Известия вузов. Математика
2008, № 10, с. 48–54

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ю.В. ПОКОРНЫЙ, Е.В. ГУЛЫНИНА, Т.В. ПЕРЛОВСКАЯ

О СВОЙСТВЕ ХИКСА ДЛЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Аннотация. В работе показано использование свойства Хикса для вариационной задачи на графе. Дается корректная постановка задачи об определении и анализе функции влияния для упругой системы, заданной на графе.

Ключевые слова: функция влияния, свойство Хикса, вариационная задача на графе.

УДК: 517.927

Abstract. In this paper we use the Hicks property for a variational problem on a graph. For an elastic system defined on a graph we state a well-posed problem which implies the definition and the study of the kernel.

Keywords: kernel, Hicks property, variational problem on a graph.

Весьма популярное в математической экономике [1], [2] свойство Хикса квалифицирует строгую монотонную зависимость от входных параметров положительно обратимой задачи типа модели Леонтьева

$$u = Au + f \quad (u, f \in R^n).$$

Для неразложимой матрицы A (≥ 0) увеличение f всего лишь по одной компоненте приводит не просто к увеличению решения (что следует из положительности $(I - A)^{-1}$), но к максимальному его приросту именно по той же компоненте. Распространение этого свойства на более общие классы задач означает анализ влияния локального (как бы δ-образного) возмущения входных данных на изменение исходного состояния объекта в той же самой точке. Если в более общей ситуации связь между возмущаемым параметром $f(x)$ и исследуемым состоянием $u(x)$ задана явным образом по типу

$$Lu = f, \tag{1}$$

как это бывает в математической физике, то описанный вопрос требует изучения уравнений

$$Lu = \delta(x - \xi)$$

и анализа на диагонали его “фундаментального решения” $H(x, \xi)$. Более интересен этот вопрос для случая, когда связь явного вида по типу (1) изначально не предъявлена, например, когда отсутствует стандартное функциональное пространство, где уравнение (1) может быть описано классическими терминами, как и его функция Грина.

Поступила 04.05.2005

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента России на поддержку ведущих научных школ (НШ-1643.2003.1), программы “Университеты России” (проект УР 04.01.015) и грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № № 04-01-00049, 02-01-0037).

Обойтись без явного предъявления зависимости (1) может помочь понятие функции влияния, определяемой как реакция $K(x,\xi)$ исходного объекта на единичное возмущение в точке $x = \xi$. Тогда при плотности $f(s)ds = dF$ внешней нагрузки деформация объекта, вызванная именно этой локальной силой, будет иметь вид $dh(x) = K(x,s)dF(s)$, а вся в целом определяется интегралом по параметризующей области Γ

$$h(x) = \int_\Gamma K(x,s)dF(s). \tag{2}$$

Приведенная чисто интуитивная мотивация не позволяет детально изучать $K(x,\xi)$.

Ниже будет дана корректная постановка задачи о функции влияния для упругой системы, заданной на графе, и обосновано свойство Хикса о максимуме $K(x,\xi)$ по x.

1. Пусть Γ — связная пространственная сеть (геометрический граф) в R^n.

Пользуемся терминологией из [3]. Граф неким образом ориентирован, через $\partial\Gamma$ обозначается множество граничных (крайних) вершин (узлов) Γ, через $J\Gamma$ — совокупность внутренних узлов Γ.

Далее считается всюду, что $\partial\Gamma \neq 0$. Состояние рассматриваемого объекта предусматривает отклонение $u(x)$ от положения равновесия, совпадающего с Γ. Функцию $u(x) : \Gamma \to R$ предполагаем непрерывной на Γ. Считаем, что соответствующая форме $u(x)$ энергия, накапливаемая под действием внешнего воздействия $f(x) : \Gamma \to R$, определяется выражением

$$Q(u) = \int_\Gamma \frac{pu'^2}{2}dx - \int_\Gamma f u\, dx, \tag{3}$$

где интеграл по Γ подразумевает сумму интегралов по ребрам. Исходим из вариационного принципа, считая, что реальное состояние $u_0(x)$ данной системы приводит (3) к минимуму в классе всех виртуальных состояний $u(x) : \Gamma \to R$ при условии закрепления на границе

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Описанный взгляд на объект позволяет определить его функцию влияния $K(x,\xi)$ как экстремаль функционала (3) при $f(x) = \delta(x-\xi)$, т. е. в более корректном виде

$$Q_0(u) = \int_\Gamma \frac{pu'^2}{2}dx - u(\xi). \tag{5}$$

Дело в том, что на графе понятие δ-функции еще никем не вводилось, причем необходимости в строгом определении нет, достаточно знать минималь (5).

При фиксированной ξ (ξ — внутренняя точка Γ) функция $K(x,\xi)$ определяется как минималь функционала (5). Ниже обнаружим, что в точке ξ, даже если она лежит внутри какого-либо ребра Γ, минималь функционала (5) в принципе не может иметь обычной производной, так как последняя в этой точке заведомо имеет скачок. Это лишает смысла в точке ξ подинтегральное выражение (5). Поэтому будем считать функционал (5) определенным на более широком, чем традиционно, функциональном классе.

Обозначим через E совокупность всех абсолютно непрерывных на Γ функций, для каждой из которых ее производная внутри любого ребра имеет ограниченную вариацию. Говорить о минимале как (5), так и (3) будем относительно именно этого пространства E. Сужение E условиями (4) обозначим через E_0.

Теорема 1. *Функция влияния* $K(x,\xi)$ (*минималь* (5) *при условиях* (4) *относительно* E) *существует и единственна в классе непрерывных на* $\Gamma \times \Gamma$ *функций.*

Теорема 2. *Для любой суммируемой на* Γ *функции* $f(x)$ *соответствующая минималь* (3) *допускает интегральное представление* (2).

Теорема 3 (свойство Хикса). *При любом $\xi \in \Gamma/\partial\Gamma$ максимум $K(x,\xi)$ по x достигается при $x = \xi$.*

В теории краевых задач возможность представления решения в виде (2) обычно связывают с понятием функции Грина. Однако последняя является объектом, определенным (со времен Гильберта) системой аксиом, взять которые в данной ситуации неоткуда. Кроме того, задание краевой задачи обычного типа для рассматриваемой ситуации исключается негладкостью $(pu')(x)$, что закрывает дорогу стандартному подходу из теории краевых задач. Даже в [3] аналог функции Грина строился в предположении достаточной гладкости $p(x)$. Минуем все эти трудности постановочного характера, исходя из совершенно прозрачного смысла функции влияния.

2. Доказательство теорем 1–3 основано на серии вспомогательных утверждений. Основополагающей является

Лемма 1. *Для того чтобы функция $u_0(x) \in E$ была минималью* (5), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_\Gamma pu'h'dx - h(\xi) = 0 \qquad (6)$$

для любой $h(\cdot)$ из E_0.

Доказательство основано на представлении

$$Q_0(u_0 + h) - Q_0(u_0) = \int_\Gamma pu'h'dx - h(\xi) + \int_\Gamma \frac{ph'^2}{2}dx,$$

вытекающим из (5).

Лемма 2. *Если $K(x,\xi)$ существует, то она единственна.*

Действительно, в предположении противного разность $z(x) = K_1(x,\xi) - K_2(x,\xi)$ двух разных минималей (5) должна удовлетворять равенству

$$\int_\Gamma pz'h'dx = 0$$

для любой $h(\cdot)$ из E_0. Это значит, что

$$\int_\Gamma ph'dz = 0 \quad (h \in E_0).$$

Применяя на каждом ребре Γ классическую лемму Дю-Буа-Реймонда, будем иметь $z(x) = \mathrm{const}$ на каждом ребре Γ. Так как в граничных точках $z(x)$ есть нуль, то $z(x)$ есть нулевая константа и на всех прилегающих к $\partial\Gamma$ тупиковых ребрах. Отсюда в силу непрерывности $z(x)$ во всех внутренних узлах следует $z(x) \equiv 0$ на Γ.

Из изложенных соображений вытекает

Лемма 3. *При $f(x) \equiv 0$ минималь функционала* (3) *на E_0 есть тривиальная функция $z(x) \equiv 0$.*

Обозначим через Γ^0 множество, получаемое из Γ выбрасыванием всех его узлов. Через Γ^0_ξ — то, что останется после выбрасывания еще точки ξ, т. е. $\Gamma^0_\xi = \Gamma^0/\{\xi\}$. Если $\xi \in J\Gamma$, т. е. является внутренним узлом, то $\Gamma^0_\xi = \Gamma^0$. Компонентами связности Γ^0_ξ являются оба куска того ребра, из которого выброшена точка ξ, и остальные ребра Γ.

Лемма 4. *При каждом $\xi \in \Gamma$ соответствующая функция $z(x) = K(x,\xi)$ есть константа на каждой компоненте связности Γ^0_ξ.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. В силу произвола h в E_0 возьмем $h(x)$ так, чтобы она обнулялась в точке $x = \xi$ и во всех компонентах связности Γ_ξ^0, кроме одной (произвольно взятой). Тогда на этой компоненте γ_0 равенство (6) сводится к одному интегралу по γ_0

$$\int_{\gamma_0} pz'h'dx = 0$$

и в силу произвола $h(x)$ на γ_0 имеем $z'(x) \equiv 0$ на γ_0. □

Из доказанной леммы следует, что для любой допустимой h равенство (6) для минимали u_0 должно превращаться в равенство

$$h(\xi) + \sum_{a \in J\Gamma} h(a) \Big[\sum_{\gamma \in \Gamma(a)} p_\gamma u'_\gamma(a+0) \Big] = 0,$$

где под $p_\gamma(x)$ и $u_\gamma(x)$ понимаем, как и в [3], сужение функций $p(x), u(x)$ на какое-то ребро γ множества Γ_ξ. Через $u'_\gamma(a+0)$ обозначается крайняя производная от такого сужения $u_\gamma(x)$, а суммирование происходит по всем ребрам γ, примыкающим к вершине a (запись $\gamma \in \Gamma(a)$ означает примыкание γ к a). Отсюда в силу произвола h вытекают следующие два важнейших свойства.

Лемма 5. *Для любой $\xi \in \Gamma$ функция $z(x) = K(x, \xi)$ в каждой из внутренних вершин $a \in J\Gamma$, отличных от ξ, удовлетворяет равенству*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_\xi(a)} p_\gamma z'_\gamma(a+0) = 0. \tag{7}$$

Лемма 6. *На “ диагонали $x = \xi$” функция влияния должна удовлетворять равенству*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_\xi(a)} p_\gamma z'_\gamma(a+0) = -1, \tag{8}$$

где при $\xi \notin J\Gamma$, когда ξ оказывается внутренней точкой одного из ребер, считаем эту точку фиктивной вершиной, добавляя ее к $J\Gamma$ и полагая в ней сохранение непрерывности рассматриваемых функций из E.

3. Теперь можем перейти к доказательству теоремы 1. Беря произвольное ребро γ из Γ, на $\gamma \times \gamma$ определяем функцию $q_\gamma(x, s)$ так, чтобы формула $u(x) = \int\limits_\gamma q(x, s) f(s) ds$ давала на γ минимум задачи $Q \to \min$, суженной на γ. Для этого достаточно взять функцию $q_\gamma(x, \xi)$ так, чтобы $p(x)\frac{d}{dx}q(x, \xi)$ была константой по x на γ при $x \neq \xi$ и чтобы скачок между этими константами согласно (8) равнялся единице. Здесь предположили точку ξ “внедренной” в множество внутренних узлов, вследствии чего фиктивность этого внедрения приведет к единичному скачку $p(x)q'_x(x, \xi)$ в точке $x = \xi$, удовлетворяя тем самым условию леммы 6.

Расширим исходную задачу, рассматривая функционал Q не на E, а на более широком пространстве $\widetilde{E}$ функций, сохраняя предположение о регулярности функций лишь внутри ребер Γ. Другими словами, $\widetilde{E}$ — множество функций, определенных на $\Gamma/J\Gamma$, без предположения об их непрерывности во внутренних узлах и без условий (4) на $\partial\Gamma$.

Лемма 7. *Многообразие минималей функционала*

$$P(u) = \int_\Gamma pu'^2 dx \tag{9}$$

на $\widetilde{E}$ *есть линейное пространство, размерность которого равна удвоенному числу ребер исходного графа* Γ.

Для доказательства достаточно отметить, что для (9) минималь доставляет нулевое значение, а потому для любой минимали $u(x)$ на каждом ребре должно быть $(pu') \equiv \text{const}$.

Продлим значение $q_\gamma(x,\xi)$ на множество $\Gamma \times \Gamma$ по правилу

$$q_\gamma(x,\xi) = \begin{cases} q_\gamma(x,\xi), & (x,\xi) \in (\gamma\times\gamma); \\ 0, & (x,\xi) \notin (\gamma\times\gamma). \end{cases}$$

На основе предыдущих свойств непосредственно проверяется

Лемма 8. *При каждом* $\xi \notin J\Gamma$ *и любом допустимом* h *функция* $u(x) \equiv q(x,\xi)$ *удовлетворяет равенству* (6).

Пусть k — число ребер Γ и $\{\varphi_i\}_1^{2k}$ — какой-либо базис пространства минималей (см. лемму 7). Для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ функция

$$H(x,\xi) = q(x,\xi) + \sum_{i=1}^{2m} \alpha_i \varphi_i \tag{10}$$

обладает в $\widetilde{E}$ свойством, аналогичным лемме 1. Для того чтобы она обладала этим свойством в исходном E, необходимо подобрать соответствующие значения констант α_i.

Покажем, что это можно сделать и, более того, предъявим их.

Обозначим через $l_1(u), l_2(u), \ldots, l_m(u)$ функционалы, порожденные условиями (2), условиями непрерывности $u(x)$ во внутренних вершинах и условиями склейки производных (7). Нетрудно проверяется, что число m этих условий совпадает с количеством $2m$ функций в базисе $\Phi = \{\varphi_i\}_1^{2k}$.

Покажем, что эти наборы биортогональны.

Лемма 9. $\det \|l_i(\varphi_k)\|_1^{2m} \neq 0$.

Доказательство. В предположении противного некоторая нетривиальная линейная комбинация $w(x) = \sum \beta_i \varphi_i(x)$ должна удовлетворять всем условиям $l_k(w) = 0$. Тогда эта функция $w(x)$ должна являться в E минималью функционала (3), откуда рассуждения леммы 2 приводят к выводу $w(x) \equiv 0$, что в силу (10) противоречит линейной независимости $\{\varphi_i\}_1^{2k}$. $\square$

Из этой леммы следует, что функция

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\det \|l_i(\varphi_k)\|_1^m} \begin{vmatrix} q(x,\xi) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_m(x) \\ l_1 q(\cdot,\xi) & l_1(\varphi_1) & \ldots & l_1(\varphi_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_m q(\cdot,\xi) & l_m(\varphi_1) & \ldots & l_m(\varphi_m) \end{vmatrix} \tag{11}$$

наверняка является функцией влияния, ибо ей, раскрыв детерминант по первой строке, можно придать вид (10), причем выполнение всех необходимых свойств (типа $l_i(K) = 0$) обеспечено самой формой (11).

4. Доказательство теоремы 2 теперь может быть проведено с помощью следующей леммы, вполне аналогичной лемме 1.

Лемма 10. *Для того чтобы функция* $u(x)$ *была минималью функционала* Q, *определенного выражением*

$$Q(u) = \int_\Gamma \left(\frac{pu'^2}{2} - fu\right) dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой допустимой h

$$\int_\Gamma pu'h'dx = \int_\Gamma fh\,dx. \tag{12}$$

Доказательство, как и в лемме 1, очевидно в силу равенства

$$Q(u+h) - Q(u) = \int_\Gamma (pu'h' - fh)dx + \int_\Gamma p\frac{h'^2}{2}dx.$$

Функция влияния $K(x,\xi)$, существующая по теореме 1, согласно лемме 1 должна удовлетворять равенству $h(\xi) = \int\limits_\Gamma p(x)K'_x(x,\xi)h(x)dx$.

Умножая обе части этого равенства на $f(\xi)$ и интегрируя по $d\xi$, получаем

$$\int_\Gamma h(\xi)f(\xi)d\xi = \int_\Gamma d\xi \int_\Gamma p(x)K'_x(x,\xi)f(\xi)h(x)dx. \tag{13}$$

Функция $K'_x(x,\xi)$ кусочно-непрерывна по совокупности переменных, имея лишь разрывы типа скачков. Поэтому в правой части (13) допустимо изменение порядка интегрирования, что для функции $u(x) = \displaystyle\int K(x,\xi)f(\xi)d\xi$ дает тождество (12) на E и по лемме 10 доказывает теорему 2.

5. Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Покажем вначале, что $K(x,\xi)$ не может принимать отрицательных значений. Предполагая противное, для некоторых (x_0,ξ_0) получаем, что $q(x) \equiv K(x,\xi_0)$ имеет ненулевой отрицательный минимум. Если $\min q(x) = q(\tau)$ и τ есть один из внутренних узлов, то вдоль всех примыкающих к τ ребер должно быть $q(x) \geq q(\tau)$, что означает неположительность всех крайних вдоль этих ребер производных $q'_\gamma(\tau+0)$ и противоречит лемме 5. Если τ — внутренняя точка одного из ребер, то в ней обе односторонних производных должны быть нулями. Но так как по лемме 4 функция $p(x)q'(x)$ должна быть константой на этом ребре, то она есть нулевая константа на нем и потому $q(x) \equiv \mathrm{const}$ на этом ребре, принимая те же значения и на концах этого ребра, т. е. в вершинах графа, что приводит к предыдущей ситуации.

Итак, $K(x,\xi) \geq 0$ на $\Gamma\times\Gamma$. Пусть (x_0,ξ_0) — точка максимума $K(x,\xi)$, причем $x_0 \neq \xi_0$. Для функции $h(x) = K(x,\xi_0)$ имеем $h'_\gamma\,(x_0+0) \leq 0$ для любого примыкающего к x_0 ребру (даже если это всего лишь один из двух кусков того ребра, внутри которого лежит x_0). Поэтому все слагаемые в соответствующей сумме в условии (7) имеют одинаковый знак, значит, все они нулевые. Но тогда аналогично предыдущему $h'(x)$ оказывается нулевой константой на всех примыкающих к x_0 ребрах, что дает тождество $h(x) \equiv 0$ на Γ, явно невозможное ввиду наличия у $h'(x)$ ненулевого скачка при $x_0 = \xi_0$. Теорема полностью доказана.

Литература

[1] Моришима М. *Равновесие, устойчивость, рост.* – М.: Наука, 1972. – 179 с.

[2] Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика.* – М.: Мир, 1972. – 518 с.

[3] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

Ю.В. Покорный

профессор, кафедра математического анализа,
Воронежский государственный университет,
394006, г. Воронеж, Университетская площадь, д. 1,

`e-mail:` pokorny@kma.vsu.ru

Е.В. Гулынина

кандидат физ.-матем. наук,
Северокавказский филиал Белгородского государственного технологического университета

Т.В. Перловская

доцент, кафедра математического анализа,
Воронежский государственный университет,
394006, г. Воронеж, Университетская площадь, д. 1

Yu.V. Pokornyi

Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: pokorny@kma.vsu.ru

E.V. Gulinina

Ph. D. (Mathematics and Physics), North-Caucasian Branch of Belgorod State Technological University

T.V. Perlovskaya

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006 Russia