

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОУВПО “ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”
ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Создание процедур оснащенной динамической
визуализации численных решений
обыкновенных нелинейных
дифференциальных уравнений

Выпускная квалификационная работа
студентки Шамсетдиновой А.А.
Научный руководитель: Игнатъев Ю.Г.
доктор физ.-мат. наук, профессор

Оглавление

Введение	3	
I	Дифференциальные уравнения n-ого порядка	4
I.1	Дифференциальные уравнения первого порядка	4
I.2	Дифференциальные уравнения второго порядка	7
I.3	Дифференциальные уравнения высших порядков.	9
II	Методы решения нелинейных ОДУ в Maple	11
III	Процедуры оснащенные динамической визуализации числен- ных решений ОДУ.	32
Заключение	39	
Литература	41	

Введение

Все реальные физические системы нелинейны. Можно считать линейными лишь приближённо при малой интенсивности колебательных и волновых процессов. Таким образом, математическим образом нелинейных систем являются нелинейные уравнения.

Актуальность работы В современных условиях возрастает сложность проектируемых технических объектов. Совершенствуются методы их расчета при сложных динамических режимах нагрузки. Так же использование высокопроизводительных машин приводит к увеличению амплитуд колебаний и расширению спектра вибрационных нагрузок. Таким образом, интенсификация колебаний может привести к полной расстройке и отказу динамической системы, с другой стороны колебания с большими амплитудами являются рабочим режимом большого числа современных машин. Поэтому, для изучения этих явлений необходимо применять методы нелинейной теории колебаний.

Основными задачами данной работы являются:

1. Создание компьютерной модели нелинейных колебаний;
2. Рассмотрение аналитических и численных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений.

Темой моей квалификационной работы является создание процедур оснащенной динамической визуализации численных решений обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Глава I

Дифференциальные уравнения n-ого порядка

I.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение OI.1. Если в уравнениях неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, то такие уравнения называются дифференциальными.

Определение OI.2. Дифференциальное уравнение, имеющее одну независимую переменную называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение OI.3. Дифференциальное уравнение, имеющее две или более независимых переменных называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение OI.4. Входящее в дифференциальное уравнение наивысший порядок производных называется порядком дифференциального уравнения.

Определение OI.5. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейно относительно неизвестной функции и ее производной.

Линейное уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (\text{I.1})$$

где $p(x)$ и $f(x)$ -непрерывные функции x в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение I.1.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение I.1 называется линейным однородным.

I.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Теорема П1.1. *Существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$*

Нормальная система в векторных обозначениях примет вид:

$$y' = f(x, y) \quad (\text{I.2})$$

где $f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$.

Определение ОI.6. *Вектор-функция $y = \varphi(x)$ называется решением нормальной системы I.2 на промежутке $I \in \mathbb{R}$, если:*

1. $\varphi(x) \in \mathbb{C}_n(I)$
2. $(x, \varphi(x)) \in G$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Рассмотрим начальное условие

$$y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in G \quad (\text{I.3})$$

Точка (x_0, y_0) называется начальной точкой, а ее координаты x_0, y_0 называются начальными данными.

Определение ОI.7. *Задача нахождения решения нормальной системы I.2, удовлетворяющему начальному условию I.3, называется задачей Коши.*

Система уравнений вида:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\zeta, y(\zeta))d\zeta \quad (\text{I.4})$$

называется системой интегральных уравнений, где $(x_0, y_0) \in G, f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$.

Определение ОI.8. *Вектор-функция $y = \varphi(x)$ называется решением на промежутке $I \in \mathbb{R}$ системы I.4, если:*

1. $\varphi(x) \in \mathbb{C}_n(I)$
2. $(x, \varphi(x)) \in G$
3. $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\zeta, \varphi(\zeta))d\zeta$

Определение ОI.9. *Вектор-функция $y = \varphi(x)$ называется решением задачи Коши I.2 при условии I.4 тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ решение системы интегральных уравнений I.4.*

Теорема П1.2. *Пусть вектор-функция $f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$ удовлетворяет на каждой области G условию Липшица*

$$\exists L > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in G |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ Тогда:}$$

1. найдется такое $\delta > 0$, $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Коши I.2 при условии I.3 существует,
2. решение задачи Коши единственно.

В силу леммы об эквивалентности доказательство теоремы сводится к существованию и единственности решения системы интегральных уравнений I.4.

Доказательство: $\langle\langle$

A. Существование

Поскольку $(x_0, y_0) \in G$ и G - открытое множество, то $\exists p, q$ что замкнутый цилиндр $G_{pq} = \{(x, y) \in G, |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\}$ принадлежит G . В силу того, что цилиндр G_{pq} компакт то

$\exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in G_{pq}$ Будем строить решение системы интегральных уравнений I.4 методом приближений Пикара при $|x_0 - x| < \delta$, где $\delta = \min(p, \frac{q}{M})$. Определим последовательные приближения следующим образом при $|x - x_0| \leq \delta$:

$y_0(x) = y_0, y_{i+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f[\zeta, y_i(\zeta)]d\zeta$ ясно, что каждая $y_i(x)$ непрерывна при (x, y) , и что $(x, y_i(x)) \in G_{pq}$

$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f[\zeta, y_0]d\zeta \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f[\zeta, y_0]|d\zeta \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq q$ Как известно из курса анализа, равномерная сходимость функционального ряда $\{y_i(x)\}_0^\infty$ эквивалентна равномерной сходимости ряда вида

$y_0(x) + \sum_{i=0}^\infty [y_{i+1} - y_i(x)]$ докажем оценку

$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq \int_{x_0}^x |f[\zeta, y_i(\zeta)] - f[\zeta, y_{i-1}(\zeta)]|dx \leq L \int_{x_0}^x |y_i(\zeta) - y_{i-1}(\zeta)|dx \leq L \frac{L^{i-1}M}{i!} \int_{x_0}^x |\zeta - x_0|dx = L^i M \frac{|x-x_0|^{i+1}}{(i+1)!}$ По теореме Вейерштрасса получим, что

$y_i(x) \Rightarrow \varphi(x)$ и

$\int_{x_0}^x f[\zeta, y_i(\zeta)]d\zeta \Rightarrow \int_{x_0}^x f[\zeta, \varphi(\zeta)]d\zeta$

B. Единственность следует из леммы Грануоллла. $\rangle\rangle$

Теорема П.3. *Об непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных значений.*

Если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \tag{I.5}$$

непрерывна по μ при $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ и удовлетворяющее условиям теоремы существования и единственности, причем постоянная Липшица N не зависит от μ , то решение $y(x, \mu)$ рассматриваемого уравнения, удовлетворяющему условию $y(x_0) = y_0$, непрерывно зависит от μ .

1.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Теорема П1.4. Об аналитической зависимости решения от параметра, теорема Пуанкаре.

Решение $x(t, \mu)$ дифференциального уравнения $x = f(t, x, \mu)$, удовлетворяющему условию $x(t_0) = x_0$, аналитически зависит от параметра μ в окрестности значения $\mu = \mu_0$, если функция f в заданной области изменения t и x и в некоторой окрестности точки μ_0 непрерывна по t и аналитически зависит от μ и x .

Определение О1.10. Дифференциальные уравнения вида $f_2(y)dy = f_1(x)dx$ называются уравнениями с разделенными переменными, где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ -непрерывные функции.

Определение О1.11. Уравнения вида $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy$ называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными

Пример П1.1. $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$

Разделяем переменные и интегрируем: $\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{x dx}{1+x^2}$;
 $\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{x dx}{1+x^2} + C$;
 $\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + \ln C$;
 $1 + y^2 = c_1(1 + x^2)$

1.2 Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение О1.12. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами называется формула $y'' + py' + qy = 0, p, q \in R$

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами является очень распространенным видом дифференциальных уравнений. Их решить не сложно. Сначала нужно найти корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. При различных p и q возможны три случая:

1. Корни характеристического уравнения могут быть действительными и различающимися $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in R$, действительными и совпадающими формула или комплексно сопряженными $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$.

2. В зависимости от значений корней характеристического уравнения, записывается общее решение дифференциального уравнения как $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, или $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$, или $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ соответственно.

Для примера рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Пример П1.2. $y'' + 3y' = 0$.

Решение

Корнями его характеристического уравнения являются $k_1 = -3$ и $k_2 = 0$. Корни действительные и различные, следовательно, общее решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \Leftrightarrow y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{0x} \Leftrightarrow y = C_1 e^{-3x} + C_2$$

Определение ОI.13. *Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами называется формула $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in R$.*

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами y ищется в виде суммы y_0 общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и частного решения \tilde{y} исходного неоднородного уравнения, то есть, $y = y_0 + \tilde{y}$.

В качестве примеров линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами приведем:

Пример ПI.3. $y'' - 2y' = (x^2 + 1)e^x;$

Пример ПI.4. $y'' + 36y = 24 \sin(6x) - 12 \cos(6x) + 36e^{6x};$

Определение ОI.14. *Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) $y'' + py' + q(x)y = 0$ линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$*

Частным случаем дифференциальных уравнений этого вида являются ЛОДУ и ЛНДУ с постоянными коэффициентами. Общее решение ЛОДУ $y'' + py' + q(x)y = 0$ на некотором отрезке $[a; b]$ представляется линейной комбинацией двух линейно независимых частных решений y_1 и y_2 этого уравнения, то есть, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Главная сложность заключается именно в нахождении линейно независимых частных решений ДУ этого типа. Как правило, частные решения выбираются из следующих систем линейно независимых функций:

1. $1, x, x^2, \dots, x^n$
2. $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x} x, x^2, \dots, x^n$
3. $e^{k_1 x}, x \cdot e^{k_1 x}, \dots, x^{n-1} \cdot e^{k_1 x}$
4. $e^{k_2 x}, x \cdot e^{k_2 x}, \dots, x^{n-1} \cdot e^{k_2 x}$
5. ...

1.3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

6. $e^{k_px}, x \cdot e^{k_px}, \dots, x^{n1} \cdot e^{k_px}$

7. $1, \csc x, \sec x$

Однако, далеко не всегда частные решения представляются в таком виде.

Примером ЛОДУ является $xy'' - xy' + y = 0$.

Общее решение ЛНДУ $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ ищется в виде $y = y_0 + \tilde{y}$, где формула y_0 - общее решение соответствующего ЛОДУ, а \tilde{y} - частное решение исходного дифференциального уравнения. О нахождении y_0 мы только что говорили, а \tilde{y} можно определить, пользуясь методом вариации произвольных постоянных.

В качестве примера ЛНДУ можно привести $xy'' - xy' + y = x^2 + 1$.

1.3 Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение ОI.15. Дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (I.6)$$

Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения I.6, удовлетворяющего начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (I.7)$$

называется задачей Коши для уравнения I.6.

Теорема ТI.5. Существования и единственности решения задачи Коши. Если в уравнении I.6 функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$

а) непрерывна $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения,

б) имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, по аргументам $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то найдется интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения I.6, удовлетворяющее условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

где значения $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ содержатся в области D .

Для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ начальные условия имеют вид:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

где x_0, y_0, y'_0 — данные числа. В этом случае теорема существования и единственности геометрически означает, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy с данным тангенсом угла наклона касательной y_0 проходит единственная кривая.

Рассмотрим уравнение $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$ и начальные условия:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

В данном случае $f(x, y, y') \equiv \sin y' + e^{-x^2 y}$. Эта функция определена и непрерывна при всех значениях x, y, y' . Ее частные производные по y и y' равны

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

и являются всюду непрерывными и ограниченными функциями своих аргументов.

Следовательно, какими бы не были начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

существует единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

Определение ОI.16. Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка I.6 называется множество всех его решений, определяемое формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, содержащей n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n таких, что если заданы начальные условия I.7, то найдутся такие значения $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$, что $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n)$ будет являться решением уравнения I.6, удовлетворяющим этим начальным условиям.

Определение ОI.17. Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n называется частным решением ДУ I.6.

Определение ОI.18. Уравнение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, которое определяет неявно общее решение ДУ, называется общим интегралом уравнения.

Определение ОI.19. Давая постоянным C_1, C_2, \dots, C_n конкретные допустимые числовые значения, получим частный интеграл ДУ. График частного решения называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Пример ПI.5. Показать, что $y = C_1x + C_2$ есть общее решение дифференциального уравнения $y''=0$.

Решение

Покажем, что $y = C_1x + C_2$ удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянных C_1 и C_2 . В самом деле, имеем $y' = C_1$, $y'' = 0$.

Пусть заданы произвольные начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$. Нужно показать, что постоянные C_1 и C_2 можно подобрать так, что $y = C_1x + C_2$ будет удовлетворять этим условиям. Имеем $y = C_1x + C_2$, $y' = C_1$. Полагая $x = x_0$, получаем систему:

$$\begin{cases} y_0 = C_1x_0 + C_2, \\ y'_0 = C_1, \end{cases}$$

из которой определяются $C_1 = y'_0$ и $C_2 = y_0 - x_0y'_0$. Таким образом, решение $y = y'_0(x - x_0) + y_0$ удовлетворяет начальным условиям.

Геометрически означает, что через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy с заданным угловым коэффициентом y'_0 проходит единственная прямая.

Если задать одно начальное условие, например $y|_{x=x_0} = y_0$. Это определяет пучок прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, т.е. одного начального условия недостаточно для выделения единственного решения.

Глава II

Методы решения нелинейных ОДУ в Maple

Основные средства решения дифференциальных уравнений

Основная функция dsolve

Важное место в математических расчетах занимает решение дифференциальных уравнений. К нему относится анализ поведения различных систем во времени (анализ динамики) и вычисление различных полей (тяготения, электрических зарядов и т. д.). Роль дифференциальных уравнений в моделировании физических и технических объектов и систем, Maple позволяет решать одиночные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений как аналитически, так и в численном виде. Разработчиками системы объявлено о существенном расширении средств решения дифференциальных уравнений и о повышении их надежности в смысле нахождения решений для большинства классов дифференциальных уравнений. Для решения системы простых дифференциальных уравнений (задача Коши) используется функция `dsolve` в разных формах записи:

```
dsolve(ODE)  
dsolve(ODE, y(x), extra - args)  
dsolve((ODE, ICs), y(x), extra - args)  
dsolve(sysODE, ICs, funcs, extra - args)
```

Здесь ODE—это одно обыкновенное дифференциальное уравнение или система из дифференциальных уравнений первого порядка с указанием начальных условий, $y(x)$ это функция одной переменной, *ICs* — это выражение, задающее начальные условия, *sysODE* — это множество дифференциальных уравнений, *funcs* —это множество неопределенных функций, *extra - argument* —это опция, задающая тип решения. Параметр *extra - argument* задает класс решаемых уравнений. Отметим основные значения этого параметра:

exact — аналитическое решение (принято по умолчанию);
explicit — решение в явном виде;
system — решение системы дифференциальных уравнений;
ICs — решение системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями;

formalseries — решение в форме степенного многочлена;

integraltransform — решение на основе интегральных преобразований Лапласа, Фурье и других;

series — решение в виде ряда с порядком, указываемым значением переменной *Order*;

numeric — решение в численном виде.

Для решения задачи Коши в параметры *dsolve* надо включать начальные условия, а при решении краевых задач уже краевые условия. Если в Maple можно найти решение при числе начальных или краевых условий меньшего порядка системы, то в решении будут появляться неопределенные константы вида C1, C2 и т.д. Они же могут быть найдены при аналитическом решении системы, когда начальные условия не заданы. Если решение найдено в неявном виде, то в нем появится параметр T. По умолчанию функция *dsolve* автоматически выбирает наиболее подходящий метод решения дифференциальных уравнений. Однако в параметрах функции *dsolve* в квадратных скобках можно указать предпочтительный метод решения дифференциальных уравнений. Допустимы следующие методы: *quadrature, linear, Bernoulli, separable, inverselinear, homogeneous, Chini, linsym, exact, Abel, potsym*.

Информацию о каждом методе можно получить, используя команду *Tdsolve, method* и указав в ней конкретный метод. Например, команда *Tdsolve, linear* вызовет появление страницы справочной системы с подробным описанием линейного метода решения дифференциальных уравнений.

Решение дифференциальных уравнений могут сопровождаться различными комментариями.

Например, команда *infolevel[dsolve]:=n*: где n- целое число от 0 до 5 управляет уровнями деятельности вывода. По умолчанию задано n=0. Значение n=5 дает максимально детальный вывод. Производные при записи дифференциальных уравнений могут задаваться функцией *diff* или оператором дифференцирования *D*. Выражение *sysODE* должно иметь структуру множества и содержать помимо самой системы уравнений и их начальные условия. Решим дифференциальное уравнение первого порядка в аналитическом виде:

```
> restart;
```

```
> dsolve(diff(y(x),x)-a*x=0,y(x));
```

$$y(x) = \frac{a x^2}{2} + _C1$$

```
> dsolve(diff(y(x),x)-y(x)=exp(-x),y(x));
```

$$y(x) = (-1/2 \exp(-2 x) + _C1) \exp(x)$$

```
> dsolve(diff(y(x),x)-y(x)=sin(x)*x,y(x));
```

$$y(x) = -1/2 \cos(x) x - 1/2 \cos(x) - 1/2 \sin(x) x + \exp(x) _C1$$

```
>
```

```

> infolevel[dsolve]:=3:
> dsolve(diff(y(x),x)-y(x)=sin(x)*x,y(x));
Methods for first order ODEs:
--- Trying classification methods ---
trying a quadrature
trying 1st order linear
<- 1st order linear successful

      y(x) = -1/2 cos(x) x - 1/2 cos(x) - 1/2 sin(x) x + exp(x) _C1

```

В данном примере вывод комментария при n=3. Из приведенного выше примера видно, что для задания с производной используется ранее рассмотренная функция diff. В соответствии со вторым законом Ньютона многие физические явления, связанные с движением объектов, описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Ниже дан пример задания и решения такого уравнения.

```

> U:=(x,k,b)->b^2/2*(x^2-k/(2*b^2))^2;

      2 / 2      k \ 2
      U := (x, k, b) -> 1/2 b |x  - 1/2 ----|
                          |          2 |
                          \          b /

> F:=(x,k,b)->-diff(U(x,k,b),x);

      /d          \
      F := (x, k, b) -> -|-- U(x, k, b)|
                          \dx          /

> F(x,k,b);

      2 / 2      k \
      -2 b |x  - ----| x
          |          2|
          \        2 b /

> plot(-U(x,1,1),x=-1.1..1.1);

```

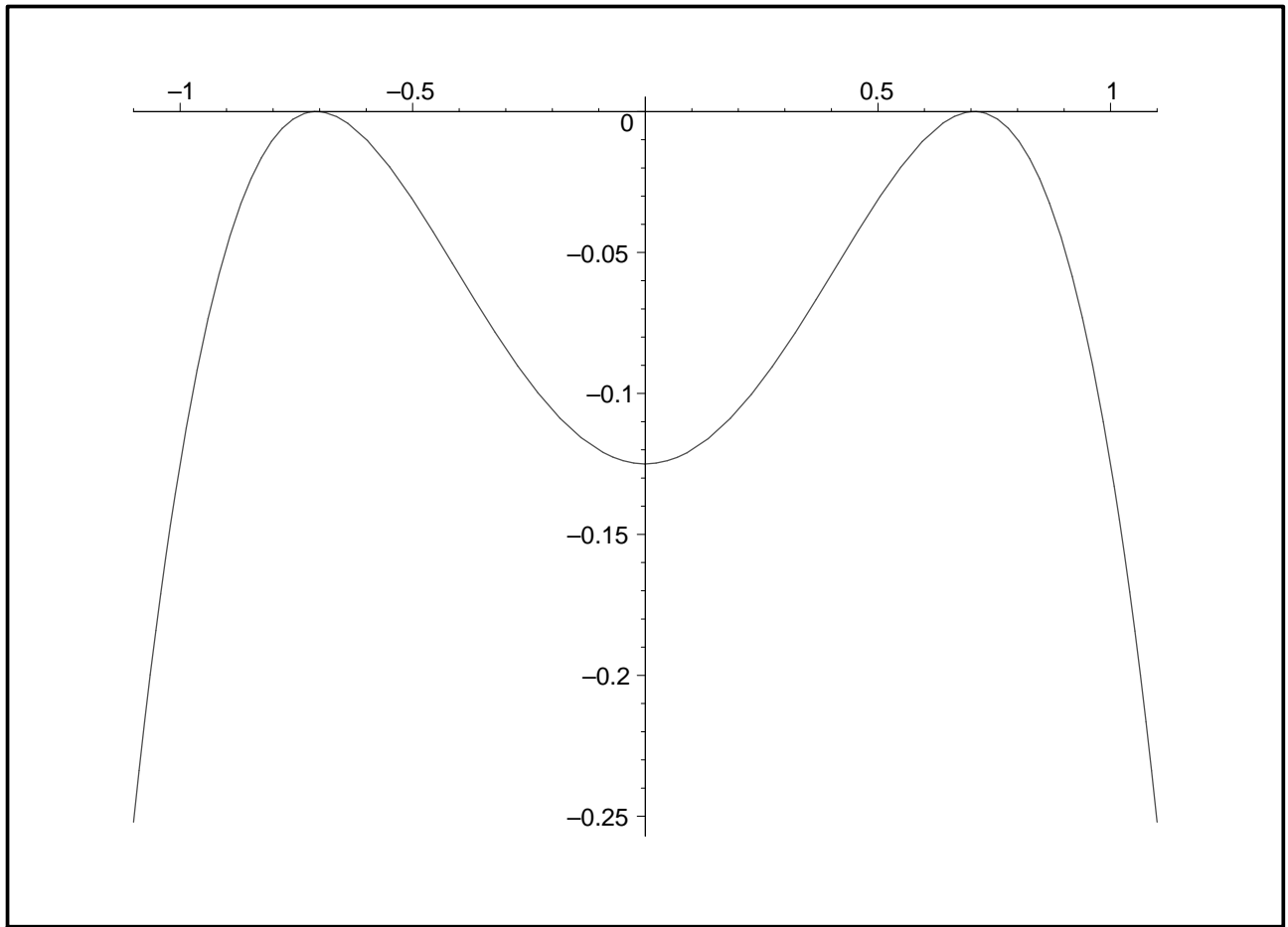


Рис. II.1. Решение дифференциальных уравнений

График решения этого уравнения представляет собой косинусоидальную функцию. Интересно, что амплитуда колебаний в общем случае отлична от 1 и зависит от значения $y(0)$ - при $y(0) = 0$ она равна 1 (в нашем случае косинусоида начинается со значения $y(0) = -1$. Подобным колеблется может быть механический маятник.

Функция *dsolve* позволяет решать системы дифференциальных уравнений. Для этого она записывается в виде *dsolve(ODE_sys, optional₁, optional₂, ...)*

Здесь *ODE_sys*- список дифференциальных уравнений, образующих систему, остальные параметры опциональные и задаются по мере необходимости. Они и могут задавать начальные условия, явно представлять искомые зависимости, выбирать методы решения и т.д.

Продemonстрируем решение

Пример III.1.
$$\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{z}$$

в Maple.

restart:

```
syst:={y(x)*diff(y(x),x)=x,1/z(x)*diff(z(x),x)=1/y(x)};
```

```
> ss:=dsolve(syst,{y(x),z(x)});
```

```
> Y:=(x)->subs(ss,y(x)):Y(x);
```

```

> Z:=(x)->eval(subs(y(x)=Y(x),subs(ss,z(x)))));
> Z(x);
> eval(int(-1/(sqrt(x^2+_C2)),x));

```

В итоге получим решение в виде:

$$sss := -\ln(x + \sqrt{x^2 + c^2}) \quad (\text{II.1})$$

Аналитические решения в общем случае нелинейные уравнения не имеют. Поэтому их приходится решать численными методами. Они удобны, например, если решение нужно представить числами или построить график решения.

Для этого рассмотрим дифференциальное уравнения:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (\text{II.2})$$

Для этого заменим приращение dx на малое, но конечное приращение $dx=h$. Тогда приращение dy будет равно

$$\Delta y = h \cdot f(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Если известно начальное значение $y = y_0$, то новое значение будет равно $y_1 = y_0 + \Delta y = y_0 + h \cdot f(x, y)$. Распространяя этот подход на последующие шаги решения получим конечно-разностную формулу для решения приведенного уравнения в виде: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$. Эта формула известна как формула простого метода Эйлера первого порядка для решения дифференциального уравнения II.2.

Существует множество методов решения дифференциальных уравнений, например, такие методы, как усовершенствованный метод Эйлера, метод трапеций, метод Рунге-Кутты, метод Рунге-Кутты-Фельберга и т.д. Ряд таких методов реализован в системе Maple и может использоваться при численном решении дифференциальных уравнений. Для решения дифференциальных уравнений в численном виде в Maple используется так же функция `dsolve` с параметром `numeric` или `type=numeric`. При этом решение возвращается в виде специальной процедуры, по умолчанию реализующей широко известный метод решения дифференциальных уравнений Рунге-Кутты-Фельберга порядков 4 и 5. Эта процедура называется `rkf45` и символически выводится (без тела) при попытке решения заданной системы дифференциальных уравнений. Указанная процедура возвращает особый тип данных, позволяющих найти решение в любой точке или построить график решения (или решений). Рассмотрим решение системы из двух дифференциальных уравнений численным методом.

```

sys:=diff(y(x),x)=2*z(x)-y(x)-x,diff(z(x),x)=y(x);
fcns:={y(x),z(x)}:

```

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} & & \frac{d}{dx} \\ \text{--- } y(x) = 2 z(x) - y(x) - x, & & \text{--- } z(x) = y(x) \\ \frac{d}{dx} & & \frac{d}{dx} \end{array}$$

{y(x), z(x)}

```

F:=dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns,numeric);
proc(x_rkf45) ... end;
F(2);

```

```
[x = 2., y(x) = HFloat(2.94775559020418),  
z(x) = HFloat(3.7206498838784436)]  
plots[odeplot](F, [x,z(x)], 0..2.5, labels=[x,z], color=black);
```

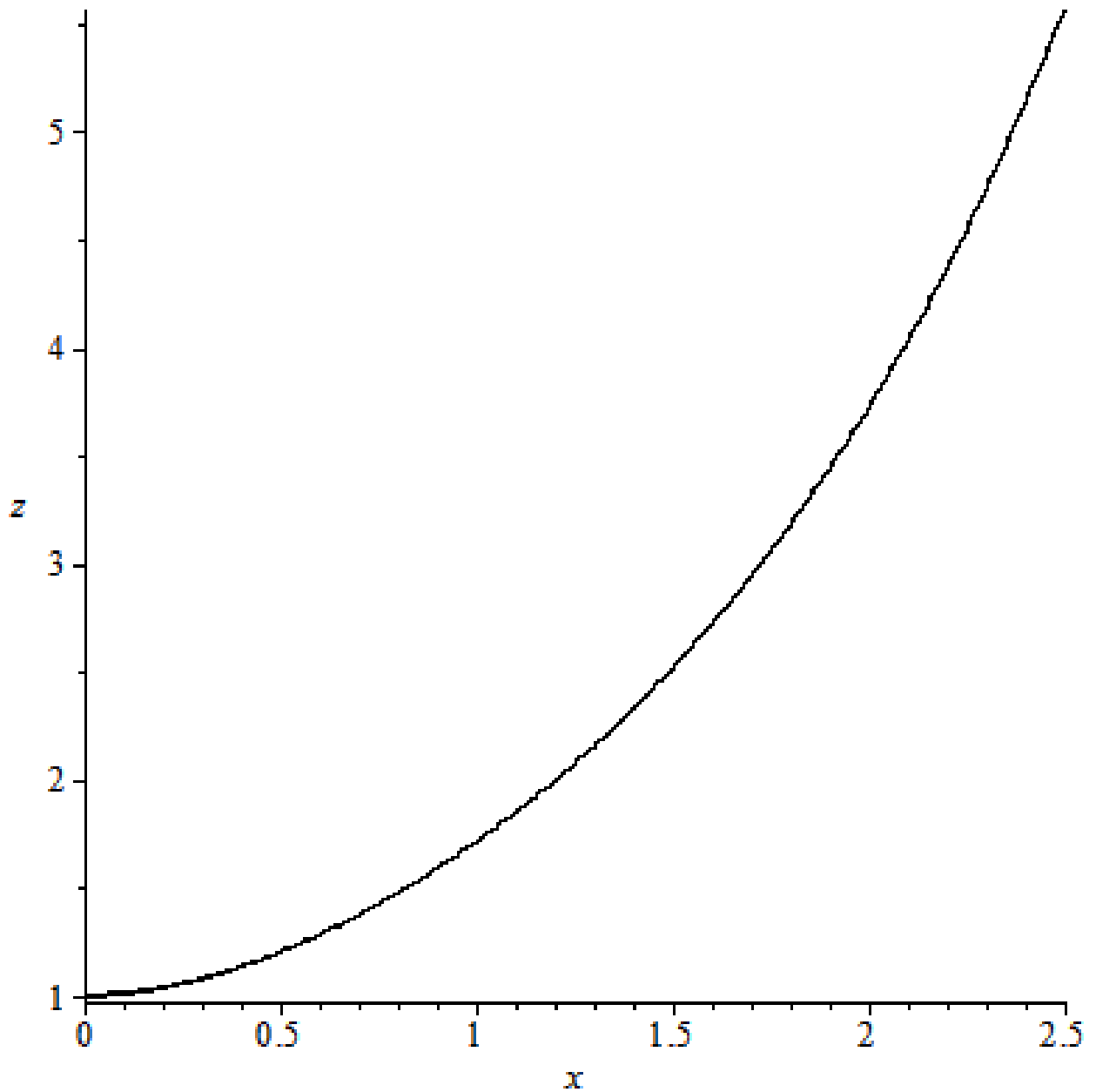


Рис. II.2 Решение системы дифференциальных уравнений численным методом *rkf45* с выводом графика решения

Численное решение дифференциальных уравнений можно применять один из следующих методов:

classical-классический метод, используемый по умолчанию;

rkf45-метод Рунге-Кутты 4 или 5 порядка.

dverk78-метод Рунге-Кутты 7 или 8 порядка.

gear-одна из двух версий метода Гира.

mgear- одна из трех версий метода Гира.

taylorseries-метод разложения. Для решения сложных задач полезны структура *DESol* и пакет *SEtools*, для графической визуализации результатов решения дифференциальных уравнений. Рассмотрим пример решения дифференциальных функций с применением кусочных функций.

```

eq:=diff(y(x),x)+piecewise(x<x^2-3,exp(x/2))*y(x);
      / d      \      /      2      /1  \ \
      |--- y(x)| + piecewise|x < x  - 3, exp|- x|| y(x)
      \ dx      /      \      \2  //
dsolve(eq,y(x));
      /      1      1      (1/2)      /      /1  \ \
y(x) = piecewise|x < - - - 13      , exp|-2 exp|- x|| _C1,
      \      2      2      \      \2  //

      1      1      (1/2)      /      /1      1      (1/2)\ \
x < - + - 13      , exp|-2 exp|- - - 13      || _C1,
      2      2      \      \4      4      //

      1      1      (1/2)      /      /1      1      (1/2)\      /1  \
- + - 13      <= x, exp|-2 exp|- - - 13      | - 2 exp|- x|
      2      2      \      \4      4      /      \2  /

      /1      1      (1/2)\ \      \
+ 2 exp|- + - 13      || _C1|
      \4      4      //      /

```

Еще один пример решения нелинейного дифференциального уравнения Риккати с кусочной функцией.

```

eq:=diff(y(x),x)=piecewise(x>0,x)*y(x)^2;
      d      2
      --- y(x) = piecewise(0 < x, x) y(x)
      dx
dsolve({y(0)=1,eq},y(x));
      /      2      \
y(x) = piecewise|x < 0, 1, 0 <= x, - ----|
      |      2      |
      \      x  - 2/

```

Как видно из примеров, результатом являются большие числа. Однако, применение кусочных функций эффективно. Решение различных видов дифференциальных уравнений является одно из достоинств в системе Maple. Пакет *DEtools* предоставляет ряд полезных функций для решения дифференциальных уравнений. Для загрузки:

```
>with(DEtools);
```

Некоторые полезные функции системы Maple.

DEnormal-возвращает в нормальную форму дифференциальные уравнения.

DEplot- строит графики дифференциальных уравнений.

DEplot3d-строит трехмерные графики дифференциальных уравнений.
PDEplot-построение графиков решения дифференциальных уравнений.
autonomous-проверяет дифференциальные уравнения на автономность. Для графического представления дифференциальных уравнений используется функция *odeplot*. Рассмотрим пример решение одного дифференциального уравнения с выводом графика решения.

```
with(plots):
p:=dsolve({diff(y(x),x)=cos(x^2*y(x)),y(0)=2},type=numeric):
odeplot(p,[x,y(x)],-5..5,labels=[x,y],color=black);
```

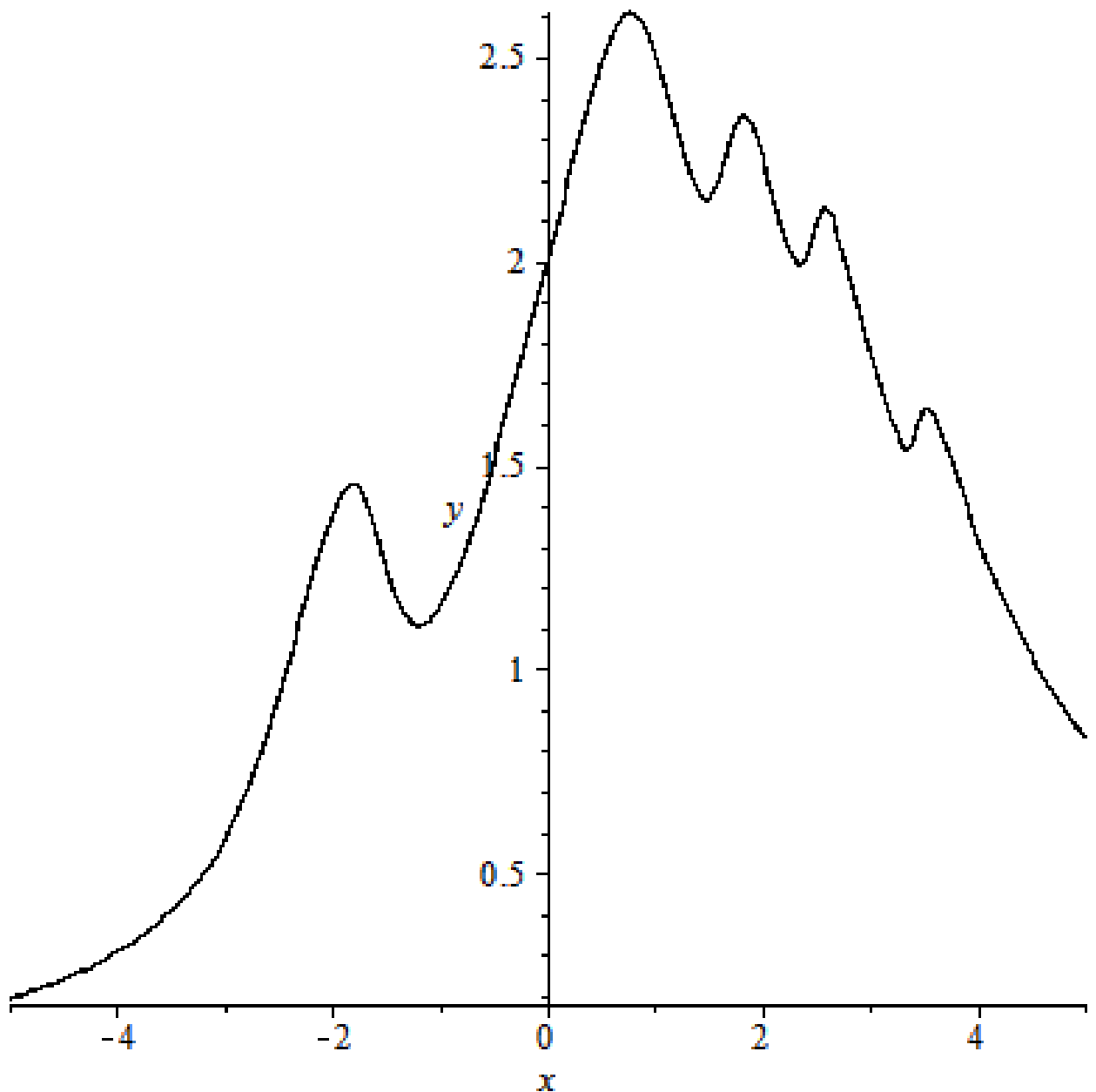


Рис. II.3 Пример решения одиночного дифференциального уравнения

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений с выводом графика решения.

```

restart;
with(plots):
sys:=diff(y(x),x)=z(x),diff(z(x),x)=3*sin(y(x)):
fcns:={y(x),z(x)};
p:=dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns,type=numeric);
odeplot(p,[[x,y(x)],[x,z(x)]],-4..4,numpoints=100,color=black);

```

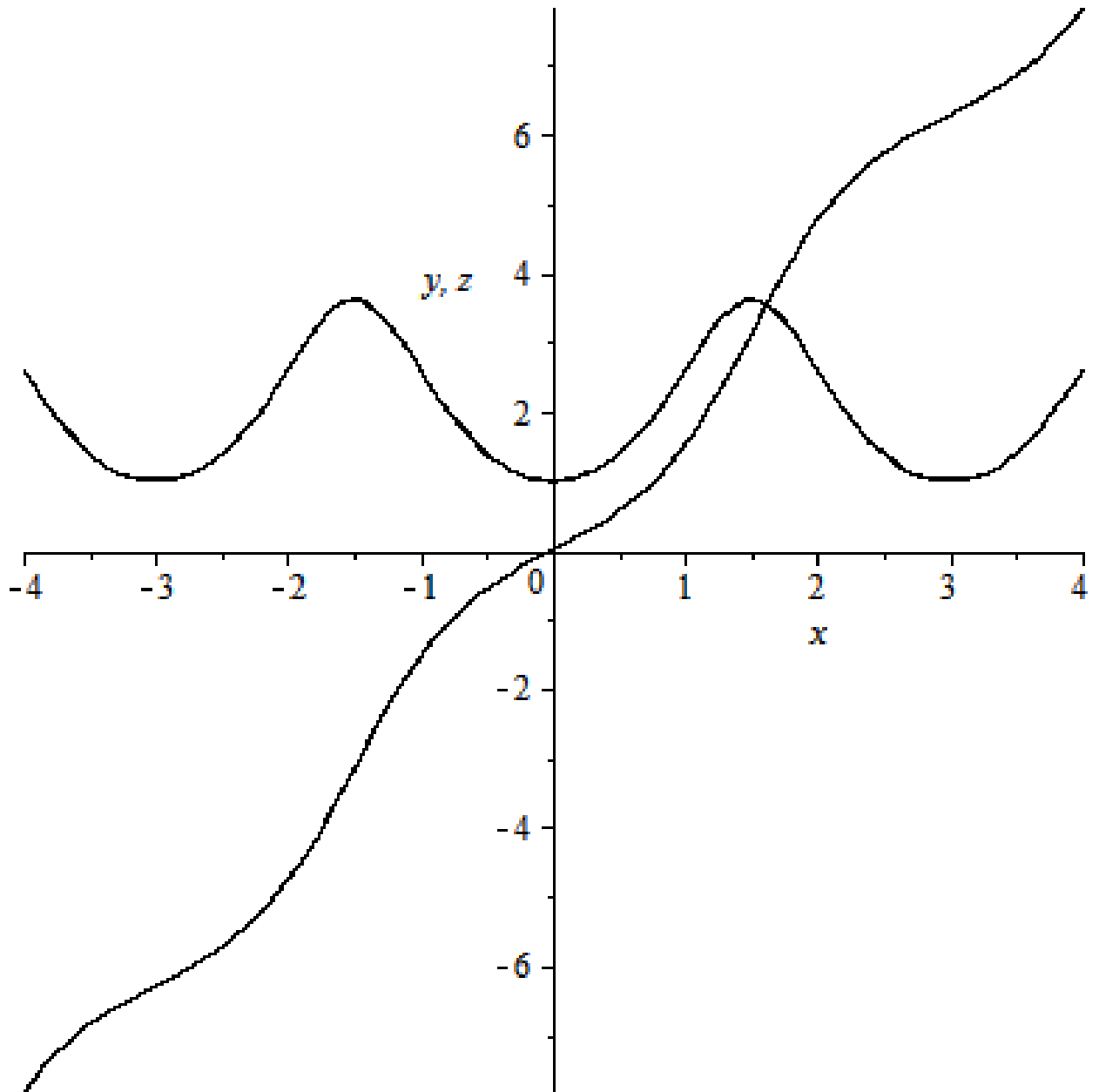


Рис. II.4 Пример решения системы дифференциальных уравнений в виде фазового портрета

Для решения и визуализации решений дифференциальных уравнений и систем служит пакет DEtools. Рассмотрим пример решения системы дифференциальных уравнений с помощью функции DEplot в пакете DEtools.

```
with(DEtools):
```

`DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)], [x(t),y(t)], t=-`

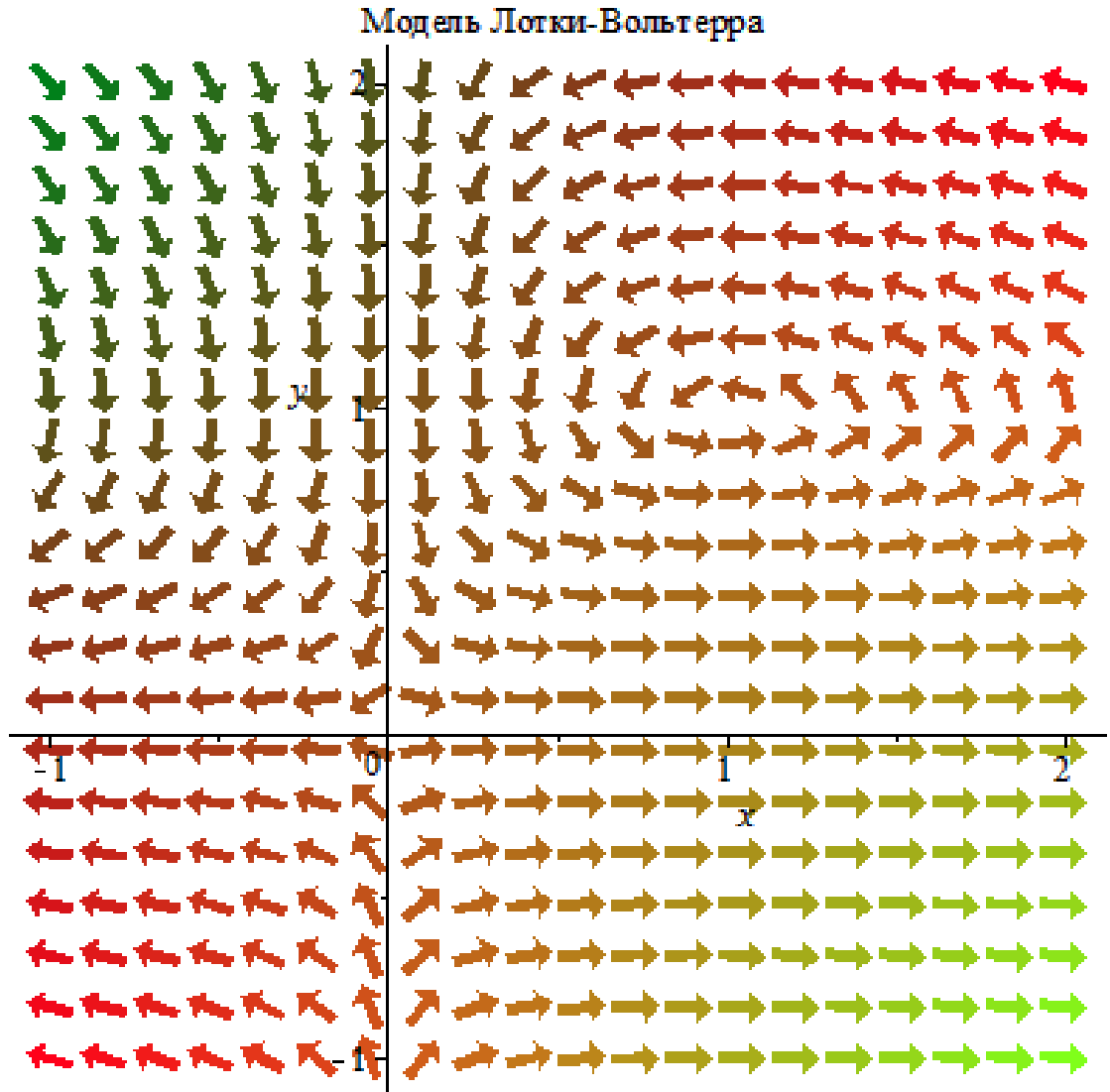


Рис. II.5 Пример решения системы дифференциальных уравнений в виде фазового портрета

Еще один пример построения комбинированного фазового портрета с помощью функции `DEplot` пакета `DEtools`.

```
with(DEtools):
DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)], [x(t),y(t)],
t=-7..7, [[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=1,y(0)=.7]], stepsize=.2,
title="Модель Лотки-Вольтерра", color=[y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t))], .5],
linecolor=t/10,arrows=MEDIUM,method=rkf45);
```

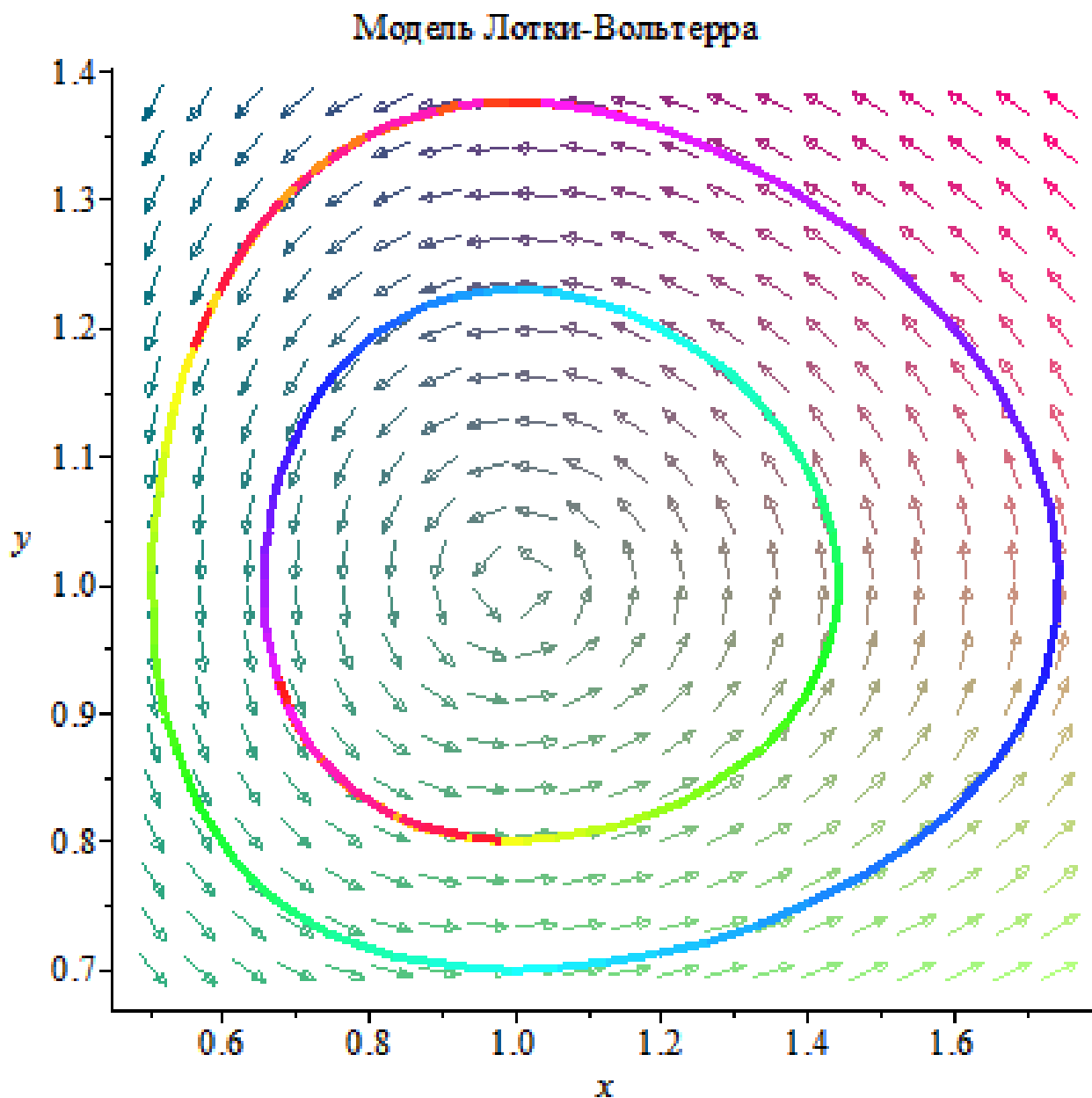


Рис. П.6 Пример решения системы дифференциальных уравнений в виде фазового портрета

Для проверки систем дифференциальных уравнений используется команда `autonomous`:

Пример ПП.2.

```
> restart:
> SODE:=
>   D(x)(t)=y(t)-z(t),D(y)(t)=z(t)-x(t),D(z)(t)=x(t)-y(t)^2];

[D(x)(t) = y(t) - z(t), D(y)(t) = z(t) - x(t),
```

$$D(z)(t) = x(t) - y(t)]$$

```
> DEtools[autonomous](SODE, [x(t), y(t), z(t)], t);
```

true

Здесь мы получили ответ true, значит система ОДУ SODE автономна, в противном случае, ОДУ SODE не автономна.

```
> SODE1 := [D(x)(t) = y(t) - z(t) + t^2, D(y)(t) = z(t) - x(t), D(z)(t) = x(t) - y(t)^2];
```

$$D(x)(t) = y(t) - z(t) + t^2, D(y)(t) = z(t) - x(t),$$

$$D(z)(t) = x(t) - y(t)^2]$$

```
> DEtools[autonomous](SODE1, [x(t), y(t), z(t)], t);
```

false

Пример III.3.

```
> F := (x, y) -> x*(1-y);
> G := (x, y) -> 0.3*y*(x-1);
> F(x(t), y(t));
```

$$(x, y) \rightarrow x(1 - y)$$

$$(x, y) \rightarrow 0.3 y (x - 1)$$

$$x(t) (1 - y(t))$$

```
> SODE2 := [D(x)(t) = F(x(t), y(t)), D(y)(t) = G(x(t), y(t))];
```

$$[D(x)(t) = x(t) (1 - y(t)), D(y)(t) = 0.3 y(t) (x(t) - 1)]$$

```
> DEtools[DEplot](SODE2, [x(t), y(t)],
> t = -2..2, x = -1..2, y = -1..2, arrows = LARGE,
> color = [G(x(t), y(t)), F(x(t), y(t)), 0.1]);
```

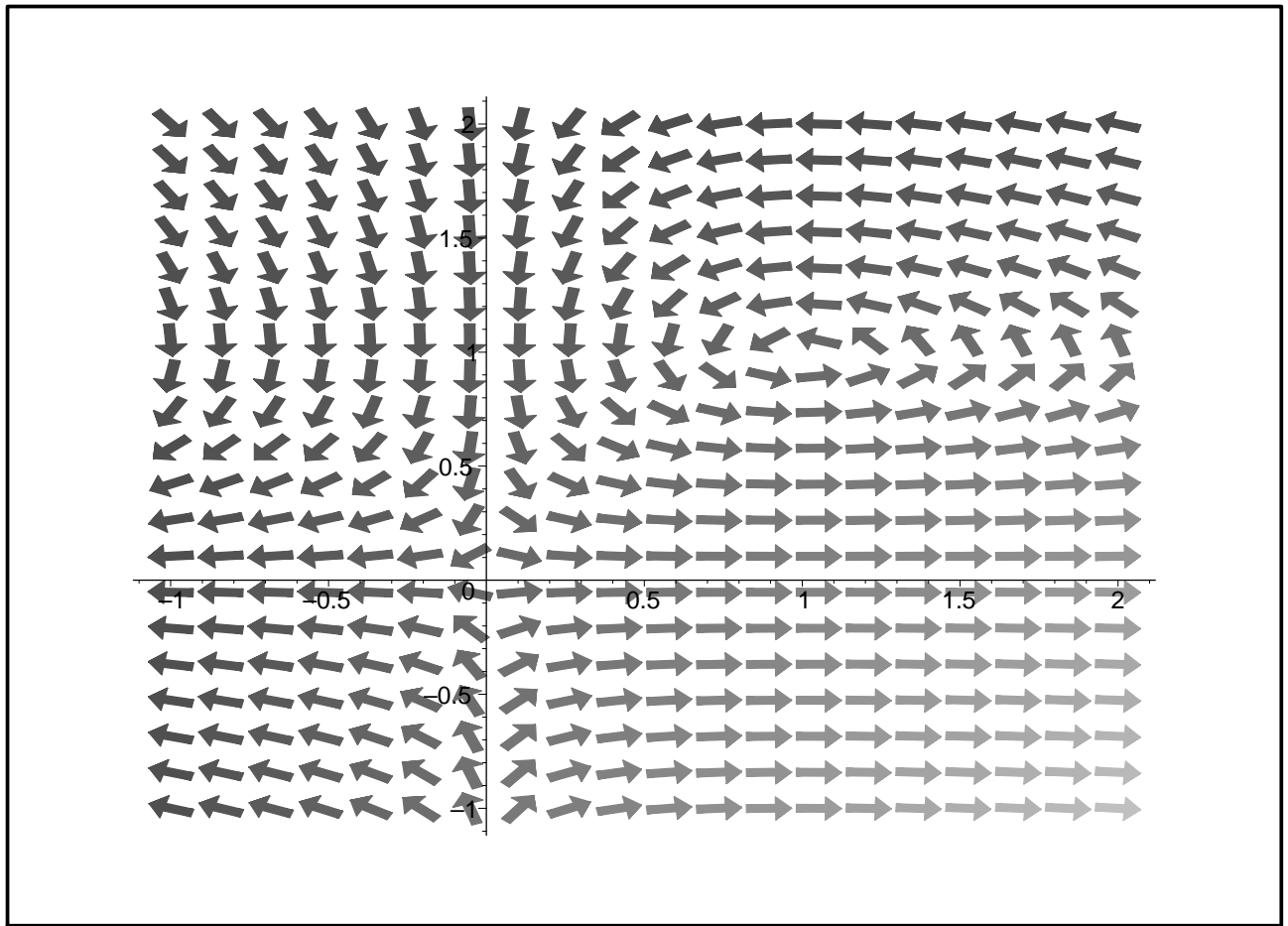


Рис. II.7.

Пример III.4.

```
>DEtools[DEplot](SODE2,[x(t),y(t)],
> t=-2..2,x=-1..2,y=-1..2,arrows=LARGE,
> color=[F(x(t),y(t)),G(x(t),y(t)),0.1]);
```

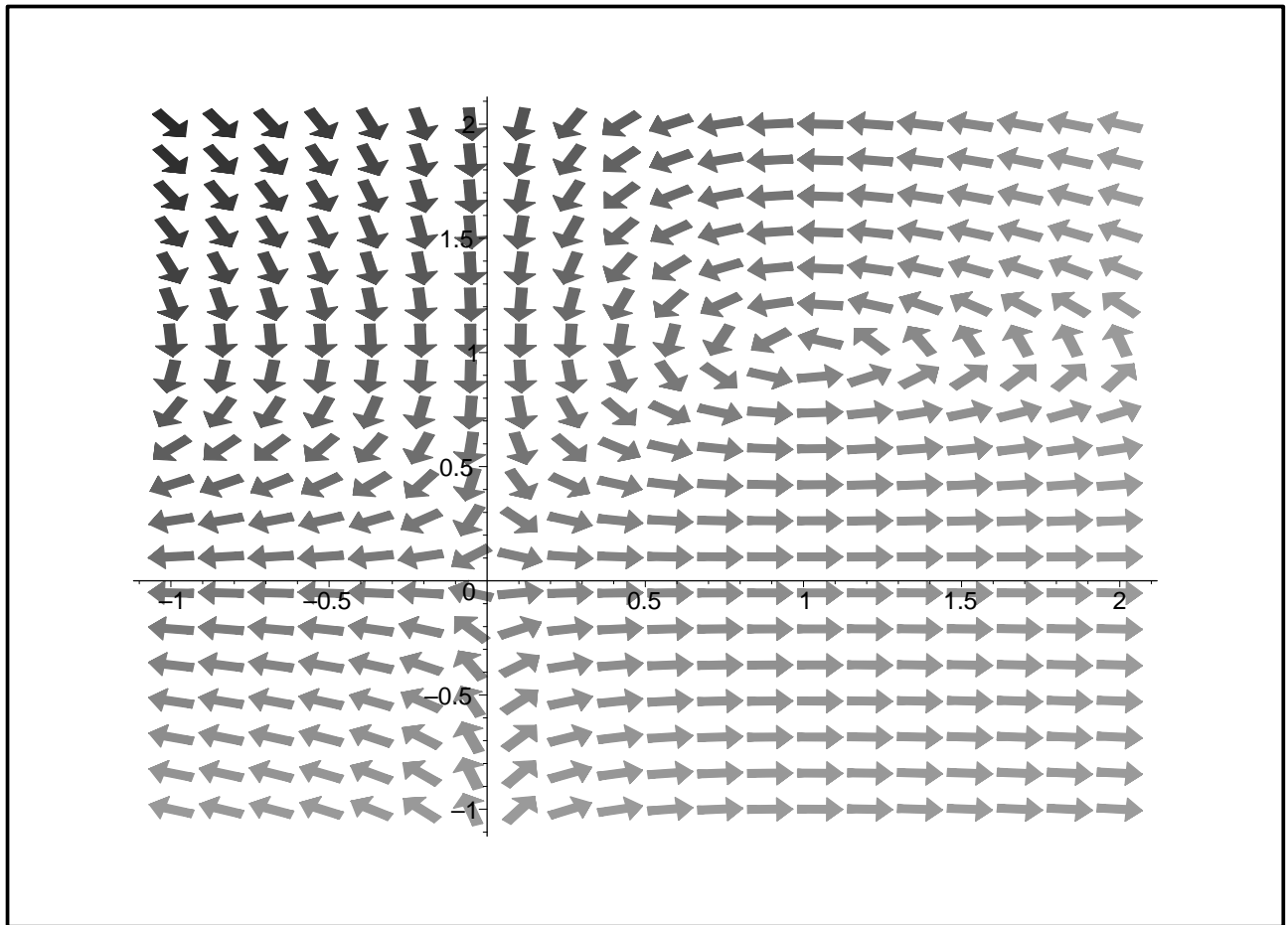


Рис. II.8.

Пример III.5.

```
>DEtools[DEplot](SODE2,[x(t),y(t)],  
> t=-2..2,x=-1..2,y=-1..2,arrows=SMALL,  
> color=NAVY);
```

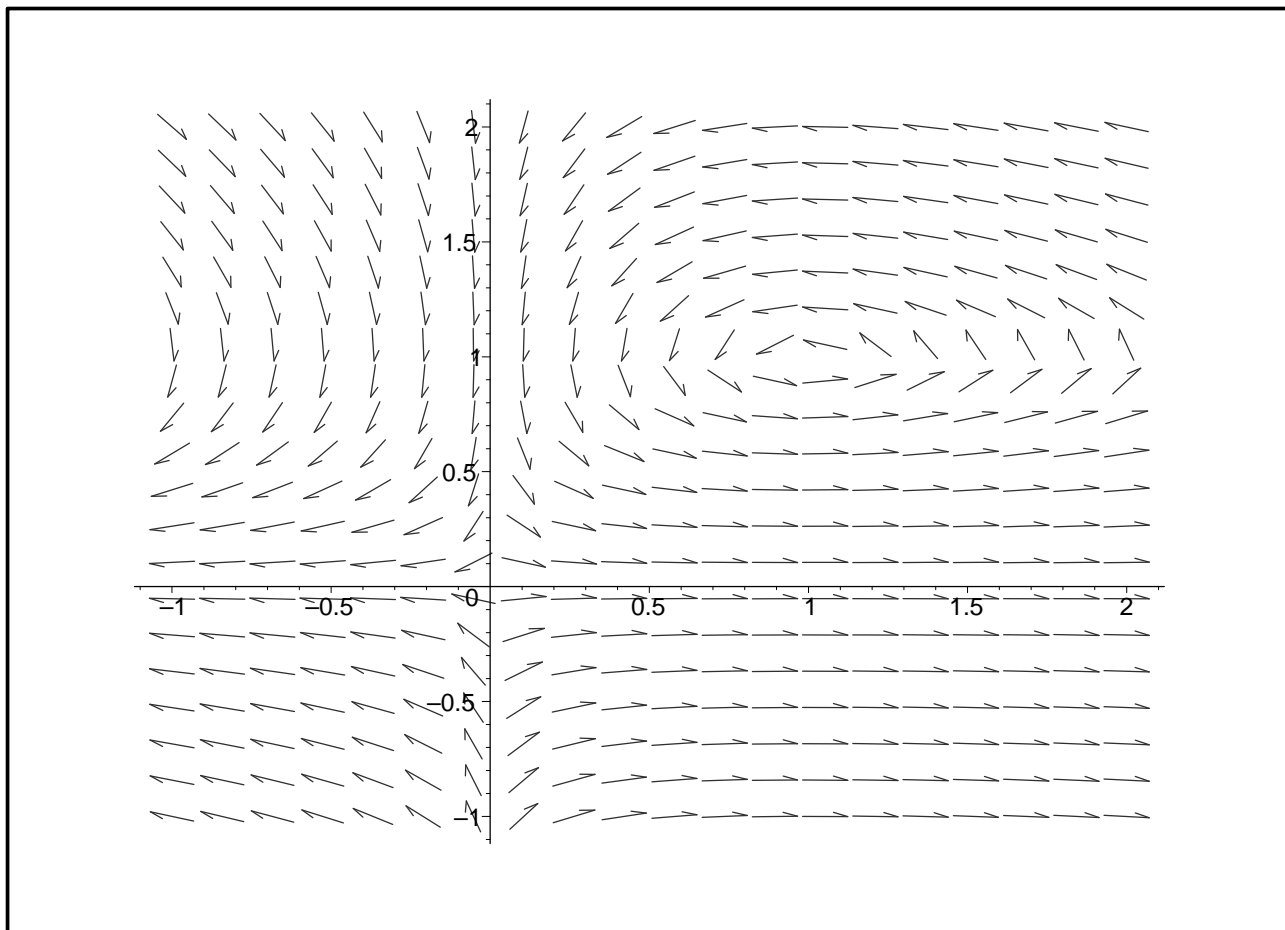



Рис. П.9.

На данном графике нигде не использованы начальные условия задачи. Для выбора конкретного решения задачи Коши необходимо выбрать конкретную начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ на этом графике. Далее следовать из этой точки вдоль направления векторного поля. Автономность системы ОДУ в данном случае допускает произвольный сдвиг, т.е., произвольный выбор начального значения независимой переменной t .

Пример ПП.6.

Для совмещения векторного поля, который соответствует системе ОДУ с конкретным решением задачи Коши используется другой формат команды DEplot, учитывающий начальные условия. Зададим несколько групп начальных условий для указанной системы ОДУ:

```
> Inits1:=[x(0)=1.1,y(0)=1.1];
> Inits2:=[x(0)=0.6,y(0)=1];
> Inits3:=[x(0)=1,y(0)=0.6];
```

$$[x(0) = 1.1, y(0) = 1.1]$$

$$[x(0) = 0.6, y(0) = 1]$$

$$[x(0) = 1, y(0) = 0.6]$$

Здесь можно задать цвета отдельных траекторий.

```
> DEtools[DEplot](SODE2, [x(t), y(t)],  
> t=-8..8,  
> [Inits1, Inits2, Inits3],  
> color=[G(x(t), y(t)), F(x(t), y(t)), 0.1], linecolor=[RED, BLUE, NAVY],  
> arrows=SMALL);
```

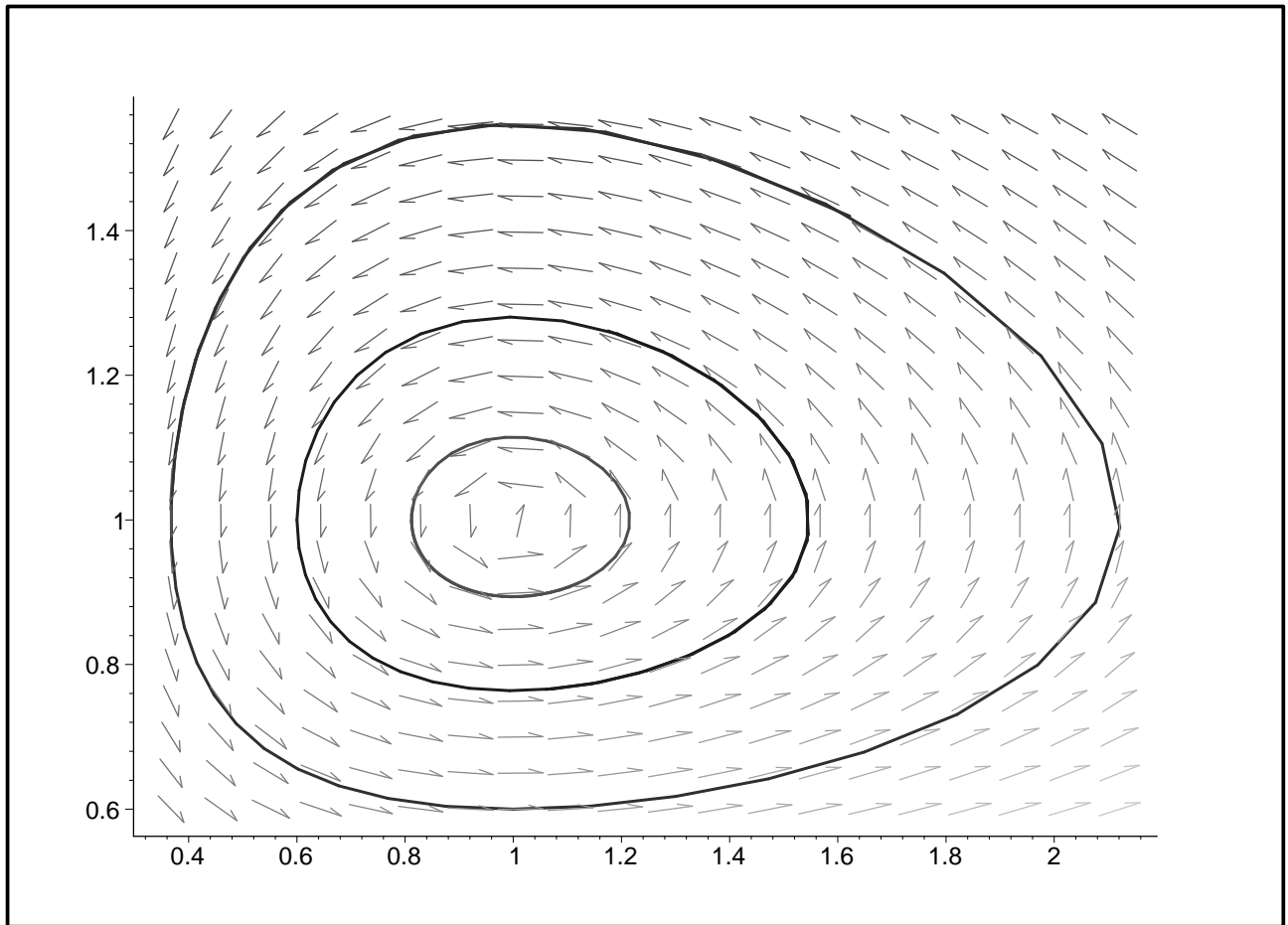


Рис. II.10.

Пример III.7.

В этом примере используется метод Рунге-Кутты 4-5 порядка.

```
> DEtools[DEplot](SODE2, [x(t), y(t)], t=-8..8,  
> [Inits1, Inits2, Inits3],  
> stepsize=0.1, method=rkf45,  
> color=[G(x(t), y(t)), F(x(t), y(t)), 0.1], linecolor=[RED, BLUE, NAVY],  
> arrows=SMALL);
```

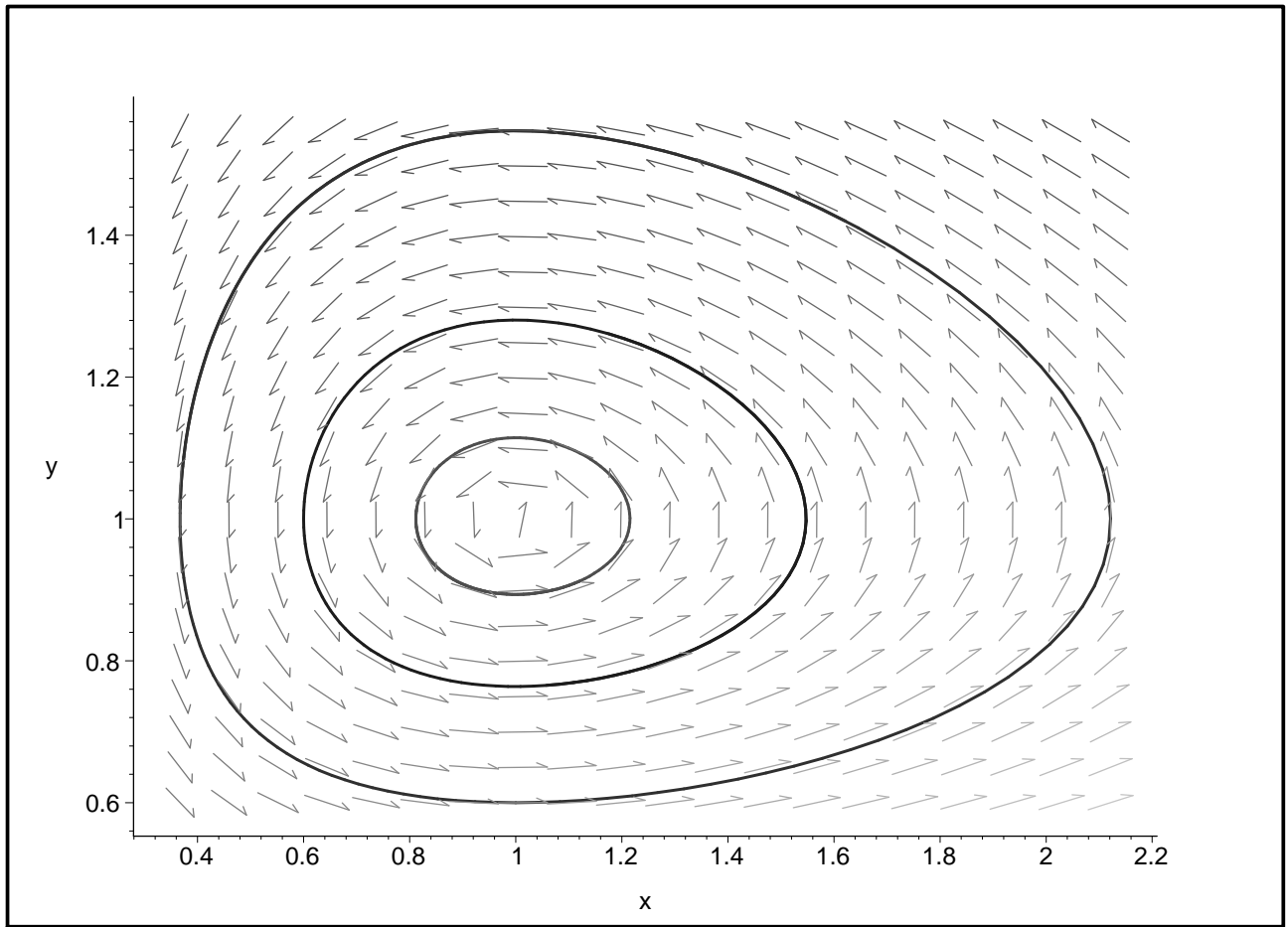


Рис. II.11.

Пример III.8.

Построение решения трехмерной системы ОДУ. Рассмотрим систему уравнений.

```
restart:
> F:=(x,y,z)->x*sin(x)^2-sin(y)^2;
> G:=(x,y,z)->y*sin(y)^2-sin(z)^2;
> H:=(x,y,z)->z*sin(z)^2-sin(y)^2;SODE3:=
> [D(x)(t)=F(x(t),y(t),z(t)),
> D(y)(t)=G(x(t),y(t),z(t)),
> D(z)(t)=H(x(t),y(t),z(t))];
```

$$F := (x, y, z) \rightarrow x \sin^2(x) - \sin^2(y)$$

$$G := (x, y, z) \rightarrow y \sin^2(y) - \sin^2(z)$$

$$H := (x, y, z) \rightarrow z \sin^2(z) - \sin^2(y)$$

$$\begin{aligned} \text{SODE3} &:= [D(x)(t) = x(t) \sin^2(x(t)) - \sin^2(y(t)) , \\ &D(y)(t) = y(t) \sin^2(y(t)) - \sin^2(z(t)) , \\ &D(z)(t) = z(t) \sin^2(z(t)) - \sin^2(y(t))] \end{aligned}$$

Зададим так же начальные условия:

```
restart:
> F:=(x,y,z)->x*sin(x)^2-sin(y)^2;
> G:=(x,y,z)->y*sin(y)^2-sin(z)^2;
> H:=(x,y,z)->z*sin(z)^2-sin(y)^2;SODE3:=
> [D(x)(t)=F(x(t),y(t),z(t)),
> D(y)(t)=G(x(t),y(t),z(t)),
> D(z)(t)=H(x(t),y(t),z(t))];
```

$$F := (x, y, z) \rightarrow x \sin^2(x) - \sin^2(y)$$

$$G := (x, y, z) \rightarrow y \sin^2(y) - \sin^2(z)$$

$$H := (x, y, z) \rightarrow z \sin^2(z) - \sin^2(y)$$

$$\begin{aligned} \text{SODE3} &:= [D(x)(t) = x(t) \sin^2(x(t)) - \sin^2(y(t)) , \\ &D(y)(t) = y(t) \sin^2(y(t)) - \sin^2(z(t)) , \\ &D(z)(t) = z(t) \sin^2(z(t)) - \sin^2(y(t))] \end{aligned}$$

Построим трехмерный фазовый портрет системы.

```
DEtools[DEplot](SODE,[x(t),y(t)],t=0..5000,
> x=-3..3,y=-3..3,[Inits1,Inits2,Inits3,Inits4],
> stepsize=0.1,method=rkf45,
> linecolor=[black,blue,red,navy],
> color=[G(x(t),y(t)),F(x(t),y(t)),0.1],arrows=SMALL);
```

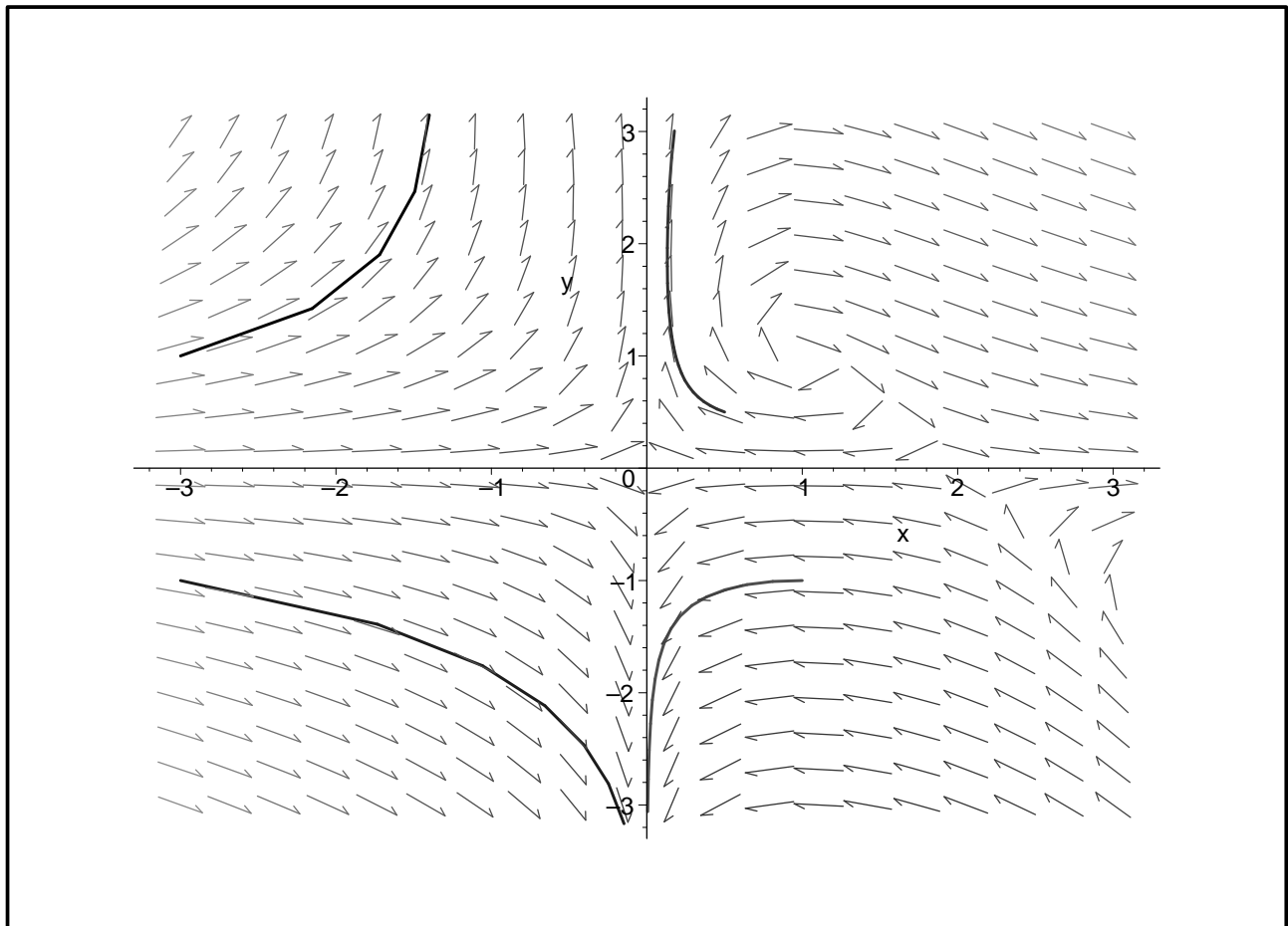


Рис. П.12.

```

> restart:
> F:=(x,y)->y;
> G:=(x,y)->x+x^2+y^2;
> SODE:=[D(x)(t)=F(x(t),y(t)),
>         D(y)(t)=G(x(t),y(t))];
>
> Inits1:=[x(0)=-1.5,y(0)=-0.3];
> Inits2:=[x(0)=-1,y(0)=0.5];
> Inits3:=[x(0)=-1,y(0)=-0.5];
> Inits4:=[x(0)=-1.5,y(0)=-0.5];
> Inits5:=[x(0)=-0.5,y(0)=-0.5];
> Inits6:=[x(0)=-0.3,y(0)=-0.2];
>

```

$$F := (x, y) \rightarrow y$$

$$G := (x, y) \rightarrow x + x^2 + y^2$$

2 2

```
SODE := [D(x)(t) = y(t), D(y)(t) = x(t) + x(t) + y(t) ]
```

```
Inits1 := [x(0) = -1.5, y(0) = -0.3]
```

```
Inits2 := [x(0) = -1, y(0) = 0.5]
```

```
Inits3 := [x(0) = -1, y(0) = -0.5]
```

```
Inits4 := [x(0) = -1.5, y(0) = -0.5]
```

```
Inits5 := [x(0) = -0.5, y(0) = -0.5]
```

```
Inits6 := [x(0) = -0.3, y(0) = -0.2]
```

```
> DEtools[DEplot](SODE, [x(t), y(t)], t=0..500,  
> x=-3..3, y=-3..3, [Inits1, Inits2, Inits3, Inits4, Inits5, Inits6],  
> stepsize=0.1, method=rkf45,  
> linecolor=[blue, red, black, navy, navy, blue],  
> color=[G(x(t), y(t)), F(x(t), y(t)), 0.1], arrows=SMALL);
```

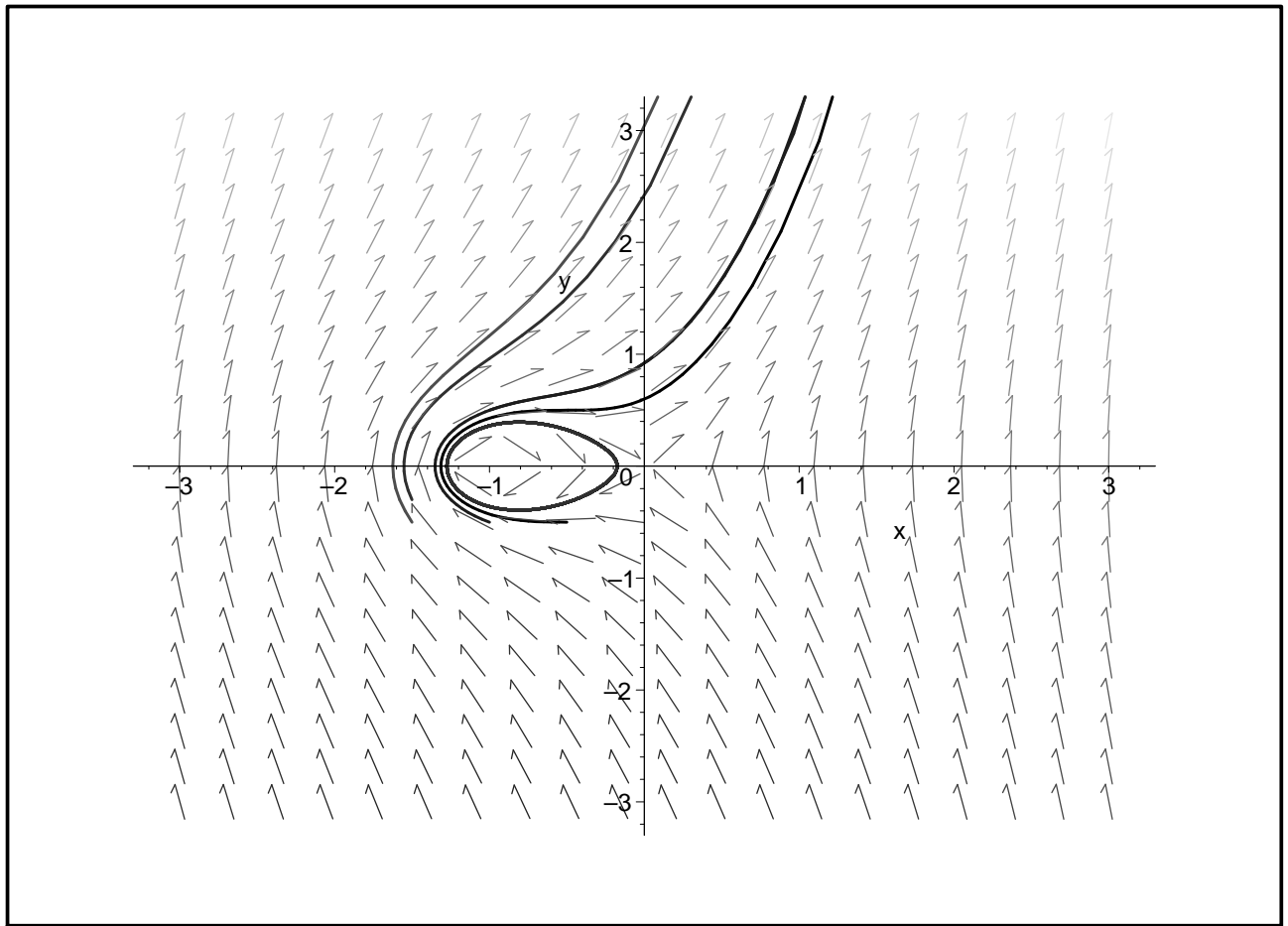


Рис. II.13.

Глава III

Создание процедур оснащенной динамической визуализации численных решений ОДУ.

Рассмотрим компьютерную модель нелинейных колебаний. Нужно задать потенциал в виде полинома четвертого порядка четных степеней по x :

```
U:=(x,k,b)->b^2/2*(x^2-k/(2*b^2))^2;
```

$$U := (x, k, b) \rightarrow \frac{1}{2}b^2\left(x^2 - \frac{k}{2b^2}\right)^2 \quad (\text{III.1})$$

Следовательно, функция силы равна $F(x) = \frac{-dU}{dx}$.

```
> F:=(x,k,b)->-diff(U(x,k,b),x);
```

$$F := (x, k, b) \rightarrow -diff(U(x, k, b), x) \quad (\text{III.2})$$

```
> F(x,k,b);
```

$$-2b^2\left(x^2 - \frac{k}{2b^2}\right)x \quad (\text{III.3})$$

F является нечетной по x и описывается полиномом третьего порядка. В силу этого, является простейшим видом нелинейной силы упругости. Этот вид силы приводит к различным нелинейным явлениям. Так же приводит к спонтанному нарушению симметрии, который в свою очередь заключается в нарушении симметрии колебательной системы в результате действия сил.

```
> plot(-U(x,1,1),x=-1.1..1.1);
```

Построим график.

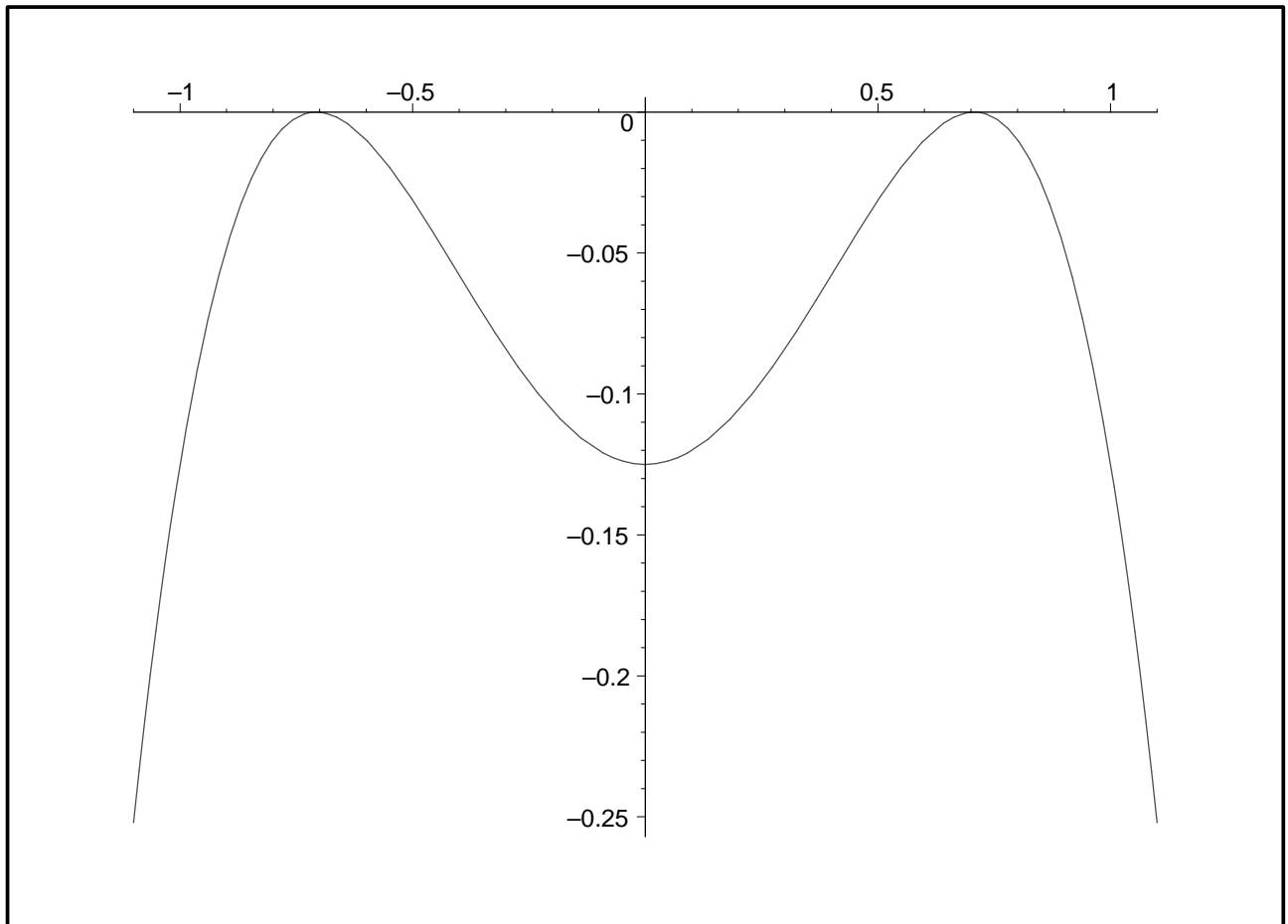


Рис. III.14.

```
> Eq_n:=(m,k,b,beta0)->diff(x(t),t$2)-subs(x=x(t),
> F(x,k,b)/m)+beta0*diff(x(t),t)=0;
```

```
Eq_n := (m, k, b, beta0) ->
```

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) - \text{subs}(x = x(t), \frac{F(x, k, b)}{m}) + \beta_0 \frac{d}{dt} x(t) = 0$$

```
> Eq_n(m,k,b,beta0);
```

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{2 b^2 |x(t)|^2 - k |x(t)|^2}{m} + \beta_0 \frac{d}{dt} x(t) = 0$$

```
> expand(%);
```

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2}{m} b x(t)^2 + \frac{3}{m} x(t)^3} + \text{beta0} \frac{d}{dt} x(t) = 0$$

> IC:=x(0)=0,D(x)(0)=1;

IC := x(0) = 0, D(x)(0) = 1

> S1:=dsolve({Eq_n(1,1,1,0.1),IC},x(t),
> type=numeric,output=listprocedure);

S1 := [t = (proc(t) ... end proc),

x(t) = (proc(t) ... end proc),

d
-- x(t) = (proc(t) ... end proc)]
dt

> S1_1_1_0_1:=subs(S1,x(t));

S1_1_1_0_1 := proc(t) ... end proc

> S1_1_1_0_1(1);

1.01231042063349452

> plot(S1_1_1_0_1(t),t=0..100,numpoints=5000);

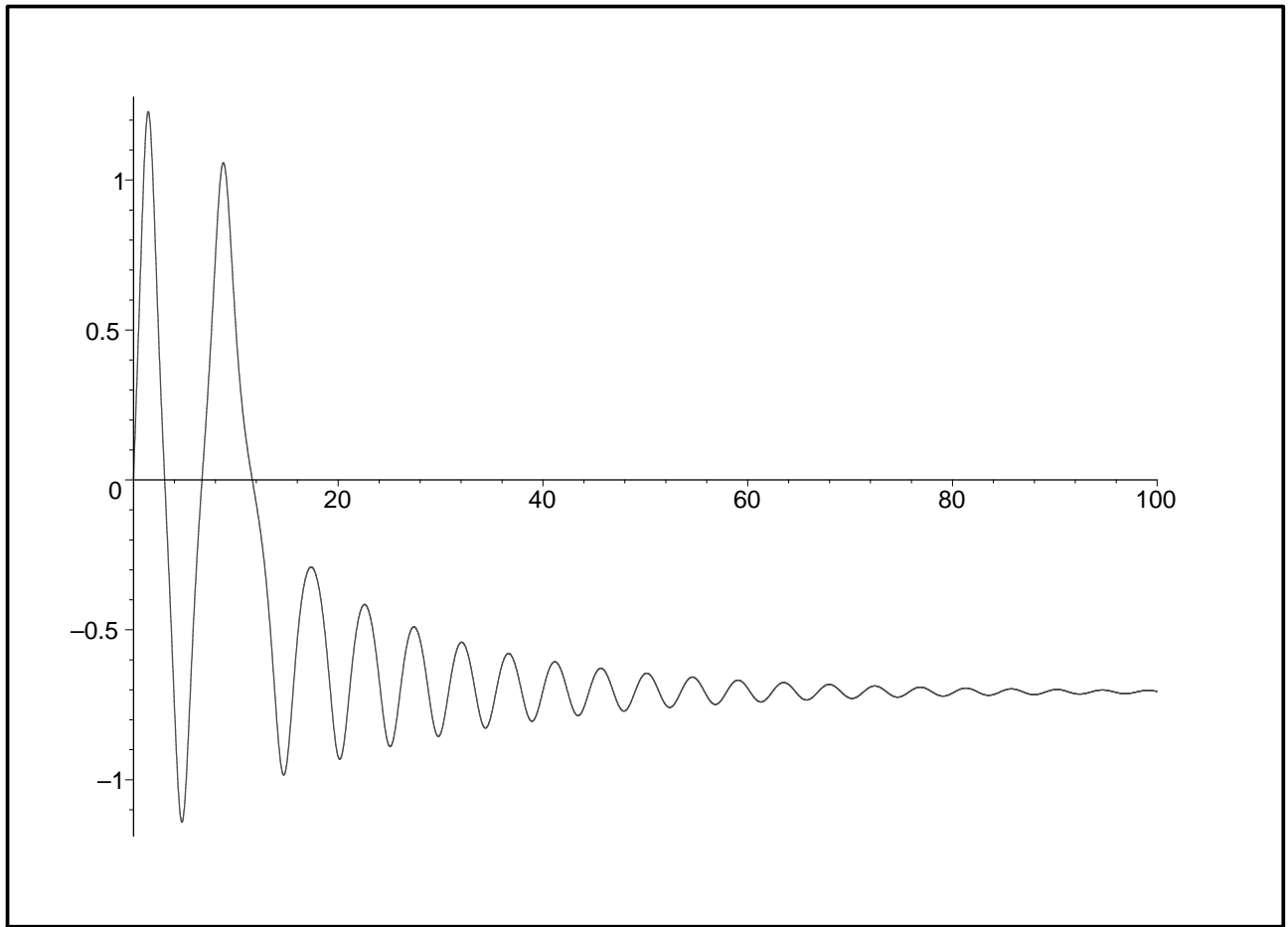


Рис. III.15.

```
V1_1_1_0_1:=subs(S1,diff(x(t),t));V1_1_1_0_1(1);
```

```
V1_1_1_0_1 := proc(t) ... end proc
```

```
0.877150673949371962
```

```
> plot(V1_1_1_0_1(t),t=0..100,numpoints=5000);
```

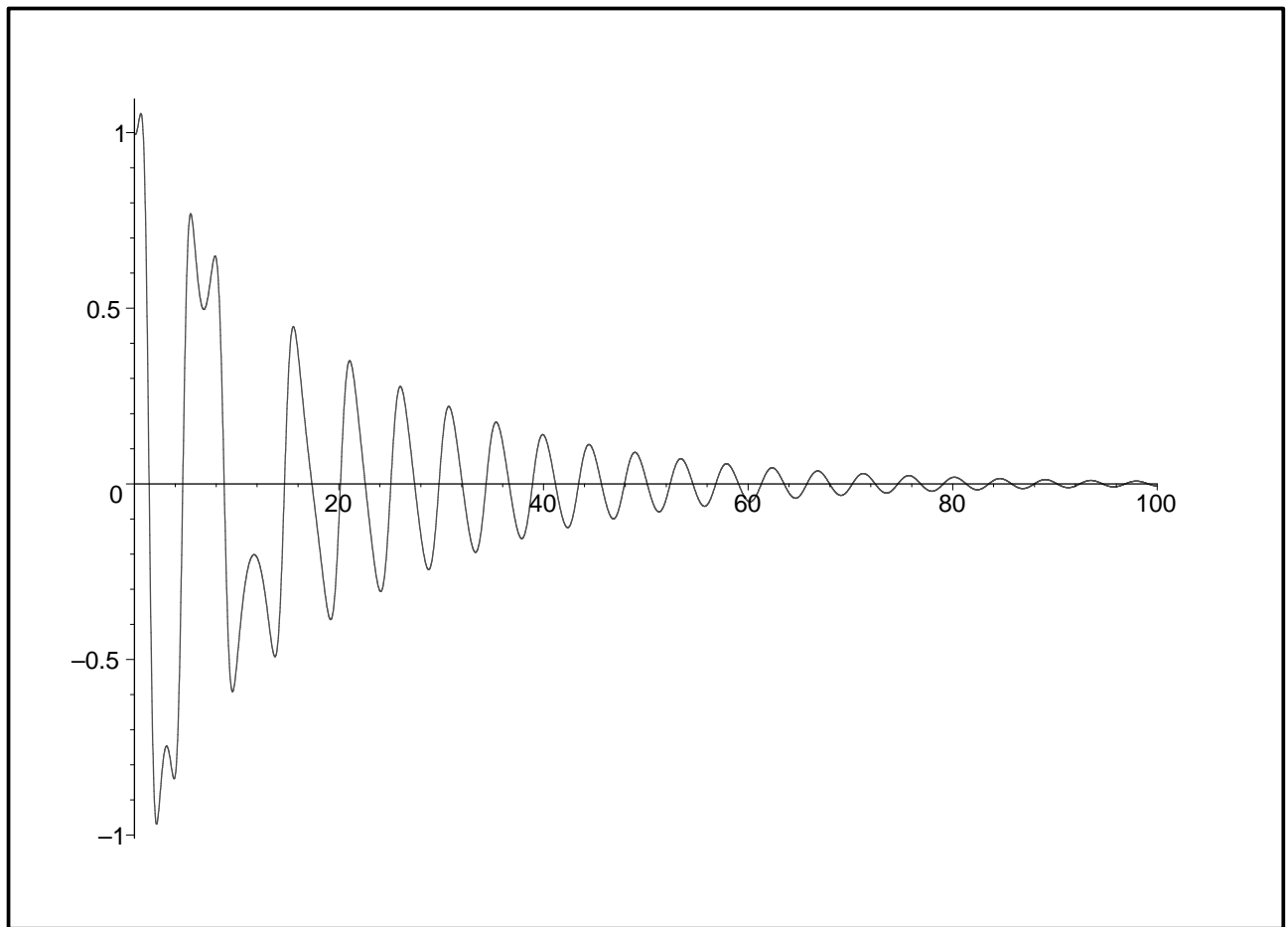


Рис. III.16.

```
E1:=V1_1_1_0_1(t)^2/2;
```

```
E1 := 0.3846966524
```

```
> plot(E1(t),t=0..100,numpoints=5000);
```

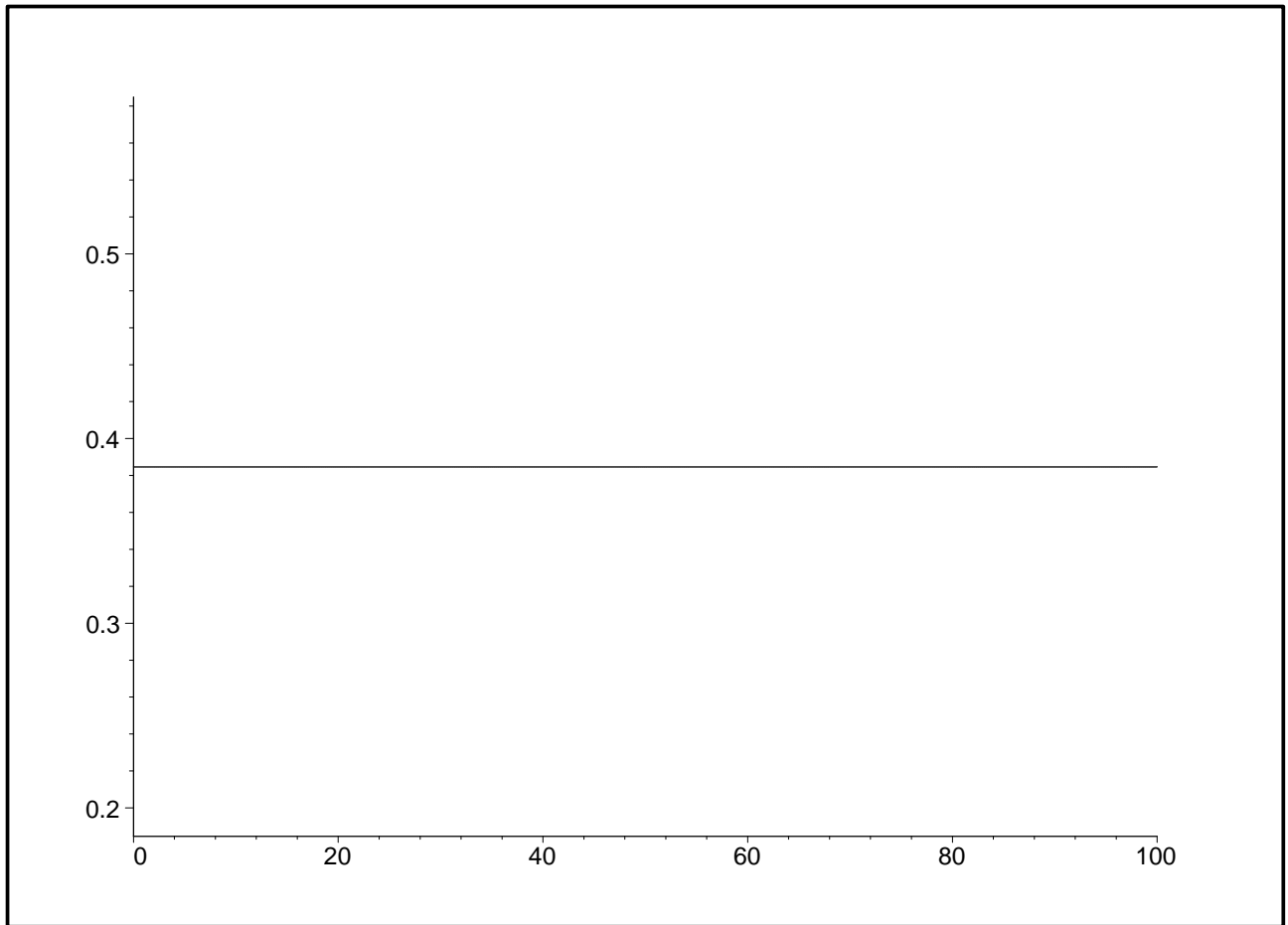


Рис. III.17.

```
> IC2:=x(0)=0,D(x)(0)=10;
```

```
IC2 := x(0) = 0, D(x)(0) = 10
```

```
> S2:=dsolve({Eq_n(1,1,1,0.1),IC2},x(t),
> type=numeric,output=listprocedure);
```

```
S2 := [t = (proc(t) ... end proc),
```

```
x(t) = (proc(t) ... end proc),
```

```
d
-- x(t) = (proc(t) ... end proc)]
dt
```

```
> S2_1_1_1_0_1:=subs(S2,x(t));
```

```
S2_1_1_1_0_1 := proc(t) ... end proc
```

```
> S2_1_1_1_0_1(1);
```

```
-1.39545993174940162
```

```
> plot(S2_1_1_1_0_1(t),t=0..100);
```

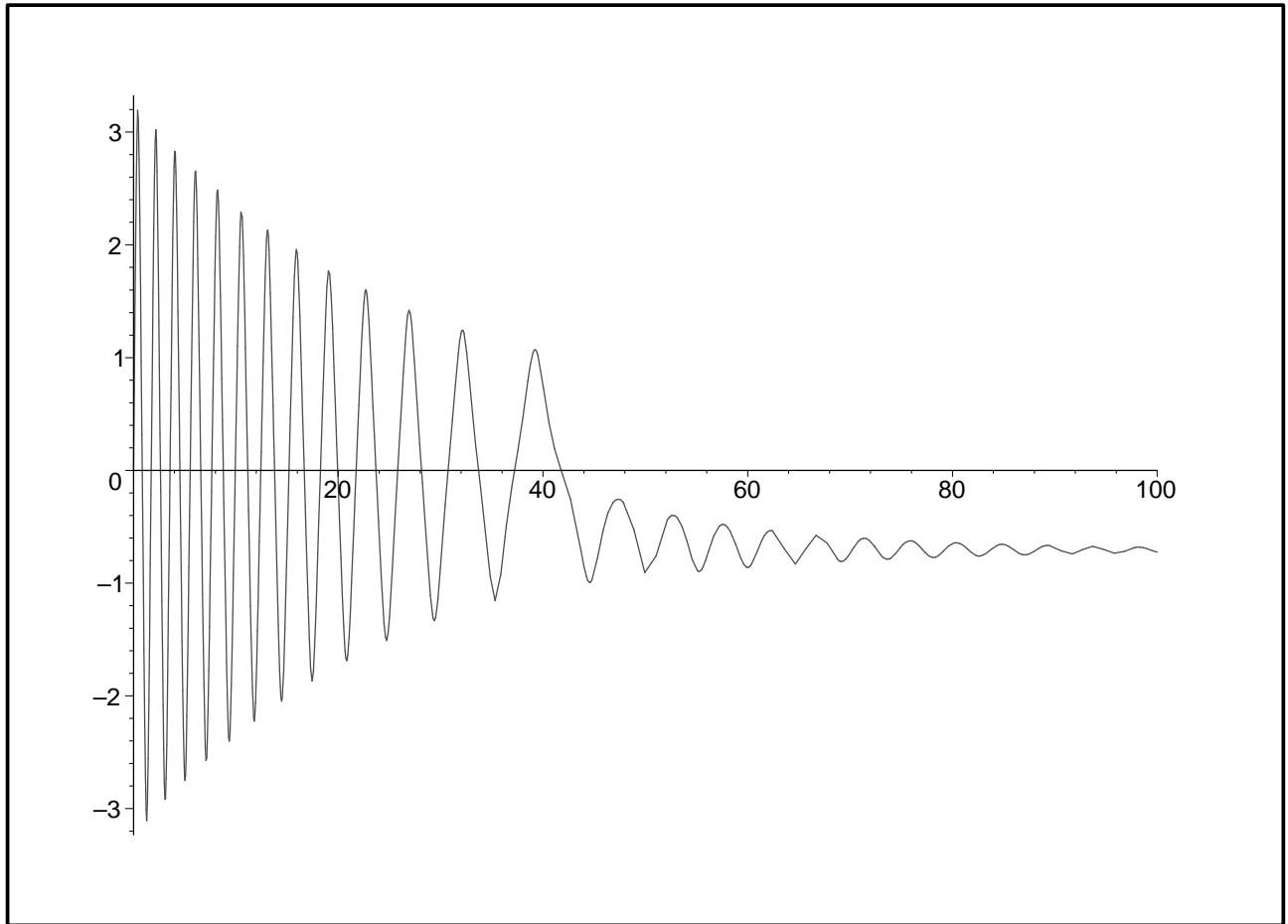


Рис. III.18.

```
> G1:=plot([S1_1_1_0_1(t),S2_1_1_1_0_1(t)],  
> t=0..100,numpoints=5000,thickness=[2,1],color=black,  
> labels=['','Amplitude of oscillation'],  
> labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL],title=  
> 'Spontane Broken of Symmetry':  
> Txt:=plots[textplot]([90,0.2,'Time'],font=[TIMES,ROMAN,14]):  
> plots[display](G1,Txt);
```

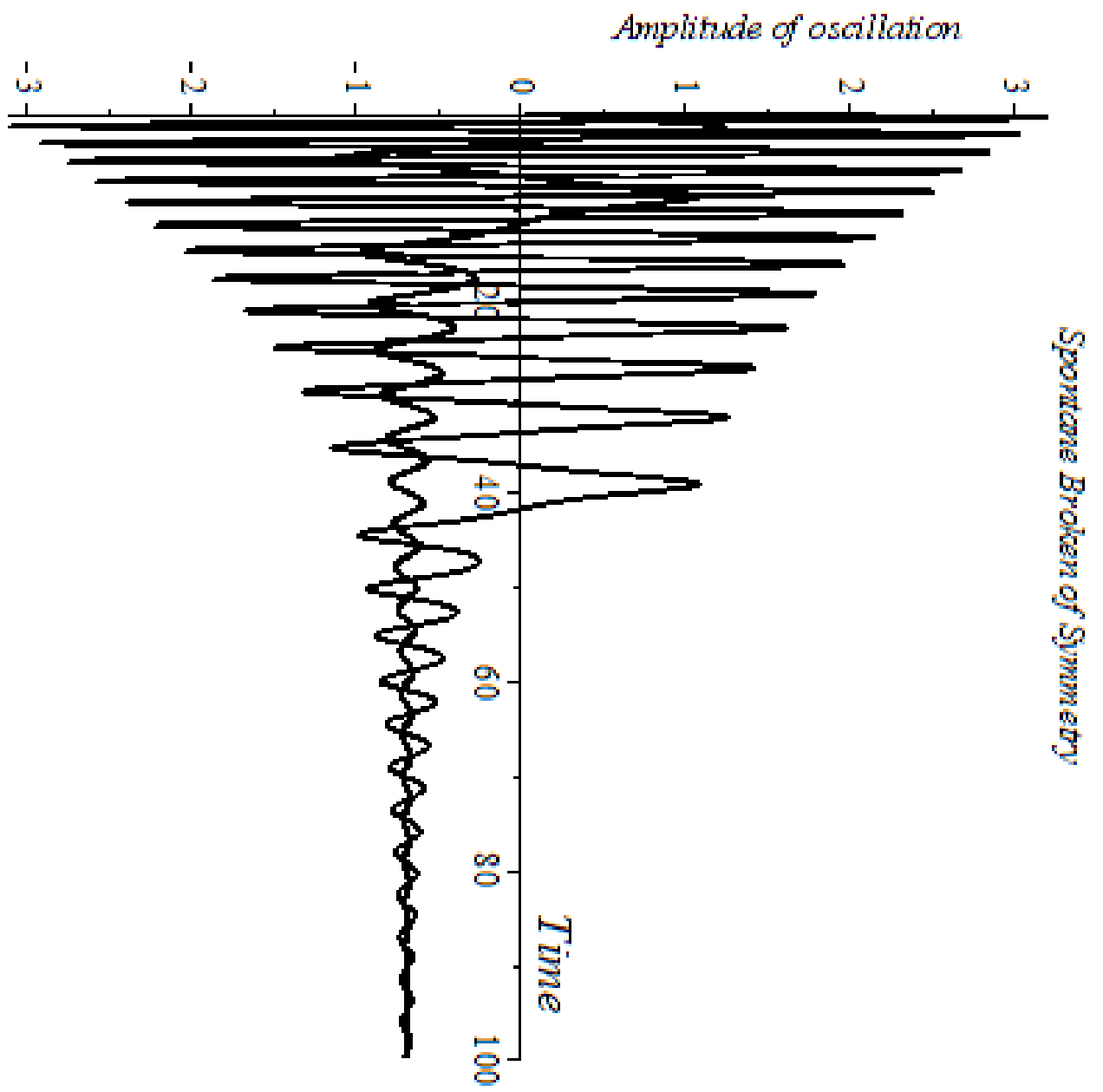


Рис. III.19.

Заключение

Таким образом в работе решены следующие задачи:

1. Составлен обзор по теории нелинейных уравнений.
2. Изучены и представлены команды пакета Maple.
3. Продемонстрированы примеры оснащенной динамической визуализации в СКМ Maple нелинейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, задачи, представленные в данной квалификационной работе, выполнены полностью.

Литература

- [1] Л.Д.Ландау. *Механика*. Москва: “Наука”, – 2010. Том 1, – 214 с.
- [2] Л.Э.Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения*, Москва, Гостехиздат, 2011.
- [3] С.А. Агафонов, *Дифференциальные уравнения*, Москва, “МГТУ им. Н.Э. Баумана”, 2010. – 348 с.
- [4] Н.П.Еругин. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений*, Минск, “Наука и техника”, 2010. –744 с.
- [5] Игнатъев Ю.Г. *Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр*. Компьютерная версия, Казань, 2012.
- [6] В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению*, Москва, “ЮНИМЕДИАСТАЙЛ”, 2012. –256с.
- [7] В.Н. Говорухин, В. Г. Цибулин *Введение в Maple. Математический пакет для всех*. -Москва: Мир, 2010.
- [8] Матросов А. *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики*. Изд-во “БХВ-Петербург”, Санкт-Петербург, 2012.
- [9] Р. В. Загретдинов, Ф. М. Аблаев, Т. М. Гаврилова, С. Н. Перфилов: *Издательская система LaTeX* . - Казань, 2012.
- [10] С. Львовский: *TEX* - Москва, 2010.



¹© Оформление: LaTeX - стиль VLBIU профессора Ю.Г. Игнатъева

Заключительный лист

Подпись автора работы _____

Дата _____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защищена в ГАК с оценкой
" _____ "

Дата _____

Секретарь ГАК _____