УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 3
С. 336–349

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.982

НЕРАВЕНСТВА КЛАРКСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И.В. Корытов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

г. Томск, 634050, Россия

Аннотация

В работе установлена справедливость неравенств Кларксона для периодических функций из пространства Соболева, нормированного без привлечения псевдодифференциальных операторов. При этом норма включает в себя интегралы по фундаментальной области от функции и ее обобщенных частных производных всех промежуточных порядков. Предварительно показана справедливость неравенств для периодических функций, суммируемых в некоторой степени p по кубу единичной меры с отождествленными противоположными гранями. Актуальность работы обусловлена необходимостью развития фундаментальной основы функционально-аналитического подхода к оцениванию методов приближений.

Ключевые слова: равномерная выпуклость единичной сферы, банахово пространство, пространство Соболева, негильбертово пространство, пространство периодических функций, обратное неравенство Минковского, куб единичной меры, неравенства Кларксона

Введение

Высказанная в 1974 г. академиком С.Л. Соболевым мысль о приложении функционального анализа к задачам вычислительной математики сохраняет свою актуальность и в настоящее время: «...в круг владений новой математики втягивается и теория вычислений, которую сейчас так же невозможно себе представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин» [1, с. 7]. В нашей работе будут рассмотрены вопросы равномерной выпуклости пространств периодических функций. Установление такого свойства для пространства дает возможность решать различные экстремальные задачи, где требуется доказательство единственности искомого элемента пространства. Доказательство равномерной выпуклости проводится путем проверки справедливости неравенств Кларксона или их обобщений [1–9]. Исходной формой для такой задачи является вид нормы функции в исследуемом пространстве.

Нормирование пространств $W_p^{(m)}$ выполнялось С.Л. Соболевым через проекционные операторы [1, 3] в наиболее общем виде. Однако в [1] также приводится частный вид нормы, названной простейшей и выраженной через интегралы от функции и ее производных высшего порядка. Функция и обобщенные частные производные до заданного порядка m суммируемы в p-й степени в некоторой области Ω, $\overline{G} \subset \Omega$,

$$\left\| f \left| W_p^{(m)}(\Omega) \right. \right\| = \left[\left| \int\limits_G |f| dx \right|^p + \int\limits_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha f)^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}.$$

Приведем некоторые примеры норм, встречающихся в других исследованиях. В соответствии с теорией эллиптических дифференциальных уравнений М.С. Агранович [10] рассматривает пространства Соболева как частные случаи более широких пространств. Отличия выражаются в порядках частного дифференцирования: целого неотрицательного для пространств Соболева и вещественного для пространств общего вида. Нормы здесь приводятся без конкретизации коэффициентов при каждой из производных:

$$\left\|f\left|W_p^{(m)}(\mathbb{R}_n)\right.\right\| = \sum_{|\alpha|\le m}\left[\int\limits_{\mathbb{R}_n}|D^\alpha f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

Считаем важным замечание автора [10] относительно данной нормы: в подынтегральных функциях можно оставить только $\alpha=(0,\ldots,0)$ и $\alpha=(m,0,\ldots,0)$, ..., $(0,\ldots,0,m)$. В этом ключе для нашего исследования интересна работа В.Г. Мазьи [11], в которой введены пространства функций, нормированные с использованием производных промежуточных порядков. В этой работе В.Г. Мазья рассматривал теоремы вложения при различных условиях, налагаемых на область интегрирования. Пространства, обозначенные им как $V_p^m(\Omega)$, в нормах которых присутствуют производные промежуточных порядков, упоминаются наравне с пространствами $L_p^m(\Omega)$ и $W_p^m(\Omega)$ во всех фундаментальных теоремах. Собственно обозначение $W_p^m(\Omega)$ В.Г. Мазья применяет для пространств с нормой

$$\left\|f\left|W_p^m(\Omega)\right.\right\| = \left\|\nabla_m f\left|L_p^m(\Omega)\right.\right\| + \left\|f\left|L_p(\Omega)\right.\right\| =$$
$$= \left[\int\limits_\Omega\left(\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha f(x)|^2\right)^{p/2}dx\right]^{1/p} + \left[\int\limits_\Omega|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

В $V_p^m(\Omega)$ же норма следующая:

$$\left\|f\left|V_p^m(\Omega)\right.\right\| = \sum_{k=0}^m\left\|\nabla_k f\left|L_p(\Omega)\right.\right\| = \sum_{k=0}^m\left[\int\limits_\Omega\left(\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha f(x)|^2\right)^{p/2}dx\right]^{1/p}.$$

Далее, в исследованиях, посвященных решению задач оценки функционалов погрешности кубатурных формул, применяются различные нормировки пространств $W_p^{(m)}$ как периодических, так и непериодических функций. Ц.Б. Шойнжуров в работе [12] нормировал пространство периодических функций специальным образом через оператор Лапласа

$$\left\|f\left|\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)\right.\right\| = \left[\int\limits_Q\left|(1-\Delta)^{m/2}f(x)\right|^p dx\right]^{1/p}.$$

Такая нормировка позволила решить задачи, поставленные в работе, при любом действительном m. Что касается целых положительных m, для таких значений применялись нормы, содержащие несобственные интегралы по $\mathbb{R}_n$ от функции и ее производных всех порядков в работах [13, 14]

$$\left\|f\left|W_p^{(m)}(\mathbb{R}_n)\right.\right\| = \left[\int\limits_{\mathbb{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}|D^\alpha f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

Перечисленные выше способы не исчерпывают весь список нормировок пространства Соболева. Отметим, что при нормировании обязательным является включение функции и всех частных производных наивысшего заданного порядка в выражение для нормы. Включение производных промежуточных порядков, а также коэффициентов при них остается произвольным. Из приведенных примеров видно, что в некоторых исследованиях норма могла быть задана через обратное преобразование Фурье фундаментального решения некоторого дифференциального уравнения.

В настоящей работе мы нормируем пространство $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$ п о типу [13–15]. Здесь m принимает только целые положительные значения, при этом норма не является частным случаем ни одной из приведенных выше. Подобные нормы применялись автором к весовым пространствам [16, 17].

Различные нормировки пространства определяют соответствующие постановки экстремальных задач. В работах [18, 19] используются свойства равномерной выпуклости гильбертовых пространств для обоснования единственности экстремальной функции линейного функционала. Отметим также работы [20–22], посвященные доказательству собственно неравенств Кларксона и их аналогов в пространствах со специфическими чертами.

В нашей статье показатель суммируемости $p \in (1, \infty)$, за исключением единственного значения $p = 2$, делает рассматриваемое пространство Соболева негильбертовым.

1. Пространства, нормы, исходные неравенства

Пространство $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$ периодических функций с единичным периодом по каждой независимой переменной нормируем следующим образом:

$$\left\| f \left| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right. \right\| = \left[\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \, |D^\alpha f|^p \, dx \right]^{1/p}, \tag{1}$$

Q – единичный куб с отождествленными противоположными гранями, $p \in (1, \infty)$. Здесь мы акцентируем внимание на присутствии биномиального коэффициента перед частными производными порядка k. Каждая производная $D^\alpha f(x)$, функции из пространства $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$, принадлежит пространству периодических функций $\widetilde{L}_p(Q)$ с нормой

$$\left\| f \left| \widetilde{L}_p(Q) \right. \right\| = \left[\int\limits_Q |f|^p \, dx \right]^{1/p}. \tag{2}$$

Неравенства Кларксона и их обобщения установлены в [1–4] для пространств $L_p(\Omega)$ непериодических функций, заданных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ и суммируемых в p-й степени с нормой

$$\| f \,| L_p(\Omega) \,\| = \left[\int\limits_\Omega |f|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Дж.Э. Кларксон [2] приводит неравенства для пространств $L_p(\Omega)$ функций, заданных в ограниченной области Ω. В настоящее время неравенства, названные его именем, приводятся в иной форме (см., например, [3]). Первое неравенство

Кларксона справедливо при p в указанном промежутке

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right| L_p(\Omega) \Big\|^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right| L_p(\Omega) \Big\|^p \leq \frac{1}{2} \left(\|f\,|L_p(\Omega)\,\|^p + \|g\,|L_p(\Omega)\,\|^p \right), \tag{3}$$

$$p \geq 2;$$

Второе неравенство Кларксона справедливо при p в соответствующем промежутке

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right| L_p(\Omega) \Big\|^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right| L_p(\Omega) \Big\|^q \leq \left(\frac{1}{2} \|f\,|L_p(\Omega)\,\|^p + \frac{1}{2} \|g\,|L_p(\Omega)\,\|^p \right)^{q-1}, \tag{4}$$

$$1 < p \leq 2,\ q = p/(p-1).$$

В настоящей работе мы будем придерживаться именно этой формы.

Роль ограниченной области интегрирования в нашей работе будет выполнять единичный n-мерный куб с отождествленными противоположными гранями. Это означает, что грани и ребра, содержащие начало координат, принадлежат рассматриваемой области, а им противоположные нет. Куб остается открытым со стороны граней, содержащих точку n-мерного пространства, имеющую все координаты, равные единице. Такой куб, будучи перемещен при помощи операции сдвига на целочисленный вектор, покроет все пространство, следовательно, будет фундаментальной областью для периодических функций с единичной матрицей периодов.

Мы не будем проводить сравнения норм на эквивалентность и использовать утверждения теорем вложения. Отправным пунктом вывода основных результатов будут известные [3] неравенства для произвольных переменных величин. Сформулируем их в виде лемм.

Лемма 1 (С.Л. Соболев). *При* $p \geq 2\,,\ 0 \leq x \leq 1$

$$\left(\frac{1+x}{2} \right)^p + \left(\frac{1-x}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2} \left(1 + x^p \right). \tag{5}$$

Лемма 2 (С.Л. Соболев). *При* $p \leq 2$ *и любых* x *и* y

$$\left(\left| \frac{x+y}{2} \right|^{p/(p-1)} + \left| \frac{x-y}{2} \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} \leq \frac{1}{2} \left(|x|^p + |y|^p \right). \tag{6}$$

Кроме того, для доказательства основных утверждений будем использовать обратные неравенства Минковского для сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_{ik}| \right)^r \right)^{1/r} \geq \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{ik}|^r \right)^{1/r}, \quad 0 < r < 1, \tag{7}$$

и для интегралов

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \right)^r dx \right)^{1/r} \geq \sum_{k=1}^{m} \left(\int\limits_{\Omega} |f_k(x)|^r \, dx \right)^{1/r}, \quad 0 < r < 1. \tag{8}$$

2. Пространство Соболева периодических функций

Отождествленность по С.Л. Соболеву [1] означает, что между двумя точками x' и x'' n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ установлено отношение эквивалентности, если разность соответствующих координат этих точек является целым числом $x_1' - x_1'' \in \mathbb{Z}$, …, $x_n' - x_n'' \in \mathbb{Z}$. Такое отношение удовлетворяет определению эквивалентности, так как здесь выполняются условия рефлексивности ($x \sim x$), симметричности ($x' \sim x'' \Rightarrow x'' \sim x'$) и транзитивности ($x' \sim x''$, $x'' \sim x''' \Rightarrow x' \sim x'''$). Фактор-множество $\{\mathbb{R}_n/\sim\}$ по указанному отношению геометрически является n-мерным тором Θ_n.

Если $x \in \mathbb{R}_n$, эквивалентные, или отождествленные, точки, будут иметь новые координаты $t_j = \{x_j\} = x_j - [x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, $t = U(x)$, где $U(x)$ – оператор выделения дробных частей. Обратное отображение бесконечнократно: $U^{-1}(t) = \{x : x_j = t_j + \beta_j\}$, где $0 \le t_j < 1$, β_j – компоненты произвольного целочисленного вектора, $j = 1, \ldots, n$. Полученное многообразие является n-мерным тором $\Theta_n = \{t : 0 \le t_j < 1, j = 1, \ldots, n\}$, который может рассматриваться как n-мерный единичный куб с отождествленными противоположными гранями.

Покажем связь пространств периодических, заданных на $\mathbb{R}_n$ функций с пространствами функций, убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени $|x|$, и с пространствами функций, заданных на торе Θ_n. Пусть $D = D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных в области Ω функций со сходимостью $f_k \to f$, $k \to \infty$, определенной как равномерная сходимость производных $D^\alpha f_k(x) \rightrightarrows D^\alpha f(x)$, $k \to \infty$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \Omega$, $\operatorname{supp} f_k \subset \Omega'$, $\Omega' : \overline{\Omega} \subset \Omega$. Далее, пусть $S = S(\mathbb{R}_n)$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}_n$ функций, удовлетворяющих вместе со всеми производными условиям $|D^\alpha f| \le K \dfrac{1}{1 + |x|^s}$, $s > 0$. Сходимость в S означает сходимость произведений $x^s D^\alpha f_k(x) \rightrightarrows x^s D^\alpha f(x)$, $s > 0$, $k \to \infty$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}_n$. Пространства S и D с указанными сходимостями являются полными, то есть любая фундаментальная последовательность в них сходится к элементу того же пространства. Функции из D входят в S, тем самым выполняется включение $D \subset S$.

По определению [1] функция n переменных называется периодической с матрицей периодов A, если для любого целочисленного вектора β удовлетворяет условию $f(x + A\beta) = f(x)$. Пусть далее $\widetilde{S}(Q)$ – пространство бесконечно дифференцируемых периодических функций с единичной матрицей периодов и сходимостью производных $D^\alpha f_k(x) \rightrightarrows D^\alpha f(x)$, $k \to \infty$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in Q$, где $Q = \{x : 0 \le x_j < 1, j = 1, \ldots, n\}$ – единичный куб.

При рассмотренном выше отображении n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ на n-мерный тор Θ_n пространство $\widetilde{S}(Q)$ периодических функций переходит в пространство $T = T(\Theta_n)$ бесконечно дифференцируемых периодических функций, заданных на торе Θ_n. Сходимость в T вновь будет означать равномерную сходимость со всеми производными $D^\alpha f_k(t) \rightrightarrows D^\alpha f(t)$, $k \to \infty$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in \Theta_n$.

Для любой функции $f \in S$ можно построить бесконечно дифференцируемую периодическую функцию в виде ряда $\widetilde{\phi}(x) = \sum\limits_\beta f(x + E\beta)$. Периодичность $\widetilde{\phi}(x)$ устанавливается непосредственной проверкой. Из определения периодической функции с единичной матрицей периодов следует

$$\widetilde{\phi}(x + E\gamma) = \sum_\beta f(x + E\gamma + E\beta) = \\ = \sum_\beta f(x + E(\gamma + \beta)) = \sum_{\gamma'} f(x + E\gamma') = \widetilde{\phi}(x). \quad (9)$$

В предпоследнем равенстве выполнена замена $\gamma' = \gamma + \beta$, γ' и γ – целочисленные векторы. Каждый член ряда является функцией из пространства Шварца, поэтому бесконечно дифференцируем. Кроме того, функциональный ряд $\sum\limits_{\beta} f(x+E\beta)$ при $s>1$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{|\beta'|\neq 0} \dfrac{1}{|E\beta'|^s}$:

$$|f(x+E\beta)| \leq K\frac{1}{1+|x+E\beta|^s} \leq K\frac{1}{1+|E\beta'|^s} \leq K\frac{1}{|E\beta'|^s}, \tag{10}$$

$$x\in Q, \quad \beta' = (\beta'_1,\ldots,\beta'_n)^T: \ \beta'_j = \begin{cases} 1+\beta_j, & \beta_j<0, \\ \beta_j, & \beta_j \geq 0, \end{cases} \quad j=1,\ldots,n.$$

Следовательно, ряд (9) сходится к бесконечно дифференцируемой функции, которую мы обозначили через $\widetilde{\phi}(x)$. Таким образом, $\widetilde{\phi}(x)\in\widetilde{S}$. Периодической функции $\widetilde{\phi}(x)$, имеющей по каждой из переменных x_j, $j=1,\ldots,n$, период, равный единице, соответствует гладкая функция $\phi(t)\in T(\Theta)$ и $\widetilde{\phi}(x)=\phi(t)$ при $x=t$. Причем значения $x\in\mathbb{R}_n$ и $t\in\Theta_n$ равны с точностью до целочисленного кратного E.

В качестве основного пространства будем рассматривать пространство периодических функций с единичной матрицей периодов, суммируемых в p-й степени вместе со своими производными до порядка m включительно. Дифференцирование здесь понимается в обобщенном смысле. Такие функции образуют пространство Соболева $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$. Это пространство является замыканием множества гладких периодических функций по норме (1). Предельные элементы, полученные при сходимости по такой норме, могут не быть гладкими функциями, поэтому с их присоединением к исходному пространству расширяется запас основных функций. Функции из $\widetilde{S}(Q)$ входят в $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$, так как обобщенные производные бесконечно дифференцируемых в обычном смысле функций также суммируемы в p-й степени.

3. Неравенства Кларксона для периодических суммируемых в p-й степени функций

Покажем справедливость неравенств Кларксона для пространства $\widetilde{L}_p(Q)$ с нормой (2). Сначала обратимся к первому неравенству. Следуя [3], для функций $f,\, g\in\widetilde{L}_p(Q)$, $p\geq 2$, где для определенности примем $|g|\leq|f|$ и, следовательно, $|g/f|\leq 1$, преобразуем сумму

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p = |f|^p\left[\left(\frac{1+\left|\dfrac{g}{f}\right|}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\left|\dfrac{g}{f}\right|}{2}\right)^p\right]. \tag{11}$$

Согласно лемме 1 для выражения, стоящего в квадратных скобках (11), выполняется неравенство (5), где $x=|g/f|$

$$\left(\frac{1+\left|\dfrac{g}{f}\right|}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\left|\dfrac{g}{f}\right|}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{g}{f}\right|^p\right), \quad 2\leq p<\infty. \tag{12}$$

Тогда для суммы из левой части (11) будет верным неравенство

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leq |f|^p\left[\frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{g}{f}\right|^p\right)\right] = \frac{1}{2}\left(|f|^p+|g|^p\right), \quad 2\leq p<\infty. \tag{13}$$

Далее, интегрируя обе части (13) по Q (интегралы по условию существуют), получаем

$$\int\limits_Q \left|\frac{f+g}{2}\right|^p dx + \int\limits_Q \left|\frac{f-g}{2}\right|^p dx \le \frac{1}{2}\left(\int\limits_Q |f|^p dx + \int\limits_Q |g|^p dx\right), \quad 2 \le p < \infty.$$

Налагая условие периодичности по каждой переменной и переходя к записи в нормах (2), получаем первое неравенство Кларксона для пространства $\widetilde{L}_p(Q)$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^p + \left\|\frac{f-g}{2}\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^p \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\left\|f\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^p + \left\|g\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^p\right), \quad 2 \le p < \infty. \tag{14}$$

Для доказательства второго неравенства Кларксона в пространстве периодических суммируемых на периоде в p-й степени функций $\widetilde{L}_p(Q)$ необходимо к левой части неравенства (6) леммы 2

$$\left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p/(p-1)} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} \le \frac{1}{2}\left(|f|^p + |g|^p\right), \quad 1 < p \le 2, \tag{15}$$

применить обратное неравенство Минковского (8), которое верно для показателей $r = p-1$ таких, что $0 < p-1 < 1$:

$$\left[\int\limits_Q \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p/(p-1)} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} dx\right]^{1/(p-1)} \ge$$
$$\ge \left[\int\limits_Q \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} dx\right]^{1/(p-1)} + \left[\int\limits_Q \left(\left|\frac{f-g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} dx\right]^{1/(p-1)}.$$

Далее, после упрощения имеем

$$\left[\int\limits_Q \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p/(p-1)} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} dx\right]^{1/(p-1)} \ge$$
$$\ge \left[\int\limits_Q \left|\frac{f+g}{2}\right|^p dx\right]^{1/(p-1)} + \left[\int\limits_Q \left|\frac{f-g}{2}\right|^p dx\right]^{1/(p-1)}. \tag{16}$$

С другой стороны, после интегрирования неравенства (15)

$$\int\limits_Q \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p/(p-1)} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} dx \le \frac{1}{2}\left(\int\limits_Q |f|^p dx + \int\limits_Q |g|^p dx\right), \; 1 < p \le 2,$$

и возведения обеих частей в степень $1/(p-1) > 0$

$$\left[\int\limits_Q \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p/(p-1)} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1} dx\right]^{1/(p-1)} \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}\left(\int\limits_Q |f|^p dx + \int\limits_Q |g|^p dx\right)\right]^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2,$$

с учетом (16) следует

$$\left[\int\limits_Q \left|\frac{f+g}{2}\right|^p dx\right]^{1/(p-1)} + \left[\int\limits_Q \left|\frac{f-g}{2}\right|^p dx\right]^{1/(p-1)} \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}\left(\int\limits_Q |f|^p dx + \int\limits_Q |g|^p dx\right)\right]^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2.$$

Переходя к записи в нормах (2), получим второе неравенство Кларксона для пространства $\widetilde{L}_p(Q)$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^{p/(p-1)} + \left\|\frac{f-g}{2}\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^{p/(p-1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\left\|f\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^p + \frac{1}{2}\left\|g\left|\widetilde{L}_p(Q)\right.\right\|^p\right)^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2. \quad (17)$$

Таким образом, получено первое (14) и второе (17) неравенства Кларксона для пространства $\widetilde{L}_p(Q)$ периодических функций, аналогичные неравенствам (3) и (4). Пространству $\widetilde{L}_p(Q)$ будут принадлежать производные функций, рассматриваемых в следующем разделе.

4. Неравенства Кларксона для периодических функций из пространства Соболева

Установим сначала справедливость первого неравенства Кларксона. Для периодических функций из пространства Соболева $f, g \in \widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$ по определению $D^\alpha f,\, D^\alpha g \in \widetilde{L}_p(Q)$, $|\alpha| \leq m$. В силу принадлежности производных пространству $\widetilde{L}_p(Q)$ для каждой из них верным будет неравенство

$$\int\limits_Q \left|\frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2}\right|^p dx + \int\limits_Q \left|\frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2}\right|^p dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int\limits_Q |D^\alpha f|^p\, dx + \int\limits_Q |D^\alpha g|^p\, dx\right), \quad 2 \leq p < \infty, \quad |\alpha| \leq m.$$

Верным неравенство будет и при суммировании всех производных с постоянным общим множителем

$$\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q\left|\frac{D^\alpha f+D^\alpha g}{2}\right|^p dx+\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q\left|\frac{D^\alpha f-D^\alpha g}{2}\right|^p dx\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q|D^\alpha f|^p\,dx+\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q|D^\alpha g|^p\,dx\right),$$
$$2\leq p<\infty,\quad k=0,1,\dots,m.$$

Суммирование по k с биномиальными коэффициентами $\binom{m}{k}$ также сохраняет неравенство

$$\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q\left|\frac{D^\alpha f+D^\alpha g}{2}\right|^p dx+$$
$$+\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q\left|\frac{D^\alpha f-D^\alpha g}{2}\right|^p dx\leq\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q|D^\alpha f|^p\,dx+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\int\limits_Q|D^\alpha g|^p\,dx\right],\quad 2\leq p<\infty.\tag{18}$$

Переход к записи (18), выраженной через нормы (1), дает первое неравенство Кларксона для пространства Соболева $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$ периодических функций

$$\left\|\frac{f+g}{2}\left|\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)\right.\right\|^p+\left\|\frac{f-g}{2}\left|\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)\right.\right\|^p\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\left\|f\left|\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)\right.\right\|^p+\left\|g\left|\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)\right.\right\|^p\right),\quad 2\leq p<\infty.\tag{19}$$

Для вывода второго неравенства Кларксона введем производные функций в неравенство (15)

$$\left(\left|\frac{D^\alpha f+D^\alpha g}{2}\right|^{p/(p-1)}+\left|\frac{D^\alpha f-D^\alpha g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1}\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(|D^\alpha f|^p+|D^\alpha g|^p\right),\quad |\alpha|\leq m,\quad 1<p\leq 2.\tag{20}$$

Обе части (20) суммируем с общим множителем и биномиальными коэффициентами подобно тому, как это сделано в (18):

$$\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(\left|\frac{D^\alpha f+D^\alpha g}{2}\right|^{p/(p-1)}+\left|\frac{D^\alpha f-D^\alpha g}{2}\right|^{p/(p-1)}\right)^{p-1}\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(|D^\alpha f|^p+|D^\alpha g|^p\right),\quad 1<p\leq 2.$$

Далее интегрируем по Q

$$\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\left| \frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2} \right|^{p/(p-1)} + \left| \frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2} \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} dx \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(|D^\alpha f|^p + |D^\alpha g|^p \right) dx, \quad 1 < p \le 2,$$

после чего возводим в степень $1/(p-1) > 0$

$$\left(\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\left| \frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2} \right|^{p/(p-1)} + \left| \frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2} \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} dx \right)^{1/(p-1)} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2} \int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(|D^\alpha f|^p + |D^\alpha g|^p \right) dx \right)^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \le 2. \tag{21}$$

К сумме по мультииндексу α, стоящей под знаком интеграла в левой части (21), применяем обратное неравенство Минковского (7) с показателем $r = p - 1$

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\left| \frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2} \right|^{p/(p-1)} + \left| \frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2} \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} \right)^{1/(p-1)} \ge$$

$$\ge \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2} \right|^p \right)^{1/(p-1)} +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2} \right|^p \right)^{1/(p-1)}.$$

Возвращая сумму под знак интеграла, применим теперь обратное неравенство Минковского (8) к этому интегралу

$$\left(\int\limits_Q \left(\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2} \right|^p \right)^{1/(p-1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} dx \right)^{1/(p-1)} \ge$$

$$\ge \left(\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{D^\alpha f + D^\alpha g}{2} \right|^p dx \right)^{1/(p-1)} +$$

$$+ \left(\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{D^\alpha f - D^\alpha g}{2} \right|^p dx \right)^{1/(p-1)}.$$

С учетом линейности оператора дифференцирования D^α можно перейти к записи в нормах (4)

$$\left(\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| D^\alpha \left(\frac{f+g}{2} \right) \right|^p dx \right)^{1/(p-1)} +$$

$$+ \left(\int\limits_Q \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| D^\alpha \left(\frac{f-g}{2} \right) \right|^p dx \right)^{1/(p-1)} =$$

$$= \left\| \frac{f+g}{2} \middle| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right\|^{p/(p-1)} + \left\| \frac{f-g}{2} \middle| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right\|^{p/(p-1)}.$$

Таким образом, получено второе неравенство Кларксона для периодического пространства Соболева $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \middle| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right\|^{p/(p-1)} + \left\| \frac{f-g}{2} \middle| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right\|^{p/(p-1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \left\| f \left| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right. \right\|^p + \frac{1}{2} \left\| g \left| \widetilde{W}_p^{(m)}(Q) \right. \right\|^p \right)^{1/(p-1)}, \quad 1 < p \leq 2. \qquad (22)$$

Итак, получены неравенства (19) и (22) для пространства $\widetilde{W}_p^{(m)}(Q)$, аналогичные неравенствам (3) и (4).

Заключение

Справедливость неравенств Кларксона, связывающих нормы двух произвольных элементов пространства Соболева периодических функций, означает выполнение свойства равномерной выпуклости единичной сферы в пространстве с негильбертовым показателем суммируемости $p \in (1, \infty)$. Доказательство основано на числовых неравенствах, которые рассматривались для значений функций в точках n-мерного единичного куба с отождествленными противоположными гранями, по которому затем проводилось интегрирование. Результат предназначен для использования в задачах, где необходимо представление периодических обобщенных функций через суммируемые периодические функции в пространствах, нормируемых без участия псевдодифференциальных операторов.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности НИ ТПУ.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
2. *Clarkson J.A.* Uniformly convex spaces // Trans. Am. Math. Soc. – 1936. – V. 40, No 3. – P. 396–414. – doi: 10.2307/1989630.
3. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
4. *Hanner O.* On the uniform convexity of L_p and l_p // Ark. Mat. – 1956. – V. 3, No 3. – P. 239–244. – doi: 10.1007/BF02589410.

5. *Enflo P.* Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm // Isr. J. Math. – 1972. – V. 13, No 3. – P. 281–288. – doi: 10.1007/BF02762802.

6. *Deville R., Godefroy G., Zizler V.* Smoothness and Renormings in Banach Spaces. – Harlow: Longman, 1993. – 376 p.

7. *Портнов В.Р.* Проекционные операторы С.Л. Соболева для полунорм с бесконечномерными ядрами // Тр. МИАН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 252–263.

8. *Портнов В.Р.* О некоторых интегральных неравенствах // Теоремы вложения и их приложения. – М.: Наука, 1970. – С. 195–203.

9. *Портнов В.Р.* Об одном проекционном операторе типа С.Л. Соболева // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 189, № 2. – С. 258–260.

10. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013. – 379 с.

11. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.

12. *Шойнжуров Ц.Б.* Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.

13. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. науч. центра СО РАН, 2005. – 247 с.

14. *Шойнжуров Ц.Б.* Кубатурные формулы в пространстве С.Л. Соболева W_p^m. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2002. – 201 с.

15. *Корытов И.В.* Функция, представляющая функционал погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева // Изв. Том. политехн. ун-та. – 2013. – Т. 323, № 2. – С. 21–25.

16. *Корытов И.В.* Экстремальная функция линейного функционала в весовом пространстве Соболева // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2011. – № 2. – С. 5–15.

17. *Корытов И.В.* Представление функционала погрешности кубатурной формулы в весовом пространстве Соболева // Вычисл. технологии. – 2006. – Т. 11, Спец. вып. – С. 59–66.

18. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996. – 483 с.

19. *Васкевич В.Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1245–1262.

20. *Mbarki A., Ouahab A., Hadi I.E.* Convexity and fixed point properties in spaces of Bochner integrals nuclear-valued functions // Appl. Math. Sci. – 2014. – V. 8, No 84. – P. 4179–4186.

21. *Mizuguchi H., Saito K.S.* A note on Clarkson's inequality in the real case // J. Math. Inequalities. – 2010. – V. 4, No 1. – P. 29–132. – doi: 10.7153/jmi-04-13.

22. *Formisano T., Kissin E.* Clarkson–McCarthy inequalities for l_p-spaces of operators in Schatten ideals // Integr. Equations Oper. Theory. – 2014. – V. 79, No 2. – P. 151–173. – doi: 10.1007/s00020-014-2145-x.

Поступила в редакцию
04.07.16

Корытов Игорь Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
пр. Ленина, д. 30, г. Томск, 634050, Россия

E-mail: *korytov@tpu.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 3, pp. 336–349

Clarkson's Inequalities for Periodic Sobolev Space

I.V. Korytov

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050 Russia
E-mail: *korytov@tpu.ru*

Received July 4, 2016

Abstract

The paper is devoted to developing the proof of Clarkson's inequalities for periodic functions belonging to the Sobolev space. The norm of the space has not been considered earlier. The importance of the discussed issue rests with the need to develop fundamentals in research of error estimation using functional analysis techniques. Thus, the error of approximation is represented via a linear functional over the Banach space. The approach allows searching for new criteria of approximation quality and ways to optimize the numerical method. Parameters that are responsible for technique quality need to be previously investigated in respect of extreme values. Therefore, fundamental features, such as uniform convexity, should be proved for being further used in extremum problems solving.

The aim of the study is to prove the uniform convexity for the Sobolev space of periodic functions normed without pseudodifferential operators. The norm includes integrals over the fundamental cube. The integrands are the absolute values of derivatives of all orders raised to the p-th power. The exponent p generates the non-Hilbert space. The methods used in the study include application of inverse Minkowski inequalities stated either for sums or for integrals to periodic functions from the Sobolev space. Furthermore, functional analysis concepts and techniques are used. As a result, Clarkson's inequalities are proved for periodic functions from the Sobolev space.

The obtained results are important for solving extremum problems. The problems require using only uniformly convex functional spaces, for example, the problem of error estimation of numerical integration of functions from the Sobolev space with the above norm.

Keywords: uniform convexity, Banach space, Sobolev space, non-Hilbert space, periodic function space, inverse Minkowski inequality, unit cube, Clarkson's inequalities

Acknowledgments. This work was supported by the subsidy allocated to the National Research Tomsk Polytechnic University within the framework of the program for increasing its competitiveness among the world's leading research and academic institutions.

References

1. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. Moscow, Nauka, 1974. 808 p. (In Russian)

2. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1936, vol. 40, no. 3, pp. 396–414. doi: 10.2307/1989630.

3. Sobolev S.L. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Moscow, Nauka, 1988, 336 p. (In Russian)

4. Hanner O. On the uniform convexity of L_p and l_p. *Ark. Mat.*, 1956, vol. 3, no. 3, pp. 239–244. doi: 10.1007/BF02589410.

5. Enflo P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. *Isr. J. Math.*, 1972, vol. 13, no. 3, pp. 281–288. doi: 10.1007/BF02762802.

6. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. Harlow, Longman, 1993. 376 p.

7. Portnov V.R. Sobolev projection operators for seminorms with infinite-dimensional kernels. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1979, vol. 140, pp. 277–288.

8. Portnov V.R. On some integral inequalities, *Embedding Theorems and Their Applications*. Moscow, 1970, pp. 195–203. (In Russian)

9. Portnov V.R. On a certain projection operator of Sobolev type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 189, no. 2, pp. 258–260. (In Russian)

10. Agranovich M.S. Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundary. Moscow, Izd. MTsNMO, 2013, 379 p. (In Russian)

11. Maz'ya V.G. Sobolev Spaces. Leningrad, Izd. Leningr. Univ., 1985, 416 p. (In Russian)

12. Shoynzhurov Ts.B. The theory of cubature formulas in function spaces with the norm depending on the function and its derivatives. *Doct. Phys.-Math. Sci. Diss.*. Ulan Ude, 1977, 235 p. (In Russian)

13. Shoynzhurov Ts.B. Estimation of Norm of Cubature Formula Error Functional in Various Functional Spaces. Ulan Ude, Izd. Buryat. Nauchn. Tsentr Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2005, 247 p. (In Russian)

14. Shoynzhurov Ts.B. Cubature Formulas in Sobolev Space W_p^m. Ulan Ude, Izd. VSGTU, 2002. 201 p. (In Russian)

15. Korytov I.V. Function representing error functional of a cubature formula in Sobolev space. *Byull. Tomsk. Polytekh. Univ.*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 21–25. (In Russian)

16. Korytov I.V. The extreme function of a linear functional at the weighted Sobolev space. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat. Mekh.*, 2011, no. 2(14), pp. 5–15. (In Russian)

17. Korytov I.V. Representation of error functional of cubature formula at weighted Sobolev space. *Vychisl. Tekhnol.*, 2006, vol. 11, spec. no., pp. 59–66.(In Russian)

18. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. Cubature Formulas. Novosibirsk, Izd. Inst. Mat., 1996, 483 p. (In Russian)

19. Vaskevich V.L. Errors, condition numbers, and guaranteed accuracy of higher-dimensional spherical cubatures. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 996–1010. doi: 10.1134/S0037446612060043. (In Russian)

20. Mbarki A., Ouahab A., Hadi I.E. Convexity and fixed point properties in spaces of Bochner integrals nuclear-valued functions. *Appl. Math. Sci.*, 2014, vol. 8, no. 84, pp. 4179–4186.

21. Mizuguchi H., Saito K.S. A note on Clarkson's inequality in the real case. *J. Math. Inequalities*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 29–132. doi: 10.7153/jmi-04-13.

22. Formisano T., Kissin E. Clarkson–McCarthy Inequalities for l_p-spaces of operators in Schatten ideals. *Integr. Equations Oper. Theory*, 2014, vol. 79, no. 2, pp. 151–173. doi: 10.1007/s00020-014-2145-x.

***Для цитирования*:** *Корытов И.В.* Неравенства Кларксона для пространства Соболева периодических функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 3. – С. 336–349.

***For citation*:** Korytov I.V. Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 336–349. (In Russian)