Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Направление: 050100.68: Педагогическое образование

Профиль: Информационные технологии в физико-математическом образовании

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Статические сферически симметричные решения 4D теории Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона

Работа завершена:

10 июня 2014 (Степанова Л.В.)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель, к.ф.-м.н., доцент

10 июня 2014 (Попов А.А.)

Рецензент, д.ф.-м.н.

13 июня 2014 (Хуснутдинов Н.Р.)

Дата защиты:

17 июня 2014 Оценка

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

16 июня 2014 (Игнатьев Ю.Г.)

Казань 2014

Содержание

1 Введение

Низкоэнергетический предел теории струн включает скалярное дилатонное или анти-дилатонное поле. Известно, что решения, которые соответствуют электрически заряженным черным дырам, изменяются при наличии дилатонного поля. Такие решения были изучены, например в [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Как известно, ведение в теорию скалярного поля с отрицательным кинетическим членом в лагранжиане (к этомй случаю относится и анти-дилатонное поле) может приводить к появления в такой теории кротовых нор: топологических ручек, соединяющих удаленные области одной или различных вселенных. Такой случай рассматривался, например, в работах [7, 8]

Целью квалификационной работы является получение статических сферически симметричных асимптотически плоских решений теории Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона.

Будем использовать геометрические единицы $c = G = 1$ на протяжении всей работы.

2 Теория Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона

В низкоэнергетическом пределе теории струн действие имеет следующий вид

$$S = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R - \eta_1 2\phi_{,k}\phi^{,k} - e^{-2\phi}F_{kl}F^{kl}\right]. \qquad (1)$$

Константа связи дилатонного и гравитационнго полей η_1 может принимать либо значение $\eta_1 = 1$ (дилатон), либо значение $\eta_1 = -1$ (анти-дилатон). В дальнейшем будем рассматривать только случай анти-дилатонного поля $\eta_1 = -1$. Уравнения гравитационого поля для метрики $g_{\mu\nu}$, максвелловского поля для векторного потенциала A_μ и анти-дилатонного поля для ϕ имеют вид

$$G_\mu^\nu = 8\pi T_\mu^\nu = \phi_{,k}\phi^{,k}\delta_\mu^\nu - 2\phi_{,\mu}\phi^{,\nu} + e^{-2\phi}\left(2F_{\mu k}F^{\nu k} - \frac{\delta_\mu^\nu}{2}F_{kl}F^{kl}\right), \qquad (2)$$

$$\left(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}\right)_{;\mu} = 0, \qquad (3)$$

$$\phi^{;\mu}_{;\mu} - \frac{1}{2}e^{-2\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0. \qquad (4)$$

Линейный интервал для статического сферически симметричного пространства времени может быть записан следующим образом

$$ds^2 = -f^2dt^2 + w^2dr^2 + h^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (5)$$

где f, w и h являются функциями только r радиальной координаты.

Статическое сферически симметричное максвелловское поле радиально в каждой точке

$$F_{rt} = \mathcal{F}(r). \qquad (6)$$

Уравнения Максвелла в этом случае(3) могут быть проинтегрированы и дают обобщение закона Гаусса в искривленном пространтсве времени с дилатонным полем

$$e^{-2\phi}\frac{h^2}{fw}\mathcal{F} = Q_e, \tag{7}$$

где Q_e - элетрический заряд. Нетривиальные компоненты уравнений Эйнштейна (2) имеют следующий вид

$$\binom{t}{t} \Rightarrow \frac{2}{w^2}\left(\frac{h''}{h} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{2h^2}\right) - \frac{1}{h^2} = \frac{\phi'^2}{w^2} - Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{8}$$

$$\binom{r}{r} \Rightarrow \frac{1}{w^2}\left(\frac{2f'h'}{fh} + \frac{h'^2}{h^2}\right) - \frac{1}{h^2} = -\frac{\phi'^2}{w^2} - Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{9}$$

$$\binom{\theta}{\theta} = \binom{\varphi}{\varphi} \Rightarrow \frac{1}{w^2}\left(\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} + \frac{f'h'}{fh} - \frac{f'w'}{fw} - \frac{w'h'}{wh}\right) = \frac{\phi'^2}{w^2} + Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}. \tag{10}$$

$$\frac{1}{w^2}\left(\phi'' + \frac{f'}{f} - \frac{w'}{w} + 2\frac{h'}{h}\right)\phi' = -Q_e^2\frac{e^{2a\phi}}{h^4}, \tag{11}$$

Штрих означает дифференцирование по радиальной координате r. Электромагнитная часть тензора энергии- импульса бесследова. Таким образом вклад в скалярную кривизну дает только дилатонное поле. Взяв след от уравнения Эйнштейна можно получить, что

$$R = 2 - \phi'^2/w^2. \tag{12}$$

Это уравнение дает простой способ для определения скалярной кривизны метрики, которая является решением уравнений Эйнштейна. Мы берем следующие их линейные комбинации

$$\binom{r}{r} + \binom{\theta}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{w^2}\left(\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} + \frac{3f'h'}{fh} - \frac{f'w'}{fw} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{h^2} - \frac{w^2}{h^2}\right) = 0, \tag{13}$$

$$\binom{t}{t} - \binom{r}{r} \Rightarrow \frac{2}{w}\left(\frac{h''}{h} - \frac{f'h'}{fh} - \frac{w'h'}{wh}\right) = 2\frac{\phi'^2}{w}, \tag{14}$$

$$\binom{t}{t} + \binom{r}{r} \Rightarrow \frac{2}{w}\left(\frac{h''}{h} + \frac{f'h'}{fh} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{h^2} - \frac{w^2}{h^2}\right) = -2Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{15}$$

Заметьте, что уравнение (13) содержит только метрические поля. Оно может быть записано в виде

$$\left[\frac{(fh)'h}{w}\right]' = fw. \tag{16}$$

Метрика для статического сферически симметричного пространства времени дается уравнением (5) . Эта форма метрики не изменяется под действием следующего преобразования, которое является следствием инвариантности метрики при следующем координатном преобразовании

$$r \to \tilde{r}, \quad w^2 \to w^2\left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2. \tag{17}$$

Мы воспользуемя свободой выбрать w^2 таким образом, что

$$fw = 1. \tag{18}$$

Сделав такое калибровочное преобразование мы фиксируем свободу в уравнении (17). Уравнение (16) может быть проинтегрировано и дает

$$(fh)^2 = (r - r_1)(r - r_2), \tag{19}$$

где r_1 и r_2 - произвольные постоянные. Случай, когда оба r_1 и r_2 действительны и положительны соответствует черной дыре с двумя горизонтами, находящимися в точках $r = r_{1,2}$. Экстремальная черная дыра возникает при $r_1 = r_2$. Случай, когда r_1 и r_2 являются взаимно сопряженными комплексными числами, получается голая сингулярность. Все это находится в тесной аналогии с решением Рейсснера-Нордстрема . Мы часто будем использовать следующую линейную комбинацию параметров

$$\Delta = r_1 - r_2. \tag{20}$$

В калибровке (18) уравнения Эйнштейна (13,14) и (15) принимают следующий вид

$$w = 1/f, \ (fh)^2 = (r - r_1)(r - r_2), \tag{21}$$

$$h'' - h\phi'^2 = 0, \tag{22}$$

$$(f^2 hh')' = 1 - Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^2}. \tag{23}$$

Дилатонное уравнение (11) тоже упрощается и может быть записано в виде

$$(f^2 h^2 \phi')' = -Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^2}. \tag{24}$$

А решение уравнений Максвелла (3) есть

$$F_{rt} = \frac{Q_e e^{2\phi}}{h^2}. \tag{25}$$

Вычитая из уравнения (23) уравнение (24), найдем

$$\left(f^2 h h'_r\right)'_r - \left(f^2 h^2 \phi'_r\right)'_r = 1, \tag{26}$$

что дает

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)}. \tag{27}$$

Подстановка этого выражения в (22) дает

$$\phi''_{rr} + 2\frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)}\phi'_r = -\frac{(C - r_1)(C - r_2)}{(r - r_1)^2 (r - r_2)^2}. \tag{28}$$

3 Заряженные антидилатонные черные дыры

Рассмотрим случай

$$r_1 - r_2 > 0. \tag{29}$$

Тогда уравнение (27) дает

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r-C}{(r-r_1)(r-r_2)} = \frac{(r-r_1)+(r-r_2)-2\mu\Delta}{2(r-r_1)(r-r_2)}, \tag{30}$$

где

$$\mu = \frac{2C - r_1 - r_2}{2\Delta}. \tag{31}$$

Тогда, делая подстановку

$$\rho = \frac{r-r_1}{r-r_2}\left(>0, \text{т.к. } (r-r_1)(r-r_2) = f^2h^2 > 0\right), \quad r = \frac{r_1 - r_2\rho}{1-\rho} \tag{32}$$

$$\left(\frac{d}{dr} = \frac{(1-\rho)^2}{\Delta}\frac{d}{d\rho}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{(1-\rho)^4}{\Delta^2}\frac{d^2}{d\rho^2} - 2\frac{(1-\rho)^3}{\Delta^2}\frac{d}{d\rho},\right.$$

$$\left.(r-r_1)(r-r_2) = \frac{\rho\Delta^2}{(1-\rho)^2}, \quad r - C = \frac{\Delta(1+\rho) - 2\mu\Delta(1-\rho)}{2(1-\rho)}\right)$$

решение (30) можно записать так

$$h^2e^{-2\phi} = B^2(r-r_1)(r-r_2)\left(\frac{r-r_2}{r-r_1}\right)^{2\mu} = B^2\frac{\rho^{1-2\mu}\Delta^2}{(1-\rho)^2}, \tag{33}$$

или

$$h^2 = B^2\Delta^2e^{2\phi}\frac{\rho^{1-2\mu}}{(1-\rho)^2}, \tag{34}$$

где B константа интегрирования. Учитывая соотношение (21), получим

$$f^2 = \frac{(r-r_1)(r-r_2)}{h^2} = \frac{\rho^{2\mu}}{B^2e^{2\phi}}. \tag{35}$$

Уравнение (28) можно привести к виду

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{(1-2\mu)}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\mu^2 - 1/4}{\rho^2} = 0. \tag{36}$$

3.1 Тип AI: $r_1 - r_2 > 0$, $\mu \neq 0$

В случае $\mu \neq 0$ решение уравнение (36) имеет вид

$$e^{2\phi} = D^2 \exp\left(\frac{D_1}{\mu}\rho^{2\mu}\right)\rho^{\mu-1/(4\mu)}. \tag{37}$$

А (34), (35) и (25) дают

$$h^2 = B^2 D^2 \Delta^2 \exp\left(\frac{D_1}{\mu}\rho^{2\mu}\right)\frac{\rho^{1-\mu-1/(4\mu)}}{(1-\rho)^2}, \tag{38}$$

$$f^2 = \frac{\rho^{\mu+1/(4\mu)}}{B^2 D^2 \exp\left(\frac{D_1}{\mu}\rho^{2\mu}\right)}, \tag{39}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e(1-\rho)^2}{B^2\Delta^2\rho^{1-2\mu}}. \tag{40}$$

Подстановка выражений (37),(38) и (39) в (23) или (24) дает

$$2\mu D_1 B^2 \Delta^2 + Q_e^2 = 0. \tag{41}$$

Таким образом, общее решения типа AI есть

$$e^{2\phi} = D^2 \exp\left(-\frac{Q_e^2\rho^{2\mu}}{2\mu^2 B^2\Delta^2}\right)\rho^{\mu-1/(4\mu)}. \tag{42}$$

$$h^2 = B^2 D^2 \Delta^2 \exp\left(-\frac{Q_e^2\rho^{2\mu}}{2\mu^2 B^2\Delta^2}\right)\frac{\rho^{1-\mu-1/(4\mu)}}{(1-\rho)^2}, \tag{43}$$

$$f^2 = \frac{\rho^{\mu+1/(4\mu)}}{B^2 D^2 \exp\left(-\frac{Q_e^2\rho^{2\mu}}{2\mu^2 B^2\Delta^2}\right)}, \tag{44}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e(1-\rho)^2}{B^2\Delta^2\rho^{1-2\mu}}. \tag{45}$$

$$\rho = \frac{r-r_1}{r-r_2}. \tag{46}$$

3.1.1 Тип AI: $r_1 - r_2 > 0$, $\mu \neq 0$. Асимптотически плоское решение

Требуя, чтобы $e^{2\phi} \to 1$ и $f^2 \to 1$ при $\rho \to 1$, получим

$$B^2 = 1, \qquad D^2 = \exp\left(\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right). \tag{47}$$

Таким образом, асимптотически плоские решения типа AI имеют вид

$$e^{2\phi} = \exp\left[\left(1-\rho^{2\mu}\right)\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right]\rho^{\mu-1/(4\mu)}. \tag{48}$$

$$h^2 = \Delta^2\exp\left[\left(1-\rho^{2\mu}\right)\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right]\frac{\rho^{1-\mu-1/(4\mu)}}{(1-\rho)^2}, \tag{49}$$

$$f^2 = \frac{\rho^{\mu+1/(4\mu)}}{\exp\left[\left(1-\rho^{2\mu}\right)\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right]}, \tag{50}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e(1-\rho)^2}{\Delta^2\rho^{1-2\mu}}, \tag{51}$$

$$\rho = \frac{r-r_1}{r-r_2}. \tag{52}$$

Это решение определяется четырьмя константами интегрирования: r_1, r_2, μ, Q_e. (При $0 < \mu < 1/2, \mu < -1/2$ в точке $\rho = 0$ (или $r = r_1$) сингулярность? Нужно поанализировать это решение!)

Вместо констант Δ, μ введем массу M, дилатонный заряд Q_d. Разложим f^2 при $r \to \infty$

$$f^2 = 1 - \left[\frac{Q_e^2}{\mu\Delta} + \Delta\left(\mu + \frac{1}{4\mu}\right)\right]\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{53}$$

т.е. масса равна

$$M = \frac{Q_e^2}{2\mu\Delta} + \Delta\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{8\mu}\right). \tag{54}$$

Вычисление дилатонного заряда дает

$$F_{rt} = \frac{dA_t}{dr} = \frac{(1-\rho)^2}{\Delta}\frac{dA_t}{d\rho} = \frac{Q_e(1-\rho)^2}{\Delta^2\rho^{1-2\mu}}, \tag{55}$$

$$A_t = \frac{Q_e \rho^{2\mu}}{2\mu\Delta} + const = \frac{Q_e}{2\mu\Delta}\left(\rho^{2\mu} - 1\right), \tag{56}$$

$$Q_d = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\left(\phi_r' - \frac{F_{rt}A^t}{e^{2\phi}f^2}\right)\right] = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi_r'\right] = -\frac{Q_e^2}{2\mu\Delta} + \frac{\mu\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8\mu}. \tag{57}$$

Система уравнений (54,57) дает

$$M + Q_d = \mu\Delta, \tag{58}$$

$$M - Q_d = \frac{Q_e^2}{\mu\Delta} + \frac{\Delta}{4\mu}. \tag{59}$$

Из этих соотношений найдём

$$\mu = \frac{M + Q_d}{2\sqrt{M^2 - Q_d^2 - Q_e^2}} \neq 0. \tag{60}$$

$$\Delta \equiv r_1 - r_2 = 2\sqrt{M^2 - Q_d^2 - Q_e^2} > 0. \tag{61}$$

При этом r_2 может быть любым действительным числом, поскольку произвол в выборе начала отсчета на оси r ($\tilde{r} = r - const$) ничего не меняет в этом решении.

Частным случаем этого решения, соответствующим $\mu = 1/2, r_2 = 0$ ($r \geq r_1 = 2\sqrt{M^2 - Q_d^2 - Q_e^2} = 2(M + Q_d) = -\dfrac{Q_e^2}{Q_d} > 0$), является

$$e^{2\phi} = e^{-2Q_d/r}, \tag{62}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{r^2}, \tag{63}$$

$$ds^2 = -e^{2Q_d/r}\left[1 - \frac{2(M+Q_d)}{r}\right]dt^2 + e^{-2Q_d/r}\left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2(M+Q_d)}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \tag{64}$$

что совпадает с формулой (2.24) работы [7] с точностью до обозначений. Условие горловины

$$0 = \frac{dh^2}{dl} = \frac{dh^2}{dr}\frac{dr}{dl} = 2e^{-Q_d/r}(r + Q_d)\sqrt{1 - \frac{2(M+Q_d)}{r}}. \tag{65}$$

Горловина $r_{throat} = -Q_d$ перед горизонтом $r_g = 2(M + Q_d) = -\frac{Q_e^2}{Q_d}$, если $-Q_d > 2(M + Q_d) > 0$ или $-3Q_d > 2M > -2Q_d$.

3.1.2 Тип AII: $r_1 - r_2 > 0$, $\mu = 0$

В случае $\mu = 0$ решение уравнение (36) имеет вид

$$\phi = \frac{(\ln\rho)^2}{8} + \frac{\text{const}}{2}\ln\rho + \frac{\ln K^2}{2} \tag{66}$$

или

$$e^{2\phi} = K^2 \rho^{\frac{\ln\rho}{4} + \text{const}}, \tag{67}$$

$$h^2 = B^2 K^2 \Delta^2 \frac{\rho^{\frac{\ln\rho}{4} + 1 + \text{const}}}{(1-\rho)^2}, \tag{68}$$

$$f^2 = \frac{1}{B^2 K^2 \rho^{\frac{\ln\rho}{4} + \text{const}}} \tag{69}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e (1-\rho)^2}{B^2 \Delta^2 \rho} \tag{70}$$

Подстановка этих выражений в (23) или (24) дает

$$4Q_e^2 + B^2\Delta^2 = 0. \tag{71}$$

Это означает, что решения для случая AII нет.

3.2 Type B $(r_1 = r_2)$

Если

$$\Delta = r_1 - r_2 = 0, \tag{72}$$

то (27) дает

$$\frac{h_r'}{h} - \phi_r' = \frac{r - C}{(r - r_1)^2} \tag{73}$$

или

$$\ln h - \phi = \frac{C - r_1}{r - r_1} + \frac{1}{2}\ln(r - r_1)^2 + \frac{1}{2}\ln D^2 \tag{74}$$

или

$$\frac{h^2}{e^{2\phi}} = D^2(r - r_1)^2 \exp\left[\frac{2(C - r_1)}{(r - r_1)}\right]. \tag{75}$$

Учитывая (21) и (72)

$$f^2 h^2 = (r - r_1)^2 \tag{76}$$

получим

$$f^2 = \frac{1}{D^2 \exp\left[2\phi + 2\frac{(C - r_1)}{(r - r_1)}\right]}. \tag{77}$$

Уравнение (28) сведется к

$$\phi''_{rr} + 2\frac{r - C}{(r - r_1)^2}\phi'_r + \frac{(C - r_1)^2}{(r - r_1)^4} = 0. \tag{78}$$

3.2.1 Тип BI ($r_1 = r_2, C \neq r_1$)

Решение уравнения (78) в случае $C \neq r_1$ есть

$$\phi = \frac{1}{2}\ln(D_1^2) + \frac{D_2}{2(C - r_1)}e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C - r_1)}{2(r - r_1)}. \tag{79}$$

Таким образом

$$e^{2\phi} = D_1^2 \exp\left[\frac{D_2}{(C - r_1)}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C - r_1)}{(r - r_1)}\right], \tag{80}$$

$$h^2 = D^2 D_1^2 (r - r_1)^2 \exp\left[\frac{D_2}{(C - r_1)}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} + \frac{(C - r_1)}{(r - r_1)}\right], \tag{81}$$

$$f^2 = \frac{1}{D^2 D_1^2 \exp\left[\frac{D_2}{(C - r_1)}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} + \frac{(C - r_1)}{(r - r_1)}\right]}, \tag{82}$$

$$F_{rt} = Q_e \frac{e^{2\phi}}{h^2} = \frac{Q_e}{D^2 (r - r_1)^2\, e^{2(C-r_1)/(r-r_1)}}. \tag{83}$$

Подстановка (80), (81) и (82) в (23) и (24) дает

$$D_2 = -\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)}. \tag{84}$$

Следовательно общее решение для типа BI есть

$$e^{2\phi} = D_1^2 \exp\left[-\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{85}$$

$$h^2 = D^2 D_1^2 (r-r_1)^2 \exp\left[-\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} + \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{86}$$

$$f^2 = \frac{1}{D^2 D_1^2} \exp\left[\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{87}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{D^2(r-r_1)^2\, e^{2(C-r_1)/(r-r_1)}}. \tag{88}$$

3.2.2 Тип BI ($r_1 = r_2, C \neq r_1$). Асимптотически плоское решение

Требуя $\phi \to 0$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty$, получим

$$D_1^2 = \exp\left[\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\right],\ D^2 = 1. \tag{89}$$

Поэтому асимптотически плоское решение типа BI есть

$$e^{2\phi} = \exp\left[\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)^2}\left(1 - e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)}\right) - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{90}$$

$$h^2 = (r-r_1)^2 \exp\left[\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)^2}\left(1 - e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)}\right) + \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{91}$$

$$f^2 = \exp\left[-\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)^2}\left(1 - e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)}\right) - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{92}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{(r-r_1)^2\, e^{2(C-r_1)/(r-r_1)}}. \tag{93}$$

Раскладывая f^2 (92) по степеням $1/r$ получим

$$f^2 = 1 - \frac{[Q_e^2 + (C-r_1)^2]}{(C-r_1)}\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{94}$$

или

$$M = \frac{(C - r_1)}{2} + \frac{Q_e^2}{2(C - r_1)}. \tag{95}$$

Вычисление дилатонного заряда дает

$$Q_d = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi'_r\right] = \frac{(C - r_1)}{2} - \frac{Q_e^2}{2(C - r_1)}. \tag{96}$$

Таким образом

$$Q_e^2 = M^2 - Q_d^2,\ C - r_1 = M + Q_d, \tag{97}$$

что позволяет записать асимптотически плоское решение типа BI следующим образом

$$e^{2\phi} = \exp\left[\frac{(M - Q_d)}{2(M + Q_d)}\left(1 - e^{-2(M+Q_d)/(r-r_1)}\right) - \frac{(M + Q_d)}{(r - r_1)}\right], \tag{98}$$

$$h^2 = (r - r_1)^2\exp\left[\frac{(M - Q_d)}{2(M + Q_d)}\left(1 - e^{-2(M+Q_d)/(r-r_1)}\right) + \frac{(M + Q_d)}{(r - r_1)}\right], \tag{99}$$

$$f^2 = \exp\left[-\frac{(M - Q_d)}{2(M + Q_d)}\left(1 - e^{-2(M+Q_d)/(r-r_1)}\right) - \frac{(M + Q_d)}{(r - r_1)}\right], \tag{100}$$

$$F_{rt} = \frac{\sqrt{M^2 - Q_d^2}}{(r - r_1)^2\, e^{2(M+Q_d)/(r-r_1)}}, \tag{101}$$

$$Q_e^2 = M^2 - Q_d^2,\ M + Q_d \neq 0. \tag{102}$$

3.2.3 Тип BII ($r_1 = r_2, C = r_1$)

Решение уравнения (78) в случае $C \neq r_1$ есть

$$\phi = \frac{\ln(L_1^2)}{2} + \frac{L_2}{2(r - r_1)}. \tag{103}$$

Учитывая (75) и (77), получим

$$e^{2\phi} = L_1^2 e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{104}$$

$$h^2 = D^2 L_1^2 (r - r_1)^2 e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{105}$$

$$f^2 = \frac{1}{D^2 L_1^2} e^{-L_2/(r-r_1)}, \tag{106}$$

$$F_{rt} = Q_e \frac{e^{2\phi}}{h^2} = \frac{Q_e}{D^2 (r-r_1)^2}. \tag{107}$$

Подстановка (104), (105) и (106) в (23) и (24) дает

$$Q_e = 0. \tag{108}$$

3.2.4 Тип BII ($r_1 = r_2, C = r_1$). Асимптотически плоское решение

Требуя $\phi \to 0$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty$, получим

$$L_1^2 = 1, \; D^2 = 1. \tag{109}$$

Поэтому асимптотически плоское решение типа BII есть

$$e^{2\phi} = e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{110}$$

$$h^2 = (r-r_1)^2 e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{111}$$

$$f^2 = e^{-L_2/(r-r_1)}, \tag{112}$$

$$F_{rt} = 0. \tag{113}$$

Разложение (112) по степеням $1/r$ дает

$$M = L_2/2. \tag{114}$$

А вычисление дилатонного заряда дает

$$Q_d = \lim_{r\to\infty} \left[h^2 \phi'_r \right] = -\frac{L_2}{2}. \tag{115}$$

Поэтому асимптотически плоское решение типа BII есть

$$e^{2\phi} = e^{2M/(r-r_1)}, \tag{116}$$

$$h^2 = (r - r_1)^2 e^{2M/(r-r_1)}, \tag{117}$$

$$f^2 = e^{-2M/(r-r_1)}, \tag{118}$$

$$F_{rt} = 0, \tag{119}$$

$$M = -Q_d,\ Q_e = 0. \tag{120}$$

4 Тип C ($r_1 = r_2^*$). Заряженные антидилатонные кротовые норы

Обозначим

$$r_1 = r_0 + iv, r_2 = r_0 - iv, \qquad v > 0. \tag{121}$$

Тогда

$$f^2 h^2 = (r - r_1)(r - r_2) = (r - r_0)^2 + v^2, \tag{122}$$

Введем еще одно новое обозначение

$$\kappa = \frac{r_0 - C}{2v}. \tag{123}$$

Тогда уравнение (27) можно переписать так

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)} = \frac{r - r_0 + 2v\kappa}{(r - r_0)^2 + v^2}. \tag{124}$$

А его решение имеет вид

$$h^2 e^{-2\phi} = A^2 \left[(r - r_0)^2 + v^2\right] e^{4\kappa \arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right)}. \tag{125}$$

Чтобы решить уравнение (28) введем новую переменную

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \tag{126}$$

Тогда

$$(r - r_0)^2 + v^2 = \frac{v^2}{\cos^2\eta},\ \frac{d}{dr} = \frac{\cos^2\eta}{v}\frac{d}{d\eta},\ \frac{d^2}{dr^2} = \frac{\cos^4\eta}{v^2}\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{2}{v^2}\sin\eta\cos^3\eta\frac{d}{d\eta},$$
$$\frac{r - C}{(r - r_1)(r - r2)} = \frac{2\kappa\cos^2\eta}{v} + \frac{\sin\eta\cos\eta}{v},\ \frac{(C - r_1)(C - r_2)}{(r - r_1)^2(r - r2)^2} = \frac{1 + 4\kappa^2}{v^2}\cos^4\eta. \tag{127}$$

а уравнение (28) можно переписать так

$$\frac{\cos^4\eta}{v^2}\left(\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+4\kappa\frac{d\phi}{d\eta}+1+4\kappa^2\right)=0. \tag{128}$$

4.1 Тип CI ($r_1 = r_2^*, \kappa \neq 0$)

Решение уравнения (128) для $\kappa \neq 0$ есть

$$\phi = -\left(\kappa+\frac{1}{4\kappa}\right)\eta - \frac{C_1}{2}e^{-4\kappa\eta}+\frac{1}{2}\ln C_2^2. \tag{129}$$

Учитывая (126), а также (125) и (122), получим

$$e^{2\phi}=C_2^2\exp\left[-\left(2\kappa+\frac{1}{2\kappa}\right)\eta - C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{130}$$

$$h^2=\frac{A^2C_2^2v^2}{\cos^2\eta}\exp\left[\left(2\kappa-\frac{1}{2\kappa}\right)\eta - C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{131}$$

$$f^2=\frac{1}{A^2C_2^2}\exp\left[-\left(2\kappa-\frac{1}{2\kappa}\right)\eta + C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{132}$$

Подстановка (130), (131) и (132) в (23) и (24) дает

$$C_1=\frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2v^2}. \tag{133}$$

Таким образом, общее статическое сферически симметричное решение типа I есть

$$e^{2\phi}=C_2^2\exp\left[-\left(2\kappa+\frac{1}{2\kappa}\right)\eta - \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2v^2}e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{134}$$

$$h^2=\frac{A^2C_2^2v^2}{\cos^2\eta}\exp\left[\left(2\kappa-\frac{1}{2\kappa}\right)\eta - \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2v^2}e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{135}$$

$$f^2=\frac{1}{A^2C_2^2}\exp\left[-\left(2\kappa-\frac{1}{2\kappa}\right)\eta + \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2v^2}e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{136}$$

$$F_{rt}=\frac{Q_e}{A^2v^2}e^{-4\kappa\eta}\cos^2\eta, \tag{137}$$

$$\eta=\arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right). \tag{138}$$

4.2 Тип CI ($r_1 = r_2^*, \kappa \neq 0$). Асимптотически плоское решение

Требуя $\phi \to 0$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty$, получим

$$A^2 = e^{-2\pi\kappa},\ C_2^2 = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\right]. \tag{139}$$

Поэтому

$$e^{2\phi} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)\Big(\pi - 2\eta\Big) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\Big(1 - e^{2\kappa(\pi-2\eta)}\Big)\right], \tag{140}$$

$$h^2 = \frac{v^2}{\cos^2\eta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\Big(\pi - 2\eta\Big) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\Big(1 - e^{2\kappa(\pi-2\eta)}\Big)\right], \tag{141}$$

$$f^2 = \exp\left[\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\Big(\pi - 2\eta\Big) - \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\Big(1 - e^{2\kappa(\pi-2\eta)}\Big)\right], \tag{142}$$

$$F_{rt} = Q_e\frac{\cos^2\eta}{v^2}\, e^{2\kappa(\pi-2\eta)}, \tag{143}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \tag{144}$$

Вычисление дилатонного заряда дает

$$\begin{aligned} Q_d =& \lim_{r\to\infty}\left[h^2\left(\phi_r' - \frac{F_{rt}A^t}{e^{2\phi}f^2}\right)\right] = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi_r'\right] \\ =& \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}\left\{v\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) + \frac{Q_e^2}{4\kappa v^2}e^{2\kappa(\pi-2\eta)}\right]\right. \\ & \left.\exp\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\Big(\pi - 2\eta\Big) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\Big(1 - e^{2\kappa(\pi-2\eta)}\Big)\right]\right\} \end{aligned} \tag{145}$$

или

$$Q_d = -\frac{v}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) + \frac{Q_e^2}{4\kappa v}. \tag{146}$$

А разложение f^2 (142) при $r \to \infty$ определяет массу

$$M = -\frac{v}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right) - \frac{Q_e^2}{4\kappa v}. \tag{147}$$

Таким образом

$$v = \sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2} > 0,\ \kappa = -\frac{(Q_d + M)}{2\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}} \neq 0. \tag{148}$$

Таким образом, учитывая, что

$$\cos^2\eta = \cos^2\left[\arctan\left(\frac{r-r_0}{\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\right)\right] = \frac{Q_d^2-M^2+Q_e^2}{Q_d^2-M^2+Q_e^2+(r-r_0)^2}, \tag{149}$$

статическое асимптотически плоское решение типа CI имеет вид

$$\begin{aligned} e^{2\phi} = \exp\Bigg[&-\frac{\left(2Q_d^2+2Q_dM+Q_e^2\right)}{2\left(Q_d+M\right)\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\left(\pi-2\eta\right) \\ &+\frac{Q_e^2}{2\left(Q_d+M\right)}\left(1-e^{-(\pi-2\eta)(Q_d+M)/\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned} h^2=&\left[(r-r_0)^2+\left(Q_d^2-M^2+Q_e^2\right)\right]\exp\left[\frac{(2M^2+2Q_dM-Q_e^2)}{2\left(Q_d+M\right)\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\left(\pi-2\eta\right)\right. \\ &\left.+\frac{Q_e^2}{2\left(Q_d+M\right)}\left(1-e^{-(\pi-2\eta)(Q_d+M)/\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{151}$$

$$\begin{aligned} f^2 = \exp\Bigg[&-\frac{\left(2M^2+2Q_dM-Q_e^2\right)}{2\left(Q_d+M\right)\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\left(\pi-2\eta\right) \\ &-\frac{Q_e^2}{2\left(Q_d+M\right)}\left(1-e^{-(\pi-2\eta)(Q_d+M)/\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{152}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{\left[(r-r_0)^2+(Q_d^2-M^2+Q_e^2)\right]}\,e^{-(\pi-2\eta)(Q_d+M)/\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}, \tag{153}$$

$$Q_d^2-M^2+Q_e^2>0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r-r_0}{\sqrt{Q_d^2-M^2+Q_e^2}}\right). \tag{154}$$

В частном случае $Q_e=0$ получим кротовую нору Бронникова-Эллиса

$$e^{2\phi} = \exp\left[-\frac{Q_d}{\sqrt{Q_d^2-M^2}}\left(\pi-2\eta\right)\right], \tag{155}$$

$$h^2 = \left[(r-r_0)^2+(Q_d^2-M^2\,)\right]\exp\left[\frac{M}{\sqrt{Q_d^2-M^2}}\left(\pi-2\eta\right)\right], \tag{156}$$

$$f^2 = \exp\left[\frac{-M}{\sqrt{Q_d^2-M^2}}\left(\pi-2\eta\right)\right], \tag{157}$$

$$F_{rt} = 0, \tag{158}$$

$$Q_d^2 > M^2,\ M + Q_d \neq 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}}\right). \tag{159}$$

Тип CI описывает антидилатонную заряженную кротовую нору.

4.3 **Тип CII** $(r_1 = r_2^*, \kappa = 0)$

Решение уравнения (128) для $\kappa = 0$ есть

$$\phi = -\frac{\eta^2}{2} + \frac{F}{2}\eta + \frac{1}{2}\ln E^2. \tag{160}$$

Поэтому

$$e^{2\phi} = E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \tag{161}$$

$$h^2 = \frac{A^2 v^2}{\cos^2\eta} E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \tag{162}$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 E^2 e^{\eta(F-\eta)}}, \tag{163}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e \cos^2\eta}{A^2 v^2}, \tag{164}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \tag{165}$$

Подстановка (161), (162) и (163) в (23) и (24) дает

$$Q_e^2 = A^2 v^2. \tag{166}$$

Таким образом, статическое сферически симметричное решение в этом случае имеет вид

$$e^{2\phi} = E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \tag{167}$$

$$h^2 = \frac{Q_e^2 E^2}{\cos^2\eta} e^{\eta(F-\eta)}, \tag{168}$$

$$f^2 = \frac{v^2}{Q_e^2 E^2 e^{\eta(F-\eta)}}, \tag{169}$$

$$F_{rt} = \frac{\cos^2 \eta}{Q_e}, \tag{170}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right), \; Q_e \neq 0. \tag{171}$$

4.4 Тип CII ($r_1 = r_2^*, \kappa = 0$). Асимптотически плоское решение

Требуя, чтобы $e^{2\phi} \to 1$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty$ $\left(\eta \to \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$E^2 = \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(F - \frac{\pi}{2}\right)\right], \; v^2 = Q_e^2 \neq 0. \tag{172}$$

Таким образом

$$e^{2\phi} = e^{\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\left(F - \frac{\pi}{2} - \eta\right)}, \tag{173}$$

$$h^2 = \frac{Q_e^2}{\cos^2 \eta} e^{\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\left(F - \frac{\pi}{2} - \eta\right)}, \tag{174}$$

$$f^2 = \frac{1}{e^{\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\left(F - \frac{\pi}{2} - \eta\right)}}, \tag{175}$$

$$F_{rt} = \frac{\cos^2 \eta}{Q_e}, \tag{176}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{|Q_e|}\right), \; Q_e \neq 0. \tag{177}$$

Разложение f^2 (175) по степеням $1/r$ дает

$$f^2(r) = 1 - \frac{v(\pi - F)}{r}, \tag{178}$$

т.е. масса равна

$$M = \frac{v}{2}(\pi - F) = \frac{|Q_e|}{2}(\pi - F). \tag{179}$$

Вычисление дилатонного заряда дает

$$Q_d = \lim_{r \to \infty}\left[h^2 \phi'_r\right] = \lim_{\eta \to \frac{\pi}{2}}\left[h^2 \frac{\cos^2 \eta}{v} \phi'_\eta\right] = \lim_{\eta \to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{Q_e^2 e^{\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\left(F - \frac{\pi}{2} - \eta\right)}}{v}\left(\frac{F}{2} - \eta\right)\right] \tag{180}$$

или

$$Q_d = \frac{Q_e^2(F-\pi)}{2v} = |Q_e|\frac{(F-\pi)}{2}. \tag{181}$$

Таким образом

$$F = \pi - \frac{2M}{|Q_e|}, Q_d = -M. \tag{182}$$

Выбором начала на оси r можно добиться $r_0 = 0$. Поэтому выражения (173)-(176) можно переписать в виде

$$e^{2\phi} = \exp\left[\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2M}{|Q_e|} - \eta\right)\right], \tag{183}$$

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{e^{2\phi}} + e^{2\phi}\left[dr^2 + \left(r^2 + Q_e^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right], \tag{184}$$

$$F_{rt} = \frac{\cos^2\eta}{Q_e} = \frac{Q_e}{r^2+Q_e^2}, \tag{185}$$

$$Q_d = -M,\ Q_e \neq 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r}{|Q_e|}\right). \tag{186}$$

Это решение описывает кротовую нору, причем область $r \to -\infty$ также является асимптотически плоской. Однако $\phi(r \to -\infty) = \text{const} \neq 0$. Положение горловины определяется уравнением

$$r - |Q_e|\arctan\left(\frac{r}{|Q_e|}\right) + \frac{\pi|Q_e|}{2} - M = 0. \tag{187}$$

Частный случай

$$2M = \pi|Q_e|. \tag{188}$$

Это дает

$$e^{2\phi} = e^{\pi^2/4-\eta^2}, \tag{189}$$

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{e^{\pi^2/4-\eta^2}} + e^{\pi^2/4-\eta^2}\left[dr^2 + \left(r^2+Q_e^2\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \tag{190}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{r^2+Q_e^2}, \tag{191}$$

$$Q_d = M = \frac{\pi}{2}|Q_e| \neq 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r}{|Q_e|}\right). \tag{192}$$

Это решение описывает симметричную кротовую нору.

5 Заключение

В работе получены статические сферически симметричные асимптотически плоские решения теории Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона. Эти решения определяются массой, электрическим и анти-дилатонным зарядами и в зависимости от величин этих зарядов разбиваются на пять типов:

тип AI: $Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 < 0,\ M + Q_d \neq 0;$

тип BI: $Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 = 0,\ M + Q_d \neq 0;$

тип BII: $Q_e = 0,\ M + Q_d = 0;$

тип CI: $Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 > 0,\ M + Q_d \neq 0;$

тип CII: $Q_e \neq 0, M + Q_d = 0.$

Тип A соответствует черным дырам с двумя горизонтами.

Тип B соответствует экстремальным черным дырам (два горизонта совпадают).

Тип C соответствует кротовым норам.

Список литературы

[1] D.J. Boulware and S. Deser, Phys. Lett. B175 (1986) 409

[2] T. Koikawa and M. Yoshimura, Phys. Lett. B189 (1987) 29

[3] G.W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B298 (1988) 741

[4] M. Yoshimura, Prog. Theor. Phys. 81 (1989) 576

[5] N. Marcus, Gen. Rel. Grav. 22 (1990) 873

[6] D. Garfinkle, G.T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D43 (1991) 3140

[7] G. W. Gibbons, D. A. Rasheed, Nucl.Phys. **B476** 515-547 (1996)

[8] Clément G., Fabris J., Rodrigues M., Phys. Rev. D **79** 064021 (2009)