точки, лежащие на боковых гранях плиты, по достижении горизонтальной плоскости, остаются на этой плоскости. Была рассмотрена четверть плиты с соответствующим заданием условий симметрии. На рис. 3 изображена плита в начальном состоянии, на рис. 4, рис. 5 показано промежуточные состояния, а на рис. 6 – деформированное.

На рис. 7 представлена зависимость перемещения центральной точки $A$, лежащей на верхней грани, на рис. 8 – зависимость нормальных напряжении $\sigma_{xx}$ точки $A$ и $B$ – центральной точки, лежащей на нижней грани. Из рис. 8 видно, что в верхней точке $A$ возникают растягивающие усилия, а в точке $B$ до определенного

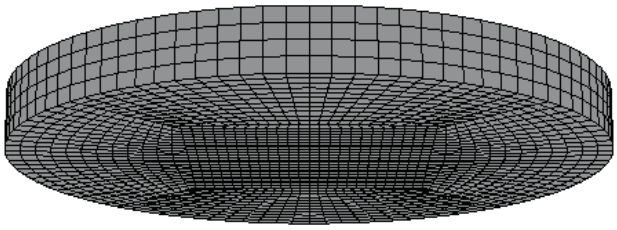

Рис. 3. Начальное состояние

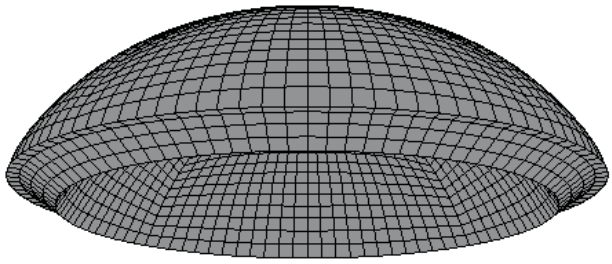

Рис. 4. Деформирование плиты. Промежуточное состояние

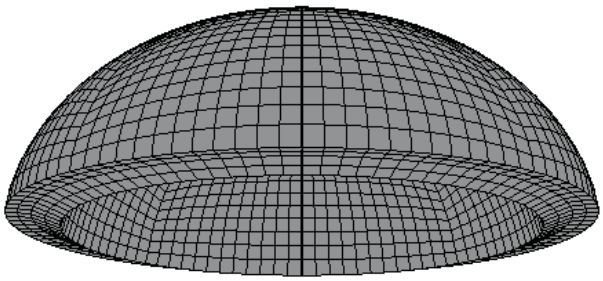

Рис. 5. Деформирование плиты. Промежуточное состояние

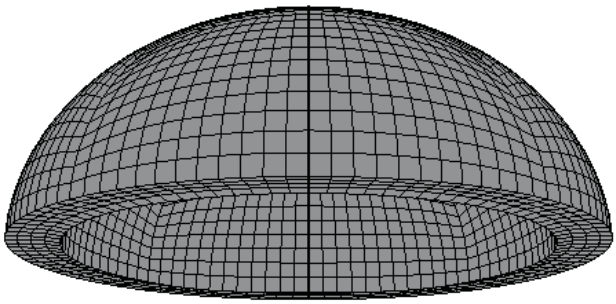

Рис. 6. Деформированное состояние плиты

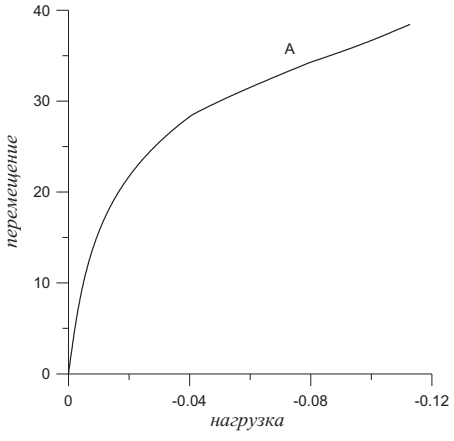


Рис. 7. Перемещения точки $A$

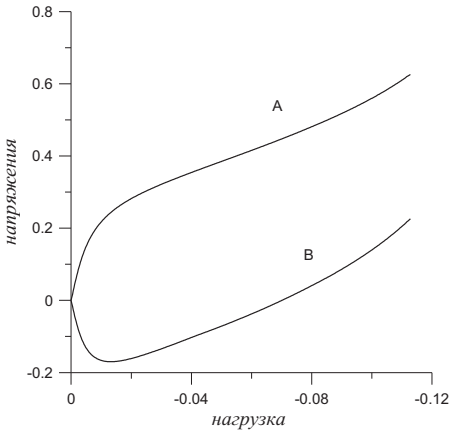


Рис. 8. Нормальные напряжения $\sigma_{xx}$

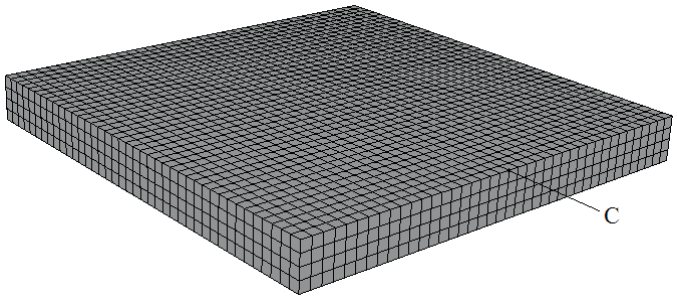


Рис. 9. Начальное состояние плиты

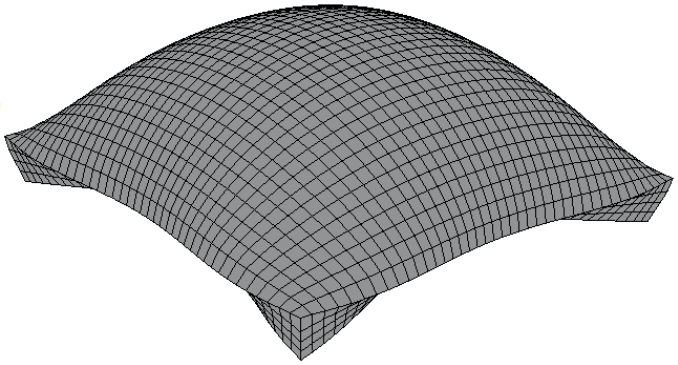

Рис. 10. Промежуточное деформированное состояние плиты

момента наблюдаются сжимающие усилия, а затем и растягивающие, то есть плита сначала изгибается, а затем начинает постепенно раздуваться.

Решена задача об упругом деформировании квадратной плиты под действием равномерного давления $q = 0.12625$. Граничные условия и свойства материала задавались так же, как в предыдущем примере. Плита со сторонами $a = 100$ мм

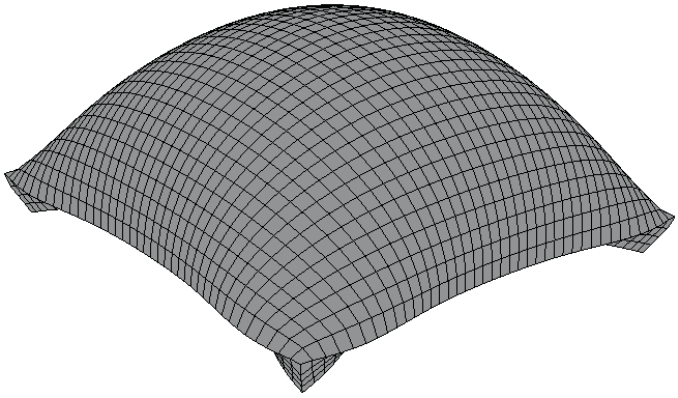

Рис. 11. Промежуточное деформированное состояние плиты

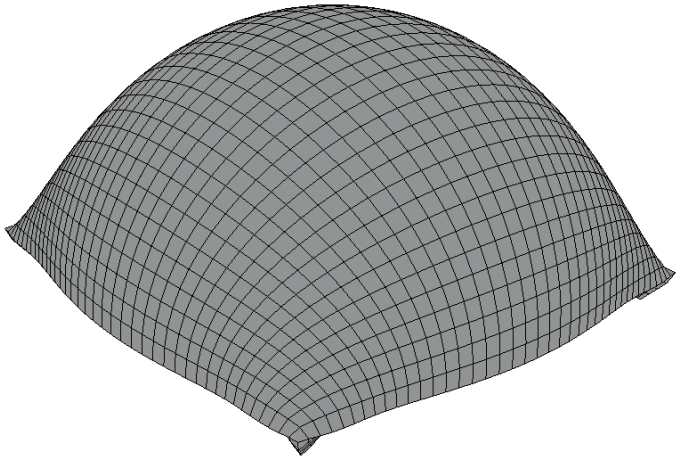

Рис. 12. Деформированное состояние плиты

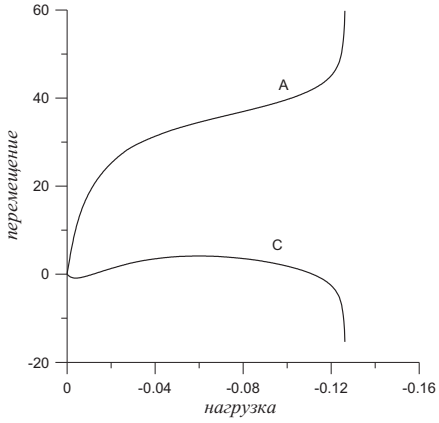


Рис. 13. Перемещения точки $A$ и точки $C$

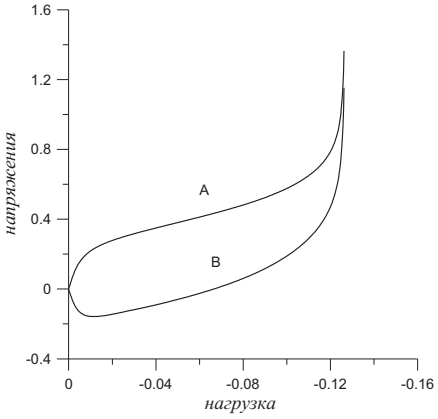


Рис. 14. Нормальные напряжения $\sigma_{xx}$ точки $A$ и $B$

и толщиной $h = 10$ мм (рис. 9). На рис. 10, 11 изображены промежуточные состояния, на 12 – деформированное состояние плиты. На рис. 13 представлена зависимость от нагрузки перемещений: вертикального перемещения центральной точки $A$, лежащей на верхней грани плиты, и поперечного горизонтального перемещения точки $C$. На рис. 14 показана зависимость от нагрузки нормальных напряжений $\sigma_{xx}$ точки $A$ и центральной точки $B$, лежащей на нижней грани плиты. Плита сначала изгибается, а затем постепенно начинает раздуваться, то есть края плиты сначала смещаются в стороны, а затем внутрь.

## Заключение

В работе представлена конечноэлементная реализация методики численного исследования гиперупругих тел. В качестве примера рассмотрен неогуковский материал. Приводятся дискретизированные соотношения и уравнения на базе восьмиузловой изопараметрической аппроксимации. Решена тестовая задача о растяжении полосы, а также задача о деформировании круглой и квадратной плит.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00546а).


## Summary

*A.I. Golovanov*, *Yu.G. Konoplev, L.U. Sultanov.* Numerical Investigation of Large Deformations of Hyperelastic Solids. IV. Finite Element Realization.

The article is the fourth part of a series of papers called "Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids" and deals with the finite element realization of an algorithm described in the first three parts. Some energy potentials of elastic deformations are presented, and for one of them the finite element realization is derived. The examples of problems and their solutions are given.


**Key words:** large deformations, hyperelasticity, finite element method.

## Литература


1. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 29–37.
2. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 3. – С. 122–132.
3. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 86–98.
4. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
5. *Yeoh O.H.* Some forms of strain energy function for rubber // Rubber Chem. Techn. – 1994. – V. 66. – P. 754–771.
6. *Arruda E.M., Boyce M.C.* A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // J. Mech. Physics Solids. – 1993. – V. 41. – P. 389–412.
7. *Auricchio F.* A robust integration-algorithm for a finite-strain shape- memory-alloy superelastic model // Int. J. Plasticity. – 2001. – V. 17. – P. 971–990.

8. *Auricchio F., Taylor R.L.* A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // Int. J. Plasticity. – 1999. – V. 15. – P. 1359–1378.

9. *Simo J.S., Taylor R.L., Pister K.S.* Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plastisity // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 51. – P. 177–208.

10. *Simo J.S., Pister K.S.* Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1984. – V. 46. – P. 201–215.

11. *Storakers B.* On material representation and constitutive branching in finite compressible elasticity // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – V. 34. – P. 125–145.

12. *Bonet J.* Large strain viscoelastic constitutive models // Int. J. Solids Struct. – 2001. – V. 38. – P. 2953–2968.

13. *Bonet J., Wood R.D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – 1997. – 283 p.

14. *Hartmann S., Neff P.* Polyconvexity of general polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility // Int. J. Solids Struct. – 2003. – V. 40. – P. 2767–2791.

Поступила в редакцию
17.05.10

**Голованов Александр Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

**Коноплев Юрий Геннадьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

**Султанов Ленар Усманович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Lenar.Sultanov@ksu.ru*