

УДК 517.54+517.982.274

## МНОЖЕСТВО ГАХОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ХОРНИЧА ПРИ БЛОХОВСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПРЕДШВАРЦИАНЫ

*А.В. Казанцев*

### Аннотация

Множество Гахова объединяет функции из пространства Хорнича над единичным кругом, имеющие единственную критическую точку конформного радиуса. Исследуется расположение пересечения  $\mathcal{A}$  множества Гахова с пространством Блоха  $\mathcal{B}$  относительно банаховой структуры  $\mathcal{B}$ . Выявлена связь между топологическими характеристиками множества  $\mathcal{A}$  и значениями кривизны и индекса критических точек для функций из  $\mathcal{A}$ . Дано эффективное описание множества точек границы  $\mathcal{A}$  с минимальной преднормой. С использованием функционала Минковского установлена звездообразность подмножества функций из  $\mathcal{A}$  с нулевой критической точкой конформного радиуса.

**Ключевые слова:** гиперболическая производная, конформный радиус, бифуркации критических точек, пространство Хорнича, пространство Блоха, предшварциан, множество Гахова, внутренность и граница множества.

### Введение

Для функции  $f$ , голоморфной в единичном круге  $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ , рассмотрим величину

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)| \quad (1)$$

при  $\zeta \in \mathbb{D}$ . Проблема исследования экстремумов функции (1) и построения достаточных условий единственности таких экстремумов восходит к трактату Г. Поля и Г. Сегё [1] и оформилась в отдельное направление в работе Г. Хиги [2] (см. [3]). В 80-е годы XX в. данное направление стало развиваться на казанском семинаре по геометрической теории функций (см., например, [4, 5]) уже в рамках гаховской традиции, о которой речь пойдет ниже.

В классической постановке Поля – Сегё – Хиги функция  $f$  – однолистная, и величина (1) представляет собой выражение для *внутреннего конформного радиуса* области  $D = f(\mathbb{D})$  в точке  $w = f(\zeta)$ . Ямашита [6, 7] предложил постановку, где  $f$  – голоморфная универсальная накрывающая проекция  $\mathbb{D}$  на гиперболическую область  $D$  в  $\hat{\mathbb{C}}$ , называя величину (1) *производной Блоха* функции  $f$ . В общем случае ( $f$  – произвольная голоморфная функция в  $\mathbb{D}$ ) автор использовал для (1) название «*гиперболическая производная* функции  $f$ » [8, 9], заимствовав его в работе [10].

Применение термина «конформный радиус *области*» к величине (1), зависящей от *функции*, причем в классической постановке, усложняет формулировки и искусственно сужает запас функций  $f$ . Издержки такого подхода проявились, например, в § 2 работы [5], где вместо локальной однолистности приходилось использовать более сильное условие однолистности. Тем не менее при всей актуальности перехода к новому названию величины (1) представляется важным сохранение связей с классической историей предмета, символом которой является понятие конформного радиуса. Об этом свидетельствует, например, название «конформный радиус как функция точки» из работы [11].

Вернемся к экстремумам функции (1). Пусть  $H$  – класс всех голоморфных функций в  $\mathbb{D}$ ,  $H_0$  – подкласс функций  $f$ , выделяемый из  $H$  нормировками  $f(0) = f'(0) - 1 = 0$  и условием локальной однолиственности в  $\mathbb{D}$ :  $f'(\zeta) \neq 0$  при  $\zeta \in \mathbb{D}$ . Элементы множества  $M_f = \{a \in \mathbb{D} : \nabla h_f(a) = 0\}$  критических точек функции  $h_f$ ,  $f \in H_0$ , есть в точности нули отображения Гахова

$$G(\zeta, \bar{\zeta}) = f''(\zeta)/f'(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2). \quad (2)$$

Эквивалентность  $\nabla h_f(\zeta) = 0 \Leftrightarrow G(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$ , установленная в работе [12], по существу восходит к Ф.Д. Гахову [13]. Сделать такой вывод позволило новое прочтение работы [13], предпринятое в статье [4], которая вместе с работами [5, 14] сфокусировала начатую в [13] проблематику по внешним обратным краевым задачам с нефиксированным полюсом на изучении однозначной разрешимости уравнения Гахова  $G(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$ , или, что то же самое, на условиях, достаточных для выполнения равенства  $k_f = 1$ , где  $k_f$  – количество элементов  $M_f$ . Скорректированную таким образом проблематику продолжим называть гаховской.

Истоки развиваемого в настоящей статье подхода к условиям единственности экстремума (1) относятся к дискуссии по докладу М.И. Киндера и автора «Условия единственности решения внешней обратной краевой задачи» на итоговой научной конференции Казанского государственного университета за 1985 г., когда С.Р. Насыров установил единственность корня уравнения Гахова при выполнении строгой оценки  $|(f''/f)'(\zeta)| < 2/(1 - |\zeta|^2)$ ,  $\zeta \in \mathbb{D}$ , для функции  $f$  из малого класса Блоха

$$\mathcal{B}_0 = \{f \in H : \lim_{\zeta \rightarrow \partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0\}$$

(не опубликовано); автор же показал, что, постулируя наличие в  $M_f$  нулевого элемента, эту оценку можно ослабить до нестрогой и заменить  $\mathcal{B}_0$  подклассом  $H_0$  (позднее от условия  $0 \in M_f$  удалось освободиться). Получившийся таким образом прототип теоремы 2 (см. ниже разд. 1) был представлен автором в докладе [15] вместе с частью результатов, вошедших в разд. 2 и 3 настоящей статьи, в частности, использующих функционал Минковского. Привлечение последнего к рассматриваемой проблематике послужило важным стимулом для ее развития благодаря концептуальным связям со статьей [16], где (на материале однолиственности) отработывалась концепция «предельно широкого класса» объектов (в [16] это были области, у нас – функции), «характеризуемых разрешимостью проблемы». В настоящей статье такая концепция воплощается в понятии множества Гахова. Формированию функционально-аналитического контекста развиваемой тематики способствовало участие автора в работе [17].

Направленность настоящей статьи можно охарактеризовать как исследование множеств  $M_f$  «вдоль траектории», намеченной в [3, 8, 9, 15, 18, 19] и нацеленной на изучение множества

$$\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1\}$$

«в целом». Множество  $\mathcal{G}_1$  мы и будем называть *множеством*, или *классом Гахова* (см. также [20]).

Рассмотрим отображение

$$P : H_0 \rightarrow H : f \mapsto F = f''/f', \quad (3)$$

сопоставляющее каждой функции  $f \in H_0$  ее предшварциан  $F = f''/f'$  и взаимно однозначное в силу нормировок  $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ .

В настоящей статье множество Гахова изучается в рамках следующей постановки, впервые предложенной в [15] (см. также [8] и тезисы [19]). Ограничим

класс-«мишень»  $H$  в (3), сузив его до пространства Блоха  $\mathcal{B}$ , состоящего из всех функций  $F \in H$  с конечной полунормой  $|F|_{\mathcal{B}} = \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} h_F(\zeta)$  и являющегося банаховым относительно нормы  $\|F\|_{\mathcal{B}} = |F(0)| + |F|_{\mathcal{B}}$  (см., например, [21]). Банахова структура позволяет получать содержательную информацию о множестве  $\mathcal{G}_1$  в терминах топологических свойств (в топологии нормы) множества

$$\mathcal{A} = P(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{B}. \tag{4}$$

Коограничение  $P$  на пространство  $\mathcal{B}$  – отображение

$$P_{\mathcal{B}} : P^{-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B} \tag{5}$$

(в обозначениях [22, с. 113]) – назовем *погружением Блоха* и будем вновь обозначать через  $P$ .

Приведенная постановка нуждается в существенном дополнении. В 1969 г. Х. Хорнич [23] определил на  $H_0$  ставшие уже классическими операции  $\oplus$  и  $\odot$ , задаваемые формулами

$$(f \oplus g)(\zeta) := \int_0^{\zeta} f'(\omega)g'(\omega) d\omega \quad \text{и} \quad (b \odot f)(\zeta) := \int_0^{\zeta} (f'(\omega))^b d\omega, \quad f, g \in H_0, b \in \mathbb{R},$$

и ввел класс  $\mathcal{H}$  функций  $f \in H_0$ , удовлетворяющих условию  $\sup_{\zeta \in \mathbb{D}} |\arg f'(\zeta)| < \infty$

( $\arg 1 = 0$ ), которое обеспечивает линейное пространство  $(\mathcal{H}, \oplus, \odot)$  (над  $\mathbb{R}$ ) банаховой структурой. Не вдаваясь в детали последующих трансформаций исходной постановки Хорнича, отметим, что в рамках одного из подходов, принятых в геометрической теории функций, термин «пространство Хорнича» закрепился не за банаховым пространством  $(\mathcal{H}, \oplus, \odot, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ , а за линейным пространством  $(H_0, \oplus, \odot)$  (см., например, [24]). Именно такого подхода мы придерживаемся в настоящей работе; он позволяет рассматривать отображение (3) как алгебраический изоморфизм  $P : (H_0, \oplus, \odot) \rightarrow (H, +, \cdot)$ , отождествляющий лучи  $b \odot f$  и  $bF$  при  $F = P(f) \in \mathcal{B}$ , вдоль которых мы будем исследовать множество (4). Никаких дополнительных сужений (5) при этом не возникнет – мы не выйдем даже за пределы исходной (банаховой) постановки Хорнича, как показывает включение  $P^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}$  из следующего утверждения [12, 21], в котором  $M(F) := M_f$ .

**Предложение 1.** *Если  $F = P(f) \in \mathcal{B}$ , то  $f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B}_0$  и*

$$M(F) \subset \overline{\mathbb{D}}_{\rho} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho\} \quad \text{для некоторого} \quad \rho \in (0, 1). \tag{6}$$

*Кроме того, если  $F$  – любая функция с  $|F(0)| \leq \sigma$  и  $|F|_{\mathcal{B}} \leq \tau$ , то число  $\rho$  в (6) можно выбрать зависящим только от  $\sigma$  и  $\tau$ . Наконец, множество  $M(F)$  конечно для всякой  $F \in \mathcal{B}$ .*

**Доказательство.** Используем такой вариант неравенства из [21, с. 113]:

$$|F(\zeta)| \leq |F(0)| + |F|_{\mathcal{B}} f_s(|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad F \in \mathcal{B}, \tag{7}$$

где  $f_s(\zeta) = (1/2) \ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$ . Включение  $f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B}_0$  следует из (7) с помощью интегрирования, а существование  $\rho$  с требуемыми свойствами устанавливается сравнением правой части (7) и выражения  $2|\zeta|/(1 - |\zeta|^2)$  на основе (2). Конечность  $M(F)$  получается из (6) с учетом результатов [12], запрещающих наличие циклов в  $M(F)$ .  $\square$

**Замечание 1.** В случаях, когда непустота  $M_f$  в исследуемом классе влечет за собой равенство  $k_f = 1$ , а сам класс содержит функции  $f$ , для которых  $k_f = 0$ , множество Гахова  $\mathcal{G}_1$  целесообразно рассматривать вместе с множеством

$$\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}.$$

Основой для примера такого рода может служить импликация

$$f \in H, \quad (1 - |\zeta|^2)^2 |\{f, \zeta\}| \leq 2, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad f(\mathbb{D}) \neq \text{полоса и } f''(0) = 0 \implies k_f = 1 \quad (8)$$

из статьи [25] (см. также [3, 6, 26]); здесь  $\{f, \zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (1/2)(f''/f')^2(\zeta) -$  производная Шварца функции  $f$ . Действительно, отмена равенства  $f''(0) = 0$  в условиях (8) приводит к неравенству  $k_f \leq 1$ , поскольку класс функций  $f \in H$ , удовлетворяющих условию  $(1 - |\zeta|^2)^2 |\{f, \zeta\}| \leq 2$ ,  $\zeta \in \mathbb{D}$ , открытому Нехари [27], содержит, в частности, функцию  $f(\zeta) = \ln(1/(1-\zeta)) \in \mathcal{G}_0$ . Предлагаемая в настоящей статье постановка подобные примеры исключает:

**Следствие 1.** *Имеет место соотношение  $P^{-1}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{G}_0 = \emptyset$ .*

**Доказательство.** Требуемое равенство получается из двух включений  $- P^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}_0$  (предложение 1) и  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{G}_1$ ; последнее устанавливается на основе соотношения  $\lim_{\zeta \rightarrow \partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0$  (ср. с [28]).  $\square$

Другим очевидным следствием предложения 1 является дискретность множества  $M_f$  для любой  $f \in P^{-1}(\mathcal{B})$  (ср. с [12, 29]).

Теперь приведем важное

**Замечание 2.** Под действием погружения Блоха (5) часть множества Гахова теряется:  $\mathcal{G}_1 \setminus P^{-1}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ .

Действительно, для функции

$$f_q(\zeta) = \frac{w_q(\zeta) - 1}{w_q(\zeta) + 1}, \quad w_q(\zeta) = \left(\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}\right)^q,$$

при вещественных  $x \in (-1, 1)$  имеем  $(1 - x^2)(f_q''/f_q')'(x) = 2 + 4\Phi_q(x)/(1 - x^2)$ , где функция

$$\Phi_q(x) = x(x - qf_q(x)) - \frac{2q^2(1 - x^2)^q}{[(1 + x)^q + (1 - x)^q]^2}$$

при  $x \rightarrow 1$  стремится к  $1 - q$ ; отсюда следует, что  $f \notin P^{-1}(\mathcal{B})$ , когда  $q \in (0, 2)$ ,  $q \neq 1$ . Однако  $f_q \in \mathcal{G}_1$  при  $q \in (0, \sqrt{2}]$  благодаря (8) и  $\{f_q, \zeta\} = 2(1 - q^2)/(1 - \zeta^2)^2$ .

Перенос исследования в пространство предшварцианов  $F = P(f)$  вводит парные обозначения:  $M(F) := M_f$  (см. выше) и  $k(F) := k_f$ . Для гауссовой кривизны  $K_f$  поверхности  $h = h_f(\zeta)$  и индекса  $\gamma_f$  векторного поля  $\nabla h_f(\zeta)$  будет использована запись  $K_F := K_f$  и  $\gamma_F := \gamma_f$ ; при этом

$$K_F(a) = h_f(a)^2 [4/(1 - |a|^2)^4 - |F'(a) - F(a)^2/2|^2], \quad a \in M(F), \quad (9)$$

а выражение для  $\gamma_F(a)$  нам не понадобится (см. [9, 28]). Все необходимые факты о  $K_F$  и  $\gamma_F$  приведены в следующей лемме ( $m_F^\pm := \{a \in M(F) : \gamma_F(a) = \pm 1\}$ ).

**Лемма 1.** *Пусть  $f \in H_0$  и  $F = P(f) \in \mathcal{B}$ . Тогда*

- 1) *в любой точке  $a \in M(F)$  функция (1) имеет локальный максимум ( $\gamma_F(a) = +1$ ), либо седло ( $\gamma_F(a) = -1$ ), либо полуседло ( $\gamma_F(a) = 0$ );*
- 2) *если  $K_F(a) \neq 0$  и  $a \in M(F)$ , то  $\gamma_F(a) = \text{sgn } K_F(a)$ ;*
- 3)  $\sum_{a \in M(F)} \gamma_F(a) = m_F^+ - m_F^- = 1$ ;
- 4) *из  $\gamma_F(M(F)) = +1$  следует  $k(F) = 1$ .*

Утверждения 1) – 3) установлены в [28], а 4) – ослабленный вариант теоремы 1 из [9] (см. также [28]).

Анализ динамики множества  $M(bF)$ ,  $F \in \mathcal{B}$ , с ростом  $b > 0$  аналогичен проведенному в [3] и [9] для случая «линий уровня»  $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$ . Определим слоение

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_F := \bigcup_{b>0} M(bF) \times \{b\}$$

и функционал

$$\bar{b} = \bar{b}(F) := \sup\{\sigma \in (0, +\infty) : b \in [0, \sigma] \Rightarrow k(bF) = 1\}$$

первого выхода из множества  $\mathcal{A}$  (см. (4)) вдоль луча  $bF$ ,  $b > 0$ . Положительность  $\bar{b}$  на  $\mathcal{B}$  установлена ниже в теореме 2 и не использует следующее утверждение; обозначим  $g(\zeta) := \zeta F(\zeta)$ ,  $K_b := K_{bF}$  и  $\gamma_b := \gamma_{bF}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $F \in \mathcal{B}$ ,  $\alpha \in M(\beta F)$  при  $\beta \in [\bar{b}(F), +\infty)$ ,  $k$  – кратность  $\alpha$  как нуля функции  $g(\zeta) - g(\alpha)$ . Если  $\alpha \neq 0$  либо  $\alpha = 0$  и  $K_\beta(\alpha) = 0$ , то слоение  $\mathfrak{B}$  в некоторой окрестности  $W = U \times V \subset \mathbb{D} \times \mathbb{R}_+$  точки  $(\alpha, \beta)$  состоит из  $k$  ( $k = 2$  при  $\alpha = 0$ ) аналитических дуг, пересекающихся в  $(\alpha, \beta)$ .

Пусть  $\alpha \neq 0$ . При  $k = 1$  дугу  $\mathfrak{B} \cap W$  параметризует ее модуль. Если  $k \geq 2$ , то  $b \in V$  – параметр всех  $k$  дуг в  $\mathfrak{B} \cap W$  либо  $k - 1$  из них. В последнем случае оставшаяся дуга расположена по одну сторону от плоскости  $b = \beta$  и параметризуется с помощью  $b$  только на своих «половинах», лежащих над соответствующей полукрестностью  $V_{\geq} = V \cap \{b \geq \beta\}$ . На каждой из  $2k$  полудуг  $(a(b), b)$ ,  $b \in V_{\geq}$ , в  $(\mathfrak{B} \cap W) \setminus \{(\alpha, \beta)\}$  индекс  $\gamma_b$  постоянен и отличен от нуля;

$$\sum_{a \in M(bF) \cap U} \gamma_b(a) = \gamma_\beta(\alpha), \quad b \in V \setminus \{\beta\}. \quad (10)$$

Если  $\alpha = 0$  и  $K_\beta(\alpha) = 0$ , то  $0 \in M(bF)$  для всех  $b > 0$ ,  $\gamma_b(0) = \text{sgn}(\beta - b)$  при  $b \neq \beta$ ,  $\beta = 2/|F'(0)|$  ( $F'(0) \neq 0$ ) и с ростом  $b$  возможны три сценария бифуркации при  $b = \beta$  (как и для  $\alpha \neq 0$ ,  $k = 2$ ): а) максимум переходит в седло с ответвлением двух максимумов (бифуркация типа  $\Psi$ ); б) максимум и два седла сливаются в седло; в) максимум и седло меняются ролями, переходя через полуседло. В каждом случае  $b$  – параметр любой полудуги в  $\mathfrak{B} \cap W$ , исходящей из  $(0, \beta)$ .

Если же  $\beta = \bar{b}(F)$ , то неравенство  $k(\beta F) > 1$  при  $b > \beta$  вблизи  $\beta$  выполняется за счет бифуркации типа  $\Psi$  или наличия в  $M(\beta F)$  точки  $\alpha \neq 0$  такой, что  $\mathfrak{B} \cap W$  – аналитическая дуга над  $V_{>} \cup \{\beta\}$  (бифуркация типа  $\cup$ ).

Сразу отметим, что бифуркация типа  $\cap$  (при  $\beta > \bar{b}(F)$ ) определяется наличием в  $M(\beta F)$  точки  $\alpha \neq 0$  такой, что  $\mathfrak{B} \cap W$  – аналитическая дуга над  $V_{<} \cup \{\beta\}$ . Для локализации  $\mathfrak{B}$  над точкой  $b = \beta$  в случае  $0 \in M(\beta F)$  нам потребуется исследовать  $\mathfrak{B}'(\beta) := (M(\beta F) \setminus \{0\}) \times \{\beta\}$ . Ситуация, когда слой  $\mathfrak{B}'(\beta)$  состоит только из точек бифуркации типа а)  $\cup$ , б)  $\cap$  или в)  $\cup$  и  $\cap$ , формализуется соответственно записью а)  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cup\}$ , б)  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cap\}$  или в)  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cup, \cap\}$ . Пусть  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$ .

Обоснование леммы 2 почти дословно повторяет доказательство основной леммы из [3]. Тем не менее в динамике множество  $M_{f_r}$  из [3] и  $M_{b \circ f}$  имеется существенная разница: если для «линий уровня» с ростом параметра локальные максимумы возрастают, а седла убывают по модулю, то для «предшварцианов» это свойство сохраняется только у максимумов – седла же могут двигаться в обоих направлениях. Данное обстоятельство усложняет доказательство звездообразности множества  $\tilde{\mathcal{G}}_1 \cap P^{-1}(\mathcal{B})$ , где  $\tilde{\mathcal{G}}_1 = \{f \in \mathcal{G}_1 : f''(0) = 0\}$ , в пространстве Хорнича (теорема 4 ниже) по сравнению с  $r$ -случаем (см. [9]), на который придется опираться.

Условие  $f''(0) = 0$  фиксирует в  $M_f$  точку  $a = 0$ . При переходе к предшварцианам  $F = P(f)$  данное условие выделяет из  $\mathcal{B}$  новое объемлющее пространство

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{F \in \mathcal{B} : F(0) = 0\},$$

в котором множество Гахова представлено как

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{B}}.$$

Пространство  $\tilde{\mathcal{B}}$ , очевидно, уравнивает банахову и преднормированную структуры на  $\mathcal{B}$ , являясь банаховым подпространством пространства  $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ; в частности, на  $\tilde{\mathcal{B}}$  предшары  $B_{\varepsilon}(F) = \{G \in \mathcal{B} : |G - F|_{\mathcal{B}} < \varepsilon\}$  уравниваются с шарами  $\mathbb{B}_{\varepsilon}(F) = \{G \in \mathcal{B} : \|G - F\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon\}$ :  $\tilde{\mathbb{B}}_{\varepsilon}(F) := \mathbb{B}_{\varepsilon}(F) \cap \tilde{\mathcal{B}} = B_{\varepsilon}(F) \cap \tilde{\mathcal{B}} =: \tilde{B}_{\varepsilon}(F)$  (одинаковый след на  $\tilde{\mathcal{B}}$  имеют также сферы  $\mathbb{S}_{\varepsilon}(F)$  и предсферы  $S_{\varepsilon}(F)$ ). Однако с топологическими операторами  $\mathcal{F} = \text{Int}, \text{Cl}$  и  $\text{Fr}$  (в топологии нормы на  $\mathcal{B}$ ) дело обстоит сложнее: соотношение

$$\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \quad (11)$$

справедливо только для внутренности  $\mathcal{F} = \text{Int}$ , а для замыкания  $\mathcal{F} = \text{Cl}$  и границы  $\mathcal{F} = \text{Fr}$  в (11) следует удерживать лишь включение левой части в правую. Утверждение из [8] о равенстве (11) при  $\mathcal{F} = \text{Fr}$  некорректно; здесь эта ошибка исправлена: доказано, что

$$C := (\tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}) \setminus \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}} \neq \emptyset,$$

причем

$$\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}} = \Gamma_1 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \quad \text{и} \quad C = \Gamma_0 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A},$$

где  $\Gamma_k = \{F \in \tilde{\mathcal{B}} : \gamma_F(0) = k\}$ ,  $k = 0, 1$  (предложение 4, теорема 7).

Цель настоящей статьи – исследовать связь между топологическими характеристиками  $\mathcal{F}$  множеств  $\mathcal{A}$  и  $\tilde{\mathcal{A}}$  и геометрическими характеристиками  $K_F$  и  $\gamma_F$  элементов  $M(F)$  для соответствующих  $F$ . Направления работы были намечены в [8]; утверждения, имеющие прототипы в [8], формулируются ниже как теоремы и снабжены подробными обоснованиями; этапы исследования отражены в названиях разделов.

## 1. Представление множества $\overline{S_2(0)} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$

Начнем со следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} &= \{F \in \mathcal{A} : K_F(M(F)) = 0\}, \\ \text{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} &= \{F \in \mathcal{B} : K_F(M(F)) > 0\}. \end{aligned} \quad (12)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\mathcal{A}_0 = \{F \in \mathcal{A} : K_F(M(F)) = 0\}$ .

Для любого  $F \in \mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$  существует последовательность  $F_n \notin \mathcal{A}$ , сходящаяся к  $F$  по норме  $\mathcal{B}$ . Стандартными рассуждениями с использованием предложения 1 получаем отсюда, что если  $M(F) \ni a_n \rightarrow a \in M(F)$ , то  $K_{F_n}(a_n) \rightarrow K_F(a)$ . Включение  $\mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$  будет обосновано, если показать, что для каждого  $n \geq 1$  в  $M(F_n)$  найдутся элементы  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  такие, что  $K_{F_n}(\alpha_n) \geq 0 \geq K_{F_n}(\beta_n)$ . Действительно, сохранение последних неравенств при переходе к подпоследовательностям  $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha$ ,  $\beta_{n_k} \rightarrow \beta$  ( $k \rightarrow \infty$ ), с учетом  $F \in \mathcal{A}$  влечет за собой соотношения  $\alpha = \beta$ ,  $M(F) = \{\alpha\}$  и  $K_F(\alpha) = 0$ .

Проверим наличие элементов  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  с требуемыми свойствами. Поскольку  $f_n = P^{-1}(F_n) \in \mathcal{B}_0$  (предложение 1), то в качестве  $\alpha_n$  берем глобальный максимум функции  $h_{f_n}$ . Так как  $F_n \notin \mathcal{A}$ ,  $n \geq 1$ , то в  $M(F_n)$  существует  $q_n \neq \alpha_n$ , причем если  $K_{F_n}(q_n) \leq 0$ , то полагаем  $\beta_n = q_n$ , а если  $K_{F_n}(q_n) > 0$ , то  $\gamma_{F_n}(q_n) = +1$ , что вместе с  $\gamma_{F_n}(\alpha_n) = +1$  приводит к существованию такого  $\beta_n \in M(F_n)$ , что  $\gamma_{F_n}(\beta_n) = -1$ , поэтому  $K_{F_n}(\beta_n) \leq 0$  (использованы пп. 1)–3) леммы 1).

Докажем включение  $\mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}_0$ . Пусть  $F \in \mathcal{A}_0$ , то есть  $F \in \mathcal{A}$ ,  $M(F) = \{a\}$  и  $K_F(a) = 0$ . Рассмотрим семейство функций  $F_\lambda(\zeta) = F(\zeta) + \lambda(\zeta - a)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Имеем  $F_\lambda \in \mathcal{B}$ ,  $a \in M(F_\lambda)$  и  $\|F_\lambda - F\|_{\mathcal{B}} = (1 + |a|)|\lambda|$ . Поскольку  $K_{F_\lambda}(a)/h_f(a)^2 = -2\text{Re}\{\lambda[F'(a) - F(a)^2/2]\} - |\lambda|^2$ , неравенство  $K_{F_\lambda}(a) < 0$ , обеспечивающее  $\gamma_{F_\lambda}(a) = -1$ , выполняется на некотором  $\lambda$ -луче с началом в  $\lambda = 0$ . По лемме 1, пп. 2), 3), в любой окрестности  $F$  найдется функция вида  $F_\lambda$ , для которой  $a$  – неединственный элемент  $M(F_\lambda)$ , значит,  $F \in \mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ .

Теперь установим второе равенство (12). Если  $F \in \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ , то в силу включения  $\text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$  будет  $M(F) = \{a\}$  для некоторого  $a \in \mathbb{D}$ , откуда  $\gamma_F(a) = +1$  ( $a$  – глобальный максимум  $h_f$  в  $\mathbb{D}$  для  $f = P^{-1}(F)$ ) и, согласно лемме 1,  $K_F(a) \geq 0$ . Но так как  $F \notin \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ , то с учетом первого, полученного выше равенства (12) отсюда следует, что  $K_F(a) > 0$ . Обратно, выбирая  $F \in \mathcal{B}$  с  $K_F(M(F)) > 0$ , заключаем, что  $\gamma_F(M(F)) = +1$ . По лемме 1, п. 4), получим  $F \in \mathcal{A}$ , что вместе с  $K_F(M(F)) > 0$  и  $\mathcal{A} \subset \text{Cl}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  дает  $F \in \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  в силу первого равенства (12).  $\square$

В следующем утверждении как частный случай содержится условие единственности  $(1 - |\zeta|^2)|F'(\zeta)| \leq 2$ ,  $\zeta \in \mathbb{D}$ ,  $\Rightarrow k(F) = 1$ , послужившее в свое время отправной точкой данных исследований [8, теорема 1'].

**Теорема 2.** *Имеют место неулучшаемые включения  $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$  и  $B_2(0) \subset \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ , причем  $\gamma_F(M(F)) = +1$ ,  $F \in \overline{B_2(0)}$ . Следующие условия эквивалентны:*

- (a)  $F \in B_2(0)$  и  $K_F(M(F)) = 0$ ;
- (b)  $F \in S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ ;
- (c)  $F$  – точка выхода (при  $b = 1$ ) из множества  $\overline{B_2(0)} \cap \mathcal{A}$  вдоль луча  $bF$ , при этом динамика  $M(bF)$  допускает только бифуркацию типа  $\Psi$ .

**Доказательство.** Воспользуемся цепочкой неравенств

$$|\{f, a\}| \leq |F'(a)| + |F(a)|^2/2 \leq 2/(1 - |a|^2)^2, \quad a \in M(F), \quad F = P(f) \in \overline{B_2(0)}. \quad (13)$$

Так как при  $F \in B_2(0)$  второе неравенство в (13) будет строгим  $K_F(M(F)) > 0$  (см. (9)), то  $B_2(0) \subset \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  по теореме 1. Тогда, согласно лемме 1, п. 2),  $\gamma_F(M(F)) = +1$  для  $F \in B_2(0)$ , а также для  $F \in S_2(0) \cap \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ . По лемме 1, п. 4), для проверки включения  $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$  остается показать, что  $\gamma_F(M(F)) = +1$  и для  $F \in S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ .

Поскольку при  $F \in S_2(0)$  выполнение (13) означает  $K_F(M(F)) \geq 0$ , в силу  $F \in \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  и второго равенства (12) имеет место соотношение  $K_F(M(F)) = 0$ , превращающее (13) в цепочку равенств. Если  $a = 0 \in M(F)$ , то требуемое заключение  $\gamma_F(0) = +1$  (с бифуркацией  $\Psi$  вдоль луча  $bF$  при  $b = 1$ ) получается с использованием леммы 2 и  $B_2(0) \subset \mathcal{A}$ . Если же  $a \in M(F) \setminus \{0\}$ , а тогда  $F(a) = |F(a)|e^{-i\alpha}$  при  $a = |a|e^{i\alpha}$ , то цепочка (равенств) (13) благодаря «внутренним сокращениям» за счет  $|F'(a)| = 2/(1 - |a|^2)$ ,  $F'(a) = -|F'(a)|e^{-i2\alpha}$  и  $F(a) = 2\bar{a}/(1 - |a|^2)$  сводится к равенству  $e^{i2\alpha}\{f, a\} = -2/(1 - |a|^2)^2$ , то есть  $g'(a) = 0$  ( $g(\zeta) = \zeta F(\zeta)$ ). Применение леммы 2 вновь приводит к бифуркации типа  $\Psi$  в силу  $B_2(0) \subset \mathcal{A}$ ; при этом  $\gamma_F(a) = +1$ , что и требовалось. Попутно доказано, что (b)  $\Leftrightarrow$  (c).

Эквивалентность (a)  $\Leftrightarrow$  (b) получается как «след» первого равенства (12) на только что установленном соотношении  $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$  с учетом  $B_2(0) \subset \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ .  $\square$

**Следствие 2.** Функции  $F \in S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  имеют следующие начальные отрезки тейлоровских разложений в окрестностях точек  $a$  с  $\{a\} = M(F)$ : если  $a = 0$ , то  $F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta + a_3\zeta^3 + \dots$ ,  $|\varepsilon| = 1$ , где  $|a_3| \leq 2/3$ , а если  $a \neq 0$ , то

$$F(\zeta) = \frac{2\bar{a}}{1-|a|^2} - \frac{2\bar{a}}{a(1-|z|^2)}(\zeta-a) - \frac{2\bar{a}^2}{a(1-|a|^2)^2}(\zeta-a)^2 + \dots,$$

причем

$$g(\zeta) = \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} - \frac{2\bar{a}}{a(1-|a|^2)^2}(\zeta-a)^2 + \dots$$

Прежде чем дать полное описание множества  $S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ , докажем следующее

**Предложение 2.** Имеют место равенства

$$S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} = \{F \in S_2(0) : |F'(0)| = 2\}.$$

**Доказательство.** Обозначим  $s_1 = S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ ,  $s_2 = \{F \in S_2(0) : |F'(0)| = 2\}$ ,  $s_3 = S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$  и покажем, что  $s_1 \subset s_2 \subset s_3 \subset s_1$ .

1) Пусть  $F \in s_1$ . Тогда по теореме 2  $F \in \overline{B_2(0)} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} \subset \mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ , значит, по теореме 1,  $K_F(M(F)) = 0$ ; кроме того,  $F \in S_2(0)$ . Легко проверить, что  $S_2(0) \cap S_2(0) \subset \tilde{\mathcal{B}}$ , поэтому  $s_1 \subset \tilde{\mathcal{B}}$ . Вместе с  $F \in \mathcal{A}$  это влечет  $M(F) = \{0\}$ , следовательно,  $K_F(0) = 0$ , и формула (9) немедленно дает  $|F'(0)| = 2$ , откуда  $F \in s_2$ .

2) Пусть  $F \in s_2$ . Условие  $F \in S_2(0)$  с учетом равенства  $|F'(0)| = 2$  приводит к  $F \in S_2(0)$ , значит, как и выше,  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$ . Далее, так как  $|F'(0)| = 2$ , то  $(0, 1) \in \mathfrak{B}_F$  – точка бифуркации в силу (9) и леммы 2. Поскольку согласно условию при  $b \leq 1$  будет  $bF \in \overline{B_2(0)}$ , то  $\tilde{b}(F) = 1$ , и, по лемме 2, указанная бифуркация имеет тип  $\Psi$ . Значит, при  $b > 1$ , близких к 1,  $bF \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ . Пересечение с  $\tilde{\mathcal{B}}$  дает  $bF \in \tilde{\mathcal{A}}$  при  $b \leq 1$  и  $bF \in \tilde{\mathcal{B}} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$  при  $b > 1$  вблизи 1. Таким образом,  $F \in \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$ , и  $F \in s_3$ .

3) Включение  $s_3 \subset s_1$  – немедленное следствие соотношения  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} \subset \tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  (см. [22, с. 120–121]).  $\square$

Основной результат настоящего раздела – следующая

**Теорема 3.** Пересечение  $\mathcal{S} = S_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  разбивается в дизъюнктивное объединение

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} \sqcup \mathcal{B}_{\mathcal{A}}, \quad (14)$$

где  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} = S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$ , а  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  – образ множества  $\mathcal{E} = \{(\phi, a) \in \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} \times \mathbb{D}^* : \phi'(0) = -2\bar{a}/a\}$  ( $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ) при взаимно однозначном отображении

$$\mathcal{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{A}} : (\phi, a) \mapsto \frac{2\bar{a}}{1-|a|^2} + \phi \left( \frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta} \right). \quad (15)$$

Продолжим  $\mathcal{F}$  в слой  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} \times \{0\}$ :  $\mathcal{F}(\phi, 0) = \phi$ ,  $\phi \in \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}}$ . Тогда суперпозиция  $\mathcal{P} \circ \mathcal{F}$ , где  $\mathcal{P} : \mathbb{S} \times I \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{E} \sqcup (\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} \times \{0\}) : (G, \xi, \varepsilon) \mapsto (-2\varepsilon^{-2}G, \xi\varepsilon)$ ,  $\mathbb{S} = \tilde{S}_1(0) \cap \{G \in H : G'(0) = 1\}$  и  $I = (-1, 1)$ , устанавливает представление

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2\bar{\varepsilon}\xi}{1-\xi^2} - 2\varepsilon^{-2}G \left( \frac{\zeta-\varepsilon\xi}{1-\bar{\varepsilon}\xi\zeta} \right) : G \in \mathbb{S}, \xi \in I, \varepsilon \in \mathbb{P}^1 \right\}. \quad (16)$$



**Доказательство.** Разложение (14) соответствует разбиению  $\mathcal{B}$  на  $\tilde{\mathcal{B}}$  и  $\mathcal{B} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$ . Из предложения 2 получаем

$$\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} := \tilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{S} = \mathbb{S}_2(0) \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} = \mathbb{S}_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}} = \{2\eta F : F \in \mathbb{S}, |\eta| = 1\}; \quad (17)$$

таким образом, остается описать множество  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} := \mathcal{S} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$ . Сначала покажем, что

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \{F \in \mathbb{S}_2(0) : (1 - |a|^2)F'(a) = -2\bar{a}/a, \text{ где } M(F) = \{a\} \text{ и } a \neq 0\}. \quad (18)$$

Пусть  $F \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ . Так как  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$  (см. теорему 2,  $\overline{B_2(0)} \subset \mathcal{A}$ ), по теореме 1 имеем  $K_F(a) = 0$  для единственного элемента  $a$  из  $M(F)$ , причем  $a \neq 0$  в силу  $F \notin \tilde{\mathcal{B}}$ . Тогда из доказательства теоремы 2 следует, что  $|F|_{\mathcal{B}} = 2$  и  $g'(a) = 0$ , где  $g(\zeta) = \zeta F(\zeta)$ . Выполняющаяся при  $M(F) \ni a \neq 0$  эквивалентность

$$g'(a) = 0 \iff (1 - |a|^2)F'(a) = -2\bar{a}/a \quad (19)$$

устанавливает включение множества  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  в выделяемое правой частью (18) подмножество предсферы  $\mathbb{S}_2(0)$ .

Включение, противоположное установленному, основано на том, что в силу (19), леммы 2 и условия  $F \in \mathbb{S}_2(0)$  слоение  $\mathfrak{B}_F$  в точке  $(a, 1)$  имеет бифуркацию типа  $\Psi$ , а это значит (теорема 2,  $(b) \Leftrightarrow (c)$ ), что  $F \in \text{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ , и соотношение (18) доказано.

Теперь покажем, что  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}(\mathcal{E})$  (см. (15)).

Проверим, что  $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ . Выберем произвольный элемент  $(\phi, a) \in \mathcal{E}$  и рассмотрим в качестве  $F(\zeta)$  выражение из правой части (15). Тогда из свойств  $\phi$  непосредственным вычислением получаем, что  $F'(a)(1 - |a|^2) = \phi'(0)$  и  $|F|_{\mathcal{B}} = \|\phi\|_{\mathcal{B}} = 2$ , поэтому по теореме 2 множество  $M(F)$  одноточечно и совпадает с  $\{a\}$  в силу соотношения  $F(a) = 2\bar{a}/(1 - |a|^2)$  – уравнения Гахова при  $\zeta = a$  (см. (2)).

Инъективность: пусть  $\mathcal{F}(\phi_1, a_1) = \mathcal{F}(\phi_2, a_2) = F$  для  $(\phi_i, a_i) \in \mathcal{E}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда ввиду только что доказанного имеем  $F \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ , поэтому  $M(F)$  – одноточечное множество, следовательно,  $a_1 = a_2$ , откуда  $\phi_1 = \phi_2$ .

Сюръективность почти очевидна: функция  $\phi(\zeta) = F \circ ((\zeta + a)/(1 + \bar{a}\zeta)) - 2\bar{a}/(1 - |a|^2)$  – решение уравнения  $\mathcal{F}(\phi, a) = F$  при заданном  $F \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  с  $M(F) = \{a\}$ ,  $a \neq 0$ .

Для параметризации множества  $\mathcal{S}$  перейдем от  $a = \xi\varepsilon \in \mathbb{D}$  к переменным  $\xi \in I$  и  $\varepsilon \in \mathbb{P}^1$ ; здесь  $\mathbb{P}^1$  отождествляется с полуокружностью в духе предложения 2.11 из [30, с. 147]. Указанный переход позволяет рассматривать уравнение  $\phi'(0) = -2\varepsilon^{-2}$  в качестве определяющего как для  $\mathcal{E}$  ( $\xi \neq 0$ ), так и для  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} \times \{0\}$  ( $\xi = 0$ ), см. (17). Биекция  $\mathcal{P}$  преобразует данное уравнение к виду  $G'(0) = 1$ ; тем самым область определения параметризации упрощается до  $\mathbb{S} \times I \times \mathbb{P}^1$ . Продолжая  $\mathcal{F}$  на  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{A}}} \times \{0\}$  как проекцию на первый сомножитель, окончательно имеем  $\mathcal{S} = \mathcal{F} \circ \mathcal{P}(\mathbb{S} \times I \times \mathbb{P}^1)$ , а это и есть представление (16).  $\square$

## 2. Звездообразность множества $\tilde{\mathcal{A}}$

В качестве основы выступает следующая

**Лемма 3.** Если  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$  и  $\gamma_{\beta F}(0) = +1$  при  $\beta > \bar{b} = \bar{b}(F)$ , то  $\mathfrak{B}'(\beta) \neq \{\cap\}$ .

**Доказательство.** По лемме 2 в некоторой окрестности  $W = U \times V \subset \mathbb{D} \times \mathbb{R}_+$  точки бифуркации  $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}'(\beta)$  типа  $\cap$  пересечение  $\mathfrak{B}' \cap W$  есть аналитическая дуга вида  $(a(\nu), b(\nu))$ ,  $\nu \in \Omega$ .  $C^\omega$ -функции  $a : \Omega \rightarrow U$  и  $b : \Omega \rightarrow V < = \{\tau \in V : \tau < b\}$  определены в окрестности  $\Omega$  точки  $|\alpha|$ , причем  $a'(\nu) \neq 0$ ,  $|a(\nu)| = \nu$ ,  $\nu \in \Omega$ ,  $a(|\alpha|) = \alpha$  и  $b(|\alpha|) = \beta$ ; кроме того,  $b'(\nu) > 0$  при  $\nu < |\alpha|$ ,  $\nu \in \Omega$ , и  $b'(\nu) < 0$

при  $\nu > |\alpha|$ ,  $\nu \in \Omega$ . Последнее неравенство с помощью непосредственно проверяемого соотношения

$$4 - (1 - \nu^2)^4 |\{f_{b(\nu)}, a(\nu)\}|^2 = \frac{4(1 - \nu^2)^2}{|a'(\nu)|^2} \nu \frac{b'(\nu)}{b(\nu)} \left[ \frac{2}{1 - \nu^2} - \nu \frac{b'(\nu)}{b(\nu)} \right], \quad \nu \in \Omega,$$

и п. 2) леммы 1 влечет за собой  $\gamma_{b(\nu)}(a(\nu)) = -1$  при  $\nu > |\alpha|$ ,  $\nu \in \Omega$ . В силу (10) отсюда следует, что  $\gamma_{b(\nu)}(a(\nu)) = +1$  при  $\nu < |\alpha|$ ,  $\nu \in \Omega$ .

Теперь предположим, что  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cap\}$ . Согласно только что доказанному уменьшению модулей элементов  $a \in M(bF) \setminus \{0\}$  с убыванием  $b < \beta$  вблизи  $\beta$  может происходить только за счет движения точек  $(a, b) \in \mathfrak{B}'$  вдоль полудуг индекса  $\gamma = +1$  с вершинами в  $\mathfrak{B}'(\beta)$  (другие варианты исключаются леммой 2 с учетом конечности  $M(\beta F)$ ). Но тогда при любом  $b < \beta$ , достаточно близком к  $\beta$ ,  $\min\{|a| : a \in M(bF) \setminus \{0\}\}$  достигается в некоторой точке  $c$ , в которой  $\gamma_{bF}(c) = +1$ , а это противоречит заключению леммы 1 из [9].  $\square$

**Лемма 4.** Если  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$  и  $M(F) = \{0\}$ , то  $\gamma_F(0) = +1$ .

**Доказательство.** Вариант  $\gamma_F(0) = -1$  исключается с помощью п. 3) леммы 1: в этом случае, кроме седла в  $\zeta = 0$ , множество  $M(F)$  содержит по крайней мере два максимума, что противоречит условию.

Предположим теперь, что  $\gamma_F(0) = 0$  ( $\zeta = 0$  – полуседло). По лемме 2 существуют окрестности  $U \subset \mathbb{D}$  и  $V \subset \mathbb{R}_+$  точек  $\zeta = 0$  и  $b = 1$  соответственно, такие, что  $\mathfrak{B}' \cap (U \times V_<)$  есть  $C^\omega$ -полудуга над  $V_< = \{b \in V : b < 1\}$  с параметрическим представлением  $(a(b), b)$ ,  $b \in V_<$ , причем  $\lim_{b \rightarrow 1} a(b) = 0$  и  $a(b) \neq 0$ ,  $\gamma_{bF}(a(b)) = -1$

при  $b \in V_<$ . Так как  $\gamma_{bF}(0) = +1$ ,  $b \in V_<$ , то по лемме 1, п. 3), отсюда следует, что для любого  $b \in V_<$  существует точка  $c(b) \in M(bF) \setminus \{0\}$  с  $\gamma_{bF}(c(b)) = +1$ ,  $b \in V_<$ .

Возьмем последовательность  $(b_n)$  такую, что  $b_n \in V_<$  и  $b_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Переход к подпоследовательности устанавливает сходимость  $c(b_n) \rightarrow c_0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , где  $c_0 \in \mathbb{D}$  в силу предложения 1. Так как слоение  $\mathfrak{B}$  замкнуто в  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}_+$ , то  $c_0 \in M(F)$ , а поскольку, как показано выше, в цилиндре  $U \times V_<$  нет точек  $\mathfrak{B}'$  с  $\gamma = +1$ , то  $c_0 \notin U$ . Итак,  $c_0 \in M(F) \setminus \{0\}$ , вновь получили противоречие, значит,  $\gamma_F(0) = +1$ .  $\square$

Теперь докажем звездообразность  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$ . Если  $k(F) = 1$ , то  $k(bF) = 1$  для любого  $b \in (0, 1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что множество  $T = \{b \in (0, 1) : k(bF) > 1\}$  не пусто;  $\beta := \sup T$ . Рассмотрим последовательность  $(b_n)$  с условиями  $b_n \in T$ ,  $b_n < \beta$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $b_n \rightarrow \beta$  при  $n \rightarrow \infty$ . По  $(b_n)$  строится последовательность  $(a_n)$  такая, что  $a_n \in M(b_n F) \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; переходя к подпоследовательности, будем иметь  $a_n \rightarrow \alpha$ ,  $n \rightarrow \infty$ , причем  $\alpha \in M(\beta F)$  в силу предложения 1 и замкнутости  $\mathfrak{B}$ . Так как  $\gamma_F(0) = +1$  по лемме 4, то в силу леммы 2 точки  $(a_n, b_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , не могут сгущаться к точке  $(0, \beta)$ , поэтому  $\alpha \neq 0$ , и, значит,  $M(\beta F) \neq \{0\}$ . Отсюда, в частности, следует, что  $\beta \in T$  и  $\beta < 1$ . Поскольку  $k(bF) = 1$  при  $b \in (\beta, 1]$ , то  $b$  не может служить параметром ни для какой  $C^\omega$ -дуги, проходящей через  $\mathfrak{B}'(\beta)$ . Единственная возможность, оставляемая при этом леммой 2, –  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cap\}$  – исключается леммой 3. Таким образом,  $T = \emptyset$ , и теорема доказана.  $\square$

**Замечание 3.** Леммы 2–4 организуют локальный подход к обоснованию звездообразности  $\tilde{\mathcal{A}}$ . В работе [8] для такого обоснования использовалось разбиение  $\mathfrak{B}$  на вещественно аналитические компоненты. В [8] также построен пример функции  $F \in \mathcal{B} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$ , демонстрирующий отсутствие звездообразности множества  $\mathcal{A}$ .

### 3. Свойства функционала первого выхода из множества $\tilde{\mathcal{A}}$

Напомним, что положительность функционала  $\tilde{b}$  установлена в теореме 2. Обозначим  $\tilde{b} = \tilde{b}|_{\tilde{\mathcal{B}}}$ . Множество  $\tilde{\mathcal{A}}$  будет поглощающим в  $\tilde{\mathcal{B}}$ , то есть  $\bigcup_{b > 0} b\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{B}}$  (теорема 2) и звездообразным в  $\tilde{\mathcal{B}}$  (теорема 4). Поэтому [31, с. 147] на  $\tilde{\mathcal{A}}$  корректно определен функционал Минковского  $\rho(F) = 1/\tilde{b}(F)$ , причем  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} \subset \tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$ , где  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} := \{F \in \tilde{\mathcal{B}} : \rho(F) < 1\}$  и  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq} := \{F \in \tilde{\mathcal{B}} : \rho(F) \leq 1\}$ . Так как любая функция из  $\tilde{\mathcal{B}}$  поглощается предсферой  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(0)$ , следовательно, однозначно представляется в виде  $bF$  с  $b > 0$  и  $F \in \tilde{S}_1$ , и так как функционал  $\rho$  положительно однороден,  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} = \{bF : F \in \tilde{S}_1, b < \tilde{b}(F)\}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq} = \{bF : F \in \tilde{S}_1, b \leq \tilde{b}(F)\}$ .

**Теорема 5.** *Имеют место соотношения 1)  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} = \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$ , 2)  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq} = \text{Cl}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$ , 3)  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{b}(F)F : F \in \tilde{S}_1\}$ . Функционал  $\tilde{b}$ : 4) конечен и 5) непрерывен на  $\tilde{S}_1$ , причем 6)  $2 \leq \tilde{b}(F) \leq 2/|F'(0)|$ ,  $F \in \tilde{S}_1$ . Кроме того, 7) одновременное выполнение обоих неравенств из п. 6) эквивалентно условию  $2F \in S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$ ,  $F \in \tilde{S}_1$ .*

**Доказательство.** Левое неравенство 6) – следствие теоремы 2. Далее, по лемме 2 бифуркационным значением параметра  $b$  для элемента  $0 \in M(F)$  при  $F'(0) \neq 0$  будет  $b^* = 2/|F'(0)|$ , то есть  $k(bF) > 1$  при  $b > b^*$ . Отсюда следует правое неравенство 6), тривиальное в случае  $F'(0) = 0$ .

1) Если  $bF \in \tilde{\mathcal{A}}_{<}$ , то по теореме 1 неравенство  $K_{bF}(0) > 0$  (очевидное при  $F'(0) = 0$  и справедливое в силу второй оценки 6) при  $F'(0) \neq 0$ , см. (9)) обеспечивает принадлежность  $bF \in \text{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$ , усиливающуюся до  $bF \in \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$  благодаря стандартно проверяемому включению  $\tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Int}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \subset \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$ . Обратно, соотношение  $\tilde{\mathbb{W}}_{\varepsilon}(bF) \subset \tilde{\mathcal{A}}$  для  $bF \in \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$  в силу звездообразности  $\tilde{\mathcal{A}}$  влечет за собой неравенства  $b < b + \varepsilon \leq \tilde{b}(F)$ , откуда  $bF \in \tilde{\mathcal{A}}_{<}$ .

2) Для обоснования включения  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq} \subset \text{Cl}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$  достаточно заметить, что для любого  $bF \in \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$  и любого  $\varepsilon > 0$  функция  $\beta F$  в силу соотношения  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  содержится в  $\tilde{\mathbb{W}}_{\varepsilon}(bF) \cap \tilde{\mathcal{A}}$  при каждом  $\beta \in (b - \varepsilon, b)$ .

Чтобы доказать включение  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq} \supset \text{Cl}_{\tilde{\mathcal{B}}}\tilde{\mathcal{A}}$ , предположим существование последовательности  $b_n F_n \in \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$  с  $F_n \in \tilde{S}_1$ , для которой  $b_n F_n \xrightarrow{\mathcal{B}} bF$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $F \in \tilde{S}_1$ , но  $bF \notin \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$ . Тогда  $b > \tilde{b}(F)$ . Ясно, что  $b_n \rightarrow b$  и  $F_n \xrightarrow{\mathcal{B}} F$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначая для краткости  $M_b = M(bF) \setminus \{0\}$ , покажем, что найдется сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$  такое, что  $b' = b - \varepsilon > \tilde{b}(F)$  и множество  $M_{b'}$  содержит точку  $\alpha$  с  $\gamma_{b'F}(\alpha) \neq 0$ . Действительно, в случае, когда  $\gamma_{bF}(M_b) = 0$  и кратности элементов  $a \in M_b$  как нулей соответствующих функций  $g - g(a)$  равны 1, то наличие такой точки  $\alpha$  обеспечивается леммой 2: хотя бы один элемент из  $M_b$  представляет бифуркацию типа  $\cap$  – в противном случае ( $\mathfrak{B}'(b) = \{\cup\}$ ) при всех  $\beta < b$ , близких к  $b$ , функции  $\beta F$  принадлежали бы множеству  $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$ , откуда  $b \leq \tilde{b}(F)$  – противоречие с  $bF \notin \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$ . Если же найдется  $\bar{\alpha} \in M_b$  с  $\gamma_{bF}(\bar{\alpha}) \neq 0$  или с  $\gamma_{bF}(\bar{\alpha}) = 0$ , но с кратностью  $\geq 2$ , то вновь по лемме 2 из  $\alpha$  в слой  $\mathfrak{B}$  над  $\beta < b$  будет исходить полудуга, вдоль которой  $\gamma_{\beta F} \neq 0$  при  $\beta < b$ , близких к  $b$ , в частности, при  $\beta = b'$ .

Пусть теперь  $\bar{U}$  – замкнутая окрестность точки  $\alpha$  в  $\mathbb{D}$ , такая что  $M(b'F) \cap \bar{U} = \{\alpha\}$ . Последовательность отображений Гахова  $G_n(\zeta) := b'_n F_n(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2)$  с  $b'_n = b_n - \varepsilon$  равномерно сходится на  $\bar{U}$  к функции  $b'F(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2)$ , имеющей в  $\bar{U}$  единственный нуль  $\alpha$  с индексом  $\gamma_{b'F}(\alpha) \neq 0$ . По обобщенной теореме Гурвица [32] отсюда следует существование номера  $N$  такого, что любая функция  $G_n$  при  $n \geq N$  имеет в  $\bar{U}$  алгебраическое число нулей, равное  $\gamma_{b'F}(\alpha)$ ; тогда

с учетом того, что  $0 \notin \bar{U}$ , имеем  $k(b'_n F_n) > 1$ ,  $n \geq N$ , что противоречит соотношениям  $b'_n F_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ , выполняющимся в силу  $b'_n < b_n \leq \tilde{b}(F)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Полученное противоречие показывает, что  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$  – замкнутое множество, поэтому  $\text{Cl}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}_{\leq}$ .

Равенство 3) есть следствие 1) и 2).

4) При  $F'(0) \neq 0$  обоснование исчерпывается применением второго неравенства 6). При  $F'(0) = 0$  достаточно установить существование отличного от нуля элемента  $M(bF)$  при некотором  $b$ . Уравнение

$$bF(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2), \quad (20)$$

определяющее множество  $M(bF)$ , перепишем с  $b = 1$  в (эквивалентном при  $\zeta \neq 0$ ) виде

$$(1 - |\zeta|^2)g(\zeta)/|\zeta|^2 = 2, \quad (21)$$

где  $g(\zeta) = \zeta F(\zeta) = c\zeta^m + \dots$ ,  $c \neq 0$ ,  $m \geq 3$ . Униформизируя соответствие  $w = g(\zeta)$  вблизи  $\zeta = 0$ , придем к существованию окрестности  $V$  точки  $v = 0$  и функции  $\alpha(v) = \alpha_1 v + \dots$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ , голоморфно и однолистно отображающей  $V$  на окрестность  $\zeta = 0$  так, что  $g(\alpha(v)) = v^m$ ,  $v \in V$ . Тогда уравнение (21) перепишется в виде  $(1 - |\alpha(v)|^2)v^m/|\alpha(v)|^2 = 2$ . Так как выражение слева равно нулю при  $v = 0$  и так как  $|F|_{\mathcal{B}} = 1$ , откуда  $k(F) = 1$  по теореме 2, то  $M(F) = \{0\}$ , и левая часть меньше 2 на  $V \cap \mathbb{R}_+$ , иначе множество  $M(F)$  содержало бы ненулевой элемент. Но тогда для (любого)  $v_0 \in V \cap \mathbb{R}_+$  найдется  $b_0 (> 1)$  такое, что  $b_0(1 - |\alpha(v_0)|^2)v_0^m/|\alpha(v_0)|^2 = 2$ , таким образом, уравнение (20) при  $b = b_0$  имеет ненулевой корень  $\zeta_0 = \alpha(v_0)$ . Поэтому  $k(b_0 F) \geq 2$ , значит,  $\tilde{b}(F) \leq b_0 < \infty$ .

5) Пусть последовательность  $F_n \in \tilde{S}_1$  сходится к  $F \in \tilde{S}_1$  по норме  $\mathcal{B}$ . Тогда для (любого)  $b > \tilde{b}(F)$  имеет место сходимость  $bF_n \xrightarrow{\mathcal{B}} bF$ . Рассуждая так же, как при доказательстве включения  $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq} \supset \text{Cl}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$  в п. 2), устанавливаем существование элемента  $\alpha \in M(bF)$  такого, что  $k(bF_n) > |\gamma_{bF}(\alpha)| = 1$ , значит,  $\tilde{b}(F_n) \leq b$  для всех  $n$ , начиная с некоторого. Поэтому последовательность  $\tilde{b}(F_n)$  – ограниченная.

Пусть  $(F_{n_k})$  – произвольная подпоследовательность  $(F_n)$ , на которой функционал  $\tilde{b}$  сходится:  $\tilde{b}(F_{n_k}) \rightarrow b_1$  при  $k \rightarrow \infty$ . Ясно, что  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}} \ni \tilde{b}(F_{n_k})F_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{B}} b_1 F$ , откуда  $b_1 F \in \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$ , поэтому  $b_1 = \tilde{b}(F)$  в силу 3). Таким образом,  $\tilde{b}(F)$  – единственная предельная точка последовательности  $(\tilde{b}(F_n))$ :  $\tilde{b}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{b}(F_n)$ .

7) Осталось доказать представление  $S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}} = \{2F : F \in \tilde{S}_1, |F'(0)| = 1\}$ .

Очевидное свойство  $2F \in S_2(0)$  и неравенства 6), в силу  $|F'(0)| = 1$  приводящие к  $\tilde{b}(F) = 2$ , а значит, и к  $2F \in \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$  (см. п. 3)), демонстрируют, что правая часть доказываемого представления есть подмножество левой.

Если теперь  $bF \in S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$ ,  $F \in \tilde{S}_1$ , то  $b = 2$ . По теореме 2 имеем  $2F \in \mathcal{A}$ , поэтому  $2F \in \tilde{\mathcal{A}} \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$ . Благодаря  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$  имеем  $2F \in \mathcal{A} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ , значит, по теореме 1  $K_{2F}(0) = 0$ , то есть  $|F'(0)| = 1$  (см. (9)).  $\square$

Утверждение 7) теоремы 5 допускает следующую очевидную переформулировку.

**Следствие 3.** Пересечение  $S_2(0) \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$  параметризуется  $(F \mapsto 2F)$  в точности теми элементами  $F \in \tilde{S}_1$ , для которых гиперболическая производная  $h_F(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|F'(\zeta)|$  достигает своего максимума, равного 1, при  $\zeta = 0$ .

Из результатов [33] следует, что указанному пересечению принадлежат, например, все функции  $2F$ , где  $F \in H_0$  с  $F''(0) = 0$  и одним из условий  $\text{Re } F'(\zeta) > 1/2$  или  $(1 - |\zeta|^2)^2 |F'(\zeta)| \leq 2$  при  $\zeta \in \mathbb{D}$ . Если  $F(\mathbb{D})$  не совпадает с полосой, то в обоих

случаях будет  $k_F = 1$ , то есть функция  $h_F$  имеет единственную критическую точку ( $\zeta = 0$ ) в  $\mathbb{D}$ . Разумеется, последнее нетипично для функций из

$$\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{B} : k(F) = 1\}$$

и  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{B}}$  (напомним, что равенство  $k(F) = 1$  означает единственность критической точки функции  $h_f$  для  $f = P^{-1}(F)$ ). Источником примеров  $F \in \mathcal{A}$  с  $k_F > 1$  может служить подкласс

$$\mathcal{R} = \{F \in H_0 : \operatorname{Re} F'(\zeta) > 0, \zeta \in \mathbb{D}, \text{ и } F''(0) = 0\},$$

содержащийся в  $\overline{B_2(0)}$ . Если в определении  $\mathcal{R}$  исключить условие  $F''(0) = 0$ , то получившийся класс будет содержаться уже в предшаре  $\overline{B_4(0)}$ , оставаясь, тем не менее, в  $\mathcal{A}$ . Выход из  $\overline{B_2(0)}$  при отмене условия  $F''(0) = 0$  связан с тем, что согласно следствию 3 оно будет необходимым для одновременного выполнения равенств в оценках п. 6) теоремы 5. Однако оно не является достаточным: как показывает пример из следующего замечания, нарушение одновременного равенства в указанных оценках возможно и при  $F''(0) = 0$ . Сам пример строится на основе функции из класса  $\mathcal{R}$ , в определении которого отсутствует нормировка  $F'(0) = 1$ .

**Замечание 4.** Кроме исследованного выше случая  $2 = \tilde{b}(F) = \tilde{\beta}(F)$ , где  $\tilde{\beta}(F) = 2/|F'(0)|$ , имеется еще три варианта оценок п. 6) теоремы 5:

- 1)  $2 = \tilde{b}(F) < \tilde{\beta}(F)$ ;
- 2)  $2 < \tilde{b}(F) = \tilde{\beta}(F)$ ;
- 3)  $2 < \tilde{b}(F) < \tilde{\beta}(F)$ .

Первый вариант невозможен: если  $\tilde{b}(F) = 2$  при  $F \in \tilde{S}_1$ , то из п. 3) теоремы 5 следует, что  $2F \in S_2(0) \cap Fr_{\tilde{b}} \tilde{\mathcal{A}}$ , а из п. 7) –  $\tilde{b}(F) = \tilde{\beta}(F)$ . Вариант 2) реализуется, пример – функция  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$ , удовлетворяющая условиям  $F'(\zeta) = (1/2)(1 + \zeta^2)/(1 - \zeta^2)$ ,  $\|F\|_{\mathcal{B}} = 1$ ,  $\tilde{b}(F) = \tilde{\beta}(F) = 4$ . Выполнимость варианта 3) устанавливается ниже в замечании 5.

#### 4. Связь между топологическими операциями на $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$

Продолжим исследование, начатое в леммах 3 и 4. Справедлива

**Лемма 5.** Пусть  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$  и  $\beta > \bar{b} = \bar{b}(F)$ . Если  $\gamma_{\beta F}(0) \neq 0$ , то множество  $M(\beta F) \setminus \{0\}$  содержит не менее двух точек ненулевого индекса.

**Доказательство.** Требуется исключить две возможности: 1) в  $M(\beta F) \setminus \{0\}$  только один элемент имеет индекс  $\gamma_{\beta F} \neq 0$ ; 2)  $\gamma_{\beta F}(M(\beta F) \setminus \{0\}) = 0$ . Применение леммы 1 в случае  $\gamma_{\beta F}(0) = -1$  опровергает как 1), так и 2) (ср. с доказательством леммы 4), а при  $\gamma_{\beta F}(0) = +1$  – только 1). Остается исключить ситуацию, когда  $\gamma_{\beta F}(0) = +1$  и слоение  $\mathfrak{B}'(\beta)$  состоит только из точек бифуркации типа  $\cup$  или  $\cap$ . Случай  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cup\}$  невозможен в силу  $\beta > \bar{b}$ , случай  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cap\}$  – в силу леммы 3. Последняя налагает запрет и на случай  $\mathfrak{B}'(\beta) = \{\cup, \cap\}$ , так как динамика  $M(bF) \setminus \{0\}$  с убыванием  $b < \beta$  вблизи  $\beta$ , приводящая к противоречию в доказательстве леммы 3, не зависит от наличия бифуркаций типа  $\cup$  в  $\mathfrak{B}'(\beta)$ .  $\square$

Существенность условия  $\gamma_{\beta F}(0) \neq 0$  в лемме 5 демонстрирует следующий

**Пример 1.** Пусть  $\omega \in (0, 1)$ . Рассмотрим функцию

$$F = F_{\omega}(\zeta) = (1 - \omega^2) \frac{\zeta}{1 - \omega\zeta} \tag{22}$$

с  $\|F\|_{\mathcal{B}} = 1$ . Слоение  $\mathfrak{B}_{F_\omega}$  состоит из двух  $C^\omega$ -компонент:  $\mathfrak{b}_0 = \{0\} \times \mathbb{R}_+$  и  $\mathfrak{b}_1 = \{(x, b(x)) : x \in (-1, 1)\}$ , где

$$b(x) = \frac{2}{1-\omega^2} \frac{1-\omega x}{1-x^2}.$$

Кривая  $\mathfrak{b}_1$  пересекает луч  $\mathfrak{b}_0$  в точке  $(0, \beta)$ , где

$$\beta = \tilde{\beta}(F_\omega) = 2/(1-\omega^2). \quad (23)$$

При этом  $\gamma_{\beta F}(0) = 0$ ,  $M(\beta F) \setminus \{0\} = \{\omega\}$  и  $\gamma_{\beta F}(\omega) = +1$ .

**Следствие 4.** *Существует единичный вектор  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$  такой, что величина  $k(bF)$  не является монотонной на  $\mathbb{R}_+$  как функция от  $b$ .*

**Доказательство.** Требуемым вектором служит функция (22). Действительно, для  $F = F_\omega$  имеем  $k(bF) = 1$ , если  $b \in (0, \tilde{b}(F_\omega))$ , где

$$\tilde{b}(F_\omega) = \min_{x \in (-1, 1)} b(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - \omega^2}}{1 - \omega^2}, \quad (24)$$

$k(\tilde{b}(F_\omega)F) = k(\beta F) = 2$  и  $k(bF) = 3$ , когда  $b \in (\tilde{b}(F_\omega), \beta) \cup (\beta, +\infty)$ .  $\square$

**Замечание 5.** Из (23) и (24) видно, что для  $F = F_\omega(\zeta)$  справедливы неравенства  $2 < \tilde{b}(F) < \tilde{\beta}(F)$ . Таким образом, вариант 3) в замечании 4 содержателен.

**Теорема 6.** *Имеет место равенство*

$$\tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} = \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}. \quad (25)$$

**Доказательство.** Результат содержится в обосновании п. 1) теоремы 5; элементарный характер включения левой части (25) в правую там уже отмечен. Чтобы доказать противоположное включение, напомним, что соотношение  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} \subset \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$  опирается на импликацию  $bF \in \tilde{\mathcal{A}}_{<} \Rightarrow bF \in \text{Int}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ . Если вновь применить ее, но уже с учетом итогового равенства  $\tilde{\mathcal{A}}_{<} = \text{Int}_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\mathcal{A}}$ , то в силу  $bF \in \tilde{\mathcal{B}}$  как раз и получается включение правой части (25) в левую.  $\square$

Приведем теперь три признака, достаточных для принадлежности  $F$  множеству  $\text{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$ , в зависимости от ненулевых значений функционала  $\gamma_F$ .

**Предложение 3.** *Если  $F \in \mathcal{B}$  и множество  $M(F)$  содержит хотя бы две точки ненулевого индекса, то  $F \in \text{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$ .*

**Доказательство.** Предположим противное; тогда найдется последовательность  $(F_n)$  такая, что  $F_n \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $F_n \xrightarrow{\mathcal{B}} F$  при  $n \rightarrow \infty$ . По условию  $M(F)$  содержит две различные точки  $a_1$  и  $a_2$  с  $\gamma_F(a_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Действуя, как в п. 2) теоремы 5, возьмем замкнутые окрестности  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$  точек  $a_1$  и  $a_2$  в  $\mathbb{D}$ , такие, что  $M(F) \cap \bar{U}_i = \{a_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , и воспользуемся тем, что последовательность  $F_n(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$  равномерно сходится на  $\bar{U}_1$  и на  $\bar{U}_2$  к функции  $F(\zeta) - 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$ . По обобщенной теореме Гурвица, начиная с некоторого номера  $N$ , каждая функция последовательности  $(G_n)$  имеет в  $\bar{U}_1$  и в  $\bar{U}_2$  по одному нулю, откуда  $F_n \notin \mathcal{A}$ ,  $n \geq N$ , – противоречие.  $\square$

В условиях леммы 5 предложение 3 принимает такой вид:

**Следствие 5.** *Если  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$ ,  $\beta > \bar{b} = \bar{b}(F)$  и  $\gamma_{\beta F}(0) \neq 0$ , то  $F \in \text{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$ .*

Как показывает доказательство леммы 5, наличие в  $M(\beta F) \setminus \{0\}$  двух точек индекса  $\gamma_{\beta F} \neq 0$  в случае  $\gamma_{\beta F}(0) = -1$  устанавливается применением п. 3) леммы 1 независимо от значений  $\beta$ . Это дает упрощенный вариант следствия 5:

**Следствие 6.** Если  $F \in \tilde{\mathcal{B}}$  и  $\gamma_F(0) = -1$ , то  $F \in \text{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$ .

При переходе от  $\mathcal{F} = \text{Int}$  к  $\mathcal{F} = \text{Fr}$  связь между  $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$  и  $\tilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  усложняется. Сначала покажем, что  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} \neq \tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ ; справедливо

**Предложение 4.** Множество  $C := (\tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}) \setminus \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$  не пусто.

**Доказательство.** Выполнение  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} \subset \tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  уже отмечалось выше. Для проверки соотношения  $C \neq \emptyset$  нормируем функцию  $F_\omega$  из (22):

$$G_\omega = \frac{2}{1 - \omega^2} F_\omega. \quad (26)$$

Так как  $\beta = 2/(1 - \omega^2) > \tilde{b}(F_\omega)$  (см. замечание 5), то  $G_\omega \notin \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$  по теореме 5. Принадлежность  $G_\omega \in \tilde{\mathcal{B}}$  очевидна. Чтобы установить включение  $G_\omega \in \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ , достаточно исследовать множества  $M(H_\lambda)$  при  $H_\lambda = \lambda + G_\omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Действительно,  $\|H_\lambda - G_\omega\|_{\mathcal{B}} = |\lambda|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и несложный, но рутинный анализ показывает, что для сколь угодно малых  $\lambda$  будет  $k(H_\lambda) = 1$ , если  $\lambda > 0$ , и  $k(H_\lambda) = 3$ , если  $\lambda < 0$ .  $\square$

Теперь докажем основной результат этого раздела.

**Теорема 7.** Разбиение пространства  $\tilde{\mathcal{B}}$  в дизъюнктное объединение множеств  $\Gamma_k = \{F \in \tilde{\mathcal{B}} : \gamma_F(0) = k\}$ ,  $k = -1, 0, 1$ , согласовано с разбиением пересечения  $\tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  в дизъюнктное объединение множеств

$$\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} = \Gamma_1 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} \quad \text{и} \quad C = \Gamma_0 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}. \quad (27)$$

**Доказательство.** Начнем с первого представления (27).

Покажем, что 1)  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} \subset \Gamma_1 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  и 2)  $\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} \supset \Gamma_1 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ .

1) Предположим, что  $F \in \tilde{\mathcal{S}}_1$  и  $\gamma_{\beta F}(0) = 0$  или  $-1$ . Из леммы 2 следует, что  $k(\beta F) > 1$  при значениях  $b < \beta$ , близких к  $\beta$ . По определению  $\tilde{b}$  это означает, что  $\tilde{b}(F) < \beta$ , откуда по теореме 5, п. 3), получим  $\beta F \notin \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$ .

2) Пусть  $F \in \tilde{\mathcal{S}}_1$  и  $bF \in \Gamma_1 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ . По теореме 5, п. 3), достаточно установить равенство  $b = \tilde{b}(F)$ . Проверим, что предположения  $b < \tilde{b}(F)$  и  $b > \tilde{b}(F)$  противоречат соотношению  $bF \in \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ . Действительно, в первом случае таким противоречием будет  $bF \in \text{Int}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$  по теореме 5, п. 1), и теореме 6, во втором  $-bF \in \text{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$  согласно следствию 5 при  $\gamma_{bF}(0) = +1$ . Таким образом,  $bF \in \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$ .

Итак, первое соотношение (27) доказано. Вычитая его из множества  $\tilde{\mathcal{B}} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = (\text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}) \sqcup C$ , будем иметь  $C = (\Gamma_0 \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}) \cup (\Gamma_{-1} \cap \text{Fr}_{\mathcal{B}\mathcal{A}})$ . Но второе пересечение в этом представлении пусто благодаря включению  $\Gamma_{-1} \subset \text{Int}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$  (см. следствие 6), и в результате остается второе соотношение (27).  $\square$

Легко проверить, что  $C \ni G_\omega \rightarrow G_0 \in \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$  по норме  $\mathcal{B}$  при  $\omega \rightarrow 0$  (см. (26)). Поэтому  $\text{Cl}_{\tilde{\mathcal{B}}} C \cap \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}} \neq \emptyset$  и  $\text{dist}_{\mathcal{B}}(C, \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}) = 0$ . Имеет место

**Следствие 7.** Если  $F \in \tilde{\mathcal{S}}_1$  и точка  $bF \in \text{Fr}_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}}$  — предельная для множества  $C$ , то элемент  $(0, b) \in \mathfrak{B}_F$  является точкой бифуркации типа  $\Psi$  и  $\tilde{b}(F) = \tilde{b}(F)$ .

**Доказательство.** По условию найдется последовательность  $(F_n)$  функций из  $\mathcal{C}$  такая, что  $F_n \rightarrow bF$  по норме  $\mathcal{B}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $K_{F_n}(0) \rightarrow K_{bF}(0)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , что по теореме 7 и лемме 1, п. 2), приводит к  $K_{bF}(0) = 0$ , откуда  $\beta = \tilde{\beta}(F)$  (см. формулу (9)). Кроме того, равенство  $K_{bF}(0) = 0$  вместе с включением  $bF \in \Gamma_1$ , справедливым в силу теоремы 7, обеспечивает наличие в точке  $(0, b) \in \mathfrak{B}_F$  бифуркации типа  $\Psi$ . Наконец,  $b = \tilde{b}(F)$  согласно п. 3) теоремы 5.  $\square$

Автор выражает благодарность профессору И.Б. Бадриеву за ценные советы и полезные дискуссии при подготовке статьи к печати.

### Summary

*A.V. Kazantsev.* Gakhov Set in the Hornich Space under the Bloch Restriction on Pre-Schwarzians.

Gakhov set contains exactly those functions in the Hornich space over the unit disk which have the unique critical point of the conformal radius. The position of the intersection  $\mathcal{A}$  of the Gakhov set and the Bloch space  $\mathcal{B}$  is studied relative to the Banach structure of  $\mathcal{B}$ . A connection is revealed between the topological characteristics of the set  $\mathcal{A}$  and the values of the curvature and index of the critical points for the functions in  $\mathcal{A}$ . An effective description is given for the set of points on the boundary of  $\mathcal{A}$  with minimal pre-norm. By using the Minkowski functional, the starlikeness of the subset of the functions in  $\mathcal{A}$  with the zero critical point of the conformal radius is established.

**Keywords:** hyperbolic derivative, conformal (inner mapping) radius, bifurcations of critical points, Hornich space, Bloch space, pre-Schwarzian, Gakhov set, interior and boundary of a set.

### Литература

1. Полюа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
2. Haegi H.R. Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen // Compositio Math. – 1950. – V. 8, F. 2. – P. 81–111.
3. Kazantsev A.V. On a problem of Polya and Szegő // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 37–46.
4. Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
5. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киселев А.В. О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 10. – С. 8–18.
6. Yamashita S. The Schwarzian derivative and local maxima of the Bloch derivative // Math. Japonica. – 1992. – V. 37, No 6. – P. 1117–1128.
7. Yamashita S. The Poincaré density and the Liouville differential equation // Math. Japonica. – 1995. – V. 42, No 3. – P. 489–508.
8. Казанцев А.В. Гиперболические производные с предшварцианами из пространства Блоха // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2002. – Т. 14. – С. 135–144.
9. Казанцев А.В. Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180–194.
10. Garnett J., Nicolau A. Interpolating Blaschke products generate  $H^\infty$  // Pacific J. Math. – 1996. – V. 173, No 2. – P. 501–510.



11. *Avkhadiiev F.G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image // Israel J. Math. – 2005. – V. 145, No 1. – P. 349–374.
12. *Ruscheweyh St., Wirths K.-J.* On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.
13. *Гахов Ф.Д.* Об обратных краевых задачах // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649–652.
14. *Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – С. 319–333.
15. *Kazantsev A.V.* Parametric families of inner mapping radii // 2nd European Congr. Math., Budapest, July 22–26, 1996, Abstracts. – Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1996. – P. 30.
16. *Авхадиев Ф.Г.* Функционал Минковского по областям значений логарифма производной и условия однолиственности // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1992. – Вып. 27. – С. 3–21.
17. *Grigoryan S.A., Gumerov R.N., Kazantsev A.V.* Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 6. – P. 39–46.
18. *Казанцев А.В.* Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 6. – С. 69–73.
19. *Казанцев А.В.* Производные Блоха с блоховскими предшварцианами // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2001. – Т. 8. – С. 117–118.
20. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2012. – 64 с.
21. *Anderson J.M., Clunie J., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angew. Math. – 1974. – Bd. 270. – S. 12–37.
22. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
23. *Hornich H.* Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen // Monatsh. Math. – 1969. – Bd. 73. – S. 36–45.
24. *Lamprecht M.* Starlike functions in the Hornich space // Comput. Meth. Funct. Theor. – 2007. – V. 7, No 2. – P. 573–582.
25. *Gehring F.W., Pommerenke Ch.* On the Nehari univalence criterion and quasicircles // Comment. Math. Helv. – 1984. – V. 59. – P. 226–242.
26. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.
27. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55, No 6. – P. 545–551.
28. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.
29. *Киселев А.В., Насыров С.Р.* О структуре множества корней уравнения Ф.Д. Гахова для односвязной и многосвязной областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 24. – С. 105–115.
30. *Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. – М.: Высш. шк., 1979. – 336 с.

31. *Rid M., Саймон P.* Методы современной математической физики. Т. 1. – М.: Мир, 1977. – 359 с.
32. *Švecova H.* Zobecnění vět o kořenech analytických funkcí // Čas. Pro Pěst. Mat. – 1960. – Sv. 85, Č. 4. – С. 418–438.
33. *Казанцев А.В.* Об одной задаче, связанной с экстремумом внутреннего радиуса // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1992. – Вып. 27. – С. 47–62.

Поступила в редакцию  
06.06.12

---

**Казанцев Андрей Витальевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [kazandrey0363@rambler.ru](mailto:kazandrey0363@rambler.ru)