Известия вузов. Математика
2014, №5, с. 28–37

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

И.Л. ОЙНАС, Т.А. СИВАЧЕВА, З.Б. ЦАЛЮК

СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ НЕСУММИРУЕМЫМ ЯДРОМ

Аннотация. Для дискретных разностных уравнений восстановления с несуммируемым ядром найдена асимптотическая структура резольвенты для различных случаев нулей символа.

Ключевые слова: резольвента, ядро, пространство l_1, последовательность.

УДК: 517.926

Рассмотрим уравнение

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 1$. Для последовательностей $a = \{a_n\}$ определим производящую функцию $\widehat{a}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и свертку $a * b = \Big\{ \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \Big\}$. Через $\delta = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ обозначим единичную последовательность, т. е. $\delta * a = a$. Решение уравнения $(\delta - a) * x = f$ можно представить в виде $x = (\delta + r) * f$, где r — резольвента ядра a, т. е. последовательность, удовлетворяющая уравнению $r = (\delta + r) * a$. Введем также функцию натурального аргумента n вида $\psi^{(\beta)}(\lambda) = \{\psi(n, \beta)\lambda^n\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, где $\psi(n, \beta) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (\beta + i)}{n!}$. Последовательность $\psi^{(\beta)}(\lambda)$ монотонно убывает при $\beta < 0$ и $|\lambda| \leq 1$.
Кроме того, через l_1 обозначается пространство последовательностей a таких, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, а через $P_r(n)$ — многочлен степени не выше r. Примем $\prod\limits_{i=1}^{0} d_i = 1$. Заметим, что любой многочлен $P_k(n)$ можно представить в виде

$$P_k(n) = \sum_{r=0}^{k} c_r \psi(n, r). \tag{2}$$

Для последовательностей $a \in l_1$ структура резольвенты $r^{(a)}$ ядра a, а значит, и асимптотика решения (1), изучены достаточно хорошо (см., например, [1], [2]).

В случае $a \notin l_1$ асимптотическая структура резольвенты была найдена для ядер вида

$$a_n = \sum_{j=1}^{p} P_{n_j}(n) \mu_j^{-n} + a_n^{(0)},$$

Поступила 27.11.2012

где $|\mu_j| \le 1$, $a^{(0)} \in l_1$ (по теореме 2 из [3]). При этом использовалась идея работ [1], [4]. С помощью замены $x = (\delta - b) * y$ уравнение (1) сводится к уравнению с ядром $c \in l_1$

$$\delta - c = (\delta - a) * (\delta - b) \tag{3}$$

или $c = a + b - a * b$. Тогда $r^{(a)} = -b + (\delta - b) * r^{(c)}$ и, значит, структуру $r^{(a)}$ легко определить по хорошо изученной $r^{(c)}$.

Заметим, что такое b всегда существует, например, при $b = -r^{(a)}$, $c = 0 \in l_1$. Но для определения вида $r^{(a)}$ нужны определенные свойства ядра b, обеспечивающие, кроме того, условие $c \in l_1$. Поэтому находить его надо не для любого a. Так как $a = c - r^{(b)} + c * r^{(b)}$, то, зная вид $r^{(b)}$ и то, что при $|\mu| < 1$ и $h \in l_1$ свертка $\psi^{(m)}(\mu^{-1}) * h = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k \psi^{(k)}(\mu^{-1}) + g$, где $g \in l_1$ (лемма 2), при $c \in l_1$ ядро a имеет вид $a = a^{(0)} + a^{(1)}$, где

$$a_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{s} \{P_{n_j}(n)\mu_j^{-n}\} + \sum_{j=1}^{h} \left\{P_{m_j}(n)e^{-i\nu_j n}\right\} + \sum_{j=1}^{h} \left\{P_{p_j}(n)e^{-i\nu_j n}\right\} * u^{(j)},$$

$a^{(0)}$, $u^{(j)} \in l_1$, $\mu_j \ne e^{i\nu_j}$.

Учитывая равенство (2), ядро a можно представить также в виде

$$a = \sum_{j=1}^{s} \sum_{r=0}^{n_j} c_{jr} \psi^{(r)}(\mu_j^{-1}) + \sum_{j=1}^{h} \sum_{r=o}^{m_j} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) + \sum_{j=1}^{h} \sum_{r=0}^{p_j} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) * u^{(j)} + a^{(0)}, \tag{4}$$

$a^{(0)}, u^{(j)} \in l_1$, $|\mu_j| \le 1$, $\mu_j \ne e^{i\nu_j}$.

Справедливо и обратное: любое ядро вида (4) при помощи (3) может быть преобразовано в ядро $c \in l_1$.

Для доказательства этого потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Имеем*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n, \beta) = 0$, $\beta < 0$;
2) $\psi^{(\beta)}(\lambda) \in l_1$, $\beta < -1$, $|\lambda| \le 1$.

Доказательство. 1) В силу монотонности и ограниченности функции $\psi(n,\beta) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (\beta+i)}{n!}$ предел существует. Обозначим $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} (\beta+i)}{n!}$. Докажем, что $c = 0$. Предположим противное. Так как справедливы равенства

$$\psi(n,\beta) = \psi\left(\frac{n}{2}, \beta\right) \cdot \frac{\prod\limits_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} (\beta+i)}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)},$$

то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\prod_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} (\beta+i)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\psi(n,\beta)}{\psi(\frac{n}{2},\beta)} = \frac{c}{c} = 1$.

С другой стороны, при достаточно больших n

$$\frac{\prod\limits_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} (\beta+i)}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} = \frac{n+\beta}{n} \cdot \frac{n+\beta-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\left[\frac{n}{2}\right]+\beta+1}{\left[\frac{n}{2}\right]+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{-\beta}{n}\right)\left(1 - \frac{-\beta}{n-1}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{-\beta}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\right) \le \left(1 - \frac{-\beta}{n}\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \le \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\prod\limits_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}(\beta+i)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} \le e^{\frac{\beta}{2}} < 1.$

Полученное противоречие означает, что $c = 0$.

2) Покажем, что $\psi^{(\beta)}(\lambda) \in l_1$ при $\beta < -1$, $|\lambda| \le 1$. Для этого оценим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n,\beta)\lambda^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)\right|}{n!}.$$

Существует такое $l \in \mathbb{N}$, что $l + \beta \le 0$, а $l + \beta + 1 > 0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)\right|}{n!} = \sum_{n=0}^{l} (-1)^n \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)}{n!} + \sum_{n=l+1}^{\infty} (-1)^l \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)}{n!} = c(l) + \sum_{n=l+1}^{\infty} (-1)^l \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)}{n!}.$$

Учитывая, что $\psi(n,\beta+1) - \psi(n-1,\beta+1) = \psi(n,\beta)$, найдем

$$c(l) + \sum_{n=l+1}^{\infty} (-1)^l \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)}{n!} = c(l) + \sum_{n=l+1}^{\infty} (-1)^l \psi(n,\beta) =$$

$$= c(l) + (-1)^l \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\psi(n,\beta+1) - \psi(n-1,\beta+1)\right) = c(l) + (-1)^l \left(\lim_{n\to\infty} \psi(n,\beta+1) - \psi(l,\beta+1)\right).$$

По доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n,\beta+1) = 0$, а значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi(n,\beta)\lambda^n| \le c(l) + (-1)^{l+1}\psi(l,\beta+1) = \mathrm{const}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Для произвольного $h \in l_1$ и $\mu \in \mathbb{C}$ такого, что $|\mu| < 1$, справедливо представление*

$$\psi^{(m)}(\mu^{-1}) * h = \sum_{k=0}^{m} c_k \psi^{(k)}(\mu^{-1}) + h^*, \quad \text{где} \quad h^* \in l_1.$$

Доказательство. Рассмотрим свертку

$$\psi^{(m)}(\mu^{-1}) * h = \left\{ \mu^{-n} \sum_{k=0}^{n} \psi(k,m)\mu^{n-k} h_{n-k} \right\}.$$

Представим $\mu^{n-k}h_{n-k} = \sum\limits_{l=n-k}^{\infty} h_l\mu^l - \sum\limits_{l=n-k+1}^{\infty} h_l\mu^l$, тогда

$$\mu^{-n}\sum_{k=0}^{n} \psi(k,m)\mu^{n-k}h_{n-k} = \mu^{-n}\sum_{k=0}^{n}\psi(k,m)\left(\sum_{l=n-k}^{\infty} h_l\mu^l - \sum_{l=n-k+1}^{\infty} h_l\mu^l\right).$$

Используя преобразование Абеля ([5], с. 810)

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_{n+1} - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}(u_{k+1} - u_k), \tag{5}$$

где $u_k = \psi(k,m)$, $v_k = \sum\limits_{l=n-k+1}^{\infty} h_l\mu^l$, найдем

$$\mu^{-n}\sum_{k=0}^{n}\psi(k,m)\mu^{n-k}h_{n-k} =$$
$$= \mu^{-n}\left(\psi(n,m)\sum_{l=0}^{\infty}h_l\mu^l - \psi(0,m)\sum_{l=n+1}^{\infty}h_l\mu^l - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=n-k}^{\infty}h_l\mu^l\left(\psi(k+1,m)-\psi(k,m)\right)\right).$$

Обозначим $h_k^1 = \mu^{-k}\sum\limits_{l=k+1}^{\infty}h_l\mu^l$ $(k \ge 0)$, $h^1 = \{h_k^1\}$, $\sum\limits_{l=0}^{\infty}h_l\mu^l = c_m$, тогда

$$\mu^{-n}\sum_{k=0}^{n}\psi(k,m)\mu^{n-k}h_{n-k} = c_m\psi(n,m)\mu^{-n} - h_n^1 - \mu^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}h_{n-k-1}\psi(k+1,m-1)\mu^{n-k-1} =$$
$$= c_m\psi(n,m)\mu^{-n} - h_n^1 - \sum_{k=1}^{n}h_{n-k}^1\psi(k,m-1)\mu^{-k} = c_m\psi(n,m)\mu^{-n} - \sum_{k=0}^{n}h_{n-k}^1\psi(k,m-1)\mu^{-k},$$

т. е.

$$\psi^{(m)}(\mu^{-1}) * h = c_m\psi^{(m)}(\mu^{-1}) - \psi^{(m-1)}(\mu^{-1}) * h^1. \tag{6}$$

Покажем, что $h^1 \in l_1$ при $|\mu| < 1$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}|h_k^1| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu^{-k}\sum_{l=k+1}^{\infty}h_l\mu^l\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}|h_l|\,|\mu|^{l-k}.$$

Далее, меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l-1}|h_l|\,|\mu|^{l-k} = \sum_{l=1}^{\infty}|h_l|\,|\mu|^l\sum_{k=0}^{l-1}|\mu|^{-k} = \frac{1}{|\mu|^{-1}-1}\sum_{l=1}^{\infty}|h_l|\bigl(1-|\mu|^l\bigr).$$

Так как $1-|\mu|^l < 1$ и $h \in l_1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}|h_k^1| < \frac{1}{|\mu|^{-1}-1}\sum_{l=1}^{\infty}|h_l| < \mathrm{const}\,.$$

Применяя к (6) аналогичный подход и далее, находим

$$\psi^{(m)}(\mu^{-1}) * h = \sum_{k=0}^{m}c_k\psi^{(k)}(\mu^{-1}) + h^*, \quad \text{где} \quad h^* \in l_1. \qquad \square$$

Чисто технический характер носит

Лемма 3. *Если* $\{n^pb_n\}, \{n^pd_n\} \in l_1$ $(p \in \mathbb{N}\cup\{0\})$, *то и* $\{n^p(b_n * d_n)\} \in l_1$.

Доказательство. При $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ имеем

$$\left|n^p\sum_{k=0}^{n}b_kd_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k}{k}+1\right)^p|d_{n-k}|k^p|b_k| \le 2^p\sum_{k=0}^{n}\left((n-k)^p+1\right)|d_{n-k}|k^p|b_k|.$$

Поэтому для $f = b * d$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^p|f_n| \le \sum_{n=0}^{\infty}2^p\sum_{k=0}^{n}\left((n-k)^p+1\right)|d_{n-k}|k^p|b_k| \le c\sum_{k=0}^{\infty}k^p|b^k|\cdot\sum_{l=0}^{\infty}l^p|d_l|. \qquad \square$$

Обозначим

$$r_j = \max\{m_j+1, p_j+1\}, \quad N = \sum_{j=1}^{s} n_j + \sum_{j=1}^{h} r_j + s, \quad H(z) = \prod_{j=1}^{s}(z-\mu_j)^{n_j+1} \cdot \prod_{j=1}^{h}(z-e^{i\nu_j})^{r_j}.$$

Теорема 1. *Существует такое ядро $b \in l_1$, что*
1) *определяемое равенством* (3) *ядро $c \in l_1$;*
2) *функция $(1-\widehat{a}(z))\big(1-\widehat{b}(z)\big)$ при $|z| \le 1$ имеет те же нули, что и функция $(1-\widehat{a}(z))\,\widehat{H}(z)$.*

Доказательство. При $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $|\lambda| \le 1$ рассмотрим последовательность

$$y^{(\alpha)} = \left(\delta - c \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right) * \psi^{(\alpha)}(\lambda^{-1}).$$

При $\alpha = -1, -2, -3, \ldots$ по лемме 1 $\psi^{(\alpha)}(\lambda^{-1}) \in l_1$, а значит, и $y^{(\alpha)} \in l_1$, как свертка двух последовательностей из пространства l_1 (лемма 3).

Для $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$y_n^{(\alpha)} = \psi(n,\alpha)\lambda^{-n} - c\sum_{k=0}^{n}\psi(k,\alpha)\lambda^{-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

$$= \psi(n,\alpha)\lambda^{-n} - \frac{c\lambda}{2-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n}\psi(k,\alpha) \cdot \left(\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{k+1} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{k}\right).$$

Пользуясь преобразованием Абеля ([5], с. 810), получим

$$y^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{2c}{2-\lambda}\right)\psi^{(\alpha)}(\lambda^{-1}) + \frac{c\lambda}{2-\lambda}\psi^{(\alpha-1)}(\lambda^{-1}) * \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}.$$

Применяя формулу (5) достаточное число раз, найдем

$$y^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{2c}{2-\lambda}\right)\psi^{(\alpha)}(\lambda^{-1}) + c_1\psi^{(\alpha-1)}(\lambda^{-1}) + \cdots + c_\alpha\psi^{(0)}(\lambda^{-1}) + \widetilde{c}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}, \quad \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Обозначим

$$\left(\delta - c \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*r} = \underbrace{\left(\delta - c \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right) * \ldots * \left(\delta - c \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)}_{r}.$$

Учитывая равенство из ([6], с. 85)

$$\psi^{(p-1)}(\mu) * \psi^{(q-1)}(\mu) = \psi^{(p+q-1)}(\mu)$$

для произвольных $p, q \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{C}$ получим

$$\left(\delta - c \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*(r-1)} * \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \sum_{i=0}^{r-1} c_i\psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

В итоге имеем

$$\left(\delta - c \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*r} * \psi^{(\alpha)}(\lambda^{-1}) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\alpha} c_i \psi^{(\alpha-i)}(\lambda^{-1}) + \sum\limits_{i=0}^{r-1} \widetilde{c}_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right), & \alpha \in \mathbb{N}\cup 0, \quad c \neq 1-\frac{\lambda}{2}; \\ \sum\limits_{i=r}^{\alpha} \overline{c}_i \psi^{(\alpha-i)}(\lambda^{-1}) + \sum\limits_{i=0}^{r-1} \widetilde{c}_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right), & \alpha \in \mathbb{N}\cup 0, \quad c = 1-\frac{\lambda}{2}. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть теперь

$$\delta - b = \left(\delta - \left(1-\frac{\mu_1}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*(n_1+1)} * \ldots * \left(\delta - \left(1-\frac{\mu_s}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*(n_s+1)} * \\ * \left(\delta - \left(1-\frac{e^{i\nu_1}}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*r_1} * \ldots * \left(\delta - \left(1-\frac{e^{i\nu_h}}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{*r_h}. \tag{8}$$

Обозначим

$$a^{(1,1)} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=0}^{n_j} c_{jr}\psi^{(r)}(\mu_j^{-1}), \quad a^{(1,2)} = \sum_{j=1}^{h}\sum_{r=o}^{m_j} c_{jr}\psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}), \quad a^{(1,3)} = \sum_{j=1}^{h}\sum_{r=0}^{p_j} c_{jr}\psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) * u^{(j)}.$$

Тогда $a^{(1)} = a^{(1,1)} + a^{(1,2)} + a^{(1,3)}$, и в силу формулы (8)

$$(\delta - b) * a^{(1)} = (\delta - b) * \left(a^{(1,1)} + a^{(1,2)} + a^{(1,3)}\right) = \\ = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) * u^{(j)}, \tag{9}$$

а значит,

$$\delta - c = (\delta - b) * (\delta - a) = (\delta - b) * (\delta - a_0) - \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) * u^{(j)}, \tag{10}$$

где $\psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) \in l_1$, $a^{(0)}, u^{(j)} \in l_1$, следовательно, и $c \in l_1$. Первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе утверждение. Легко вычислить

$$1 - \widehat{b}(z) = \frac{(z-\mu_1)^{n_1+1}}{(z-2)^{n_1+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{(z-\mu_s)^{n_s+1}}{(z-2)^{n_s+1}} \frac{(z-e^{i\nu_1})^{r_1}}{(z-2)^{r_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{(z-e^{i\nu_h})^{r_h}}{(z-2)^{r_h}} = \frac{H(z)}{(z-2)^N}. \tag{11}$$

Таким образом, согласно (11)

$$1 - \widehat{c}(z) = (1 - \widehat{a}(z))\left(1 - \widehat{b}(z)\right) = (1 - \widehat{a}(z))\, H(z) \frac{1}{(z-2)^N}. \qquad \square$$

Замечание 1. Теорема 1 справедлива и для ядра $a = a^{(0)} + a^{(1)}$, где

$$a^{(1)} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=0}^{n_j} c_{jr}\psi^{(r)}(\mu_j^{-1}) + \sum_{j=1}^{h}\left[\sum_{r=0}^{m_j} c_{jr}\psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) + \sum_{r=0}^{l_j} \overline{c}_{jr}\psi^{(r+\alpha_j-1)}(e^{-i\nu_j})\right] + \\ + \sum_{j=1}^{h}\left[\sum_{r=0}^{p_j} c_{jr}\psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) + \sum_{r=0}^{k_j} \overline{c}_{jr}\psi^{(r+\alpha_j-1)}(e^{-i\nu_j})\right] * u^{(j)},$$

$a^{(0)}, u^{(j)} \in l_1$, $0 < \alpha_j < 1$, $|\mu_j| \leq 1$, $\mu_j \neq e^{i\nu_j}$.

Теорема 2. *Пусть функция $(1 - \widehat{a}(z))\, H(z)$ не обращается в нуль при $|z| \leq 1$. Тогда*

1) *резольвента $r^{(a)} \in l_1$, т. е. ядро a устойчиво;*
2) *если, кроме того, $\left\{n^p a_n^{(0)}\right\}, \left\{n^p u_n^{(j)}\right\} \in l_1$ при некотором $p \in \mathbb{N}$, то и $\left\{n^p r_n^{(a)}\right\} \in l_1$.*

Доказательство первого утверждения следует из того, что согласно теореме 1 найдется такое ядро $b \in l_1$, что $c = a + b - a * b \in l_1$ и $1 - \widehat{c}(z) \neq 0$ при $|z| \leq 1$. В свою очередь это означает [1], что $r^{(c)} \in l_1$. Но в силу (3)

$$r^{(a)} = r^{(c)} - b - b * r^{(c)}, \tag{12}$$

а значит, и $r^{(a)} \in l_1$.

Согласно (10) имеем

$$c = b + a_0 - b * a_0 + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right) * u^{(j)}. \tag{13}$$

Поэтому, если $\left\{n^p a_n^{(0)}\right\}, \left\{n^p u_n^{(j)}\right\} \in l_1$, то в силу леммы 3 и $\{n^p c_n\} \in l_1$.

Так как $(1-\widehat{c}(z)) \neq 0$ в круге $|z| \leq 1$, то на основании теоремы из [1] получим $\left\{n^p r_n^{(c)}\right\} \in l_1$, что в силу (12) и того, что $\{n^p b_n\} \in l_1$, означает $\left\{n^p r_n^{(a)}\right\} \in l_1$. □

Теорема 3. *Пусть* $(1 - \widehat{a}(z)) \neq 0$ *при* $|z| \leq 1$, $z \notin \left\{\mu_j, e^{i\nu_j}\right\}$ *и* $e^{i\nu_j}, \ldots, e^{i\nu_t}$, $t \leq h$ *— нули целого порядка* $s_j \leq r_j$ *функции* $M(z) = (1 - \widehat{a}(z))\, H(z)$. *Пусть, кроме того,* $\left\{n^k a_n^{(0)}\right\}$, $\left\{n^k u_n^{(j)}\right\} \in l_1$, *где* $k = \max\limits_{1 \leq j \leq t} s_j$. *Тогда* $r^{(a)} \in l_1$.

Доказательство. По теореме 1 имеем $c \in l_1$, а по условию данной теоремы $\left\{n^k a_n^{(0)}\right\}$, $\left\{n^k u_n^{(j)}\right\} \in l_1$, где $k = \max\limits_{1 \leq j \leq t} s_j$, отсюда в силу леммы 3 и равенства (13) получаем $\left\{n^k c_n\right\} \in l_1$.

По теореме 3 из [1] следует

$$r^{(c)} = \sum_{j=1}^{t} \sum_{r=0}^{s_j - 1} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) * r^{(0)} + r^{(0)},$$

$r^{(0)} \in l_1$. Но $r^{(a)} = (\delta - b) * r^{(c)} - b^{(1)}$, где $b^{(1)} \in l_1$.

Рассмотрим

$$(\delta - b) * r^{(c)} = (\delta - b) * \left(\sum_{j=1}^{t} \sum_{r=0}^{s_j - 1} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) * r^{(0)} + r^{(0)} \right) =$$
$$= (\delta - b) * r^{(0)} + (\delta - b) * \sum_{j=1}^{t} \sum_{r=0}^{s_j - 1} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) * r^{(0)},$$

где $(\delta - b) * r^{(0)} \in l_1$ в силу леммы 3.

Осталось изучить второе слагаемое. Применим формулу (7) к свертке

$$\left(\delta - \left(1 - \frac{\mu_j}{2}\right) \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \right)^{*r_j} * \sum_{r=0}^{s_j - 1} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) =$$
$$= \sum_{r=0}^{s_j - 1} \sum_{i=r_j}^{r} c_i \psi^{(r-i)}(e^{-i\nu_j}) + \sum_{i=0}^{r_j - 1} \widetilde{c}_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^{r_j - 1} \widetilde{c}_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом,

$$(\delta - b) * \sum_{j=1}^{t} \sum_{r=0}^{s_j-1} c_{jr} \psi^{(r)}(e^{-i\nu_j}) = \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{c}_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right) \in l_1.$$

Следовательно, $r^{(a)} \in l_1$. □

Теорема 4. *Пусть* $(1 - \widehat{a}(z))\,\widehat{H}(z)$ *при* $|z| \le 1$ *имеет конечное число нулей* λ_j *целых кратностей* m_j $(j = 1, \ldots, h)$. *Пусть* $\lambda_j \notin \{i\nu_j\}$ *и* $\{n^m a_n^{(0)}\}, \{n^m u_n^{(0)}\} \in l_1$ *при* $m = \max\limits_{|\lambda_j|=1} m_j$. *Тогда*

$$r^{(a)} = r^0 + \sum_{j=1}^{h} \left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\} * r^1, \quad \text{где } r^0, r^1 \in l_1.$$

(*Или* $r^{(a)} = r^1 + \sum\limits_{|\lambda_j|<1} \left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\} + \sum\limits_{|\lambda_j|=1} \left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\} * r^2$, *где* $r^1, r^2 \in l_1$).

Доказательство. Как следует из формулы (9)

$$(\delta - b) * (\delta - a) = (\delta - b) * (\delta - a^{(0)}) + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)} \left(\frac{1}{2}\right) * u^{(j)} + v, \quad (14)$$

где v — последовательности $\psi^{(t)}\left(e^{-i\nu_j}\right)$ $(t < -1)$, обладающие тем свойством, что $\{n^m \psi(n, t-m)\} \in l_1$, либо их свертки с $\psi^{(l)}\left(\frac{1}{2}\right)$. С помощью формулы (5) легко видеть, что

$$\left(\delta - \left(1 - \frac{e^{i\nu_j}}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right) * \psi^{(t)}\left(e^{-i\nu_j}\right) = \left\{c\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} * \psi^{(t-1)}\left(e^{-i\nu_j}\right)$$

(см. также (7)).

Продолжая по индукции, получим

$$\phi^{(j)} = \left(\delta - \left(1 - \frac{e^{i\nu_j}}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right) * \psi^{(t)}\left(e^{-i\nu_j}\right) = \sum_{l=0}^{m-1} c_j \psi^{(l)}\left(\frac{1}{2}\right) * \psi^{(t-m)}\left(e^{-i\nu_j}\right),$$

а значит, $\left\{n^m \phi_n^{(j)}\right\} \in l_1$ (лемма 3). Применяя теперь к (14) свертку

$$\delta - b^{(3)} = \left(\delta - \left(1 - \frac{e^{i\nu_1}}{2}\right)\psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{*m} * \cdots * \left(\delta - \left(1 - \frac{e^{i\nu_h}}{2}\right)\psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{*m}$$

и принимая во внимание (7), имеем

$$\delta - c^{(1)} = \left(\delta - b^{(3)}\right) * (\delta - b) * (\delta - a) =$$

$$= \left(\delta - b^{(3)}\right) * (\delta - b) * \left(\delta - a^{(0)}\right) + \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=0}^{N-1} c_i \psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) * u^{(j)} + \overline{v},$$

где $\{n^m \overline{v}_n\} \in l_1$. Учитывая условия $\left\{n^m a_n^{(0)}\right\}, \left\{n^m u_n^{(j)}\right\} \in l_1$ и тот факт, что $\left\{n^m b_n^{(3)}\right\} \in l_1$, $\{n^m b_n\} \in l_1$, заключаем, что $\left\{n^m c_n^{(1)}\right\} \in l_1$.

Заметим, так как

$$1 - \widehat{b}^{(3)}(z) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{h} \left(z - e^{i\nu_j}\right)^m}{(z+1)^{mh}},$$

то $1-\widehat{c}^{(1)}(z)=0$ будет иметь как корни λ_j кратности m_j, так и корни $e^{i\nu_j}$ кратности m.

Таким образом, из теоремы 3 работы [1] следует

$$r^{(c^{(1)})}=r^2+\left[\sum_{j=1}^{h}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}\left(\lambda_j^{-1}\right)+\sum_{j=1}^{h}\sum_{r=0}^{m-1}c_{jr}\psi^{(r)}\left(e^{-i\nu_j}\right)\right]*r^2,\quad \text{где}\quad r^2\in l_1.$$

Далее, используя равенства

$$\delta+r^{(a)}=(\delta-b)*\left(\delta-b^{(3)}\right)*\left(\delta+r^{(c^{(1)})}\right),$$

$$\left(\delta-b^{(3)}\right)*\sum_{j=1}^{h}\sum_{r=0}^{m-1}c_{jr}\psi^{(r)}\left(e^{-i\nu_j}\right)=\sum_i c_i\psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$(\delta-b)*\left(\delta-b^{(3)}\right)=\delta-\sum_i c_i\psi^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

и формулу (7), найдем

$$r^{(a)}=r^3+\sum_{j=1}^{h}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}\left(\lambda_j^{-1}\right)*r^4=r^3+\sum_{j=1}^{h}\left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\}*r^4,\quad \text{где}\quad r^3,r^4\in l_1.$$

Второе представление следует из равенств и леммы 2:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{h}\left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\}*r^4&=\sum_{j=1}^{h}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}(\lambda_j^{-1})*r^4=\\&=\sum_{|\lambda_j|<1}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}(\lambda_j^{-1})*r^4+\sum_{|\lambda_j|=1}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}(\lambda_j^{-1})*r^4=\\&=\sum_{|\lambda_j|<1}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}(\lambda_j^{-1})+r^5+\sum_{|\lambda_j|=1}\sum_{r=0}^{m_j-1}c_{jr}\psi^{(r)}(\lambda_j^{-1})*r^4=\\&=\sum_{|\lambda_j|<1}\left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\}+r^5+\sum_{|\lambda_j|=1}\left\{P_{m_j-1}(n)\lambda_j^{-n}\right\}*r^4,\end{aligned}$$

где $r^4,r^5\in l_1$. □

Литература

[1] Ойнас И.Л., Цалюк З.Б. *Асимптотический характер резольвенты дискретного уравнения в свертках*, ВИНИТИ, № 3127-В98 (Кубанский гос. ун-т, 1998).

[2] Ойнас И.Л. *Асимптотическое поведение резольвенты дискретного уравнения типа свертки в неустойчивом случае*, ВИНИТИ, № 2636-В99 (Кубанский гос. ун-т, 1999).

[3] Ойнас И.Л. *Асимптотическая структура резольвенты для некоторого класса ядер разностного уравнения*, ВИНИТИ, № 517-В2004 (Кубанский гос. ун-т, 2004).

[4] Цалюк З.Б., Цалюк М.В. *Асимптотика резольвенты уравнения Вольтерра с разностным несуммируемым ядром*, Изв. вузов. Матем., № 4, 72–82 (2010).

[5] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2 (Наука, М., 1962).

[6] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 1 (Мир, М., 1967).

И.Л. Ойнас

доцент, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
Кубанский государственный университет,
ул. Ставропольская, д. 149, г. Краснодар, 350040, Россия,

e-mail: dif@math.kubsu.ru

Т.А. Сивачева

преподаватель, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
Кубанский государственный университет,
ул. Ставропольская, д. 149, г. Краснодар, 350040, Россия,

e-mail: dif@math.kubsu.ru

З.Б. Цалюк

профессор, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений,
Кубанский государственный университет,
ул. Ставропольская, д. 149, г. Краснодар, 350040, Россия,

e-mail: dif@math.kubsu.ru

I.L. Oinas, T.A. Sivacheva, and Z.B. Tsalyuk

The structure of the resolvent for the discrete renewal equation with nonsummable difference kernel

Abstract. We find the asymptotic structure of the resolvent for the various cases of zeros symbol for the discrete difference equations of recovery with the nonsummable kernel.

Keywords: resolvent, kernel, l_1-space, sequence.

I.L. Oinas

Associate Professor, Chair of Differential and Integral Equations,
Kuban State University,
149 Stavropol'skaya str., Krasnodar, 350040 Russia,

e-mail: dif@math.kubsu.ru

T.A. Sivacheva

Lecturer, Chair of Differential and Integral Equations,
Kuban State University,
149 Stavropol'skaya str., Krasnodar, 350040 Russia,

e-mail: dif@math.kubsu.ru

Z.B. Tsalyuk

Professor, Head of the Chair of Differential and Integral Equations,
Kuban State University,
149 Stavropol'skaya str., Krasnodar, 350040 Russia,

e-mail: dif@math.kubsu.ru