Диофантовы уравнения и 10-я проблема Гильберта

М. А. Всемирнов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Казанский федеральный университет
научно-популярные лекции, посвященные
году Н. И. Лобачевского
23 июня 2017 года

Диофантовы уравнения

Определение. Диофантово уравнение имеет вид

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где D — многочлен с целыми коэффициентами.

Диофантовы уравнения

Определение. Диофантово уравнение имеет вид

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

где D — многочлен с целыми коэффициентами.

Мы будем рассматривать решения диофантовых уравнений в
- в целых числах $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$
- в натуральных числах $(1, 2, 3, \ldots)$.

Диофант и его задачи

Греческий математик *Диофант Александрийский* жил, предположительно, в 3-ем веке нашей эры.

Диофант и его задачи

Греческий математик *Диофант Александрийский* жил, предположительно, в 3-ем веке нашей эры.

Одна из задач Диофанта (зачача 24 из IV книги). Данное число разбить на два числа так, чтобы их произведение было кубом без стороны.

Диофант и его задачи

Греческий математик *Диофант Александрийский* жил, предположительно, в 3-ем веке нашей эры.

Одна из задач Диофанта (зачача 24 из IV книги). Данное число разбить на два числа так, чтобы их произведение было кубом без стороны.

Диофант разбирает пример для числа 6:

$$x(6 - x) = y^3 - y.$$

Диофант и его задачи

Греческий математик *Диофант Александрийский* жил, предположительно, в 3-ем веке нашей эры.

Одна из задач Диофанта (зачача 24 из IV книги). Данное число разбить на два числа так, чтобы их произведение было кубом без стороны.

Диофант разбирает пример для числа 6:

$$x(6-x)=y^3-y.$$

Диофант рассматривал решения уравнений в рациональных числах. В современной традиции, когда говорят о решениях диофантовых уравнений, подразумевают, что рассматриваются решения в целых числах.

Примеры знаменитых диофантовых уравнений

Пифагоровы тройки

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Примеры знаменитых диофантовых уравнений

Пифагоровы тройки

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Уравнение Ферма

$$x^n + y^n - z^n = 0 \qquad (n \geq 3).$$

Примеры знаменитых диофантовых уравнений

Пифагоровы тройки

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Уравнение Ферма

$$x^n + y^n - z^n = 0 \qquad (n \geq 3).$$

Уравнение Пелля

$$x^2 - dy^2 - 1 = 0.$$

(Разрешимо в натуральных числах для любого положительного d, не являющимся полным квадратом.)

“Еще сравнительно недавно совокупность исследованных к тому времени диофантовых уравнений можно было уподобить многочисленным островам Полинезии и Микронезии, разбросанным по бесконечному простору Тихого океана. Многие из этих уравнений стали знаменитыми (вроде острова Гуам — первого клочка суши, открытого в океане экспедицией Магеллана . . .); некоторые до сих пор сохранили налёт экзотичности (вроде острова Таити); другие снискали печальную славу (подобно атоллу Бикини), и, наконец, очень многие диофантовы уравнения весьма специального вида в настоящее время почти полностью забыты (подобно многочисленным необитаемым островам)”.

С. А. Степанов. “Арифметика алгебраических кривых”.

Давид Гильберт, “*Математические проблемы*”, [1900]

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*.

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*.

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет*.

Массовые проблемы

В современной терминологии 10-я проблема Гильберта является массовой проблемой, то есть проблемой, состоящей из счетного числа вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый универсальный метод, который позволял бы ответить на любой из этих вопросов.

Массовые проблемы

В современной терминологии 10-я проблема Гильберта является массовой проблемой, то есть проблемой, состоящей из счетного числа вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ ДА или НЕТ. Суть массовой проблемы состоит в требовании найти единый универсальный метод, который позволял бы ответить на любой из этих вопросов.

Среди двадцати трёх "Математических проблем" Гильберта 10-я является единственной массовой проблемой.

Решения в целых или в натуральных?

Для конкретного уравнения ответ может быть разным:

Решения в целых или в натуральных?

Для конкретного уравнения ответ может быть разным:

$$x^3 + y^3 - z^3 = 0$$

разрешимо в целых числах (очевидно; например, $x = z$, $y = 0$);

Решения в целых или в натуральных?

Для конкретного уравнения ответ может быть разным:

$$x^3 + y^3 - z^3 = 0$$

разрешимо в целых числах (очевидно; например, $x = z$, $y = 0$);

$$x^3 + y^3 - z^3 = 0$$

не имеет решений в натуральных числах (не очень простая теорема, частный случай Великой теоремы Ферма);

Решения в целых или в натуральных?

Уравнение

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

разрешимо в целых числах, тогла и только тогда, когда уравнение

$$D(y_1 - z_1, \dots, y_m - z_m) = 0$$

имеет решение в натуральных числах $y_1, \dots, y_m$, $z_1, \dots, z_m$.

Решения в целых или в натуральных?

Уравнение

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

разрешимо в целых числах, тогла и только тогда, когда уравнение

$$D(y_1 - z_1, \dots, y_m - z_m) = 0$$

имеет решение в натуральных числах $y_1, \dots, y_m$, $z_1, \dots, z_m$.

В этом случае говорят, что массовая проблема о разрешимости диофантовых уравнений в целых числах сводится к массовой проблеме о разрешимости в натуральных числах .

Решения в целых или в натуральных?

Теорема Лагранжа. Всякое неотрицательное целое число есть сумма четырех квадратов целых чисел:

$$n = p^2 + q^2 + y^2 + z^2.$$

Решения в целых или в натуральных?

Теорема Лагранжа. Всякое неотрицательное целое число есть сумма четырех квадратов целых чисел:

$$n = p^2 + q^2 + y^2 + z^2.$$

Уравнение

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

разрешимо в натуральных числах, тогла и только тогда, когда уравнение

$$D(p_1^2 + q_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1, \dots, p_m^2 + q_m^2 + y_m^2 + z_m^2 + 1) = 0$$

имеет решение в целых числах.

Решения в целых или в натуральных?

Теорема Лагранжа. Всякое неотрицательное целое число есть сумма четырех квадратов целых чисел:

$$n = p^2 + q^2 + y^2 + z^2.$$

Уравнение

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

разрешимо в натуральных числах, тогла и только тогда, когда уравнение

$$D(p_1^2 + q_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1, \ldots, p_m^2 + q_m^2 + y_m^2 + z_m^2 + 1) = 0$$

имеет решение в целых числах.

То есть массовая проблема о разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах сводится к массовой проблеме о разрешимости в целых числах .

Уравнения или системы уравнений?

Система

$$\begin{cases} D_1(x_1, \ldots, x_m) = 0 \\ \ldots \\ D_k(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$$

разрешима в натуральных (соответственно, целых) числах, тогла и только тогда, когда уравнение

$$D_1^2(x_1, \ldots, x_m) + \cdots + D_k^2(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

имеет решение в натуральных (соответственно, целых) числах.

10-я проблема Гильберта

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет*.

Ответ

Сегодня мы знаем, что 10-я проблема Гильберта решения не имеет. Это означает, что она неразрешима как массовая проблема:

Ответ

Сегодня мы знаем, что 10-я проблема Гильберта решения не имеет. Это означает, что она неразрешима как массовая проблема:

Теорема (Неразрешимость 10-й проблемы Гильберта) *Не существует алгоритма, который по узнавал бы по произвольному диофантову уравнению, имеет ли оно решения*.

Ответ

Сегодня мы знаем, что 10-я проблема Гильберта решения не имеет. Это означает, что она неразрешима как массовая проблема:

Теорема (Неразрешимость 10-й проблемы Гильберта) *Не существует алгоритма, который по узнавал бы по произвольному диофантову уравнению, имеет ли оно решения*.

В этом смысле говорят об отрицательном решении 10-й проблемы Гильберта.

Хронология

Хронология

- Начало 50-х годов: гипотеза, которую выдвинул Мартин Дейвис.

Хронология

- Начало 50-х годов: гипотеза, которую выдвинул Мартин Дейвис.
- Начало 60-х годов: частичный прогресс, который достигли Мартин Дейвис, Хилари Патнам и Джулия Робинсон.

Хронология

- Начало 50-х годов: гипотеза, которую выдвинул Мартин Дейвис.
- Начало 60-х годов: частичный прогресс, который достигли Мартин Дейвис, Хилари Патнам и Джулия Робинсон.
- 1970 год: последний шаг сделал Ю.Матиясевич.

Диофантовы множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m),$$

где D – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

Диофантовы множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m),$$

где D – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры $a_1, \ldots, a_n$;

Диофантовы множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m),$$

где D – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры $a_1, \ldots, a_n$;
- неизвестные $x_1, \ldots, x_m$.

Диофантовы множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m),$$

где D – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры a_1, $\ldots$,a_n;
- неизвестные x_1, $\ldots$,x_m.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ такое, что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0\}.$$

Диофантовы множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m),$$

где D – многочлен с целыми коэффициентами, переменные которго разделены на две группы:

- параметры a_1, ... ,a_n;
- неизвестные x_1, ... ,x_m.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ такое, что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0\}.$$

Множества, имеющие такие *представления* называются диофантовыми.

Примеры диофантовых множеств

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением
$$a - (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0$$

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением
$$a - (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0$$
- Множество всех чисел, отличных от 1 и степеней числа 2, представлено уравнением

Примеры диофантовых множеств

- Множество всех полных квадратов, представлено уравнением
$$a - x^2 = 0$$
- Множество всех составных чисел, представлено уравнением
$$a - (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0$$
- Множество всех чисел, отличных от 1 и степеней числа 2, представлено уравнением
$$a - (2x_1 + 1)x_2 = 0$$

Менее очевидные примеры

Менее очевидные примеры

- Множество всех простых чисел
- Множество всех степеней числа 2

Менее очевидные примеры

- Множество всех простых чисел
- Множество всех степеней числа 2

Соответствующие диофантовы представления нетривиальны и были найдены одновременно с доказательством неразрешимости 10-й проблемы Гильберта

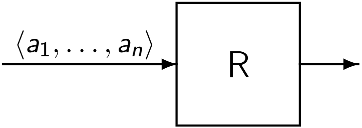
Перечислимые множества

Определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу R, такую что

$$\xrightarrow{\langle a_1, \dots, a_n \rangle} \boxed{\;\mathsf{R}\;} \longrightarrow \begin{cases} \text{остановка, если } \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \\ \text{вечная работа в противном случае} \end{cases}$$

Перечислимые множества

Определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу R, такую что



$$\begin{cases} \text{остановка, если } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \\ \text{вечная работа в противном случае} \end{cases}$$

Эквивалентное определение. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из n-ок натуральных чисел называется перечислимым, если можно написать программу P которая (работая бесконечно долго) будет печатать только элементы множества $\mathcal{M}$ и напечатает каждое из них, быть может, много раз.

Перечисление элементов диофантова множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

Перечисление элементов диофантова множества

$$D(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

```
for y:=1 do
  for a1:=1 to y do
   .......................
    for an:=1 to y do
     for x1:=1 to y do
      .......................
       for xm:=1 to y do
        if D(a1,...,an,x1,...,xm)=0 then
         print(a1,...,an)
        end if
       end for
      ...
  end for
end for
```

Гипотеза Мартина Дейвиса

Гипотеза Мартина Дейвиса

Тривиальный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым.*

Гипотеза Мартина Дейвиса

Тривиальный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым.*

Гипотеза Дейвиса (начало 50-х). *Каждое перечислимое множество является диофантовым.*

Гипотеза Мартина Дейвиса

Неожиданное следствие (Х.Патнам). Если гипотеза Дейвиса верна, то всякое перечислимое подмножество натуральных чисел совпадает со множеством положительных значений некоторого многочлена с целыми коэффициентами при натуральных значениях переменных.

Гипотеза Мартина Дейвиса

Неожиданное следствие (Х.Патнам). Если гипотеза Дейвиса верна, то всякое перечислимое подмножество натуральных чисел совпадает со множеством положительных значений некоторого многочлена с целыми коэффициентами при натуральных значениях переменных.

$$a \in \mathcal{M} \iff \exists x_1 \dots x_m \{D(a, x_1, \dots, x_m) = 0\}.$$

Гипотеза Мартина Дейвиса

Неожиданное следствие (Х.Патнам). Если гипотеза Дейвиса верна, то всякое перечислимое подмножество натуральных чисел совпадает со множеством положительных значений некоторого многочлена с целыми коэффициентами при натуральных значениях переменных.

$$a \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{D(a, x_1, \ldots, x_m) = 0\}.$$

Тогда $\mathcal{M}$ совпадает с множеством положительных значений многочлена

$$a(1 - D^2(a, x_1, \ldots, x_m)).$$

Гипотеза Мартина Дейвиса

Гипотеза Дейвиса (начало 50-х). *Каждое перечислимое множество является диофантовым.*

Гипотеза Мартина Дейвиса

Гипотеза Дейвиса (начало 50-х). *Каждое перечислимое множество является диофантовым*.

Гипотеза Дейвиса была доказана в 1970 году.

DPRM-теорема. Понятия *перечислимое множество* и *диофантово множество* совпадают.

Следствие. Не существует алгоритма, который по узнавал бы по произвольному диофантову уравнению, имеет ли оно решения.

Первый шаг

Теорема (Мартин Дейвис [1950]) *Каждое перечислимое множество* $\mathcal{M}$ *имеет "почти диофантово" представление*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \iff$$
$$\exists z \forall y_{\leq z} \exists x_1 \ldots x_m \{P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m, y, z) = 0\}.$$

Второй шаг

Теорема (Мартин Дейвис, Хилари Патнам, Джулия Робинсон [1961]) Каждое перечислимое множество $\mathcal{M}$ имеет *экспоненциально диофантово представление*, т.е. представление вида

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M} \iff$$
$$\iff \exists x_1 \ldots x_m \{ E_{\mathrm{L}}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \; = \; E_{\mathrm{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \}$$

где E_{L} и E_{R} – выражения, построенные по обычным правилам из переменных и конкретных натуральных чисел с помощью сложения, умножения и возведения в степень.

Реакция на работу

Реакция на работу

G. Kreisel, *Mathematical Reviews*, 1962, 24A, review A3061:

> *... These results are superficially related to Hilbert's tenth Problem on (ordinary, i.e., non-exponential) Diophantine equations. The proof of the authors' results, though very elegant, does not use recondite facts in the theory of numbers nor in the theory of r.e. sets, and so it is likely that the present result is not closely connected with Hilbert's tenth Problem. Also it is not altogether plausible that all (ordinary) Diophantine problems are uniformly reducible to those in a fixed number of variables of fixed degree, which would be the case if all r.e. sets were Diophantine...*

Достаточное условие

Теорема (Джулия Робинсон [1952]) *Множество* $\{\langle a, b, c\rangle : a^b = c\}$

Достаточное условие

Теорема (Джулия Робинсон [1952]) *Множество* $\{\langle a, b, c\rangle : a^b = c\}$ *является диофантовым при условии, что существует двупараметрическое диофантово уравнение*

$$J(v, u, y_1, \ldots, y_w) = 0$$

обладающее следующими двумя свойствами:

Достаточное условие

Теорема (Джулия Робинсон [1952]) *Множество* $\{\langle a, b, c\rangle : a^b = c\}$ *является диофантовым при условии, что существует двупараметрическое диофантово уравнение*

$$J(v, u, y_1, \ldots, y_w) = 0$$

обладающее следующими двумя свойствами:

- *в любом решении* $u < v^v$*;*

Достаточное условие

Теорема (Джулия Робинсон [1952]) *Множество* $\{\langle a, b, c\rangle : a^b = c\}$ *является диофантовым при условии, что существует двупараметрическое диофантово уравнение*

$$J(v, u, y_1, \ldots, y_w) = 0$$

обладающее следующими двумя свойствами:

- *в любом решении* $u < v^v$*;*
- *для каждого* k *существует решение, в котором* $u > v^k$*.*

Достаточное условие

Теорема (Джулия Робинсон [1952]) *Множество $\{\langle a, b, c\rangle : a^b = c\}$ является диофантовым при условии, что существует двупараметрическое диофантово уравнение*

$$J(v, u, y_1, \ldots, y_w) = 0$$

обладающее следующими двумя свойствами:

- *в любом решении $u < v^v$;*
- *для каждого k существует решение, в котором $u > v^k$.*

В этом случае говорят о том, что множество параметров (v, u), для которых это уравнение разрешимо, является диофантовым отношением экспоненциального роста.

Числа Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Числа Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

$$f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n$$

Числа Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

$$f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n$$

Теорема (Ю.В.Матиясевич [1970]). Множество пар (n, f_{2n}) является диофантовым.

Многочлен для простых чисел

Теорема (J.P.Jones, D.Sato, H.Wada, D.Wiens, [1976])
Множество всех простых чисел – это в точности множество всех положительных значений, принимаемых многочленом

$$
\begin{aligned}
(k+2)\{\quad 1 \quad & -[wz+h+j-q]^2 \\
& -[(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2 \\
& -[2n+p+q+z-e]^2 \\
& -\left[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right]^2 \\
& -\left[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\right]^2 \\
& -\left[(a^2-1)y^2+1-x^2\right]^2 \\
& -\left[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\right]^2-[n+l+v-y]^2 \\
& -\left[\left((a+u^2(u^2-a))^2-1\right)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\right]^2 \\
& -\left[(a^2-1)l^2+1-m^2\right]^2 \\
& -\left[q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x\right]^2 \\
& -\left[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm\right]^2 \\
& -[ai+k+1-l-i]^2 \\
& -\left[p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m\right]^2\ \}
\end{aligned}
$$

при неотрицательных целых значениях 26 переменных

Широкое понимание

Десятую проблему Гильберта можно понимать в двух смыслах:

- *в узком смысле*, т.е. буквально так, как проблема была сформулирована;
- *в широком смысле*, который включает все те проблемы, решения которых *легко* следовали бы из положительного решения 10-й проблемы в том виде, как она была сформулирована.

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Великая теорема Ферма

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Великая теорема Ферма

$$x^n + y^n = z^n$$

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Великая теорема Ферма

$$x^n + y^n = z^n$$

$$x^n + y^n = z^n \iff \exists u_1 \dots u_m \{F(n, x, y, z, u_1, \dots, u_m) = 0\}$$

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Великая теорема Ферма

$$x^n + y^n = z^n$$

$$x^n + y^n = z^n \iff \exists u_1 \ldots u_m \{F(n, x, y, z, u_1, \ldots, u_m) = 0\}$$

Великая теорема Ферма (переформулировка) *Диофантово уравнение*

$$F(w + 2, x, y, z, u_1, \ldots, u_m) = 0$$

не имеет решений в натуральных числах.

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза Гольдбаха: *каждое четное число, начиная с 4, является суммой двух простых чисел.*

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза Гольдбаха: *каждое четное число, начиная с 4, является суммой двух простых чисел.*

Множество $\mathcal{M}$, состоящее из контрпримеров к этой гипотезе (т.е. всех четных чисел, которые не меньше, чем 4, но не являются суммой двух простых) является перечислимым

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза Гольдбаха: *каждое четное число, начиная с 4, является суммой двух простых чисел.*

Множество $\mathcal{M}$, состоящее из контрпримеров к этой гипотезе (т.е. всех четных чисел, которые не меньше, чем 4, но не являются суммой двух простых) является перечислимым и потому диофантовым:

$$a \in \mathcal{M} \iff G(a, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза Гольдбаха: *каждое четное число, начиная с 4, является суммой двух простых чисел.*

Множество $\mathcal{M}$, состоящее из контрпримеров к этой гипотезе (т.е. всех четных чисел, которые не меньше, чем 4, но не являются суммой двух простых) является перечислимым и потому диофантовым:

$$a \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; G(a, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

Соответственно, гипотеза Гольдбаха эквивалентна утверждению, что диофантово уравнение

$$G(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

не имеет решений.

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза Римана в оригинальной формулировке является утверждением о комплексных нулях дзета-функции Римана, определяемой при $\Re(z) > 1$ рядом

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза Римана в оригинальной формулировке является утверждением о комплексных нулях дзета-функции Римана, определяемой при $\Re(z) > 1$ рядом

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Существует конкретное диофантово уравнение

$$R(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

которое не имеет решений в натуральных числах если и только если гипотеза Римана верна.

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза о 4 красках стала в 1976 году теоремой Аппеля и Хакена.

Десятая проблема Гильберта в широком смысле

Гипотеза о 4 красках стала в 1976 году теоремой Аппеля и Хакена.

Существует конкретное диофантово уравнение

$$C(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

которое не имеет решений в если и только если гипотеза о 4 красках верна.

Четыре выдающиеся математические проблемы:

- Великая теорема Ферма
- Гипотеза Гольдбаха
- Гипотеза Римана
- Гипотеза о 4 красках

каждая может быть переформулирована как утверждение о неразрешимости конкретного диофантова уравнения.

Назад к Диофанту

Поиск решений уравнения

$$M(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0$$

в рациональных числах $\chi_1, \ldots, \chi_m$ эквивалентен поиску решений уравнения

$$M\left(\frac{x_1 - y_1}{z}, \ldots, \frac{x_m - y_m}{z}\right) = 0$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, z.

Назад к Диофанту

Поиск решений уравнения

$$M(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0$$

в рациональных числах $\chi_1, \ldots, \chi_m$ эквивалентен поиску решений уравнения

$$M\left(\frac{x_1 - y_1}{z}, \ldots, \frac{x_m - y_m}{z}\right) = 0$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, z. В свою очередь это уравнение эквивалентно диофантову уравнению

$$z^d M\left(\frac{x_1 - y_1}{z}, \ldots, \frac{x_m - y_m}{z}\right) = 0,$$

где d – степень многочлена M.

Назад к Диофанту

Поиск решений уравнения

$$M(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0$$

в рациональных числах $\chi_1, \ldots, \chi_m$ эквивалентен поиску решений уравнения

$$M\left(\frac{x_1 - y_1}{z}, \ldots, \frac{x_m - y_m}{z}\right) = 0$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$, z. В свою очередь это уравнение эквивалентно диофантову уравнению

$$z^d M\left(\frac{x_1 - y_1}{z}, \ldots, \frac{x_m - y_m}{z}\right) = 0,$$

где d – степень многочлена M.

Таким образом, спрашивая *явно* только о методе для решения диофантовых уравнений в целых числах, Гильберт *неявно* спрашивал и о методе для решения диофантовых уравнений в рациональных числах.