Министерство образования и науки Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

М А Т Е М А Т И К А

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов заочной и дистанционной форм обучения по социально-гуманитарным направлениям подготовки бакалавров

г. Набережные Челны
2019

Математика. *Учебно-методический комплекс для студентов заочной и дистанционной форм обучения по социально-гуманитарным направлениям подготовки бакалавров* / Составитель: ***Углов А.Н.*** - Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2019, 120 с.

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах. Математика является не только мощным средством решения прикладных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности, но и универсальным языком науки, а также неотъемлемой частью мировоззрения.

Цель преподавания дисциплины «Математика» - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам успешно решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи практики, а также понимать специальную литературу, написанную современным научным языком и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными **задачами дисциплины** являются**:**

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода решения прикладных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных социально-экономических задач с использованием аппарата данного курса;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Данная дисциплина является основой при изучении многих общенаучных и специальных дисциплин. В свою очередь, для изучения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики.

В результате изучения данной дисциплины студент должен:

- знать теоретические основы аналитической геометрии и линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчислений, теории вероятностей и математической статистики;

- **уметь** использовать полученные знания для решения практических задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. В лекциях излагается содержание тем программы с учётом требований ФГОС ВО к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы для данных специальностей. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью контрольной работы и итогового экзамена по окончании обучения.

2. Содержание и структура дисциплины.

<u>Семестр 1.</u>

Раздел. <u>Аналитическая геометрия и линейная алгебра.</u>

Тема. Определители.

Определители 2-ого, 3-его, порядков, порядка n. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителей.

Тема. Матрицы.

Определение матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами. Базисный минор. Ранг матрицы. Обратная матрица, условие существования, способы её нахождения.

Тема. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения. Матричная запись СЛАУ. Решение СЛАУ по формулам Крамера, методом Гаусса.

Тема. Векторы.

Геометрические векторы, графические действия над ними. Проекция вектора. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор. Координаты вектора и точки. Действия над геометрическими векторами (сложение и вычитание; умножение на число; скалярное произведение) в координатной форме. Условия перпендикулярности, параллельности и компланарности векторов. Решение простейших задач векторной алгебры: нахождение координат вектора, его длины и направляющих косинусов; нахождение координат точек и расстояния между ними; деление отрезка в данном отношении.

Тема. Линии на плоскости.

Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Кривые 2-ого порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их определения, канонические уравнения и форма.

Раздел. <u>Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.</u>

Тема. Множества. Числовые множества. Функции.

Множества и операции над ними. Множества чисел. Действительные числа, модуль числа и его свойства. Числовые промежутки. Окрестность точки. Понятие функции. Способы задания, график, элементы поведения функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Обратная и сложная функции. Элементарные функции, их классификация.

Тема. Числовые последовательности и ряды. Предел последовательности. Предел функции и непрерывность.

Понятие числовой последовательности и числового ряда. Предел последовательности. Бесконечно малые и большие последовательности. Монотонная последовательность, признак её сходимости. Число e. Предел функции при $x \to x_0$ и $x \to \infty$. Односторонние пределы. Бесконечно большие и малые функции, их свойства. Неопределённые выражения. Основные свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции, их классификация. Асимптоты графика функции.

Тема. Производная и дифференциал функции.

Приращение функции. Определение производной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Правила вычисления производных (постоянной; суммы, разности, произведения и частного функций; сложной функции). Дифференциал функции и его применение в приближённых вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема. Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.

Касательная и нормаль к плоской кривой, их уравнения. Вычисление предельных значений функции по правилу Лопиталя. Нахождение интервалов монотонности и выпуклости функции; точек локального экстремума и перегиба графика функции. Схема полного исследования функции и построения её графика. Нахождение локальных экстремумов, наибольших и наименьших значений функции.

Семестр 2.

Раздел. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

Тема. Основные понятия о функции нескольких переменных.

Понятия n-мерной точки, n-мерного арифметического пространства R^n. Окрестность точки. Классификация точек. Множества точек в R^n: открытые и замкнутые, связные, выпуклые множества. Понятие функции n переменных. Область определения и график функции. Линии уровня. Полное и частные приращения функции. Понятия предела и непрерывности функции нескольких переменных (ФНП). Свойства ФНП, непрерывных в ограниченной и замкнутой области.

Тема. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, их приложения.

Частные производные первого и высших порядков, их вычисление. Понятие дифференцируемости ФНП в точке, условия дифференцируемости. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования. Полные дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их нахождение. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях.

Тема. Экстремумы функций нескольких переменных.

Стационарные и критические точки. Локальные экстремумы ФНП, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы ФНП в ограниченной замкнутой области, их нахождение.

Раздел. <u>Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения.</u>

Тема. Неопределённый интеграл.

Первообразная функции, её свойства. Неопределённый интеграл, условия его существования и основные свойства. Таблица основных неопределённых интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование заменой переменной и по частям.

Тема. Определённый интеграл. Несобственные интегралы.

Определённый интеграл, условия его существования, геометрический смысл и свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле. Геометрические приложения определённого интеграла. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования и от неограниченных функций.

Тема. Дифференциальные уравнения.

Понятие дифференциального уравнения (ДУ). ДУ 1-ого порядка: основные понятия и определения (формы записи, решение, начальное условие, общее и частное решения). Задача Коши. Основные типы ДУ 1-ого порядка: с разделёнными и разделяющимися переменными, однородное, линейное, Бернулли. Понятие дифференциального уравнения порядка n.

Раздел. <u>Теория вероятностей и математическая статистика.</u>

Тема. Случайные события и их вероятности.

Случайные события, действия над ними. Виды событий. Вероятность события, её определения. Правила и формулы комбинаторики, вычисление вероятностей с их помощью. Формулы сложения и умножения вероятностей, полной вероятности и Байеса, Бернулли, вычисление вероятностей с их помощью.

Тема. Случайные величины.

Понятие случайной величины. Дискретная и непрерывная случайные величины, способы их задания и числовые характеристики. Основные законы распределения случайных величин, их числовые характеристики.

Тема. Элементы математической статистики. Предварительная обработка статистических данных.

Понятия генеральной совокупности и выборки. Основные способы записи выборки: вариационный ряд; дискретный и интервальный статистические ряды. Числовые характеристики выборки и её графическое изображение (полигон, гистограмма).

3. Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Дорофеева А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности: Учеб. пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2004.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студентов вузов. –М.: Высш.шк., 2005.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие для студентов вузов. –М.: Высш.шк., 2003.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Часть 1, 2. Учеб. пособие для втузов. –М.: Высшая школа, 1997.

Дополнительная литература:

6. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов. Учеб. пособие для вузов. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
7. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
8. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов. -М.: Высшая школа, 2002.
9. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник. – М.: Дело, 2003.
10. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник /Под ред. В.И.Ермакова. М.:ИНФРА-М, 1999.
11. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов в примерах и задачах. Учебник. -М.: ЭКЗАМЕН, 2006.
12. Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов/ Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др. Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

13. Сборник задач по математике для вузов. Под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н. -Наб. Челны: Изд-во ИНЭКА, 2006,2007.

4. Методические указания по изучению дисциплины.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить одну контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом от руки в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ курса в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

<u>Семестр 1.</u>

1 – 11. Найти матрицу C, если $C = A^{\mathrm{T}}B + 2A$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **6.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **10.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

11 – 20. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.
Требуется: **а)** найти решение системы методом Крамера**;**
б) найти решение системы методом Гаусса.

11. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=7 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x-y-2z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+3z=0 \end{cases}$

21 – 30. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Требуется:

а) найти векторы $\overline{m}=\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{n}=2\overline{b}-\overline{c}$ **;**

б) вычислить скалярное произведение $\overline{m}\cdot\overline{n}$;

в) найти проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$;

21. $\overline{a}=(4,5,2)$, $\overline{b}=(3,0,1)$, $\overline{c}=(-1,4,2)$.

22. $\overline{a}=(3,-5,2)$, $\overline{b}=(4,5,1)$, $\overline{c}=(-3,0,-4)$.

23. $\overline{a}=(-2,3,5)$, $\overline{b}=(1,-3,4)$, $\overline{c}=(7,8,-1)$.

24. $\overline{a}=(1,3,5)$, $\overline{b}=(1,2,1)$, $\overline{c}=(5,7,3)$.

25. $\overline{a}=(2,4,-6)$, $\overline{b}=(1,3,5)$, $\overline{c}=(0,3,7)$.

26. $\overline{a}=(4,3,-1)$, $\overline{b}=(5,0,4)$, $\overline{c}=(2,1,2)$.

27. $\overline{a}=(3,4,-3)$, $\overline{b}=(-2,2,0)$, $\overline{c}=(2,1,-4)$.

28. $\overline{a}=(-2,1,7)$, $\overline{b}=(3,3,-8)$, $\overline{c}=(5,4,-1)$.

29. $\overline{a}=(1,0,5)$, $\overline{b}=(3,2,7)$, $\overline{c}=(5,0,9)$.

30. $\overline{a}=(2,1,0)$, $\overline{b}=(4,3,-3)$, $\overline{c}=(6,5,-7)$.

31-40. Даны вершины треугольника ABC**.** Требуется сделать чертёж и найти**:**

а) длину стороны AB;

б) уравнение стороны AB**;**

в) длину h высоты CD**;**

г) площадь S треугольника ABC**.**

31. $A(4,1), B(0,-2), C(-5,10)$.

32. $A(-7,3), B(5,-2), C(8,2)$

33. $A(5,-1), B(1,-4), C(-4,8)$

34. $A(6,0), B(2,-3), C(-3,9)$

35. $A(-9,2), B(3,-3), C(6,1)$

36. $A(7,-4), B(3,-7), C(-2,5)$

37. $A(-14,6), B(-2,1), C(1,5)$

38. $A(-8,4), B(4,-1), C(7,3)$

39. $A(3,-3), B(-1,-6), C(-6,6)$

40. $A(-6,5), B(6,0), C(9,4)$

41 – 50. Для указанной функции $y = f(x)$ найти естественную область определения функции:

41. $y=\sqrt{3-x}+\arcsin(x+2)$

42. $y=\lg(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

43. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

44. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

45. $y=\arccos(x-3)+\lg(4-x)$

46. $y=\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}}$

47. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$

48. $y=\lg(x^2+2x-8)$

49. $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$

50. $y=\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

51 – 60. Для указанной функции $y = f(x)$ установить чётность (нечётность):

51. $y=\sqrt{1-x^2}$

52. $y=\dfrac{x}{1-x}$

53. $y=2x\cdot\sin^2 x-3x^3$

54. $y=\dfrac{arctgx}{x^2+1}$

55. $y=x^2\sin(2x)$

56. $y=x^2+x-1$

57. $y=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

58. $y=\sin^2 x+\cos^3 x$

59. $y=|x+1|-|x-1|$

60. $y=\dfrac{\sin 3x}{2-\cos 4x}$

61-70. Для указанной функции $y = f(x)$ найти точки разрыва функции и исследовать их характер. Построить график функции.

61. $y = \begin{cases} 1/x & x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ **62.** $y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \le x \le 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$ **63.** $y = \begin{cases} 1/x & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$

64. $y = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 1/x & x \ge 1 \end{cases}$ **65.** $y = \begin{cases} 1/x & x < 0 \\ -\sqrt{x} & 0 \le x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ **66.** $y = \begin{cases} 1/x & x < 1 \\ \ln x & x \ge 1 \end{cases}$

67. $y = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 2x - 1 & x \ge 0 \end{cases}$ **68.** $y = \begin{cases} x + 2 & x \le -2 \\ 2 - x & -2 < x \le 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$

69. $y = \begin{cases} 1/x & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \ge 1 \end{cases}$ **70.** $y = \begin{cases} 2x & x \le 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

71-80. Найти производную $y' = f'(x)$ **:**

71. а) $y = \dfrac{x^3}{2 - x}$ **б)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 5}$ **в)** $y = \dfrac{\sin(x^2)}{\cos^2 x}$ **г)** $y = \dfrac{arctg^3 4x}{\ln(6x - 1)}$

72. а) $y = \dfrac{3x + \sqrt{x}}{x^2 + 2}$ **б)** $y = (2x - 1) \cdot e^{-3x}$ **в)** $y = \cos(x \ln x)$ **г)** $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\ln(5x - 1)}$

73. а) $y = \dfrac{x}{x^3 + 2}$ **б)** $y = \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{3 + 4x^2}}$ **в)** $y = e^{2x - x^2}$ **г)** $y = \dfrac{ctg 3x}{\cos^4 7x}$

74. а) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ **б)** $y = x^2 \cdot \sqrt{16 - 4x}$ **в)** $y = e^{4x} \cdot \ln(tgx)$ **г)** $y = \dfrac{\cos^3 4x}{\sin 4x + 1}$

75. а) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ **б)** $y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt[4]{3x + 5}}$ **в)** $y = \sin\left(x^3 + 2^x\right)$ **г)** $y = \dfrac{\ln(x^2)}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

76. а) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ **б)** $y = \dfrac{\sqrt{4x - 2}}{2x + 3}$ **в)** $y = \dfrac{2 + \cos 4x}{\sin 3x}$ **г)** $y = \dfrac{\sin^2 4x}{\sqrt{tg 3x}}$

77. а) $y=\dfrac{1}{x\ln x}$ **б)** $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x+2}}$ **в)** $y=x^3 arctg(4x)$ **г)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\ln(5x+1)}$

78. а) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ **б)** $y=x^2\sqrt{1+2x^3}$ **в)** $y=\dfrac{\sin(3x+1)}{x^2}$ **г)** $y=\ln\left(\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

79. а) $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$ **б)** $y=\cos\left(\dfrac{2x+1}{1+x^2}\right)$ **в)** $y=e^{-4x}\ln(2x)$ **г)** $y=\dfrac{\sin^3 4x}{\sqrt[4]{5x-1}}$

80. а) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2+1}$ **б)** $y=\sin\sqrt{x^2+3x}$ **в)** $y=\ln\left(\dfrac{2-e^x}{e^{2x}}\right)$ **г)** $y=\dfrac{\arcsin 4x}{\sqrt[3]{arctg 2x}}$

81-90. Вычислить пределы:

81. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2+4}$ **б)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{3x}$

82. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^4+3x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6x+4}-4}$ **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$

83. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x^3+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 3x}{tg 2x}$

84. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x+5}{3x^2+7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x^2}$

85. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x+1}{3x^4+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{2x}$

86. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+6}{3x^3+7x-1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2+x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$

87. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6x^2+3x}{20x^2+70}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-\cos 4x}$

88. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{3x^2+7x+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-6x}{\sqrt{2x-8}-2}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin 4x}$

89. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2+5x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

90. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-5x^2}{2x^2+3x+3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{5x}-5}$ **в)** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$

91-100. Для указанной функции $y=f(x)$ требуется:

а) найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$;

б) составить уравнение касательной к графику функции в точке x_0;

в) провести полное исследование непериодической функции и построить её график.

91. $y=x^3-3x^2+4$, $a=0,\ b=4,\ x_0=1$.

92. $y=3x^5-5x^4+4$, $a=0,\ b=2,\ x_0=1$

93. $y=(x-1)^2(x+2)$, $a=-2,\ b=0,\ x_0=1$

94. $y=2x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$, $a=0,\ b=3,\ x_0=1$

95. $y=\dfrac{4x^3-x^4}{5}$, $a=2,\ b=4,\ x_0=1$

96. $y=x^3+6x^2+9x+4$, $a=-2,\ b=0,\ x_0=0$

97. $y=\dfrac{6x^2-x^4}{9}$, $a=1,\ b=3,\ x_0=0$

98. $y=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$, $a=-4,\ b=1,\ x_0=0$

99. $y=x^4-2x^2+3$, $a=-2,\ b=0,\ x_0=1$

100. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+4$, $a=0,\ b=3,\ x_0=1$

Семестр 2.

1 – 10. Для указанной функции $z = f(x, y)$ требуется:

а) найти дифференциал dz и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; **б)** найти локальные экстремумы.

1. **а)** $z = x^2 e^y$, **б)** $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$

2. **а)** $z = \sqrt{x^2 + \ln y}$ **б)** $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

3. **а)** $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ **б)** $z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$

4. **а)** $z = \ln(2x + 3y)$ **б)** $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$

5. **а)** $z = \sqrt{\ln x + y^2}$ **б)** $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$

6. **а)** $z = \sqrt{x^3 + 2y}$ **б)** $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

7. **а)** $z = \sin\left(x^2 + y^3\right)$ **б)** $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

8. **а)** $z = \sqrt{5e^y + x^2}$ **б)** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

9. **а)** $z = x\sqrt{1 + y^3}$ **б)** $z = x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 10y$

10. **а)** $z = \cos\left(x^3 + y^2\right)$ **б)** $z = x^2 - 2xy + 4y^2 + 4$

11-20. Найти неопределённые интегралы: **а)** непосредственным интегрированием; **б)** заменой переменной интегрирования; **в)** интегрированием по частям.

11. **а)** $\displaystyle\int\left(\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\right)dx$ **б)** $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$ **в)** $\displaystyle\int(4-3x)e^{-3x}dx$

12. **а)** $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x} - 3x^2 + \frac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x}\right)dx$ **б)** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **в)** $\displaystyle\int(2x+3)\cos 4x\,dx$

13. **а)** $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2\,dx}{x^2}$ **б)** $\displaystyle\int\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x+1}}$ **в)** $\displaystyle\int(4-16x)\sin 4x\,dx$

14. а) $\int\left(\frac{2\sqrt{x}+x^3\sin x-3x^2}{x^3}\right)dx$ **б)** $\int\frac{x^2dx}{x+1}$ **в)** $\int(1-6x)e^{2x}dx$

15. а) $\int\left(\frac{2-3cos^3x}{\cos^2 x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{x^2+4x-12}$ **в)** $\int(2-x)\cos 3xdx$

16. а) $\int\left(\frac{4}{x}+5x^4-\frac{3}{x^2}+\sqrt[4]{x^5}\right)dx$ **б)** $\int x\sqrt{4+x^2}\,dx$ **в)** $\int(3x+4)e^{3x}dx$

17. а) $\int\frac{4x+3}{\sqrt{x^3}}dx$ **б)** $\int\frac{e^x dx}{(2-e^x)^3}$ **в)** $\int(3-2x)\sin 5xdx$

18. а) $\int\left(6x^2+\frac{5}{x^3}-\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}\right)dx$ **б)** $\int\frac{1-3x}{3+2x}dx$ **в)** $\int(5x+6)\cos 2xdx$

19. а) $\int(x+4)\cdot(x-2\sqrt{x}+1)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ **в)** $\int(x+5)\sin 3xdx$

20. а) $\int\left(8x^3-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{\sin x}{2-\cos x}dx$ **в)** $\int(5x-2)\,e^{3x}dx$

21-30. Требуется вычислить:
а) определённый интеграл;
б) несобственный интеграл I-ого рода (или установить его расходимость).

21. а) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ **б)** $\int_0^{\infty}\frac{arctgx\,dx}{1+x^2}$ **22. а)** $\int_4^9\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$ **б)** $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

23. а) $\int_4^9\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ **б)** $\int_1^{+\infty}\frac{1+\ln x}{x}dx$ **24. а)** $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$ **б)** $\int_0^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$

25. а) $\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ **б)** $\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ **26. а)** $\int_0^1(e^x-1)^4e^xdx$ **б)** $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

27. а) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$ **б)** $\int_0^{\infty}\frac{arctg^2x\,dx}{1+x^2}$ **28. а)** $\int_1^2\frac{e^{1/x}dx}{x^2}$ **б)** $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

29 а) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$ **б)** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ **30. а)** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ **б)** $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$

31-40. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками указанных функций:

31. $y = 5 - x^2$, $y = x - 1$ **32.** $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$

33. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$ **34.** $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$

35. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ **36.** $y = x^2 - 5$, $y = 1 - x$

37. $y = 2x - x^2$, $y = 4x - 2x^2$ **38.** $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$

39. $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$ **40.** $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$

41-50. Требуется найти общее решение простейшего ДУ 2-ого порядка $y'' = f(x)$.

41. $y'' = 2x + \sin 3x$ **42.** $y'' = \frac{4}{x^3}$

43. $y'' = e^{2x}$ **44.** $y'' = x^3 - \sin 2x$

45. $y'' = 4 + \cos 2x$ **46.** $y'' = x^2 - \cos 3x$

47. $y'' = \frac{2}{\sqrt{x}}$ **48.** $y'' = e^{-3x}$

49. $y'' = 3 - \sin 4x$ **50.** $y'' = \frac{3}{x^4}$

51-60. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***классическое определение*** вероятности:

51. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что число выпавших очков на одном из кубиков в два раза больше, чем на другом.
б) В магазине выставлены для продажи 20 изделий, среди которых 6 изделий некачественные. Найти вероятность того, что взятые случайным образом 2 изделия будут некачественными.

52.а) В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров равна десяти.

б) В партии из 20 изделий 4 изделия имеют скрытый дефект. Найти вероятность того, что из взятых наугад 5 изделий дефектными являются 2 изделия.

53. а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 35. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона содержит цифру 4.

б) На ТЭЦ 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажется две женщины.

54.а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма числа очков на выпавших гранях равна восьми.

б) Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованные, наудачу извлекают 3 изделия для контроля. Найти вероятность того, что в выборке содержится одно бракованное изделие.

55.а) В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что произведение номеров вынутых шаров больше пятнадцати.

б) В магазине имеются 20 холодильников, причем 15 из них – импортные. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня холодильников окажется три импортных холодильника.

56.а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 35. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифру 3.

б) Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся два юноши и две девушки.

57. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма числа очков на выпавших гранях больше четырёх, но меньше семи.

б) В магазине выставлены для продажи 18 изделий, среди которых 8 изделий некачественные. Найти вероятность того, что взятые случайным образом 3 изделия будут некачественными.

58. а) В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что абсолютная величина разности номеров вынутых шаров равна двум.

б) В партии из 30 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Найти вероятность того, что из взятых наугад 5 изделий дефектными являются 3 изделия.

59. а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 35. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона является числом, кратным 5 (делится на 5 без остатка).

б) На ТЭЦ 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажется хотя бы один мужчина.

60. а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма числа очков на выпавших гранях меньше их произведения.

б) Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 билета в театр, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется хотя бы одна девушка.

61-70. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***формулы сложения и умножения вероятностей.***

61. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом справочнике 0.8, во втором – 0.7, в третьем – 0.85. Найти вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.

62. В первом ящике 5 белых и 7 чёрных шаров. Во втором 3 белых и 12 чёрных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара разного цвета.

63. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго – 0.8 и для третьего – 0.85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа два станка из трёх потребуют внимания рабочего.

64. Три стрелка стреляют по разу в одну мишень независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0.7, вторым – 0.8, третьим – 0.9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена два раза.

65. Экзаменационный билет по теории вероятностей содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0.9; на третий – 0.8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на все вопросы.

66. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом справочнике 0.8, во втором – 0.7, в третьем – 0.85. Найти вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике.

67. В первом ящике 6 белых и 4 чёрных шара, во втором -7 белых и 3 чёрных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары одного цвета.

68. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго – 0.8 и для третьего – 0.85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа все три станка потребуют внимания рабочего.

69. Три стрелка стреляют по разу в одну мишень независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0.7, вторым – 0.8, третьим – 0.9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз.

70. Экзаменационный билет по теории вероятностей содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0.9; на третий – 0.8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трёх.

71-80. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***формулу Бернулли;***

71. Экзамен состоит из 6 вопросов. На каждый вопрос дано четыре возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Найти вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить не менее чем на 5 вопросов.

72. Покупатель приобрел шесть изделий, изготовленных на данном предприятии, 80% изделий которого составляет продукция высшего сорта. Найти вероятность того, что не менее пяти из них являются изделиями высшего сорта.

73. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8 машин из 10 имеющихся. Вероятность невыхода каждой машины на линию равна 0.1. Найти вероятность того, что автобаза будет работать нормально в ближайший день.

74. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Из урны вынимают подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется три белых.

75. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0.25. Спортсмен сделал 5 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок попал в «яблочко» не менее четырёх раз.

76. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковые.

77. Экзамен состоит из 5 вопросов. На каждый вопрос дано три возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Найти вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить на все вопросы.

78. Покупатель приобрел пять изделий, изготовленных на данном предприятии, 80% изделий которого составляет продукция высшего сорта. Найти вероятность того, что четыре из них являются изделиями высшего сорта.

79. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 9 машин из 10 имеющихся. Вероятность невыхода каждой машины на линию равна 0.2. Найти вероятность того, что автобаза будет работать нормально в ближайший день.

80. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна $1/7$. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из шести.

81-90. Составить закон распределения дискретной случайной величины X; построить многоугольник полученного распределения; вычислить её математическое ожидание MX и дисперсию DX.

81. В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Дискретная случайная величина X – число нестандартных деталей среди двух отобранных.

82. Стрелок производит по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0.9. Дискретная случайная величина X – число попаданий в мишень.

83. В экзаменационном билете две задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0.9, второй – 0.6. Дискретная случайная величина X – число правильно решённых задач в билете.

84. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Дискретная случайная величина X – число нестандартных деталей среди отобранных.

85. Стрелок производит по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0.7. Дискретная случайная величина X – число промахов.

86. Из пяти купленных роз 2 красные. Для составления букета наудачу берут 3 розы. Дискретная случайная величина X – число красных роз среди отобранных.

87. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Дискретная случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных.

88. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0.1. Дискретная случайная величина X – число отказавших элементов в одном опыте.

89. В урне 6 белых и 4 чёрных шаров. Из неё извлекли два шара. Дискретная случайная величина X – число белых шаров среди отобранных.
90. В урне 6 белых и 4 чёрных шаров. Из неё извлекли два шара. Дискретная случайная величина X – число чёрных шаров среди отобранных.

91-100. Требуется найти функцию плотности вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X; вычислить её математическое ожидание MX, дисперсию DX и вероятность $P(X \in (\alpha, \beta))$.

91. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/25 & 0 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}, \quad \alpha = 1, \beta = 4.$$

92. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{3}{4}.$$

93. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{9} & -1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \quad \alpha = 0, \beta = 1.$$

94. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ (x-1)/5 & 1 < x \le 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}, \quad \alpha = 2, \beta = 5.$$

95. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x/4 & 0 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}, \quad \alpha = 2, \beta = 3.$$

96. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/4 & 0 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \quad \alpha = 1, \beta = 2.$$

97. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{8x^2-x^4}{16} & 0<x\le 2, \\ 1 & x>2 \end{cases} \quad \alpha=1, \beta=2.$$

98. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le -2 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & -2<x\le 2, \\ 1 & x>2 \end{cases} \quad \alpha=-1, \beta=1.$$

99. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 3 \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} & 3<x\le 5, \\ 1 & x>5 \end{cases} \quad \alpha=3, \beta=4.$$

100. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 2 \\ x^2-4x+4 & 2<x\le 3, \\ 1 & x>3 \end{cases} \quad \alpha=2, \beta=\frac{5}{2}.$$

101-110. Для приведённой выборки требуется:
а) построить вариационный и дискретный статистический ряды;
б) вычислить числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию); **в)** построить полигон частот.

101. Выборка объема $n=20$ **:**

0	**4**	**2**	**0**	**5**	**1**	**1**	**3**	**0**	**2**	**2**	**4**	**3**	**2**	**3**	**3**	**0**	**4**	**5**	**1**

102. Выборка объема $n=15$ **:**

4	**5**	**6**	**4**	**4**	**6**	**2**	**2**	**5**	**4**	**5**	**5**	**4**	**2**	**3**

103. Выборка объема $n=15$ **:**

2	**2**	**1**	**3**	**4**	**2**	**1**	**1**	**3**	**3**	**4**	**3**	**2**	**4**	**5**

104. Выборка объема $n=15$ **:**

9	**8**	**10**	**6**	**6**	**7**	**9**	**9**	**10**	**4**	**10**	**11**	**11**	**11**	**6**

105. Выборка объема $n=20$ **:**

5	**5**	**4**	**2**	**6**	**2**	**1**	**5**	**3**	**3**	**1**	**5**	**6**	**4**	**3**	**3**	**4**	**1**	**5**	**5**

106. Выборка объема $n=20$ **:**

2	**1**	**2**	**3**	**1**	**1**	**0**	**2**	**2**	**4**	**3**	**3**	**0**	**3**	**0**	**2**	**3**	**1**	**2**	**2**

107. Выборка объема $n = 15$:

6	**8**	**9**	**9**	**4**	**9**	**6**	**8**	**9**	**4**	**6**	**6**	**8**	**6**	**4**

108. Выборка объема $n = 15$:

5	**10**	**10**	**9**	**5**	**8**	**8**	**9**	**6**	**6**	**6**	**8**	**8**	**10**	**8**

109. Выборка объема $n = 15$:

1	**0**	**2**	**6**	**5**	**4**	**1**	**4**	**5**	**1**	**2**	**4**	**2**	**2**	**2**

110. Выборка объема $n = 20$:

1	**3**	**3**	**2**	**0**	**2**	**4**	**3**	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**1**	**1**	**1**	**3**

111-120. Для приведённой выборки требуется:

а) вычислить числовые характеристики группированной выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию);

б) построить гистограмму частот.

111. Данные о месячной заработной плате X по цеху (в тыс.руб.)

Зар.плата	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	**12-14**	**14-16**	**16-18**
Число рабочих	**1**	**3**	**10**	**15**	**20**	**12**	**7**	**2**

112. Данные о расходе X фирм, продающих компьютеры, на рекламу (в % к общему расходу фирмы):

Расход на рекламу	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**
Число фирм	**5**	**8**	**16**	**12**	**9**

113. Выборочные данные о стаже работы X сотрудников банка:

Стаж, лет	**0-2**	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**
Число сотрудников	**3**	**9**	**18**	**14**	**10**	**6**

114. Данные о годовом товарообороте X (млн.руб) продовольственных магазинов города:

Товарооборот	**10-12**	**12-14**	**14-16**	**16-18**	**18-20**
Число магазинов	**17**	**40**	**32**	**8**	**3**

115. Данные о месячной заработной плате X по цеху (в тыс.руб.):

Зар.плата	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**
Число рабочих	**5**	**8**	**16**	**12**	**9**

116. Данные измерений роста X (в см) студентов одного из вузов города:

Рост	**150-160**	**160-170**	**170-180**	**180-190**	**190-200**
Число студентов	**10**	**34**	**25**	**21**	**10**

117. Данные о годовом товарообороте X (млн.руб) мебельных магазинов города:

Товарооборот	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**
Число магазинов	**12**	**17**	**46**	**12**	**13**

118. Данные измерений внутреннего диаметра X (в мкм) поршневых колец:

Диаметр	**28-32**	**32-36**	**36-40**	**40-44**	**44-48**
Число колец	**5**	**16**	**11**	**8**	**10**

119. Данные о расходе X фирм, продающих автомобили, на рекламу (в % к общему расходу фирмы):

Расход на рекламу	**3-5**	**5-7**	**7-9**	**9-11**	**11-13**
Число фирм	**1**	**6**	**14**	**7**	**2**

120. Данные о содержании X (в куб. м) деловой древесины в одном дереве:

Содержание деловой древесины	**0.2-0.6**	**0.6-1.0**	**1.0-1.4**	**1.4-1.8**
Число деревьев	**2**	**14**	**15**	**9**

5.2. Вопросы к экзамену.

Семестр 1.

1. Понятие матрицы. Частные виды матриц (квадратная, треугольная, диагональная, нулевая, единичная). Элементарные преобразования матриц. Понятие эквивалентности и равенства матриц.
2. Действия над матрицами (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу), их свойства.
3. Определители 2-ого и 3-его порядка, их вычисление. Основные свойства определителей.
4. Понятие определителя n-ого порядка. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
5. Понятие системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Частные виды СЛАУ (квадратная, однородная, неоднородная). Матрица, расширенная матрица, определитель СЛАУ.
6. Решение, множество решений СЛАУ. Совместность, несовместность, определённость, неопределённость, эквивалентность СЛАУ. Элементарные преобразования СЛАУ, их основное свойство.
7. Метод Крамера для решения СЛАУ, условия его применимости.
8. Метод Гаусса решения СЛАУ. Условия несовместности, определённости и неопределённости СЛАУ по методу Гаусса.
9. Понятие обратной матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Условие существования обратной матрицы. Основные способы нахождения обратной матрицы.
10. Матричная форма записи СЛАУ. Матричный способ (метод обратной матрицы) решения СЛАУ, условия его применимости.
11. Минор k -ого порядка, базисный минор, ранг матрицы. Критерий совместности систем линейных алгебраических уравнений.

12. Понятие геометрического вектора. Равенство векторов. Противоположный вектор. Орт вектора. Коллинеарность и компланарность векторов.
13. Графические правила сложения, вычитания, умножения вектора на число. Проекция вектора на вектор.
14. Понятие декартовой системы координат в R^3. Радиус-вектор, координаты точки. Вычисление длины вектора; направляющих косинусов вектора; координат вектора, заданного двумя точками; расстояния между точками.
15. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Вычисление угла между векторами, условие их ортогональности.
16. Прямая линия на плоскости и её общее уравнение. Нормальный и направляющий векторы прямой. Уравнение прямой, проходящей через точку, перпендикулярно вектору. Построение прямой на плоскости.
17. Каноническое уравнение прямой; уравнения прямой: проходящей через две точки, с угловым коэффициентом, в отрезках. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости и его вычисление; условия $\perp$ и $||$ прямых.
18. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения и построение.
19. Понятие множества. Подмножество. Универсальное множество. Способы задания множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение).
20. Множества чисел. Действительные числа, модуль числа и его свойства. Числовые промежутки. Окрестность точки.
21. Понятие функции. Основные способы задания функции. Естественная область определения функции. Явное, неявное, параметрическое задание функции. График функции.
22. Основные элементы поведения функции (чётность, нечётность, периодичность, ограниченность, монотонность).
23. Основные элементарные функции: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y=x^{-1}$, $y=\sqrt{x}$; $y=a^x$, $y = e^x$; $y=\log_a x$, $y = \ln x$; $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$; $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$. Основные свойства, графики.
24. Простейшие элементарные функции: $y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$, их свойства и графики.
25. Понятие обратной и сложной функций. Элементарные функции.

26. Функция натурального аргумента. Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные, монотонные последовательности.
27. Понятие предела числовой последовательности, его геометрический смысл. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Признак сходимости монотонной последовательности. Число e.
28. Понятие числового ряда (ЧР). Частичная сумма и сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды, их свойства. Геометрический и обобщённый гармонический числовые ряды, условия их сходимости и расходимости.
29. Понятие предела функции в конечной точке и на бесконечности. Понятие односторонних пределов. Необходимое и достаточное условие существования предела функции в конечной точке.
30. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, взаимосвязь между ними. Основные свойства бесконечно малых и больших функций. Неопределённые выражения.
31. Основные свойства пределов функций (о пределах арифметических операций над функциями, имеющими конечный предел; о пределе элементарной функции; о предельном переходе в неравенствах).
32. Первый и второй замечательные пределы, их применение при вычислении пределов.
33. Определения непрерывности функции в точке. Точки разрыва функции, их классификация.
34. Понятие непрерывности на отрезке. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.
35. Приращение функции. Определение производной и её геометрический смысл. Непосредственное нахождение производной.
36. Касательная и нормаль к кривой в данной точке, их уравнения. Производные высших порядков.
37. Дифференциалы функции. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях.
38. Простейшие правила вычисления производной (постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций).
39. Правило вычисления производной сложной функции.
40. Правило Лопиталя и его применение для раскрытия неопределённостей: $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$.
41. Достаточный признак монотонности функции. Стационарные и критические точки функции. Нахождение интервалов монотонности функции.

42. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции.
43. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, их нахождение.
44. Понятия выпуклости и вогнутости функции. Достаточный признак выпуклости (вогнутости) функции на интервале. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функции. Точка перегиба графика функции, условия её существования и нахождение.
45. Понятие асимптоты графика функции. Вертикальные и наклонные асимптоты, условия их существования и нахождение.

<u>Семестр 2.</u>

1. Понятие функции 2-х переменных. Естественная область определения ФНП, график функции 2-х переменных, линии уровня.
2. Частные и полное приращения ФНП. Частные производные первого и высших порядков, их нахождение. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
3. Дифференциалы ФНП первого и второго порядков, их нахождение. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях.
4. Стационарные и критические точки. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы ФНП. Необходимое и достаточное условия локального экстремума ФНП.
5. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) ФНП в ограниченной и замкнутой области, их нахождение.
6. Первообразная функция, её основные свойства.
7. Неопределённый интеграл, условия его существования и основные свойства.
8. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование заменой переменной и по частям.
9. Вычисление интегралов вида:

$$\textbf{а)}\int f(ax+b)dx\,,\ \textbf{б)}\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,,\ \textbf{в)}\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\,,\quad \textbf{г)}\int \frac{P_n(x)dx}{\alpha x+\beta}\,.$$

10. Определенный интеграл как предел интегральной суммы, его геометрический смысл. Условия существования определённого интеграла. Основные свойства определенного интеграла.
11. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.

13. Определённый интеграл и его применение для вычисления площади плоской фигуры.
14. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования.
15. Понятие дифференциального уравнения первого порядка, различные формы его записи. Решение, начальные условия, общее и частное решения ДУ первого порядка. Задача Коши.
16. Основные виды ДУ первого порядка (ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными, однородное ДУ первого порядка, линейное ДУ первого порядка, уравнение Бернулли).
17. Понятие ДУ порядка n, различные формы его записи. Решение, начальные условия, общее и частное решения. Задача Коши.
18. Простейшее ДУ порядка n: $y^{(n)} = f(x)$, нахождение его общего решения.
19. Понятие случайного эксперимента, элементарного события, пространства элементарных событий, случайного события. Достоверное и невозможное события.
20. Действия над случайными событиями. Совместные и несовместные, противоположные события.
21. Классическое определения вероятности. Правила и формулы комбинаторики, вычисление вероятностей с их помощью.
22. Определение условной вероятности события. Независимые и зависимые события. Формулы сложения и умножения вероятностей.
23. Формулы полной вероятности и Байеса.
24. Повторные испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
25. Понятие случайной величины. Дискретная и непрерывная случайные величины, основные способы их задания (функция распределения, ряд распределения, функция плотности вероятности).
26. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, мода и медиана. Свойства математического ожидания и дисперсии.
27. Нормальный закон распределения НСВ, его числовые характеристики. Правило «трёх сигм».
28. Стандартный нормальный закон. Интеграл Лапласа, вычисление с его помощью вероятности попадания нормальной случайной величины.
29. Генеральная совокупность, выборка из неё. Основные способы записи выборки: вариационный ряд; статистический дискретный и интервальный ряды, их построение.
30. Числовые характеристики выборки (размах, среднее арифметическое, медиана, дисперсия) и её графическое изображение (полигон, гистограмма).

6. Приложения.
6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

<u>Семестр 1.</u>

1-10. Найти матрицу $C = B \cdot A^T + 3A$**, если:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Транспонируем матрицу A**:** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**.**

2) Вычисляем произведение матриц $B \cdot A^T$:

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ \hline 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 \\ \hline 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Находим матрицу $3A$:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

4) Находим матрицу C : $\quad C = B \cdot A^T + 3A =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 3+3 & 7+(-3) \\ 3+0 & 1+9 & 5+(-3) \\ 1+0 & 3+(-3) & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}$**.**

11 – 20. Дана система уравнений: $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ 2x - 4y + 6z = 12 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$. Требуется:

а) найти решение системы методом Крамера;

б) найти решение системы методом Гаусса.

Решение.

А) <u>Метод Крамера</u>.

1а) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4) \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot 2 -$$

$$- (-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -56 \neq 0 .$$

2а) Так как $\Delta = -56 \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

3а) Вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-4) \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \cdot 2 + (-4) \cdot 12 \cdot 2 -$$

$$- (-4) \cdot (-4) \cdot 2 - 1 \cdot 12 \cdot (-1) - (-6) \cdot 6 \cdot 2 = -56 ,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 12 \cdot (-1) + (-6) \cdot 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot 2 -$$

$$- (-4) \cdot 12 \cdot 1 - (-6) \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -112 ,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 2 & -4 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4) \cdot 2 + 1 \cdot 12 \cdot 1 + (-6) \cdot 2 \cdot 2 -$$

$$- (-6) \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 12 \cdot 2 = -168 .$$

4а) Находим решение: $x = \dfrac{-56}{-56} = 1,\quad y = \dfrac{-112}{-56} = 2,\quad z = \dfrac{-168}{-56} = 3 .$

5а) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1+2-4\cdot 3=-6 \\ 2\cdot 1-4\cdot 2+6\cdot 3=12 \\ 1+2\cdot 2-3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6=-6 \\ 12=12 \\ 2=2 \end{cases}.$

Ответ: $x=1, \quad y=2, \quad z=3$.

Б) <u>Метод Гаусса.</u>

1б) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A}=(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

2б) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

В результате прямого хода матрица системы A должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii}\neq 0$. Система уравнений, матрица которой A' является треугольной с элементами $a'_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,...,n)$, имеет единственное решение, а система уравнений, матрица которой A' является трапециевидной с элементами $a'_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,...,k, \quad где\ k<n)$, имеет бесконечно много решений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{из второй строки, умноженной на 2, вычитаем первую} \\ \textit{из третьей строки, умноженной на 4, вычитаем первую} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{к третьей строке, умноженной на 9,} \\ \textit{прибавляем вторую строку, умноженную на 7} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 0 & -112 & -336 \end{array}\right).$$

В результате элементарных преобразований матрица A системы преобразована к специальному виду A'. Система уравнений, матрица которой A', является треугольной с ненулевыми диагональными элементами $a'_{ii}\neq 0$, имеет всегда единственное решение, которое находим, выполняя обратный ход.

Если при выполнение преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$ в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появляется строка $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & | \, b' \end{pmatrix}$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.

3б) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ -9y + 16z = 30 \\ -112z = -336 \end{cases}$ и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех неизвестных: $\begin{cases} z = 3 \\ -9y = 30 - 16z = 30 - 16 \cdot (3) = -18 \Rightarrow y = 2 \\ 4x = -6 - y + 4z = -6 - 2 + 4 \cdot 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$.

4б) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4 \cdot 1 + 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 12 \\ 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}$.

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

21 – 30. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{a} = (0, 1, 2)$, $\overline{b} = (1, 0, 1)$, $\overline{c} = (-1, 2, 4)$. Требуется: **а)** найти векторы $\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$ и $\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c}$ **; б)** вычислить скалярное произведение $\overline{m} \cdot \overline{n}$; **в)** найти проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$.

Решение.

а) Находим векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$:

$$\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = 2 \cdot (0, 1, 2) + 3 \cdot (1, 0, 1) = (0, 2, 4) + (3, 0, 3) =$$
$$= (0 + 3, 2 + 0, 4 + 3) = (3, 2, 7) \,;$$

$$\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c} = 3 \cdot (1, 0, 1) - 2 \cdot (-1, 2, 4) = (3, 0, 3) - (-2, 4, 8) =$$
$$= (3 - (-2), 0 - 4, 3 - 8) = (5, -4, -5) \,.$$

б) Вычисляем скалярное произведение векторов $\overline{m} \cdot \overline{n}$:

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = (3, 2, 7) \cdot (5, -4, -5) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-5) = -28 \,.$$

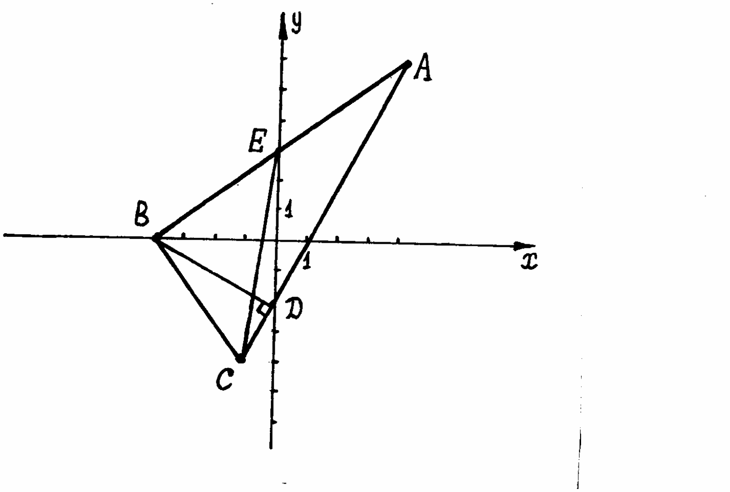
в) Находим проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$:

$$np_{\overline{n}}\overline{m} = \frac{\overline{m}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|} = \frac{(-28)}{\sqrt{5^2+(-4)^2+(-5)^2}} = -\frac{28}{\sqrt{66}}.$$

Ответ: а) $\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = (3,\ 2,\ 7)$; $\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c} = (5,\ -4,\ -5)$; **б)** $\overline{m}\cdot\overline{n} = -28$;
в) $np_{\overline{n}}\overline{m} = -28/\sqrt{66}$ **.**

31-40. Даны вершины треугольника ABC : $A(4,\ 6)$, $B(-4,\ 0)$, $C(-1,\ -4)$
Требуется сделать чертёж и найти:
а) длину стороны AC **;** **б)** уравнение стороны AC **;**
в) длину h высоты BD **;** **г)** площадь S треугольника ABC **..**

Решение. Сделаем чертёж:



а) Длину стороны AC находим как длину вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A) = (-1-4,\ -4-6) = (-5,\ -10),$$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}.$$

б) Уравнение стороны AC находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(4,\ 6)$ и $C(-1,\ -4)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой:

$$AC: \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A} \Rightarrow \frac{x-4}{-5}=\frac{y-6}{-10} \Rightarrow (-10)\cdot(x-4)=(-5)\cdot(y-6)$$
$$\Rightarrow \underline{2x-y-2=0}.$$

в) Длину h высоты BD находим как расстояние от точки $B(-4,\,0)$ до прямой AC, заданной общим уравнением $2x-y-2=0$:

$$h=\rho(B,\,AC)=\frac{|\,2x_B-y_B-2\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\,2\cdot(-4)-0-2\,|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}.$$

г) Площадь треугольника ABC находим по формуле: $S=\dfrac{h\cdot AC}{2}$. Откуда

$$S=\frac{10\cdot 5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot 2}=25.$$

Ответ: а) $AC=5\sqrt{5}$ **; б)** $AC:2x-y-2=0$ **; в)** $h=10/\sqrt{5}$ **; г)** $S=25$ **.**

41-50. Найти естественную область определения функции $y=e^{\sqrt{x}}\ln(2-3x)$ **.**

Решение.

Естественную область определения находим как множество $D(y)$ всех значений аргумента x функции, для которых формула $y=e^{\sqrt{x}}\ln(2-3x)$ имеет смысл: $D(y)=\left\{x\in R\,\middle|\,\begin{cases} x\ge 0\\ 2-3x>0\end{cases}\right\}$. Решив (на числовой прямой) систему неравенств $\begin{cases} x\ge 0\\ 2-3x>0\end{cases}$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является промежуток $[0,\,2/3)$.

Ответ: $D(y)=[0,\,2/3)$, $y=e^{\sqrt{x}}\ln(2-3x)$;

51-60. Требуется установить чётность (нечётность) функции $y=\sqrt{x^4-13x^2+36}$.

Решение.

Находим сначала естественную область определения функции $y=\sqrt{x^4-13x^2+36}$ **:** $D(y)=\{x\in R\,|\,x^4-13x^2+36\ge 0\}$. Решив (на числовой прямой) неравенство $x^4-13x^2+36=(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)\ge 0$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является объединение промежутков $(-\infty,-3)\bigcup[-2,2]\bigcup(3,+\infty)$.

Так как область $D(y)$ является симметричной относительно точки $x=0$, то проверяем выполнение для всех $x\in D(y)$ условий: $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$, учитывая чётность и нечётность основных элементарных функций, входящих в аналитическое выражение $f(x)$.

Если область $D(y)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то $f(x)$ на этом множестве является функцией общего вида.

Для этого находим $f(-x)=\sqrt{(-x)^4-13(-x)^2+36}=\sqrt{x^4-13x^2+36}$. Поскольку $f(-x)=f(x)$ для всех $x\in D(y)$ $=(-\infty,-3)\bigcup[-2,2]\bigcup(3,+\infty)$, то функция $y=\sqrt{x^4-13x^2+36}$ является чётной.

Ответ: функция $y=\sqrt{x^4-13x^2+36}$ - чётная.

61-70. Для функции $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1\\ \dfrac{1}{x}, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ найти точки разрыва функции и исследовать их характер**.** Построить график функции**.**

Решение.

Точками разрыва функции $y=f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x\le x_1\\ \varphi_2(x), & x_1<x\le x_2\\ \dots & \dots\\ \varphi_m(x), & x>x_{m-1}\end{cases}$ *являются точки разрыва функций* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)$ *в промежутках* $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2)*,...,* $(x_{m-1},+\infty)$*, кроме того, точками возможного разрыва функции* $y=f(x)$ *являются точки* $x_1,x_2,\dots,x_{m-1}$ *в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями.*

Точка $x=x_0$ *является точкой непрерывности функции* $y=f(x)$ *тогда и только тогда, когда:* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Функции $\varphi_1(x)=x^2$ и $\varphi_3(x)=1$ непрерывны в промежутках $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ как элементарные функции, определённые в каждой точке данных промежутков, а функция $\varphi_2(x)=1/x$ в промежутке $(-1,1)$ имеет точкой разрыва точку $x=0$, в которой она не определена. Тогда для функции $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1 \\ 1/x, & -1<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ точка $x=0$ является точкой разрыва, а точки $x=-1$ и $x=1$, в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями, являются точками возможного разрыва.

Исследуем на разрыв точки $x=-1,\,0,\,1$ и установим характер разрыва:

1) $$\lim_{x\to -1-0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to -1+0} f(x) \overset{?}{=} f(-1) \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} x^2 = 1,\ \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} (1/x) = -1,\ f(-1)=1\right]$$
$$\Rightarrow 1 \ne -1 \ne 1\,.$$

Следовательно, точка $x=-1$ - точка разрыва 1-го рода функции $y=f(x)$.

2) $$\lim_{x\to 0-0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0+0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,\ f(0) - \text{неопределено}\,.$$

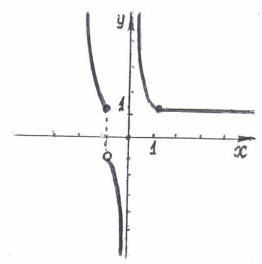
Следовательно, точка $x=0$ - точка бесконечного разрыва (2-го рода) функции $y=f(x)$.

3) $$\lim_{x\to 1-0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to 1+0} f(x) \overset{?}{=} f(1) \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (1/x) = 1,\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 1 = 1,\ f(1)=1\right] \Rightarrow 1=1=1\,.$$

Следовательно, точка $x=1$ - точка непрерывности функции $y=f(x)$.

График функции $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1 \\ 1/x, & -1<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ имеет вид, изображённый на рисунке:



Ответ: $x=-1$ - точка разрыва 1-го рода**,** $x=0$ **-** точка бесконечного разрыва.

71-80. Найти производную $y'=f'(x)$ **:**

а) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$ **б)** $y=\sqrt[4]{1-x^2}$ **в)** $y=e^{4x}\cdot\sqrt[3]{1-2x}$ **; г)** $y=\dfrac{x\sin^2 3x}{\ln(5x+2)}$**.**

Нахождение производной $y'=y'(x)$ *функции* $y=y(x)$ *заданной явно, с помощью правил дифференцирования:*
$(C)'=0$ *(* $C=const$ *),* $(f\pm g)'=f'\pm g'$, $(f\cdot g)'=f'g+fg'$, $(Cf)'=C\cdot f'$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2},\qquad \left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2},\qquad (f^g)'=f^g\left(f'\cdot\frac{g}{f}+(\ln f)g'\right),$$

$f'(x)=\left(F(u)\Big|_{u=\varphi(x)}\right)'=F'(u)\varphi'(x)$ *сводят к нахождению табличных производных (**приложение 6.3**).*

Решение.

$$\text{а) } y'=\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}\right)'=\left[\begin{array}{c}\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}\\ f(x)=x^2-6x+3,\quad g(x)=x-3\end{array}\right]=$$

$$=\frac{(x^2-6x+3)'(x-3)-(x^2-6x+3)(x-3)'}{(x-3)^2},\text{ где}$$

$$(x^2-6x+3)'=(x^2)'-(6x)'+(3)'=2x-6(x)'+0=2x-6\cdot 1=2x-6,$$

$$(x-3)'=(x)'-(3)'=1-0.$$

Тогда $y'=\dfrac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+3)\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x+15}{(x-3)^2}$.

б) $y' = \left(\sqrt[4]{1-x^2}\right)' = \left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)'$. Представим функцию в виде сложной функции $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} = u^{\frac{1}{4}}\Big|_{u=1-x^2}$ и применим правило вычисления производной сложной функции $\left(u^{1/4}\Big|_{u=1-x^2}\right)' = \left[y'_x = y'_u \cdot u'_x\right] = \left(u^{1/4}\right)'_u \cdot u'_x =$

$$= \frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1} \cdot u'_x = \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{-3}{4}}(1-x^2)' = \left[(1-x^2)' = (1)' - (x^2)' = 0 - 2x = -2x\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{3/4}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{2\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}.$$

в) $y' = \left(e^{4x} \cdot \sqrt[3]{1-2x}\right)' = \left(e^{4x}\right)'\sqrt[3]{1-2x} + e^{4x}\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)'$, где

$$\left(e^{4x}\right)' = \left(e^u\big|_{u=4x}\right)' = \left(e^u\right)'_u u'_x = e^u u'_x = e^{4x}(4x)' = \left[(4x)' = 4(x)' = 4\right] = 4e^{4x};$$

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \left((1-2x)^{1/3}\right)' = (u^{1/3}\big|_{u=1-2x})' = (u^{1/3})'_u \cdot u'_x = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}u'_x =$$

$$= \frac{1}{3}(1-2x)^{-2/3}(1-2x)' = \left[(1-2x)' = (1)' - (2x)' = 0 - 2(x)' = -2\right] = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

Тогда $y' = 4e^{4x}\sqrt[3]{1-2x} + e^{4x} \cdot \left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right) = \frac{2e^{4x}(5-12x)}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

г) $y' = \left(\frac{x\sin^2 3x}{\ln(5x+2)}\right)' = \frac{(x\sin^2 3x)' \cdot \ln(5x+2) - x\sin^2 3x \cdot (\ln(5x+2))'}{\ln^2(5x+2)}$, где

$$(x\sin^2 3x)' = (x)'\sin^2 3x + x(\sin^2 3x)' =$$

$$\left[\begin{gathered} (x)' = 1 \\ (\sin^2 3x)' = \left((\sin 3x)^2\right)' = (u^2\big|_{u=\sin 3x})' = (u^2)'_u u'_x = 2uu'_x = 2\sin 3x\,(\sin 3x)' \\ (\sin 3x)' = \left(\sin u\big|_{u=3x}\right)' = (\sin u)'_u u'_x = \cos u\, u'_x = \cos 3x(3x)' \\ (3x)' = 3(x)' = 3 \cdot 1 = 3 \end{gathered}\right.$$

$$= 1\cdot\sin^2 3x + x\cdot 2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3 = \sin^2 3x + 3x\sin 6x\,.$$

$$(\ln(5x+2))' = \left(\ln u\big|_{u=5x+2}\right)' = (\ln u)'_u\, u'_x = \frac{1}{u}u'_x = \frac{1}{5x+2}(5x+2)' =$$

$$= \left[(5x+2)' = (5x)' + (2)' = 5(x)' + 0 = 5\cdot 1 = 5\right] = \frac{5}{5x+2}\,.$$

Тогда $y' = \dfrac{(\sin^2 3x + 3x\sin 6x)\ln(5x+2) - x\sin^2 3x\cdot\left(\dfrac{5}{5x+2}\right)}{\ln^2(5x+2)} =$

$$= \frac{(5x+2)(\sin^2 3x + 3x\sin 6x)\ln(5x+2) - 5x\sin^2 3x}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}\,.$$

81-90. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x+\sin 3x}{\sin 4x}$

Вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, *где* $a = x_0, \infty$, *начинают всегда с подстановки в* $\varphi(x)$ *предельного значения её аргумента* x. *В результате могут получиться неопределённости* $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ..., *которые раскрывают или тождественными преобразованиями* $\varphi(x)$ *такими, чтобы преобразованное выражение получилось определённым, или применением правила Лопиталя.*

При вычислении пределов без применения правила Лопиталя будем использовать свойства конечных пределов и бесконечно больших и малых функций, а также следующие известные пределы: $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right) = \infty\,, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n} = 0\,.$$

Правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\ \text{или}\ \dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *где* $f(x)$ и $g(x)$ *- функции, дифференцируемые в окрестности* $a = x_0, \infty$, *позволяет во многих случаях существенно упростить вычисление пределов.* ***В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила.*** *Перед очередным применением правила Лопиталя следует обязательно прове-*

рить, имеют ли место неопределённости $0/0$ или ∞/∞, если – да, то данное правило можно применить ещё раз. На каждом этапе его применения следует использовать, упрощающие отношение тождественные преобразования, а также комбинировать это правило с любыми другими известными приёмами вычисления пределов.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения ∞ получим неопределённость $[\infty/\infty]$. Для её раскрытия сначала разделим числитель и знаменатель дроби на x^3 (старшую степень переменной x в числителе и знаменателе), после чего используем свойства конечных пределов и бесконечно больших и малых функций. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\left[\frac{3-0-0}{0+0}\right]=\left[\frac{3}{0}\right]=[3\cdot\infty]=\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения $x_0=-2$ получим неопределённость $[0/0]$. Для её раскрытия выделим в числителе и знаменателе дроби общий множитель вида $(x-x_0)^\alpha$, где $\alpha\in R$ - некоторое число, т.е. множитель $(x+2)^\alpha$. Затем сократим на него числитель и знаменатель дроби, после чего используем свойства пределов.

1) *В квадратном трёхчлене ax^2+bx+c множитель выделяют разложением квадратного трёхчлена по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2) *В выражении $(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})$ множитель выделяют таким способом:*

$$\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}=$$

$$=\frac{(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})(\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d})}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}=\left(x-\frac{d-b}{a-c}\right)\frac{(a-c)}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}.$$

В результате получим $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$\left[\begin{array}{c}\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}=\dfrac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}=(x+2)\dfrac{(-2)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}\\ \\ x^2-x-6=(x+2)(x-3)\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(-2)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\frac{1}{10}.$$

Примечание. Данный предел легко вычислить и по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})'}{(x^2-x-6)'}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})'=\left(\sqrt{2-x}\right)'-\left(\sqrt{x+6}\right)'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}\\ (x^2-x-6)'=2x-1\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+6}}\right)}{2x-1}=\frac{\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{2-(-2)}}-\dfrac{1}{2\sqrt{-2+6}}\right)}{2\cdot(-2)-1}=\frac{-1/2}{-5}=\frac{1}{10}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x+\sin 3x}{\sin 4x}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения 0 получим неопределённость $[0/0]$. Вычислим предел по правилу Лопиталя. Получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x+\sin 3x}{\sin 4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(tg2x+\sin 3x)'}{(\sin 4x)'}=$

$$=\left[\begin{array}{c}(tg2x+\sin 3x)'=(tg2x)'+(\sin 3x)'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+3\cos 3x\\ (\sin 4x)'=\cos 4x\cdot(4x)'=4\cos 4x\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\cos^2 2x}+3\cos 3x}{4\cos 4x}=\frac{\dfrac{2}{1}+3\cdot 1}{4\cdot 1}=\frac{5}{4}.$$

Ответ:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\infty$ **;б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{10}$ **;в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x+\sin 3x}{\sin 4x}=\dfrac{5}{4}$

91-100. Для указанной функции $y=f(x)$ требуется:

а) найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-9x^2+3$ на отрезке $[1,\,7]$;

б) составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2/(\sqrt{x}-1)$ в точке $x_0=4$;

в) провести полное исследование функции $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$, построить её график.

Решение а).

Наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a,b]$ достигается или в точках $x_i\in(a,b)$, в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует, или на концах отрезка.

1а) Находим первую производную функции:

$$y'=(x^3-9x^2+3)'=(x^3)'-(9x^2)'+(3)'=3x^2-18x$$

и определяем внутренние критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки $x_i\in(1,7)$ в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$y'=3x^2-18x=3x(x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\notin(1,7)\\ x=6\in(1,7)\end{cases}$, точек $x_i\in(1,7)$ в которых y' не существует нет. Таким образом, единственной внутренней критической (стационарной) точкой функции $y=f(x)$ на отрезке $[1,7]$ является точка $x_1=6$.

2а) Вычисляем значения функции $y=f(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[1,7]$: $f(6)=6^3-9\cdot 6^2+3=-105$, $f(1)=1^3-9\cdot 1^2+3=-5$, $f(7)=7^3-9\cdot 7^2+3=-95$.

3а) Сравниваем значения $f(1)$, $f(6)$, $f(7)$ и находим наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[1,7]$:

$m=y_{наим}=\min\limits_{[1,\,7]}f(x)=f(6)=-105$, $M=y_{наиб}=\max\limits_{[1,\,7]}f(x)=f(1)=-5$.

Ответ: $m = f(6) = -105$, $M = f(1) = -5$.

Решение б).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет вид:* $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

1б) Вычисляем значение функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 4$: $f(4) = \dfrac{4^2}{\sqrt{4} - 1} = 16$.

2б) Находим первую производную функции: $y' = \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x} - 1}\right)' =$

$= \dfrac{(x^2)'(\sqrt{x} - 1) - x^2(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{2x(\sqrt{x} - 1) - x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{3x\sqrt{x} - 4x}{2(\sqrt{x} - 1)^2}$ и вычисляем её значение в точке $x_0 = 4$: $f'(4) = \dfrac{3 \cdot 4\sqrt{4} - 4 \cdot 4}{2(\sqrt{4} - 1)^2} = 4$.

3б) Составляем уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\Rightarrow$ $y - 16 = 4(x - 4)$ и записываем его в виде $y = kx + b$: $y = 4x$.

Ответ: $y = 4x$ - уравнение касательной.

Решение в).

Для построения графика непериодической функции $y = f(x)$ *нужно:*

***1)** найти область определения функции;*
***2)** найти область непрерывности функции и точки разрыва;*
***3)** исследовать функцию на чётность, нечётность;*
***4)** найти точки пересечения графика с осями координат;*
***5)** найти асимптоты графика функции;*
***6)** найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;*
***7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*

1в) Находим область определения функции: $D(y) = \{x \in R \mid x^2 + 2x \neq 0\}$ $= (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

2в) Поскольку данная функция является элементарной, то областью её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x = -2$ и $x = 0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x=-2$ и $x=0$, вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ и $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

3в) Проверяем является ли функция чётной или нечётной. Так как область определения функции $D(y)$ $=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то данная функция – общего вида.

4в) Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x=0\notin D(y)$, то точек пересечения графика с осью Oy нет.

Положим $y=0$ и решим уравнение $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0$. Его решением является $x=-1$. Следовательно, точка $(-1,0)$ - точка пересечения графика с осью Ox.

5в) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y=f(x)$.

Так как точки $x=-2$ и $x=0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x=-2$ и $x=0$.

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.

Вычисляем сначала пределы при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_1,\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_1.$$

В дальнейшем будем иметь в виду следующий часто встречающийся предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\infty & \text{если}\quad n>m\\ a_0/b_0 & \text{если}\quad n=m\\ 0 & \text{если}\quad n<m\end{cases}$$

Следовательно $y = k_1 x + b_1 = 0 \cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to -\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x} = 0 = k_2, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 1 = b_2$$

Следовательно $y = k_2 x + b_2 = 0 \cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

6в) Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right)' = = \frac{\left((x+1)^2\right)' \cdot (x^2+2x) - (x+1)^2 (x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+2x) - (x+1)^2 (2x+2)}{(x^2+2x)^2} = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$$y' = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0 \Rightarrow \; x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in D(y);$$

y' не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ является точка $x_1 = -1$.

Исследуем знак производной $y' = f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	возрастает	возрастает	0	убывает	убывает

Так как при переходе слева направо через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на « $-$ », то точка $x = -1$ является точкой локального максимума и $y_{\max} = y(-1) = 0$.

7в) Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} \right)' = -2\left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2 - (x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4} \right) =$$

$$= -2\left(\frac{1 \cdot (x^2+2x)^2 - (x+1) \cdot 2 \cdot (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4} \right) = \frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

и определяем точки возможного перегиба $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f''(x_i) = 0$ или $f''(x_i)$ не существует: $y'' = \dfrac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3} \neq 0$, так как $3x^2+6x+4 \neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней); y'' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0 \notin D(y)$ и $x=-2 \notin D(y)$.

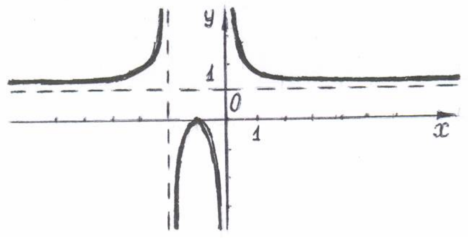
Таким образом, функция $y = f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y'' = f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	+	–	+
y	график вогнутый	график выпуклый	график вогнутый

Точек перегиба нет.

8в) На основании полученных результатов строим график функции:



Семестр 2.

1 – 10. Для указанной функции $z = f(x,y)$ требуется:

а) найти дифференциал dz и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = arctg(x/y)$;

б) найти локальные экстремумы, если $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \quad (x > 0, y > 0)$.

Решение а).

Первый дифференциал функции $z = f(x,y)$ имеет вид $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Частные производные функции $z = f(x,y)$ вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что если производная берётся по аргументу x (аргументу y), то другой аргумент y (аргумент x) считается постоянным.

1а) Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y функции

$$z = arctg\left(\frac{x}{y}\right): \; z'_x = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x = \left(arctg u\Big|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_x = (arctg u)'_u \cdot u'_x =$$

$$= \frac{1}{1+u^2} u'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot (x)'_x = \frac{1}{y}\right] = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y = \left(arctg u\Big|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_y = (arctg u)'_u \cdot u'_y = \frac{1}{1+u^2} u'_y =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x\left(-\frac{(y)'_y}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\right] = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тогда первый дифференциал dz функции имеет вид:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{y}{x^2+y^2} dx + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

2а) Вторую частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (или кратко z''_{xy}) находим как первую частную производную по аргументу y от функции $z'_x = f'_x(x,y)$ **:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(y)'_y \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} (y)'_y = 1 \\ (x^2+y^2)'_y = (x^2)'_y + (y^2)'_y = 0 + 2y = 2y \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ответ: $dz = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$**.**

Решение б).

Для нахождения локальных экстремумов дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ *необходимо:*

1) *Найти область определения* $D(z)$ *функции.*

2) *Найти первые частные производные* z'_x *и* z'_y *функции.*

3) *Решить систему уравнений (необходимое условие экстремума)* $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ *и найти точки* $M_i(x_i, y_i) \in D(z)$ *(с учётом возможных дополнительных ограничений на значения аргументов* x, y *) возможного локального экстремума функции.*

4) *Найти вторые частные производные* $A(x,y) = z''_{xx}$, $B(x,y) = z''_{xy}$, $C(x,y) = z''_{yy}$ *; составить выражение* $D(x,y) = A \cdot C - B^2$ *и вычислить значения* $D\big|_{M_i}$ *и* $A\big|_{M_i}$ *в каждой точке* M_i *возможного экстремума.*

5) *Сделать вывод о наличии экстремумов функции* $z = f(x,y)$*, используя достаточное условие экстремума: если* $D\big|_{M_i} < 0$*, то в точке* M_i *экстремума нет; если* $D\big|_{M_i} > 0$ *и* $A\big|_{M_i} > 0$*, то в точке* M_i *- локальный минимум;*

если $D\big|_{M_i} > 0$ *и* $A\big|_{M_i} < 0$, *то в точке* M_i *- локальный максимум; если* $D\big|_{M_i} = 0$, *то требуется дополнительное исследование точки* M_i *(например, по определению).*
6) *Найти локальные экстремумы (экстремальные значения) функции.*

1б) Находим область определения функции $D(z) = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}\right\}$.

2б) Находим первые частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_x = (x^3)'_x + (3xy^2)'_x - (15x)'_x - (12y)'_x =$$
$$= (x^3)'_x + 3y^2(x)'_x - 15(x)'_x - 0 = 3x^2 + 3y^2 \cdot 1 - 15 \cdot 1 = 3x^2 + 3y^2 - 15;$$
$$z'_y = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_y = (x^3)'_y + (3xy^2)'_y - (15x)'_y - (12y)'_y =$$
$$= 0 + 3x(y^2)'_y - 0 - 12(y)'_y = 3x \cdot 2y - 12 \cdot 1 = 6xy - 12.$$

3б) Составим систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15 \\ xy = 2 \end{cases}$ и решим её. Получим четыре решения: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$. Из них точками возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $D(z)$ являются только две точки: $M_1(1, 2)$ и $M_2(2, 1)$.

4б) Находим вторые частные производные:

$$A(x, y) = z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_x = (3x^2)'_x + (3y^2)'_x - (15)'_x =$$
$$= 3(x^2)'_x + 0 - 0 = 3 \cdot 2x = 6x;$$
$$B(x, y) = z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_y = (3x^2)'_y + (3y^2)'_y - (15)'_y =$$
$$= 0 + 3(y^2)'_y - 0 = 3 \cdot 2y = 6y;$$
$$C(x, y) = z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6xy - 12)'_y = (6xy)'_y - (12)'_y = 6x(y)'_y - 0 = 6x,$$

составляем выражение $D(x, y) = AC - B^2 = 6x \cdot 6x - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2$ и вычисляем:

$D\big|_{M_1(1,2)} = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2^2 = -108 < 0$; $D\big|_{M_2(2,1)} = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1^2 = 108 > 0$,

$A\big|_{M_2(2,1)} = 6 \cdot 2 = 12 > 0$.

5б) Делаем вывод о наличии экстремумов. Так как:

$D\big|_{M_1} = -108 < 0$, то в точке $M_1(1, 2)$ экстремума нет;

$D\big|_{M_2} = 108 > 0$, $A\big|_{M_2} = 12 > 0$, то в точке $M_2(2, 1)$ - локальный минимум.

6б) Находим локальный минимум

$$z_{\min} = f(2, 1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28 .$$

Ответ: $z_{\min} = f(2, 1) = -28$ **.**

11-20. Найти неопределённые интегралы: **а)** непосредственным интегрированием; **б)** заменой переменной интегрирования; **в)** интегрированием по частям.

а) $\int \left(\frac{3}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4} + \sqrt[5]{x^2} \right) dx$ **;**

б1) $\int \frac{x^2 - 2x + 10}{x - 1} dx$ **;** **б2)** $\int \frac{(x+2)dx}{x^2 - 6x + 5}$ **;** **б3)** $\int \frac{\cos 2x dx}{4 + \sin 2x}$ **;**

в) $\int (4x - 2) \cos 2x dx$ **;**

> *Нахождение неопределённого интеграла* $\int f(x)dx$ *состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения* $f(x)dx$*, чтобы получить интегралы (возможно по новой переменной интегрирования) из таблицы основных интегралов (**приложение 6.3**).*

Решение.

а) Интеграл вычислим непосредственным интегрированием. Получим:

$$\int \left(\frac{3}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4} + \sqrt[5]{x^2} \right) dx = 3\int \frac{dx}{x} - 4\int x^3 dx + 2\int x^{-4} dx + \int x^{2/5} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \textit{используем} \\ \textit{табличные} \\ \textit{интегралы } 1, 3 \end{array} \right] = 3\ln|x| - 4\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c =$$

$$\boxed{= 3\ln|x| - x^4 - \frac{2}{3x^3} + \frac{5}{7} x\sqrt[5]{x^2} + C}.$$

б1) Интеграл вычислим методом замены переменной интегрирования.

Интеграл вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\alpha x+\beta}$*, где* $P_n(x)$ *- многочлен порядка* n*, находят методом замены переменной с помощью подстановки* $\alpha x+\beta = t$.

$$\int \frac{x^2-2x+10}{x-1}dx = \begin{bmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=(t+1)'dt=dt \end{bmatrix} = \int \frac{(t+1)^2-2(t+1)+10}{t}dt =$$

$$= \int \frac{t^2+9}{t}dt = \int tdt + 9\int \frac{dt}{t} = \begin{bmatrix} \textit{используем табличные} \\ \textit{интегралы} \quad 1,3 \end{bmatrix} = \frac{t^2}{2} + 9\ln|t| + C =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{выполняем обратную замену} \\ t = x-1 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{(x-1)^2}{2} + 9\ln|x-1| + C.}$$

б2) Интеграл относится к интегралам вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$. Для его вычисления сначала выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, затем сделаем замену переменной интегрирования. Получим:

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5} = \begin{bmatrix} x^2-6x+5=(x-3)^2-4 \\ x-3=t \Rightarrow x=3+t \\ dx=(3+t)'dt=dt \end{bmatrix} = \int \frac{(3+t)+2}{t^2-4}dt = \int \frac{t+5}{t^2-4}dt =$$

$$=[\textit{представляем интеграл в виде суммы интегралов}] = \int \frac{tdt}{t^2-4} + 5\int \frac{dt}{t^2-4}.$$

Вычислим каждый из интегралов в отдельности:

$$1)\ \int \frac{tdt}{t^2-4} = \begin{bmatrix} \textit{положим } t^2-4=z, \textit{ тогда} \\ d(t^2-4)=dz \Rightarrow (t^2-4)'dt=dz \\ 2tdt=dz \Rightarrow tdt=dz/2 \end{bmatrix} = \int \frac{dz}{2z} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный интеграл } 3 \\ \textit{по переменной } t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \begin{bmatrix} \textit{выполним} \\ \textit{обратную замену} \\ z=t^2-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\ln|t^2-4| + C.$$

2) $$\int \frac{dt}{t^2-4}=\int \frac{dt}{t^2-2^2}=\left[\begin{array}{c}\textit{используем}\\ \textit{табличный интеграл } 16\\ \textit{по переменной } t\end{array}\right]=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C.$$

Тогда: $$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5}=\frac{1}{2}\ln|t^2-4|+5\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=[t=x-3]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|(x-3)^2-4|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}\right|+C=\boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+5|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C}.$$

Конечное выражение для неопределённого интеграла записывают, указывая одну из первообразных и добавляя к ней произвольную постоянную C.

б3) Интеграл вычислим методом замены переменной интегрирования. Получим:

$$\int \frac{\cos 2x dx}{4+\sin 2x}=\left[\begin{array}{c}\textit{положим } 4+\sin 2x=t,\ \textit{тогда}\\ d(4+\sin 2x)=dt\Rightarrow(4+\sin 2x)'dx=dt\\ 2\cos 2x dx=dt\Rightarrow \cos 2x dx=dt/2\end{array}\right]=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\textit{используем}\\ \textit{табличный интеграл } 3\\ \textit{по переменной } t\end{array}\right]=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\left[\begin{array}{c}\textit{выполним}\\ \textit{обратную замену}\\ t=4+\sin 2x\end{array}\right]=\boxed{\frac{1}{2}\ln|4+\sin 2x|+C}.$$

в) Интеграл вычислим методом интегрирования по частям, используя формулу $\int f(x)dx=\int udv=uv-\int vdu$.

Положим: $u=4x-2$, $dv=\cos 2x dx$. Найдём $du=(4x-2)'dx=4dx$,

$$v(x)=\int\cos 2x dx=\left[\begin{array}{c}2x=t\Rightarrow x=t/2\\ dx=(t/2)'dt=\frac{1}{2}dt\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\cos t dt=\left[\begin{array}{c}\textit{используем}\\ \textit{табличный}\\ \textit{интеграл } 8\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t=[t=2x]=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интеграл $\int dv=\int v'(x)dx$ в формуле интегрирования по частям вычисляется с точностью до постоянной, т.е. в качестве функции $v(x)$ выбирается одна из первообразных для функции $v'(x)$.

Для вычисления интеграла $\int \cos 2xdx$ *можно использовать и следующее свойство неопределённого интеграла: если* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то* $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, *где* $\int f(x)dx$ *- табличный интеграл. В данном случае, так как* $\int \cos xdx = \sin x + C$, *то* $\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Тогда, получим:

$$\int (4x-2)\cos 2xdx = (4x-2)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\cdot 4dx = (2x-1)\sin 2x -$$

$$-2\int \sin 2xdx = (2x-1)\sin 2x - 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C \boxed{= (2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C}$$

Определённый интеграл для функции $f(x)$, *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, *вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница:* $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, *где* $F(x)$ *-одна из её первообразных, используя для нахождения* $F(x)$ *все приёмы и методы вычисления неопределённых интегралов.*

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются:

1) *формула интегрирования по частям* $\int\limits_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$, *где функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a,b]$;

2) *формула замены переменной интегрирования*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \alpha = \varphi^{-1}(a),\ \beta = \varphi^{-1}(b) \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где функция $x = \varphi(t)$ *- непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Часто замена переменной в определённом интеграле выполняется с помощью подстановки $\psi(x) = t$ *по формуле:*

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} \psi(x) = t \Rightarrow x = \psi^{-1}(t) \\ dx = (\psi^{-1}(t))'dt \\ \alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b) \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\psi^{-1}(t))(\psi^{-1}(t))'dt,$$ *где функция* $\psi(x)$ *- непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a,b]$.

21-30. Требуется вычислить: **а)** определённый интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{x+1}}$;

б) несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$ (или установить его расходимость).

Решение.

а) Определённый интеграл вычислим заменой переменной интегрирования.

$$\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = (t^2-1)'dt = 2tdt \\ -1 \le 0 \le 0 \Rightarrow \alpha \le \sqrt{x+1} \le \beta \\ x = -1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{-1+1} = 0 \\ x = 0 \Rightarrow \beta = \sqrt{0+1} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{(t^2-1)2tdt}{2+t} = 2\int_0^1 \frac{(t^3-t)dt}{t+2}$$

Последний интеграл вычисляем также заменой переменной.

$$2\int_0^1 \frac{t^3-t}{t+2}dt = \begin{bmatrix} t+2 = z \Rightarrow t = z-2 \\ dt = (z-2)'dz = 1\cdot dz = dz \\ 0 \le t \le 1, \quad \alpha \le z = t+2 \le \beta \\ t=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0+2 = 2 \\ t = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1+2 = 3 \end{bmatrix} = 2\int_2^3 \frac{(z-2)^3-(z-2)}{z}dz =$$

$$= 2\int_2^3 \frac{z^3-6z^2+11z-6}{z}dz = 2\int_2^3 \left(z^2 - 6z + 11 - \frac{6}{z}\right)dz =$$

$$= 2\left(\frac{z^3}{3} - 6\cdot\frac{z^2}{2} + 11z - 6\ln|z|\right)\Bigg|_2^3 = \left[\text{по формуле Ньютона – Лейбница}\right] =$$

$$= 2\left(\left(\frac{3^3}{3} - 6\cdot\frac{3^2}{2} + 11\cdot 3 - 6\ln|3|\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 6\cdot\frac{2^2}{2} + 11\cdot 2 - 6\ln|2|\right)\right) =$$

$14/3 - 12\ln(3/2)$. **Ответ:** $14/3 - 12\ln(3/2)$.

б) По определению несобственного интеграла имеем $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$. Определенный интеграл, стоящий под знаком предела, вычислим методом замены переменной:

$$\int\limits_0^b \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} arctgx = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \\ 0 \le x \le b, \alpha \le arctgx \le \beta \\ x = 0 \Rightarrow \alpha = arctg0 = 0 \\ x = b \Rightarrow \beta = arctgb \end{bmatrix} = \int\limits_0^{arctgb} \sqrt{t}dt = \left.\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{arctgb} = \frac{2}{3}(arctgb)^{3/2}$$

Тогда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{3}arctgb\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$.

Ответ: Несобственный интеграл сходится и равен $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$.

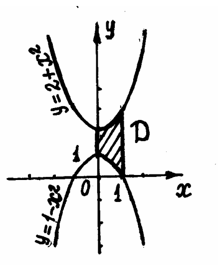
31-40. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками указанных функций: $y = 1 - x^2$, $y = 2 + x^2$, $x = 0$, $x = 1$

Площадь фигуры $D = \left\{\begin{matrix} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{matrix}\right\} = D_y$, *где* $f_1(x), f_2(x)$ *- непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле:* $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

Площадь фигуры $D = \left\{\begin{matrix} g_1(y) \le x \le g_2(y) \\ c \le y \le d \end{matrix}\right\} = D_x$ *где* $g_1(y), g_2(y)$ *- непрерывные на отрезке* $[c,d]$ *функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле:* $S = \int\limits_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy$.

Решение.

1) Изобразим фигуру D:



2) Представим D в виде $D_y = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 1 - x^2 \le y \le 2 + x^2 \end{matrix} \right\}$.

Если $D \ne D_y$ или $D \ne D_x$, то фигуру D прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид D_y или D_x. При этом площадь фигуры D находят как сумму площадей её частей.

3) Вычислим площадь:

$$S = \int_0^1 \left(\left(2 + x^2\right) - \left(1 - x^2\right)\right)dx = \int_0^1 \left(1 + 2x^2\right)dx = \left(x + 2\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $S = 5/3$.

41-50. Требуется найти общее решение простейшего ДУ 2-ого порядка $y'' = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение.

Общее решение простейшего ДУ второго порядка $y'' = f(x)$ находят, выполняя последовательно два интегрирования, и записывают в виде: $$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2 .$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка должно обязательно содержать две разные произвольные постоянные.

Данное уравнение дважды проинтегрируем. После первого интегрирования получим: $y' = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + C_1$. Интеграл вычислим (с точностью до постоянного слагаемого) методом интегрирования по частям. Получим:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x} \end{array}\right] = \ln x\cdot 2\sqrt{x}-\int 2\sqrt{x}\,\frac{dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\text{. Тогда } y' = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}+C_1.$$

После второго интегрирования получим: $y=\int(2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C_1)dx+C_2 \ = 2\int\sqrt{x}\ln x dx - 4\int\sqrt{x}\,dx + C_1\int dx + C_2$.

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого). Получим:

$$\int\sqrt{x}\ln x dx = \left[\begin{array}{c} \textit{вычислим} \\ \textit{методом} \\ \textit{интегрирования} \\ \textit{по частям} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\sqrt{x}dx \Rightarrow v=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{array}\right] =$$

$$\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}\cdot x^{3/2};$$

$$\int\sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}; \ \int dx = x.$$

Тогда $y = 2\cdot\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2}\right) - 4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C_1x + C_2 =$

$$= \frac{4}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{32}{9}x^{3/2} + C_1x + C_2.$$

Ответ: $y = \frac{4}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{32}{9}x^{3/2} + C_1x + C_2$.

51-60. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***классическое определение*** вероятности:

а) Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одного из кубиков появится шестерка.

б) В урне находятся 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом из урны вынимают 4 шара. Найти вероятности того, что среди вынутых шаров окажутся: «2 белых шара»; «не более одного белого шара»; «хотя бы один белый шар».

При классическом определении вероятность случайного события A определяется равенством: $P(A)=\dfrac{m(A)}{n}$, где $m(A)$ - число элементарных (далее неделимых и взаимно исключающих друг друга) исходов эксперимента, благоприятных появлению события A; n - общее число равновозможных элементарных исходов эксперимента. Равновозможность элементарных исходов обеспечивается такими условиями проведения эксперимента (опыта, испытания), при выполнении которых можно считать, что ни один из исходов не является объективно более возможным, чем другие.

Если событие A определяется словами «хотя бы один…», то непосредственное нахождение $P(A)$ по формуле классического определения вероятности приводит обычно к громоздким вычислениям. Проще сначала найти вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A и определяемого словами «ни один…», а затем, используя формулу для вероятностей противоположных событий: $P(A)=1-P(\overline{A})$, вычислить вероятность искомого события.

Для нахождения вероятности события по формуле $P(A)=\dfrac{m(A)}{n}$ необходимо:

***1)** Рассмотреть событие A, вероятность которого следует найти.*
***2)** Правильно определить, что является в данном испытании элементарным исходом.*
***3)** Найти общее число n элементарных исходов, предварительно выписав их все непосредственно. Если выписать все элементарные исходы не представляется возможным из-за их чрезмерного количества, то при подсчете их числа используют правила и формулы комбинаторики.*
***4)** Установить какое число $m(A)$ элементарных исходов данного испытания благоприятствуют появлению события A.*

Решение.

а) Рассмотрим событие $A=\{$**сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одного из кубиков появится шестерка**$\}$.

Элементарными исходами данного испытания (подбрасывание двух игральных кубиков) являются всевозможные комбинации очков: $1, 2, 3, 4, 5, 6$, которые могут появиться на верхних гранях двух кубиков.

Общее число элементарных исходов n данного испытания найдём, используя правило умножения комбинаторики.

Пусть α_1, α_2 – действия из некоторого конечного множества действий.
Правило умножения. *Если действие α_1 можно выполнить n_1 способами и, после каждого такого выполнения, действие α_2 можно выполнить n_2 способами, то последовательное выполнение пары действий α_1 и α_2 можно осуществить $n = n_1 \cdot n_2$ способами.*

На каждом игральном кубике 6 граней, поэтому возможны шесть исходов бросания каждого из них. Если испытание представить в виде последовательно выполняемых подбрасываний кубиков, то первое подбрасывание можно выполнить $n_1 = 6$ способами, второе подбрасывание - $n_2 = 6$ способами, тогда последовательно выполняемое подбрасывание двух кубиков можно осуществить $n = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 6 = 36$ способами.

Общее число элементарных исходов n можно найти и, выписав непосредственно все возможные исходы испытания:

(1,1)	*(1,2)*	*(1,3)*	*(1,4)*	*(1,5)*	*(1,6)*
(2,1)	*(2,2)*	*(2,3)*	*(2,4)*	*(2,5)*	*(2,6)*
(3,1)	*(3,2)*	*(3,3)*	*(3,4)*	*(3,5)*	*(3,6)*
(4,1)	*(4,2)*	*(4,3)*	*(4,4)*	*(4,5)*	*(4,6)*
(5,1)	*(5,2)*	*(5,3)*	*(5,4)*	*(5,5)*	*(5,6)*
(6,1)	*(6,2)*	*(6,3)*	*(6,4)*	*(6,5)*	*(6,6).*

Теперь найдём число элементарных исходов $m(A)$ данного испытания, благоприятных событию A, выписав их непосредственно. Такими исходами, очевидно, являются: (2,6); (4,6); (6,2); (6,4); (6,6). Их число $m(A) = 5$.

Тогда искомая вероятность $P(A) = 5/36 \approx 0.139$.

Ответ: $P(A) = 5/36 \approx 0.139$.

б) Рассмотрим события: $A = \{$**среди четырёх вынутых шаров - 2 белых**$\}$, $B = \{$**среди четырёх вынутых шаров – не более одного белого шара**$\}$, $C = \{$**среди четырёх вынутых шаров - хотя бы один белый шар**$\}$.

Элементарными исходами данного испытания (случайное вынимание четырех шаров) являются всевозможные комбинации по 4 шара из находящихся в урне 11 шаров.

Для подсчёта общего числа элементарных исходов n данного испытания и чисел $m(A), m(B), m(C)$ элементарных исходов, благоприятных событиям A, B, C, используем правила и формулы комбинаторики.

Пусть α_1, α_2 – действия из некоторого конечного множества действий.

Правило сложения. *Если действие α_1 можно выполнить n_1 способами, действие α_2 - другими n_2 способами, отличными от первых n_1, то выполнение одного из действий: или α_1, или α_2 (но не двух одновременно) можно осуществить $n = n_1 + n_2$ способами.*

Сочетаниями из n элементов по m *называются всевозможные комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только составом элементов. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего в одновременном неупорядоченном выборе без возвращения m элементов из n различных элементов, а их общее число C_n^m определяется формулой:*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}, \quad \text{где } n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n, \qquad 0! = 1.$$

Общее число элементарных исходов n данного испытания, очевидно, равно числу всевозможных неупорядоченных комбинаций по 4 шара из находящихся в урне 11 шаров, т.е. числу сочетаний C_{11}^4. Тогда:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\cdot(11-4)!} = \frac{11!}{4!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7!} = 330.$$

Подсчитаем теперь число элементарных исходов $m(A), m(B), m(C)$ благоприятных событиям A, B, C, соответственно.

Событие $A = \{$**среди четырёх вынутых шаров - 2 белых**$\}$ означает, что среди вынутых шаров – «2 белых и 2 черных шара». Следовательно, благоприятными событию A являются всевозможные комбинации по 4 шара (два белых и два черных шара) из находящихся в урне 11 шаров. Их число $m(A)$ найдём, используя правило умножения комбинаторики. Представим для этого выбор четырёх шаров в виде двух последовательно выполняемых действий: сначала выбор двух белых шаров из имеющихся в урне 6 белых шаров и затем выбор двух чёрных шаров из имеющихся в урне 5 чёрных шаров. Получим: $m(A) = C_6^2 \cdot C_5^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 15\cdot 10 = 150$. Тогда: $P(A) = \frac{150}{330} \approx 0.455$

Событие $B = \{$**среди четырёх вынутых шаров – не более одного белого шара**$\}$ означает, что среди вынутых шаров - или «один белый и три черных шара», или «четыре чёрных шара». Следовательно, благоприятствующими событию B являются всевозможные комбинации по 4 шара (один белый и три черных или четыре черных шара) из находящихся в урне 11 шаров. Их число $m(B)$ найдём, используя правила сложения и умножения комбинаторики. Сначала, используя правило умножения комбинаторики, найдём число способов выбрать один белый и три черных шара. Получим $C_6^1 \cdot C_5^3 = \frac{6!}{1!\cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 6 \cdot 10 = 60$. Затем, используя правило умножения комбинаторики, найдём число способов выбрать 4 чёрных шара. Получим $C_5^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5$. Теперь, используя правило сложения комбинаторики, найдём число $m(B)$ способов выбрать или один белый и три чёрных шара, или четыре чёрных шара. Получим $m(A) = C_6^1 \cdot C_5^3 + C_5^4 = 60 + 5 = 65$. Тогда $P(B) = 65/330 \approx 0.197$.

Событие $C = \{$**среди четырёх вынутых шаров-хотя бы один белый шар**$\}$ определяется словами «хотя бы один…». Прямое решение задачи, учитывая, что событие C означает, среди вынутых шаров: или «один белый и три черных шара», или «два белых и два черных шара», или «три белых и один черный шар», или «четыре белых шара», приводит к громоздким вычислениям. Поэтому сначала найдём вероятность противоположного события $\overline{C}$ =$\{$**среди вынутых четырёх шаров нет ни одного белого шара, т.е. все шары – черные**$\}$. Получим $m(\overline{C}) = C_5^4 = 5$, тогда $P(\overline{C}) = \frac{m(\overline{C})}{n} = \frac{5}{330}$. Затем по формуле $P(C) = 1 - P(\overline{C})$ найдём вероятность искомого события: $P(C) = 1 - (5/330) = 325/330 \approx 0.985$.

Ответ: $P(A) \approx 0.455$; $P(B) \approx 0.197$; $P(C) \approx 0.985$.

61-70. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***<u>формулы сложения и умножения вероятностей.</u>***

Экзаменационная сессия состоит из трёх экзаменов. Студент оценивает свои шансы успешно сдать экзамены следующим образом: вероятность сдать первый экзамен - 0.8, второй – 0.9, третий – 0.7. Найти вероятности того, что студентом будут успешно сданы: «все три экзамена», «по крайней мере два экзамена», «хотя бы один экзамен». Предполагается, что сдача экзаменов – независимые события.

Решение.

Сложным *называют событие, наблюдаемое в эксперименте и выражаемое через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций над событиями.*

Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется с помощью формул умножения вероятностей:

1) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$, $P(A) > 0$ *;*

2) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ *(для независимых событий)*

и формул сложения вероятностей:

3) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ *;*

4) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ *(для несовместных событий).*

События A *и* B *называют* ***несовместными****, если* $A \cdot B = \varnothing$ *. Несовместными событиями являются, например, элементарные исходы эксперимента.*

События A *и* B *, называются* ***независимыми****, если выполняется равенство* $P(A \mid B) = P(A)$ *, в противном случае они называются зависимыми. Часто, независимость событий определяется условиями проведения эксперимента.*

Для решения задач с использованием формул сложения и умножения вероятностей следует:

1) *рассмотреть «сложное» событие, вероятность которого нужно вычислить;*

2) *выразить «сложное» событие, посредством допустимых алгебраических операций, через наблюдаемые в том же эксперименте «простые» события, вероятности которых известны или легко определяются из условий задачи, например, по формуле классического определения вероятности;*

3) *вычислить вероятность «сложного» события с помощью формул сложения и умножения вероятностей, учитывая зависимость или независимость, совместность или несовместность составляющих его событий.*

Рассмотрим «сложные» события: $A = \{$**студент успешно сдаст все три экзамена**$\}$, $B = \{$**студент успешно сдаст по крайней мере два экзамена из трёх**$\}$, $C = \{$**студент успешно сдаст хотя бы один экзамен из трех**$\}$.

Выразим сначала «сложные» события A, B, C через «простые» события: $D_1 = \{$студент успешно сдаст первый экзамен$\}$, $D_2 = \{$студент успешно сдаст второй экзамен$\}$, $D_3 = \{$студент успешно сдаст третий экзамен$\}$, вероятности которых известны и равны: $P(D_1) = 0.8$, $P(D_2) = 0.9$, $P(D_3) = 0.7$. Затем вычислим вероятности $P(A), P(B), P(C)$, используя формулы сложения и умножения вероятностей, учитывая при этом зависимость и независимость, совместность и несовместность составляющих событий.

Событие A представим в виде $A = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$. Тогда, учитывая независимость событий D_1, D_2, D_3, по формуле умножения вероятностей для независимых событий получим: $P(A) = P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.7 = 0.504$.

Событие B означает, очевидно, что студент сдаст или все три экзамена, или только любые два экзамена из трёх. Следовательно:

$$B = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 + \overline{D_1} \cdot D_2 \cdot D_3 + D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot D_3 + D_1 \cdot D_2 \cdot \overline{D_3},$$

где $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \overline{D_3}$ - события, противоположные к событиям D_1, D_2, D_3: $\overline{D_1} = \{$студент не сдаст первый экзамен$\}$, $\overline{D_2} = \{$студент не сдаст второй экзамен$\}$, $\overline{D_3} = \{$студент не сдаст третий экзамен$\}$, вероятности которых:

$$P(\overline{D_1}) = 1 - P(D_1) = 0.2, \ P(\overline{D_2}) = 1 - P(D_2) = 0.1, \ P(\overline{D_3}) = 1 - P(D_3) = 0.3.$$

Тогда, учитывая несовместность событий $D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{D_3}$, $\overline{D_1} \cdot D_2 \cdot \overline{D_3}$, $\overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot D_3$, являющихся элементарными исходами эксперимента (экзаменационной сессии), а также независимость событий D_1, D_2, D_3, $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \overline{D_3}$, используя формулы сложения (для несовместных событий) и умножения вероятностей (для независимых событий), получим:

$$P(B) = P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) + P(\overline{D_1}) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) + P(D_1) \cdot P(\overline{D_2}) \cdot P(D_3) +$$
$$+ P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(\overline{D_3}) = 0.504 + 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 = 0.902$$

Событие C, определяемое словами «хотя бы один», означает, что студент сдаст или все три экзамена, или только любые два экзамена из трёх, или только любой один экзамен из трёх. Прямое вычисление вероятности данного события приводит к громоздким вычислениям. Поэтому, сначала найдём вероятность противоположного события $\overline{C} = \{$**студент не сдаст ни одного экзамена**$\}$, представляемого в виде $\overline{C} = \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{D_3}$. Учитывая независимость событий $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \overline{D_3}$, по формуле умножения вероятностей для независимых событий получим: $P(\overline{C}) = P(\overline{D_1}) \cdot P(\overline{D_2}) \cdot P(\overline{D_3}) = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.006$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.006 = 0.994$.

Ответ: $P(A) = 0.504$, $P(B) = 0.902$, $P(C) = 0.994$.

71-80. Требуется найти вероятности указанных событий, используя ***<u>формулу Бернулли;</u>***

В урне 15 белых и 10 черных шаров. Из урны вынимают подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров окажется не более двух белых.

Решение .

Схемой Бернулли *называют последовательность испытаний, удовлетворяющую условиям:* ***1)*** *результатом каждого испытания является один из* *двух возможных исходов: «успех» (появление некоторого события A) и «неудача»; **2)** испытания являются независимыми, т.е. вероятность «успеха» в каждом следующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний; **3)** вероятность «успеха» во всех испытаниях одинакова и равна $P(A)=p$.*

*Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k «успехов», определяется **формулой Бернулли**:*

$$P_n(k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\dots,n.$$

Следствием формулы Бернулли является формула: $P_n(k\ge 1)=1-(1-p)^n$ - вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли «успех» наступит хотя бы один раз.

Для решения задач с использованием формулы Бернулли следует:

***1)** установить, что эксперимент представляет собой схему Бернулли (вероятности событий, связанных с таким экспериментом, всегда можно выразить через вероятности $P_n(k)$, вычисляемые по формуле Бернулли);*

***2)** рассмотреть событие A, которое может наступить или не наступить в каждом испытании и вычислить его вероятность $p=P(A)$;*

***3)** рассмотреть событие B, вероятность которого нужно найти и которое состоит в том, что событие A в данном эксперименте появляется определённое число раз;*

***4)** найти $P(B)$, выразив её предварительно, через вероятности $P_n(k)$, вычисляемые по формуле Бернулли.*

Эксперимент (последовательный выбор пяти шаров из урны с неизменным составом шаров) представляет собой, очевидно, схему Бернулли.

Рассмотрим событие $A=\{$вынутый из урны шар – белый$\}$. Это событие происходит или не происходит при каждом выборе шара из урны с одной и той же вероятностью $p=P(A)=\dfrac{m(A)}{n}=\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}=0.6$.

Рассмотрим событие $B=\{$из пяти вынутых из урны шаров, белых - не более двух$\}$. Таким образом, событие B состоит в том, что в данном эксперименте событие A произойдёт $0,1$ или 2 раза.

Выразим $P(B)$ через $P_n(k)$-вероятности того, что событие A в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k раз: $P(B)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)$.

Вычислим вероятности $P_n(k)$ по формуле Бернулли:

$$P_5(0)=C_5^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5=1\cdot 1\cdot\frac{32}{3125}=0.01024,$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{16}{625} = 0.0768\,,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 10 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{8}{125} = 0.2304\,.$$

Тогда $P(B) = 0.01024 + 0.0768 + 0.2304 = 0.31744 \approx 0.32$.

Ответ: $P(B) \approx 0.32$ - вероятность того, что среди пяти вынутых шаров окажутся не более двух белых шаров.

81-90. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытания для каждого из приборов равна 0.9. Требуется: составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытанных приборов; построить многоугольник полученного распределения; вычислить её математическое ожидание MX и дисперсию DX.

Решение.

Закон распределения ДСВ удобно задавать рядом распределения. ***Рядом распределения*** *ДСВ называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ этой случайной величины и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \ldots$.*

Случайная величина X – число испытанных приборов, может, очевидно, принимать значения: $1, 2, 3, 4, 5$. Вычислим вероятности этих значений $p_i = P(X = x_i)$, используя формулы сложения и умножения вероятностей.

Для вычисления вероятностей p_i могут, в зависимости от условий задачи, использоваться также формулы классического определения вероятности и Бернулли.

Рассмотрим события $A_i = \{i$ **-ый испытанный прибор – надёжный**$\}$ ($i = 1,2,3,4,5$), вероятность которых одинакова и равна $P(A_i) = 0.9$. Противоположными к событиям A_i являются события $\overline{A_i} = \{i$ **-ый испытанный прибор–ненадёжный**$\}$, вероятность их одинакова и равна $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 0.1$.

Выразим события $X = x_i$, где $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, через события A_i и $\overline{A_i}$:

$\{X = 1\} = \overline{A_1} = \{$испытывался один прибор$\}$,

$\{X = 2\} = A_1 \cdot \overline{A_2} = \{$испытывались два прибора$\}$,

$\{X=3\}=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3=$ {испытывались три прибора},

$\{X=4\}=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A}_4=$ {испытывались четыре прибора},

$\{X=5\}=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot(\overline{A}_5+A_5)=$ {испытывались все пять приборов}. Очевидно, все пять приборов будут испытаны только при условии, что первые четыре оказались надежными, причем они будут испытаны при любом исходе пятого испытания: $\overline{A}_5$ или A_5.

Вычислим вероятности $p_i=P(X=x_i)$, используя формулы умножения вероятностей для независимых, по условиям задачи, событий A_i и $\overline{A}_i$:

$p_1=P(X=1)=P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0.1$,

$p_2=P(X=2)=P(A_1\cdot\overline{A_2})=P(A_1)\cdot(1-P(A_2))=0.9\cdot 0.1=0.09$,

$p_3=P(X=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3})=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot(1-P(A_3))=0.9\cdot 0.9\cdot 0.1=0.081$

$$p_4=P(X=4)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A_4})=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot(1-P(A_4))=0.9^3\cdot 0.1=0.0729.$$

$$p_5=P(X=5)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot(A_5+\overline{A_5}))=$$
$$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5+\overline{A}_5)=0.9^4\cdot 1=0.6561.$$

Если при вычислении вероятностей p_i производится округление их значений, то округление выполняется таким образом, чтобы $\sum_i p_i=1$.

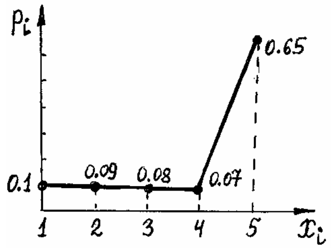
Тогда ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

.

Для наглядности закон распределения ДСВ изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_i(x_i,p_i)$ и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру и называют ***многоугольником распределения.***

Построим многоугольник полученного распределения:



Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называется число $MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n$.

Вычислим математическое ожидание MX:

$$MX=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1\cdot 0.1+2\cdot 0.09+3\cdot 0.081+\ 4\cdot 0.0729+5\cdot 0.6561=4.0951\approx 4.10 .$$

Дисперсией случайной величины *X называется неотрицательное число $DX=M(X-MX)^2$. Дисперсию дискретной случайной величины X вычисляют по формулам: $DX=\sum_i (x_i-MX)^2 p_i$ или $DX=\sum_i x_i^2 p_i-(MX)^2$.*

Дисперсию DX вычислим по формуле $DX=M(X^2)-(MX)^2$, где

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 p_i = 1^2\cdot 0.1+2^2\cdot 0.09+$$

$$+3^2\cdot 0.081+4^2\cdot 0.0729+5^2\cdot 0.6561=18.7579\approx 18.76 .$$

Тогда $DX\approx 18.76-(4.10)^2=1.95$.

Ответ:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

, $MX\approx 4.10$, $DX\approx 1.95$.

91-100. Найти функцию плотности вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & 1<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$; вычислить её математическое ожидание MX, дисперсию DX и вероятность $P(X\in(5/4,3/2))$.

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать функцией плотности вероятностей $f(x)$ - неотрицательной и интегрируемой в бесконечных пределах функцией.
Функция плотности вероятностей $f(x)$ в точках, где $F(x)$ дифференцируема, определяется равенством: $f(x)=F'(x)$. В точках, где $F(x)$ не дифференцируема, $f(x)$ определяется произвольным образом, чаще всего по непрерывности слева или справа.
Непрерывная функция, задаваемая в области своего определения несколькими аналитическими выражениями, может оказаться не дифференцируемой в точках, в окрестности которых она задаётся разными аналитическими выражениями.

Решение.

Найдём функцию плотности вероятностей $f(x)$, как производную от функции распределения $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & 1<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$. Учитывая, что: $(0)'=0$, $\left(\dfrac{x^2-x}{2}\right)'=\dfrac{2x-1}{2}$, $(1)'=0$, получим $f(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{2x-1}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$.

В точках $x=1$ и $x=2$, являющихся концами промежутка, где $f(x)>0$, и в которых функция $F(x)$ не дифференцируема, функцию плотности вероятностей $f(x)$, определили таким образом, чтобы на концах промежутка она была непрерывной справа (в точке $x=1$) и слева (в точке $x=2$).

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Вычислим математическое ожидание MX:

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int_{1}^{2} x\cdot\frac{(2x-1)}{2}dx+\int_{2}^{+\infty} x\cdot 0dx=0+\int_{1}^{2}\left(x^2-\frac{x}{2}\right)dx+0=$$

$$=\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\right|_1^2=\left(\frac{8}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{19}{12}\approx 1.58 .$$

Дисперсию непрерывной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx \text{ или } DX=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(MX)^2 .$$

Дисперсию DX вычислим по формуле $DX=M(X^2)-(MX)^2$, где

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1} x^2\cdot 0dx+\int_{1}^{2} x^2\cdot\frac{(2x-1)}{2}dx+\int_{2}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx=$$

$$=0+\int_{1}^{2}\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)dx+0=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\right|_1^2=\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{31}{12}\approx 2.58 .$$

Тогда $DX\approx 2.58-(1.58)^2\approx 0.08$.

Для непрерывной случайной величины X справедлива формула:

$$P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)=P(a<X<b)=$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx .$$

Вероятность $P(X\in(5/4\,,3/2))$ вычислим по формуле:

$$P(X\in(5/4\,,3/2))==F\left(\frac{5}{4}\right)-F\left(\frac{3}{2}\right)=\left.\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\right|_{x=3/2}-\left.\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\right|_{x=5/4}=$$

$$=\frac{(3/2)^2-(3/2)}{2}-\frac{(5/4)^2-(5/4)}{2}=\frac{7}{32}\approx 0.22 .$$

Ответ: $f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{2x-1}{2} & 1\le x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$, $MX\approx 1.58$, $DX\approx 0.08$,

$P(X\in(5/4\,,3/2))\approx 0.22$.

101-110. Дана выборка объема $n = 15$ **:**

23	**23**	**21**	**20**	**20**	**23**	**23**	**25**	**23**	**20**	**20**	**24**	**21**	**25**	**21**

Требуется: **а)** построить вариационный и дискретный статистический ряды; **б)** вычислить числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию); **в)** построить полигон частот.

Решение.

Вариационным рядом *выборки* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *называется такой способ её записи, при котором элементы выборки упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности* $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, *где* $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$. *Разность* $x_{(n)} - x_{(1)} = \widehat{R}$ *называется* ***размахом выборки***.

Различные значения x_i, $i = \overline{1,k}$ $(k \le n)$, *называются* ***вариантами.*** *Число* n_i *повторений варианты* x_i *в выборке называется её* ***частотой.***

Дискретным статистическим рядом *называется упорядоченная в порядке возрастания значений вариант* x_i *последовательность пар* (x_i, n_i), $i = \overline{1,k}$. *Обычно его записывают в виде таблицы, первая стока которой содержит варианты* x_i, *а вторая их частоты.*

Полигоном частот *называется фигура, расположенная под ломаной линией с вершинами в точках* $M_i(x_i, n_i)$.

а) Построим вариационный ряд выборки, расположив элементы выборки в порядке возрастания их значений. Получим:

20	**20**	**20**	**20**	**21**	**21**	**21**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**24**	**25**	**25**

Построим дискретный статистический ряд и запишем его в виде таблицы, в первой строке которой расположим различные значения элементов выборки в порядке их возрастания, а во второй соответствующие им частоты. Получим:

x_i	20	21	23	24	25
n_i	4	3	5	1	2

.

Если выборка записана в виде дискретного статистического ряда

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

, где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, *то:*

среднее арифметическое выборки $\overline{x}$ *вычисляют по формуле* $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$,

дисперсию выборки $\hat{\sigma}^2$ *- по формуле* $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i$ *или* $\hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$, *где* $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$.

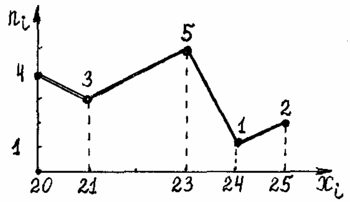
б) Вычислим числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\hat{R}$, $\overline{x}$, $\hat{\sigma}^2$. Получим: $x_{\min} = 20$, $x_{\max} = 25$, $\hat{R} = x_{\max} - x_{\min} = 25 - 20 = 5$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{15}\cdot(20\cdot 4 + 21\cdot 3 + 23\cdot 5 + 24\cdot 1 + 25\cdot 2) = \frac{332}{15} \approx 22.13,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \frac{1}{15}\cdot\left(20^2\cdot 4 + 21^2\cdot 3 + 23^2\cdot 5 + 24^2\cdot 1 + 25^2\cdot 2\right) = \frac{7394}{15} \approx 492.93,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \approx 492.93 - (22.13)^2 \approx 492.93 - 489.74 = 3.19.$$

в) Построим полигон частот. Для его построения в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс откладываются варианты x_i, по оси ординат – частоты n_i, начало системы координат совмещено с точкой $(x_{\min}, 0)$, изобразим точки $M_i(x_i, n_i)$ и соединим их отрезками.



Ответ: а) Вариационный ряд:

20	20	20	20	21	21	21	23	23	23	23	23	24	25	25

Дискретный статистический ряд:

x_i	20	21	23	24	25
n_i	4	3	5	1	2

;

б) $x_{\min} = 20$, $x_{\max} = 25$, $\hat{R} = 5$, $\overline{x} \approx 22.13$, $\hat{\sigma}^2 \approx 3.19$.

111-120. Для приведённой выборки:

Данные о содержании меди (в %) в 60 образцах сплава:

Содержание меди	**52-56**	**56-60**	**60-64**	**64-68**	**68-72**
Число образцов сплава	**3**	**9**	**18**	**14**	**16**

требуется: **а)** вычислить числовые характеристики группированной выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$ (размах), $\overline{x}$ (среднее арифметическое), $\widehat{\sigma}^2$ (дисперсию);
б) построить гистограмму частот.

Решение.

Если выборка записана в виде интервального статистического ряда

J_i	J_1	J_2	$\cdots$	J_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

, где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$*, то:* ***среднее арифметическое выборки*** $\overline{x}$ *вычисляют по формуле* $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i n_i$*,* ***дисперсию выборки*** $\widehat{\sigma}^2$ *- по формуле* $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\widetilde{x}_i - \overline{x})^2 n_i$ *или* $\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$*, где* $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i^2 n_i$*,* $\widetilde{x}_i$ *- середина интервала* J_i.

а) Вычислим числовые характеристики выборки: $x_{\min}$, $x_{\max}$, $\widehat{R}$, $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$.
Получим: $x_{\min} = 52$, $x_{\max} = 72$, $\widehat{R} = x_{\max} - x_{\min} = 72 - 52 = 20$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i n_i = \frac{1}{60}\cdot\left(54\cdot 3 + 58\cdot 9 + 62\cdot 18 + 66\cdot 14 + 70\cdot 16\right) = \frac{3844}{60} \approx 64.07,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i^2 n_i = \frac{1}{60}\cdot\left(54^2\cdot 3 + 58^2\cdot 9 + 62^2\cdot 18 + 66^2\cdot 14 + 70^2\cdot 16\right) =$$

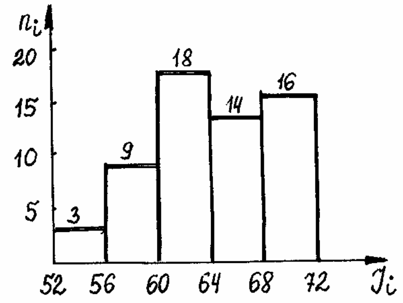
$$= 247600/60 \approx 4126.67,$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \approx 4126.67 - (64.07)^2 \approx 4126.67 - 4104.96 = 21.71.$$

Гистограммой частот *называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна частоте* n_i, $i = \overline{1,k}$*. Если длины всех интервалов одинаковы и равны* h*, то высоты прямоугольников равны* n_i / h.

Часто, при построении гистограмм частот по интервалам равной длины, высоту прямоугольников выбирают равной частоте.

б) Построим гистограмму частот. Для этого в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс откладываются интервалы J_i, по оси ординат – частоты n_i, начало системы координат совмещено с точкой $(x_{\min}, 0)$, на интервалах J_i, как на основаниях, построим прямоугольники высоты n_i.



Ответ: а) $x_{\min} = 52$, $x_{\max} = 72$, $\hat{R} = 20$, $\bar{x} \approx 64.07$, $\hat{\sigma}^2 \approx 21.71$.

6.2. Краткие теоретические сведения.

<u>Семестр 1.</u>

Тема. <u>Определители.</u>

Квадратной матрицей порядка n называется квадратная таблица из чисел a_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, состоящая из n строк и n столбцов. У квадратной матрицы различают главную диагональ: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ и побочную диагональ: $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$. Любой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, составленных определённым образом из элементов a_{ij} матрицы A, называемое определителем матрицы. Кратко обозначается $|A|$, Δ.

Определителем 1-ого порядка называется число $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

Определителем 2-ого порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем 3-его порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель M_{ij}, полученный из определителя $|A|$ вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}=\begin{cases} M_{ij} & \text{если } (i+j)-\text{чётное число} \\ -M_{ij} & \text{если } (i+j)-\text{нечётное число} \end{cases}.$$

Определителем порядка n называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot A_{1k}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** i***-ой строке*** $(i=\overline{1,n})$ называется соотношение:

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** j***-ому столбцу*** $(j=\overline{1,n})$ называется соотношение:

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

Определители обладают следующими ***свойствами*:**

1) определитель не изменится при замене всех его строк столбцами с теми же номерами;

2) определитель изменит знак на противоположный, если переставить местами любые две строки (два столбца) определителя;

3) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

4) определитель равен нулю, если он содержит нулевую строку (столбец), две одинаковые или пропорциональные строки (столбца);

5) определитель не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число;

6) определитель треугольного вида (когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей равны нулю) равен произведению диагональных элементов: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Тема. Матрицы.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, состоящая из m строк и n столбцов. Если необходимо указать размеры матрицы, то пишут $A_{m \times n}$.

Если $m = n$, то матрица A называется ***квадратной***.

Нулевой называется матрица O, все элементы которой равны нулю, например: $O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ***Единичной*** называется квадратная матрица E, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, например: $E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ***Треугольной*** называется квадратная матрица A, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю, например: $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. ***Трапециевидной (ступенчатой)*** назовём матрицу $A_{m\times n}$ $(m < n)$, все элементы которой, расположенные ниже элементов $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ равны нулю, например: $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называются ***равными*** и пишут $A = B$, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Матрицы можно транспонировать, складывать, вычитать, умножать на число, умножать на другую матрицу.

Транспонированной к матрице $A_{m\times n}$ называется матрица $A^{\mathrm{T}}_{n\times m}$, столбцами которой являются соответствующие строки матрицы $A_{m\times n}$.

Суммой (разностью) матриц A и B одного размера $m \times n$, называется матрица $C = A \pm B$ того же размера, для которой:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ ***на число*** α называется матрица $B = \alpha A$ того же размера, для которой: $b_{ij} = \alpha a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k}$, каждый элемент которой c_{ij} вычисляется по правилу:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\ ,\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,k}.$$

Операция умножения матрицы на матрицу определена не для всех матриц, а только для таких у которых число столбцов левой матрицы A равно числу строк правой матрицы B. Такие матрицы называются согласованными для умножения. Поэтому прежде чем выполнять данную операцию следует: **1)** проверить их согласованность для умножения; **2)** определить размерность матрицы-произведения: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$. Особенность операции умножения матриц состоит в том, что в общем случае: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

4) вычёркивание нулевой строки (столбца).

Матрицы A и B, полученные одна из другой в результате элементарных преобразований называются ***эквивалентными*** и пишут $A \Leftrightarrow B$.

Обратной к квадратной матрице A порядка n, называется матрица A^{-1} того же порядка, если: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица порядка n.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель $|A| \neq 0$. Обратная матрица всегда существует для невырожденных матриц.

Одним из методов вычисления обратной матрицы является:

Метод присоединённой матрицы. Если A-невырожденная матрица, то $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \hat{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, где $\hat{A}$ - присоединённая матрица, для которой: $\hat{a}_{ij} = A_{ji}$, где $i, j = 1, \ldots, n$. Здесь A_{ji} - алгебраические дополнения элементов a_{ji} матрицы A.

В частности, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$

Матричными называются уравнения вида: $AX = C$, $XA = C$, $AXB = C$, где матрицы A, B, C - известны, матрица X- неизвестна. Если квадратные матрицы A и B - невырожденные, то решения матричных уравнений записываются, соответственно, в виде: $X = A^{-1}C$, $X = CA^{-1}$, $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Тема. Системы линейных алгебраических уравнений.

…Система уравнений вида: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ называется ***системой m линейных уравнений с n неизвестными***. Числа a_{ij} называются коэффициентами, b_i - свободными членами, x_j - неизвестными системы.

В матричной форме система имеет вид: $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Здесь A-матрица системы, X-матрица-столбец неизвестных, B-матрица-столбец свободных членов.

Если $B = O$, то система называется ***однородной,*** в противном случае ***неоднородной.***

Система, матрица A которой является треугольной с диагональными элементами $a_{ii} \neq 0$, называется ***треугольной.*** Система, матрица A которой является трапециевидной, называется ***трапециевидной.***

Решением системы называется всякий упорядоченный набор чисел $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, обращающий каждое уравнение системы в равенство. Совокупность всех решений называется ***множеством решений системы***.

Система называется ***совместной***, если она имеет, по крайней мере, одно решение; ***определённой***, если она имеет только одно решение; ***неопределённой***, если она имеет бесконечно много решений; ***несовместной,*** если она не имеет решений.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Треугольная система является определённой, трапециевидная система – неопределённой.

Две системы называются ***эквивалентными***, если множества их решений совпадают.

Элементарными преобразованиями систем уравнений называются:

1) перестановка уравнений;

2) перестановка местами слагаемых $a_{ij} \cdot x_j$ в каждом из уравнений системы;

3) умножение уравнения на число, отличное от нуля;

4) прибавление к уравнению другого, умноженного на любое число;

5) вычёркивание уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Основными точными методами решения систем линейных уравнений являются методы: Крамера, обратной матрицы и Гаусса.

Если число уравнений в системе m совпадает с числом неизвестных n и определитель матрицы системы $\Delta = |A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти:

а) ***методом Крамера*** по формулам: $x_j = \Delta_j \big/ \Delta$, $j = \overline{1, n}$, где Δ_j - определитель, получаемый из определителя матрицы системы Δ заменой j-ого столбца на столбец свободных членов;

б*)* ***методом обратной матрицы*** по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Методом Гаусса находят решение произвольной системы линейных уравнений. Метод состоит в приведении системы уравнений, с помощью элементарных преобразований, к системе специального вида, эквивалентной исходной, решение которой очевидно. Преобразования по методу Гаусса выполняют в два этапа. Первый этап называют прямым ходом, второй - обратным.

В результате **прямого хода** выясняют: совместна или нет система и если совместна то, сколько имеет решений - одно или бесконечно много. Преобразования прямого хода выполняют, как правило, над расширенной матрицей системы $\widetilde{A} = (A \mid B)$, которую получают, приписывая справа к матрице системы A столбец свободных членов B. В результате элементарных преобразований строк и перестановкой столбцов, матрица системы A должна быть приведена к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. При этом, система уравнений, матрица которой A', является треугольной с диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0 \ \ (i = 1,2,...,n)$, будет иметь единственное решение; система уравнений, матрица которой A', является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0 \ \ (i = 1,2,...,k, \quad \text{где } k < n)$, будет иметь бесконечно много решений. Если, при выполнении преобразований расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появится строка $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \mid b' \end{pmatrix}$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.

В результате **обратного хода** находят решение системы. Преобразования обратного хода часто выполняют непосредственно над уравнениями системы, соответствующей последней расширенной матрице $\widetilde{A}'$ прямого хода. В случае единственного решения, его получают, находя последовательно значения всех неизвестных из уравнений системы, начиная с последнего.

Тема. Векторы.

Арифметическим вектором называют упорядоченную совокупность из n чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначают $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа x_i называют ***компонентами*** вектора $\overline{x}$, число компонент называют его ***размерностью***.

Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называют ***равными***, если они одинаковой размерности и их соответствующие компоненты равны: $x_i = y_i, i = \overline{1, n}$.

Суммой векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ одной размерности, называют вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ той же размерности, для которого: $z_i = x_i + y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Произведением вектора $\overline{x}$ ***на число*** α называют вектор $\overline{y} = \alpha \overline{x}$ той же размерности, для которого: $y_i = \alpha x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие определённым требованиям (аксиомам) называют ***векторным пространством*** и обозначают R^n.

Скалярным произведением двух арифметических векторов $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ и $\overline{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ называют число:

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n .$$

Два вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называют ***ортогональными***, если $\overline{x}\cdot\overline{y}=0$.

Вектором (***геометрическим***) называется направленный отрезок, задаваемый упорядоченной парой точек (началом и концом вектора). Обозначают вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{a}$. Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной*** и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $\overline{a}$. ***Углом между векторами*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ называется угол $\varphi=(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b})$, $0\le\varphi\le\pi$, на который следует повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора, при условии, что их начала совпадают. ***Проекцией вектора*** $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ называется число $пр_{\overline{b}}\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\cos(\overline{a},\overset{\wedge}{}\overline{b})$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются ***компланарными***, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными*** и пишут $\overline{a}=\overline{b}$, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***противоположными*** и пишут $\overline{a}=-\overline{b}$, если они коллинеарны, направлены в разные стороны и имеют равные длины.

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ и конец вектора $\overline{b}$, при условии, что конец вектора $\overline{a}$ совпадает с началом вектора $\overline{b}$ (***правило треугольника***). ***Произведением вектора*** $\overline{a}$ ***на действительное число*** λ называется вектор $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$:
1) коллинеарный вектору $\overline{a}$; **2)** имеющий длину $|\overline{b}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$; **3)** направленный одинаково с вектором $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно, если $\lambda<0$.

Ортом вектора $\overline{a}$, называется вектор $\overline{a}^0$, имеющий единичную длину и направление вектора $\overline{a}$: $\overline{a}^0=\overline{a}/|\overline{a}|$.

Базисом в пространстве R^3 называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов, ***базисом на плоскости*** R^2 – упорядоченная пара неколлинеарных векторов, ***базисом на прямой*** R – любой ненулевой вектор на этой прямой. Базис, в котором все векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину, называется ***ортонормированным***. Векторы ортонормированного базиса обозначаются: $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$, и называются ***базисными ортами***. Различают правый и левый ортонормированные базисы. Базис $(\bar{i}, \bar{j})$ - называется правым, если кратчайший поворот от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ совершается против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый. Базис $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ - называется правым, если из конца вектора $\bar{k}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{i}$ к $\bar{j}$ виден совершающимся против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый.

Условием коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство: $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, где λ - некоторое число. ***Условием компланарности векторов*** $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ является равенство: $\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$, где α, β - некоторые числа.

Всякий геометрический вектор может быть разложен единственным образом по векторам базиса, коэффициенты разложения называются при этом ***координатами вектора*** в данном базисе. Например, если $B_{R^3} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ - базис R^3 и $\bar{a} \in R^3$, то всегда существует единственное разложение: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \alpha_3 \bar{b}_3$, где числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - координаты вектора $\bar{a}$ в базисе B_{R^3}, при этом пишут $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_{R^3}}$. Если в R^3 зафиксирован ортонормированный базис $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ и $\bar{a} \in R^3$, то равносильны записи: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \bar{k}$ и $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (*в записи вектора в координатной форме ортонормированный базис не указывают*).

Представление геометрических векторов в координатной форме, позволяет выполнять действия над ними, как над арифметическими векторами:

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3);$$

$$\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3).$$

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называется совокупность точки O (начало координат) и правого ортонормированного базиса $\left\langle O, (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \right\rangle$ и обозначается $Oxyz$. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***координатными осями:*** первая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются ***координатными плоскостями***. Аналогично вводится система координат на плоскости: $\left\langle O,(\bar{i},\bar{j})\right\rangle = Oxy$.

Пусть M - произвольная точка пространства, в котором введена система координат $\left\langle O,(\bar{i},\bar{j},\bar{k})\right\rangle = Oxyz$. ***Радиус-вектором точки*** M называется вектор $\overline{OM}$, который всегда единственным образом можно представить в виде: $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x,y,z)$. Числа x,y,z, являющиеся координатами радиус-вектора, совпадают с проекциями вектора $\overline{OM}$ на базисные орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (на координатные оси Ox, Oy и Oz). ***Координатами точки*** M в системе координат $Oxyz$ называются координаты её радиус-вектора $\overline{OM}$ и пишут $M(x,y,z)$. В свою очередь, координаты точки $M(x,y,z)$ полностью определяют её радиус-вектор $\overline{OM} = (x,y,z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Всякий геометрический вектор $\bar{a} \in R^3$ в системе координат $Oxyz$, всегда можно представить как радиус-вектор некоторой точки и записать в виде: $\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k} = (x_a, y_a, z_a)$.

Длина $|\bar{a}|$ вектора $\bar{a}$, заданного координатами $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$, определяется формулой: $|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$. ***Направляющими косинусами вектора*** $\bar{a}$ называются числа: $\cos\alpha = \cos(\bar{a},\hat{Ox}) = \dfrac{x_a}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \cos(\bar{a},\hat{Oy}) = \dfrac{y_a}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \cos(\bar{a},\hat{Oz}) = \dfrac{z_a}{|\bar{a}|}$, при этом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты вектора $\overline{AB}$, заданного точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяются по формуле: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. ***Расстояние*** $\rho(A,B)$ ***между точками*** $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяется как длина вектора $\overline{AB}$ и находится по формуле:

$$\rho(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Координаты точки $C(x_C, y_C, z_C)$ ***делящей отрезок*** AB ***пополам*** находятся по формулам: $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, $z_C = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b})$. Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ **;** **2)** $(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$ где λ - число**;**

3) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ **;** **4)** $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$

5) $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$**;** **6)** $\overline{i}\cdot\overline{j}=0$**,** $\overline{i}\cdot\overline{k}=0$**,** $\overline{j}\cdot\overline{k}=0$, $\overline{i}^2=1$, $\overline{j}^2=1$, $\overline{k}^2=1$.

Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами $\overline{a}=(x_a,y_a,z_a)$, $\overline{b}=(x_b,y_b,z_b)$ скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b.$$

Скалярное произведение применяют: **1)** для вычисления угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по формуле: $cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b})=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$; **2)** для вычисления проекции вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ по формуле: $np_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}$; **3)** в качестве условия перпендикулярности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Тема. <u>Линии на плоскости.</u>

Нормальным вектором прямой L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{N}$ перпендикулярный данной прямой. ***Направляющим вектором прямой*** L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{q}$ параллельный данной прямой.

Прямая L ***на плоскости*** в системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax+By+C=0$ - ***общее уравнение*** прямой, где $(A,B)=\overline{N}$ - нормальный вектор прямой;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N}=(A,B)$;

3) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q}=(l,m)$ (***каноническое уравнение***);

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$;

5) $y=\begin{cases} y_0+k(x-x_0) \\ kx+b \end{cases}$ - уравнения прямой ***с угловым коэффициентом*** $k=tg\alpha$, где $M_0(x_0,y_0)$ - точка через которую прямая проходит; α ($-\pi/2<\alpha<\pi/2$) – угол, который прямая составляет с осью Ox; b - длина отрезка (со знаком $\pm$), отсекаемого прямой на оси Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

6) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ **-** уравнение прямой ***в отрезках,*** где a и b - длины отрезков (со знаком $\pm$), отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

Расстояние от точки $M^*(x^*,y^*)$ ***до прямой*** L, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$ на плоскости, находится по формуле:

$$\rho(M^*,L)=\frac{|Ax^*+By^*+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Угол $\varphi=(L_1,\hat{\ }L_2)$**,** ($0\le\varphi\le\pi/2$) ***между прямыми*** L_1 и L_2, заданными общими уравнениями или уравнениями с угловым коэффициентом, находится по одной из следующих формул:

$$\cos\varphi=|\cos(\overline{N}_1,\overline{N}_2)|=\frac{|\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2|}{|\overline{N}_1|\cdot|\overline{N}_2|}; \qquad tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

$L_1\parallel L_2$, если $\overline{N}_1\parallel\overline{N}_2\Rightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ или $k_1=k_2$.

$L_1\perp L_2$, если $\overline{N}_1\perp\overline{N}_2\Rightarrow\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2=0\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ или $k_1k_2=-1$

Координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 находятся как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$.

Тема. **<u>Множества. Числовые множества. Функции.</u>**

Под ***множеством*** понимают некоторую совокупность объектов любой природы, различимых между собой и мыслимую как единое целое. Объекты, составляющие множество называют его ***элементами***. Множество может быть бесконечным (состоит из бесконечного числа элементов), конечным (состоит из конечного числа элементов), пустым (не содержит ни одного элемента). Множества обозначают: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$, а их элементы: $a, b, c, ..., x, y, z, ...$. Пустое множество обозначают $\varnothing$.

Множество B называют ***подмножеством*** множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A и пишут $B \subset A$.

Множества A и B называют ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов и пишут $A = B$. Два множества A и B будут равны тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество U называют ***универсальным*** (в рамках данной математической теории), если его элементами являются все объекты, рассматриваемые в данной теории.

Множество можно задать: **1)** перечислением всех его элементов, например: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (только для конечных множеств); **2)** заданием правила P определения принадлежности элемента u универсального множества U, данному множеству A: $A = \{u \in U \mid P(u)\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{u \in U \mid u \in A \text{ или } u \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \notin B\}.$$

Дополнением множества A (до универсального множества U) называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

Два множества A и B называются ***эквивалентными*** и пишут $A \sim B$, если между элементами этих множеств может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Множество A называется ***счётным***, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел N: $A \sim N$. Пустое множество по определению относится к счётным.

Действительным (вещественным) ***числом*** называется бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком «+» или «$-$». Действительные числа отождествляют с точками числовой прямой.

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется неотрицательное число: $|x|=\begin{cases} -x, & \text{если } x<0 \\ x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$

Множество X называется ***числовым***, если его элементами x являются действительные числа. Числовыми ***промежутками*** называются множества чисел: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty.,+\infty)$.

Множество всех точек x на числовой прямой, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ - сколь угодно малое число, называется ε***-окрестностью*** (или просто окрестностью) точки x_0 и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$. Множество всех точек x условием $|x|>\mathrm{E}$, где $\mathrm{E}>0$ - сколь угодно большое число, называется E***-окрестностью*** (или просто окрестностью) бесконечности и обозначается $O_\mathrm{E}(\infty)$.

Величина, сохраняющая одно и тоже числовое значение, называется ***постоянной.*** Величина, принимающая различные числовые значения, называется ***переменной. Функцией*** f называется правило, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие одно вполне определённое число $y \in Y$, и пишут $y=f(x)$. Множество X называется ***областью определения*** функции, Y - ***множеством (***или областью***) значений*** функции, $x \in X$ - ***аргументом***, $y \in Y$ - ***значением функции***. Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y=f(x)$ называется множество D значений аргумента x, для которого данная формула имеет смысл. ***Графиком функции*** $y=f(x)$, $x \in D$ в прямоугольной системе координат Oxy, называется множество всех точек плоскости с координатами $(x,f(x))$, $x \in D$.

Функция $f(x)$ называется ***чётной*** на множестве X, симметричном относительно точки $x=0$, если для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(-x)=f(x)$ и ***нечётной***, если выполняется условие $f(-x)=-f(x)$. В противном случае $f(x)$ - функция общего вида или ***ни чётная, ни нечётная***.

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** на множестве X, если существует число $T \neq 0$ (***период функции***), такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(x+T)=f(x)$. Наименьшее число $T>0$ называется основным периодом.

Функция $f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** (***убывающей***) на множестве X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует число $M > 0$, такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $|f(x)| \leq M$. В противном случае функция - ***неограниченная***.

Обратной к функции $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ называется такая функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена на множестве Y и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $f(x) = y$. Для нахождения функции $x = f^{-1}(y)$, обратной к функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является строго монотонной на X, то она всегда имеет обратную, при этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Функция $y = f(x)$, представляемая в виде $y = f(x) = F(\varphi(x))$, где $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ - некоторые функции такие, что область определения функции $F(u)$ содержит всё множество значений функции $\varphi(x)$, называется ***сложной функцией*** независимого аргумента x. Переменную u называют при этом промежуточным аргументом. Сложную функцию $f(x) = F(\varphi(x))$ называют также композицией функций F и φ, и пишут: $f = F \circ \varphi$.

Основными элементарными функциями считаются: ***степенная*** функция $y = x^{\alpha}$, ***показательная*** функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***логарифмическая*** функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***тригонометрические*** функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, ***обратные тригонометрические*** функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$. ***Элементарной*** называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их арифметических операций и композиций.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-b/(2a),\, c - b^2/(4a)\right)$, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$ или вниз, если $a < 0$.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить её область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них.

Тема. **Числовые последовательности и ряды. Предел последовательности. Предел функции и непрерывность.**

Если каждому натуральному числу n по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно вполне определённое действительное число $x_n = f(n)$, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Кратко обозначают (x_n). Число x_n называется ***общим членом последовательности***. Последовательность называют также функцией натурального аргумента. Последовательность всегда содержит бесконечно много элементов, среди которых могут быть равные.

Число a называется ***пределом последовательности*** (x_n), и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность (x_n), имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***.

Последовательность (x_n) называется: **1)** ***убывающей***, если $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$; **2)** ***возрастающей***, если $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$; **3)** ***неубывающей***, если $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le \dots$; **4)** ***невозрастающей***, если $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n \ge \dots$. Все вышеперечисленные последовательности называются ***монотонными***.

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется условие: $|x_n| \le M$. В противном случае последовательность - ***неограниченная***.

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел (**теорема Вейерштрасса)**.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно большой*** (сходящейся к бесконечности), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Числом e называется предел последовательности (x_n), где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Постоянную $e = 2.718281\dots.$ называют неперовым числом. Логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом числа x и обозначается $\log_e x = \ln x$.

Выражение вида $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, где $u_1,u_2,\ldots$- последовательность чисел, называется ***числовым рядом*** и обозначатся $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Сумма $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ n первых членов ряда называется n***-ой частичной суммой*** ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется ***сходящимся***, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ и ***расходящимся***, если предел не существует. Число S называется ***суммой сходящегося ряда,*** при этом пишут $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ (***необходимый признак сходимости ряда)***. Обратное утверждение неверно.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится (***достаточный признак расходимости ряда***).

Обобщённым гармоническим рядом называют ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Геометрическим рядом называют ряд $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$, который сходится при $0\le q<1$, при этом его сумма равна $S=\frac{1}{1-q}$ и расходится при $q\ge 1$.

Число b называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x\to x_0$ (или в точке x_0), и пишут $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Число b называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x\to\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся число $\Delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Рассматривают также односторонние пределы функций: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, где x стремится к x_0, $+\infty$, $-\infty$ или только с левой стороны или только с правой стороны.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов функций при $x \to a$ (в дальнейшем a - или число x_0 или символ ∞):

1) Если c - постоянная величина, то $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

2) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$, то:

а) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm d$; **б)** $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot d$;

в) $\lim\limits_{x \to a}(cf(x)) = c \cdot b \quad (c = const)$; **г)** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{d}$, если $d \neq 0$.

При вычислении пределов постоянно пользуются и тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки x_0 из её области определения справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Основные утверждения для бесконечно больших функций, используемые для вычисления пределов при $x \to a$:

1) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$,если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

2) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \infty$.

3) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

4) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

5) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x)/g(x)) = 0$.

6) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x)/g(x)) = \infty$.

Если непосредственное применение свойств конечных пределов и бесконечно больших функций приводит к неопределённым выражениям, символически обозначаемым: $0/0, \infty/\infty, 0\cdot\infty, \infty-\infty$, то для вычисления предела – «раскрытия неопределённости» - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить.

Первым замечательным пределом называется предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Его следствиями являются пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$

Вторым замечательным пределом называются пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

где $e=2.71828...$-основание натуральных логарифмов (число Непера). Он используется для вычисления предела степенно-показательной функции $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки x_0 (левой полуокрестности, правой полуокрестности) и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$), то функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 (непрерывной слева, непрерывной справа).

Каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

Если в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$. При этом различают следующие случаи:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$.

2) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, но они не равны друг другу, то x_0 называется ***точкой разрыва 1-ого рода.***

3) В остальных случаях x_0 называется ***точкой разрыва 2-ого рода*** .

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке a - непрерывна справа, в точке b - непрерывна слева). Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ обладает свойствами: **1)** ограничена на $[a,b]$; **2)** достигает на отрезке $[a,b]$ своего наименьшего значения m и наибольшего значения M .

Прямая L называется ***асимптотой графика*** Γ функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M \in \Gamma$ до прямой L стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равен бесконечности.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y = f(x)$. Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$), если $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$). Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является ***горизонтальная асимптота***.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$) тогда и только тогда, когда одновременно существуют пределы: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$).

Тема. <u>Производная и дифференциал функции одной переменной.</u>

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента $\Delta x \neq 0$ называется выражение $\Delta y = \Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной 1-ого порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$. Геометрический смысл производной состоит в том, что число $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox прямоугольной декартовой системы координат Oxy.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Необходимым условием дифференцируемости в точке является непрерывность функции в данной точке.

Любая элементарная функция $y = f(x)$ дифференцируема во всякой внутренней точке x естественной области определения D функции $f(x)$, в которой аналитическое выражение её производной $y' = f'(x)$ имеет смысл. Производная $f'(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек x, где она существует, сама является функцией. Операция нахождения производной $f'(x)$ называется также ***дифференцированием*** функции $f(x)$**.**

Основные правила дифференцирования элементарных функций.

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые функции, C - постоянная, то:

$(C)' = 0$	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$
$(Cf)' = Cf'$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, $g \neq 0$

2. Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(x) = F(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и имеет производную:

$$\boxed{f'(x_0) = F'(u_0)\varphi'(x_0)} \qquad \text{или кратко} \qquad \boxed{y'_x = y'_u u'_x}..$$

При дифференцировании сложных функций для производной используют обозначения типа y'_x там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведётся дифференцирование.

Производной 2-ого порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её первой производной и обозначается $y'' = f''(x)$, т. е. $y'' = (y')'$. В общем ***производной порядка*** n **(**n***-ой производной*****)** называется производная от $(n-1)$-ой производной и обозначается $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.Для производной $y^{(n)}$ используется также обозначение $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Производная $y^{(n)}$ функции $y = f(x)$ вычисляется её последовательным дифференцированием: y', $y'' = (y')'$, $y''' = (y'')'$, …, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ в точке x называется выражение $f'(x)\Delta x$, т.е. $dy = f'(x)\Delta x$. В частности, для функции $y = x$ имеем $dy = \Delta x$, т.е. дифференциал независимого переменного x совпадает с приращением Δx. Поэтому дифференциал функции $y = f(x)$ записывается в виде $dy = f'(x)dx$.

Дифференциалом 2-ого порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается $d^2 y$, т. е. $d^2 y = d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** n называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка и обозначается $d^n y$, т.е. $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Если x - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^n y$ функции $y = f(x)$ справедлива формула $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y = f(x)$ в малой окрестности точки x_0, в которой функция дифференцируема, по формуле:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \text{ где } x = x_0 + \Delta x.$$

Чем меньше значение $|\Delta x|$, тем точнее приближённая формула.

Тема. <u>Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.</u>

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$,

уравнение нормали - вид: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух дифференцируемых или бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x \to a$ (a - число x_0 или символ ∞) равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя используют для раскрытия неопределённостей видов $0/0$ и ∞/∞. На каждом этапе применения правила Лопиталя следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приёмами вычисления пределов. В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила.

Раскрытие неопределённостей видов $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ путём преобразований:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f}{1/g}, \quad f(x) - g(x) = \frac{(1/g) - (1/f)}{(1/f) \cdot (1/g)}$$

приводится к раскрытию неопределенностей видов $0/0$ и ∞/∞.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** **(*убывающей*)** на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b).

Точка x_0, принадлежащая области определения D функции $y = f(x)$, называется ***критической точкой*** функции, если в этой точке $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения D на интервалы монотонности (интервалы возрастания и убывания).

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой минимума*** **(*максимума*)** функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех точек $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), а число $f(x_0)$ - ***минимумом*** **(*максимумом*)** функции. Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума,*** а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Необходимое условие экстремума. Если $x_0 \in D$ - точка экстремума функции $y = f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f'(x)$, при переходе слева направо через точку x_0: **1)** меняет знак с «+» на « $-$ », то x_0 - точка максимума; **2)** меняет знак с знак с « $-$ » на «+», то x_0 - точка минимума; **3)** сохраняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a, b]$ достигается или во внутренних критических точках или на концах отрезка.

Функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой*** **(*вогнутой*)** на интервале (a, b), если её график лежит под касательной (над касательной), проведённой к графику данной функции, в любой точке интервала (a, b).

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то функция является вогнутой (выпуклой) на (a, b).

Точка x_0, принадлежащая области определения D функции $y = f(x)$, называется ***точкой перегиба*** функции, если при переходе через неё меняется направление выпуклости функции. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется ***точкой перегиба графика*** функции.

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой возможного перегиба*** функции $y = f(x)$, если в этой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Эти точки разбивают область определения D функции $y = f(x)$ на интервалы выпуклости и вогнутости.

Необходимое условие перегиба. Если $x_0 \in D$ - точка перегиба функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f''(x)$, при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Для ***построения графика*** функции $y = f(x)$ нужно:

1) найти область определения функции;
2) найти область непрерывности функции и точки разрыва;
3) исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность;
4) найти точки пересечения графика с осями координат;
5) найти асимптоты графика функции;
6) найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;
7) найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Семестр 2.

Тема. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***точкой*** ***n-мерного арифметического*** (координатного) ***пространства*** R^n и обозначается $\bar{x}$ или $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при этом числа x_i называются её ***координатами***.

Пусть $X \subset R^n$ и $Y \subset R$ - некоторые множества точек R^n и R. Если каждой точке $M \in X$ ставится в соответствие по некоторому правилу f одно вполне определённое действительное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция от n переменных и пишут $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или кратко $y = f(M)$ и $y = f(\bar{x})$, при этом X называется ***областью определения***, Y - ***множеством значений***, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ***аргументами*** (независимыми переменными) функции.

Функцию двух переменных часто обозначают $z = f(x, y)$, функцию трёх переменных - $u = f(x, y, z)$. Область определения функции $z = f(x, y)$ представляет собой некоторое множество точек плоскости, функции $u = f(x, y, z)$ - некоторое множество точек пространства.

Частной производной (1-ого порядка) функции $y = f(M)$ в точке $M(x_1, \ldots x_k, \ldots, x_n)$ по переменной x_k называется предел $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$, если этот предел существует. Частную производную обозначают $\dfrac{\partial y}{\partial x_k}$ или y'_{x_k}.

Частные производные вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что все аргументы функции, кроме аргумента x_k, по которому берётся производная, постоянны.

Частными производными второго порядка функции $y = f(M)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. При этом используются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2} = y''_{x_k x_k}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_m} = y''_{x_k x_m} \ (k \neq m).$$

Производные $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_m}$ ($k \neq m$) называются ***смешанными.*** Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго. Для функции $z = f(x, y)$ частные производные обозначаются:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots$ или $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}, \ldots$.

Если смешанные частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от порядка дифференцирования.

Полным дифференциалом dy функции $y = f(M)$ в точке M называется выражение вида $dy = \dfrac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$, где $dx_1 = \Delta x_1, \ldots, dx_n = \Delta x_n$.

Дифференциалом 2-ого порядка функции $y = f(M)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается $d^2 y$, т. е. $d^2 y = d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** m называется дифференциал от дифференциала $(m-1)$-ого порядка и обозначается $d^m y$, т.е. $d^m y = d(d^{m-1} y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ справедливы формулы:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y = f(M)$ в малой окрестности точки M_0, в которой функция дифференцируема, по формуле: $f(M) \approx f(M_0) + df(M_0)$. В частности, для функции $z = f(x, y)$ по формуле: $f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, тем точнее формула.

Точка $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, принадлежащая области определения D функции $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(M)$, называется ***стационарной точкой*** функции, если в этой точке каждая из её частных производных равна нулю, т.е. $f'_{x_1}(M_0) = 0, \ldots, f'_{x_n}(M_0) = 0$ или $df(M_0) = 0$.

Точка M_0 называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $y = f(M)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M \neq M_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$).

Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции***.

Необходимое условие экстремума. Если M_0 - точка локального экстремума функции $y = f(M)$, дифференцируемой в точке M_0, то M_0 - стационарная точка функции.

Достаточное условие экстремума. Пусть M_0 - стационарная точка дважды дифференцируемой в точке M_0 функции $y = f(M)$. Тогда, если при всевозможных наборах значений $dx_1, \ldots, dx_n$, не равных одновременно нулю: **1)** $d^2 f(M_0) < 0$, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум; **2)** $d^2 f(M_0) > 0$, то в точке M_0 функция имеет минимум; **3)** $d^2 f(M_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет экстремума.

В частности, функция $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$, при условии $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$, где $A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$: **1)** имеет максимум, если $D > 0$ и $A < 0$; **2)** имеет минимум, если $D > 0$ и $A > 0$; **3)** не имеет экстремума, если $D < 0$.

Тема. Неопределённый интеграл.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Функция $f(x)$ может иметь различные первообразные, но все они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми. Поэтому все первообразные для $f(x)$ содержатся в выражении $F(x) + C$, где $C \in R$ - произвольная постоянная, которое и называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Операция нахождения первообразной или неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** этой функции. Функция $f(x)$

для которой на промежутке X существует первообразная или неопределённый интеграл называется ***интегрируемой*** на этом промежутке. Первообразная и неопределённый интеграл на промежутке X существуют у любой непрерывной на этом промежутке функции. Нахождение неопределённого интеграла состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения, чтобы получить интегралы из таблицы основных интегралов (*приложение 6.3*).

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. **2.** $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ ($k = const, k \neq 0$).

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, $a \neq 0$.

Основными методами интегрирования являются: непосредственное интегрирование, интегрирование заменой переменной и по частям.

Непосредственным интегрированием (интегрированием *методом разложения*) функции $f(x)$ называют отыскание неопределённого интеграла $\int f(x)dx$ с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$, свойств **3-4** неопределённого интеграла и таблицы основных интегралов.

Часто, заменой переменной интегрирования $x \to t$, удаётся свести нахождение интеграла $\int f(x)dx$ к нахождению более простого интеграла $\int g(t)dt$ с последующей заменой $t \to x$.

Очень часто применяют следующий способ ***замены переменной интегрирования***:

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} \varphi(x) = t \\ d\varphi(x) = dt \\ \varphi'(x)dx = dt \\ f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(t)dt \end{bmatrix} = \int g(t)dt\Big|_{\varphi(x)=t},$$

где $\varphi(x)$ - некоторая дифференцируемая функция. Функция $\varphi(x)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более удобный для интегрирования вид. Выбор её определяется конкретным видом подынтегрального выражения.

Если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, то справедлива ***формула интегрирования по частям***:

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ или кратко $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула используется в тех случаях для вычисления $\int f(x)dx$, когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно так представить в виде udv, что интеграл $\int vdu$ может оказаться проще интеграла $\int udv$.

Этим методом вычисляются: **1)** интегралы вида $\int x^n \cos(\alpha x + \beta)dx$, $\int x^n \sin(\alpha x + \beta)dx$, $\int x^n e^{\alpha x + \beta} dx$, $\int x^n a^{\alpha x + \beta} dx$, причём в качестве $u(x)$ выбирается x^n ; **2)** интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, причём в качестве $u(x)$ выбирается одна из указанных выше функций. Указанные группы интегралов не исчерпывают всех без исключения интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

Вычисление интегралов вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ и $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$, выделяя в квадратном трёхчлене $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ полный квадрат $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$ и делая замену переменной интегрирования $x + \beta/(2\alpha) = t$, сводят к вычислению табличных интегралов (см. ***приложение 6.3***) и интегралов вида $\int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2}$ и $\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}}$, которые сводят к табличным заменой переменной $t^2 \pm a^2 = z$.

Тема. <u>Определённый интеграл</u>. <u>Несобственные интегралы</u>.

К понятию определённого интеграла можно прийти, решая задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, заключённой между прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$. Число, равное площади криволинейной трапеции, причём площадь той части, которая лежит выше оси Ox берётся со знаком «+», и ниже её – со знаком « $-$ » и называется ***определённым интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Определённый интеграл обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, где числа a, b называются ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определённый интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке. ***Достаточным условием интегрируемости*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является её непрерывность на данном отрезке. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то, по определению, полагают $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Основные свойства определённого интеграла:

1. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \quad (k = const)$. **2.** $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Понятие определённого интеграла тесно связано с понятием неопределённого интеграла (первообразной).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - одна из её первообразных, то справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ (***формула Ньютона-Лейбница***).

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются формулы ***замены переменной:*** $\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} \varphi(x) = t \\ d\varphi(x) = dt \\ \varphi'(x)dx = dt \\ f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(t)dt \\ \varphi(a) = \alpha, \quad \varphi(b) = \beta \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta g(t)dt$ и ***интегрирования по частям*** $\int\limits_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ в определённом интеграле. При замене переменной в определённом интеграле в отличие от вычисления неопределённого не нужно возвращаться к исходному аргументу, так как преобразованный определённый интеграл берётся по тому отрезку, по которому изменяется новый аргумент.

При вычислении неопределённого интеграла по умолчанию предполагалось, что первообразная находится на тех промежутках, на которых выполняемые преобразования подынтегральной функции являются тождественными. При вычислении же определённого интеграла первообразная находится на заданном отрезке, поэтому здесь уже необходимо следить за тождественностью выполняемых преобразований.

Площадь фигуры (рис.1) $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$ равна

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx .$$

Площадь фигуры (рис.2) $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, $c \le y \le d$ равна

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy .$$

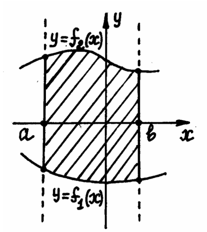


Рис.1

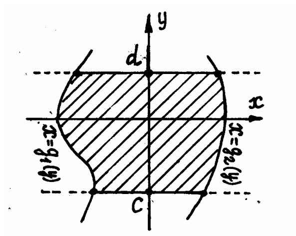


Рис.2

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то ***несобственным интегралом по бесконечному промежутку интегрирования*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$ называется $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, т.е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Аналогично: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Тема. Дифференциальные уравнения.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка***. Функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется ***решением*** уравнения. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно обычно называется ***интегралом*** уравнения. Процесс нахождения решений называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Уравнение вида $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - заданная функция переменных x и y, называется ***ДУ первого порядка, разрешённым относительно производной***. Эту форму записи ДУ называют ***нормальной.*** Учитывая, что $y' = dy/dx$, ДУ первого порядка, разрешённое относительно производной, можно всегда записать в ***дифференциальной форме***: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - заданные функции переменных x и y.

Условие $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 -заданные числа, называется ***начальным условием.*** Задача нахождения решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Общим решением ДУ первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C)$, зависящее от одной произвольной постоянной C, такое, из которого при надлежащем выборе значения постоянной $C = C_0$ можно получить решение $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, называется ***общим интегралом*** уравнения.

Частным решением ДУ первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, получаемое из общего при конкретном значении постоянной $C = C_0$ (при этом не исключаются и значения $C = \pm\infty$). Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называется ***частным интегралом*** уравнения.

ДУ вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называется уравнением ***с разделёнными переменными***. Его общий интеграл имеет вид $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$.

ДУ вида $y' = f(x)g(y)$ или $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ называется уравнением ***с разделяющимися переменными***. Его интегрирование, путём деления обеих частей уравнения на $g(y)$ или $Q_1(y) \cdot P_2(x)$, сводится (с учётом $y' = dy/dx$) к интегрированию уравнения с разделёнными переменными.

Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка – значит: **1)** найти его общее решение $y=\varphi(x,C)$ или общий интеграл $\Phi(x,y,C)=0$; **2)** найти то частное решение $y=\varphi(x,C_0)$ (частный интеграл $\Phi(x,y,C_0)=0$) которое удовлетворяет заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Дифференциальное уравнение вида $y'=f\left(y/x\right)$ называется ***однородным***.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\boxed{y=xu}$, $y'=u+xu'$ или $dy=udx+xdu$, где $u=u(x)$ - новая неизвестная функция. Интегрируя ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$ и возвращаясь к искомой функции $y(x)$, находим общее решение исходного уравнения.

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$ называется ***линейным***. Уравнение $y'+p(x)y=0$, в котором правая часть тождественно равна нулю, называется ***однородным линейным*** уравнением.

Общее решение неоднородного линейного уравнения находится подстановкой $\boxed{y=u\cdot v}$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - неизвестные функции от x.

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***. Его решение находится подстановкой $\boxed{y=u\cdot v}$.

Уравнение вида $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$, где $y=y(x)$ - искомая функция, называется ***дифференциальным уравнением*** n***-го порядка***. Функция $y=\varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется ***решением*** уравнения. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x,y)=0$, то оно называется ***интегралом*** уравнения.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, называется уравнением, ***разрешённым относительно старшей производной***. Эту форму записи ДУ n-го порядка называют ***нормальной***.

Условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где x_0, y_0, $y'_0,\dots,y_0^{(n-1)}$ - заданные числа, называются ***начальными условиями***. Задача нахождения решения уравнения $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши.***

Общим решением ДУ n-го порядка называется решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных

$C_1, C_2, \ldots, C_n$, такое, из которого при надлежащем выборе значений постоянных $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \ldots, C_n = C_{n0}$ можно получить решение $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0})$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, называется ***общим интегралом*** уравнения.

Частным решением ДУ n-го порядка называется решение $y = \varphi(x, C_{10}, \ldots, C_{n0})$, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}, \ldots, C_n = C_{n0}$. Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = 0$, называется ***частным интегралом.***

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ называется ***простейшим дифференциальным уравнением*** n ***-го порядка***. Его общее решение находят, выполняя последовательно n интегрирований, и записывают в виде

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int f(x)dx}_{n \text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n .$$

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ называется ***линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ)*** n ***-го порядка***, где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - непрерывные функции или постоянные. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***однородным***. Однородное линейным уравнение n-го порядка имеет вид $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$.

Тема. <u>Случайные события и их вероятности.</u>

При ***классическом определении вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A определяется равенством $P(A) = \dfrac{m(A)}{n}$, где $m(A)$ - число элементарных исходов эксперимента (опыта, испытания), благоприятствующих появлению события A; n - общее число равновозможных элементарных исходов эксперимента. Каждый из исходов (далее неделимых и взаимно исключающих друг друга) эксперимента называется его ***элементарным исходом*** (элементарным событием) и обозначается ω. Элементарные исходы называются ***равновозможными,*** если в силу условий проведения эксперимента можно считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие. Множество всех элементарных исходов эксперимента называется ***пространством элементарных исходов*** и обозначается Ω. Исход ω называется ***благоприятствующим*** данному событию, если его появление влечёт за собой наступление такого события.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не происходит. Например, противоположным событию, определяемому словами «хотя бы один…» является событие, определяемое словами «ни один…». Если вероятность $P(\overline{A})$ известна или легко может быть найдена, то вероятность $P(A)$ вычисляют по формуле: $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Для вычисления общего числа n элементарных исходов и числа $m(A)$ элементарных исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, широко используются правила и формулы комбинаторики. Одной из основных задач комбинаторики является подсчёт числа комбинаторных конфигураций (комбинаций элементов), образованных из элементов некоторых конечных множеств в соответствии с заданными правилами. Примерами таких комбинаций являются перестановки, размещения и сочетания.

Сочетаниями из n ***элементов по*** m называются комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только составом элементов. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего в одновременном выборе без возвращения любых m элементов из n различных элементов, а их общее число C_n^m определяется формулой:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\text{, где } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\text{, } 0!=1.$$

Размещениями из n ***элементов по*** m называются комбинации элементов, отличающиеся друг от друга как составом элементов, так и порядком их следования. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего сначала в одновременном выборе без возвращения любых m элементов из n различных элементов, а затем в произвольном их упорядочивании. Общее число A_n^m размещений определяется формулой: $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Перестановками из n ***элементов*** называются комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только порядком их следования. Они рассматриваются как элементарные исходы эксперимента, состоящего в произвольном упорядочивании множества, состоящего из n различных элементов, а их общее число P_n определяется формулой $P_n=n!$.

Для подсчёта числа всевозможных комбинаторных конфигураций широко используются правила комбинаторики.

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ - элементы (действия) из некоторого конечного множества элементов (действий), которые можно выбрать (выполнить), соответственно, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ способами. Тогда справедливы следующие правила.

Правило сложения. Осуществить выбор (выполнение) только одного из элементов (действий) можно $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Правило умножения. Осуществить последовательный выбор (выполнение) всех элементов (действий) можно $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Всякое случайное событие A можно рассматривать как подмножество Ω (обратное утверждение, вообще говоря, места не имеет), состоящее из всех тех $\omega \in \Omega$, которые благоприятствуют событию A ($\omega \in A$). Множество Ω называют ***достоверным событием***, а пустое множество $\varnothing$, являющееся по определению подмножеством Ω, называют ***невозможным событием***.

Если $A \subset B$, то говорят, что ***событие*** A ***влечёт событие*** B.

Произведением событий A и B называют событие $A \cdot B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходят одновременно оба события A и B. События A и B называют ***несовместными***, если $A \cdot B = \varnothing$.

Суммой событий A и B называют событие $A + B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

Разностью событий A и B называют событие $A \setminus B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$, происходящее тогда и только тогда, когда событие A не происходит, называют ***противоположным*** событию A. Разность событий $A \setminus B$ всегда можно представить в виде $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$.

Из определения вероятности следуют следующие её свойства:

1) $P(\varnothing) = 0$ **; 2)** $P(\Omega) = 1$; **3)** $0 \le P(A) \le 1$; **4)** Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$;

5) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; **6)** $P(A + B) = \begin{cases} P(A) + P(B), & \text{если } A \cdot B = \varnothing \\ P(A) + P(B) - P(A \cdot B), & \text{если } A \cdot B \ne \varnothing \end{cases}$.

Пусть A и B - наблюдаемые события в эксперименте, причём $P(A) > 0$. ***Условной вероятностью*** $P(B \mid A)$ осуществления ***события*** B при условии, что событие A произошло в результате данного эксперимента, называется величина, определяемая равенством: $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называются ***независимыми,*** если выполняется равенство $P(B \mid A) = P(B)$ или $P(A \mid B) = P(A)$, в противном случае события A и B называются ***зависимыми***.

Сложным называют событие, наблюдаемое в эксперименте и выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций над событиями.

Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется с помощью ***формул умножения вероятностей***:

1) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$, $P(A) > 0$;

2) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ (для независимых событий)

и ***формул сложения вероятностей***:

3) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

4) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (для несовместных событий).

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - наблюдаемые события для данного эксперимента, попарно несовместные ($H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$) и образующие полную группу событий ($H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$). Такие события H_i принято называть ***гипотезами*** по отношению к событию A. Тогда для любого наблюдаемого в эксперименте события A имеет место ***формула полной вероятности***:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i), \text{ где } P(H_i) > 0.$$

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - совокупность гипотез по отношению к событию A, безусловные вероятности которых $P(H_i) > 0$, называемые ***априорными*** (*доопытными*), известны и пусть стало известно, что в результате эксперимента событие A произошло. Тогда ***апостериорные*** (*послеопытные*) вероятности $P(H_i \mid A)$ гипотез H_i при условии, что событие A имело место, вычисляются по ***формуле Байеса***:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}, \text{ где } P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

Формула Байеса позволяет переоценить вероятность каждой из гипотез после поступления дополнительной информации относительно осуществления тех или иных наблюдаемых событий.

Схемой Бернулли называют последовательность испытаний, удовлетворяющую условиям: **1)** результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов: «успех» (появление некоторого события A) и «неудача»; **2)** испытания являются независимыми, т.е. вероятность «успеха» в каждом следующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний; **3)** вероятность «успеха» во всех испытаниях одинакова и равна $P(A) = p$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k «успехов», определяется ***формулой Бернулли***:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Следствием формулы Бернулли является формула: $P_n(k \ge 1) = 1-(1-p)^n$ - вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли «успех» наступит хотя бы один раз.

Тема. Случайные величины.

Под ***случайной величиной*** X понимают величину, принимающую свои возможные значения x в зависимости от исхода ω эксперимента, с которым она связана.

Законом распределения *(вероятностей)* случайной величины называют любое правило, позволяющее найти вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого подмножества своих возможных значений. Общим законом распределения, присущим всем случайным величинам, является функция распределения.

Функцией распределения *(вероятностей)* случайной величины X называется функция $F(x)$ действительной переменной x, $-\infty < x < +\infty$, определяемая формулой $F(x) = P(X < x)$.

Каждая функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$, $-\infty < x < +\infty$; **2)** $F(x)$ не убывает;

3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$; **4)** $F(x)$ непрерывна слева.

Вероятность события $a \le X < b$ определяется формулой:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Случайная величина X называется ***дискретной случайной величиной*** (ДСВ), если множество её возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счётно, причём $P(X = x_i) = p_i > 0$, $\sum\limits_i p_i = 1$, где суммирование распространяется на все возможные значения i.

Закон распределения ДСВ удобно задавать рядом распределения. ***Рядом распределения*** ДСВ называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ этой случайной величины и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \ldots$. Для наглядности закон распределения ДСВ изображают графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_i(x_i, p_i)$ и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения***.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число $MX = \sum\limits_i x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$, если ряд сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины X называется неотрицательное число $DX = M(X-MX)^2$. Число $\sigma(X)=\sqrt{DX}$ называется ***средним квадратичным отклонением.***

Дисперсию дискретной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX=\sum_i (x_i-MX)^2 p_i \text{ или } DX=\sum_i x_i^2 p_i-(MX)^2 .$$

Пусть C -постоянная величина.

Свойства математического ожидания: **1)** $MC=C$; **2)** $M(CX)=CMX$; **3)** $M(X\pm Y)=MX\pm MY$; **4)** $M(XY)=MX\cdot MY$, если X и Y независимы.

Свойства дисперсии: **1)** $DC=0$; **2)** $D(CX)=C^2DX$; **3)** $D(X\pm C)=DX$; **4)** $DX=M(X^2)-(MX)^2$; **5)** $D(X\pm Y)=DX+DY$, если X и Y независимы.

Случайная величина X называется ***непрерывной случайной величиной*** (НСВ), если её функция распределения представляется в виде $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $-\infty<x<+\infty$, где $f(x)$ -неотрицательная и интегрируемая в бесконечных пределах функция, называемая ***функцией плотности*** *(распределения)* ***вероятностей***. Множество возможных значений непрерывной случайной величины несчётно и обычно представляет собой некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой прямой.

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X является непрерывной неубывающей функцией на всей числовой прямой, причём вероятность попадания в любую фиксированную точку равна нулю: $P(X=x)=0$, $-\infty<x<+\infty$.

Функция $f(x)$ является плотностью вероятностей некоторой НСВ X, тогда и только тогда, когда: **1)** $f(x)\ge 0$**;** **2)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$**.**

Для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятностей $f(x)$: $P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)=P(a<X<b)=$

$$=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx .$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, если интеграл сходится абсолютно.

Дисперсию непрерывной случайной величины X вычисляют по формулам:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \text{ или } DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2 .$$

Медианой *непрерывной случайной величины* X называется число $Me(X)$, удовлетворяющее условию $P(X < Me) = P(X > Me)$ или $F(Me) = 0.5$.

Тема. Элементы математической статистики. Предварительная обработка статистических данных.

Выборкой объёма n из генеральной совокупности X называется совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наблюдаемых значений случайной величины X, соответствующих n независимым повторениям случайного эксперимента с которым связана величина X. В математической статистике генеральную совокупность отождествляют со случайной величиной, совокупность всех возможных значений которой и называют ***генеральной совокупностью***.

Выборка может быть записана в виде вариационного и статистического (дискретного или интервального) рядов. Выборку, записанную в виде статистического ряда, называют ***группированной***.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такой способ её записи, при котором элементы выборки упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$. Разность $x_{(n)} - x_{(1)} = \widehat{R}$ называется ***размахом выборки***. Всюду в дальнейшем выборочные характеристики будем, как правило, обозначать символом с « $\wedge$ » наверху.

Различные значения x_i, $i = \overline{1, k}$ ($k \le n$), называются ***вариантами***. Число n_i повторений варианты x_i в выборке называется её ***частотой***, а отношение $w_i = n_i / n$ называется её ***относительной частотой***.

Дискретным статистическим рядом называется упорядоченная в порядке возрастания значений вариант x_i последовательность пар (x_i, n_i), $i = \overline{1, k}$. Обычно его записывают в виде таблицы, первая стока которой содержит варианты x_i, а вторая их частоты.

Полигоном частот называется фигура, расположенная под ломаной линией с вершинами в точках $M_i(x_i, n_i)$, построенных в прямоугольной системе координат.

Интервальным статистическим рядом называется последовательность пар (J_i, n_i), $i = \overline{1, k}$, где $J_1, J_2, \ldots, J_k$ - непересекающиеся интервалы, как правило, равной длины, объединением которых является отрезок J, содержащий все выборочные значения; n_i - частота интервала J_i, равная числу элементов выборки, значения которых попали в данный интервал. Обычно его записывают в виде таблицы, первая строка которой содержит границы интервалов или их середины $\tilde{x}_i$, а вторая – частоты интервалов.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна частоте n_i, $i = \overline{1,k}$. Если длины всех интервалов одинаковы и равны h, то высоты прямоугольников равны n_i / h.

Основные числовые характеристики выборки.

Негруппированная выборка	Группированная выборка
1.Среднее арифметическое выборки	
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i n_i$
2.Дисперсия выборки	
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \bar{x})^2 n_i$
3.Исправленная дисперсия выборки: $s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$	
4. **Размах** выборки: $\hat{R} = x_{\max} - x_{\min}$	

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. **2.** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

4. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. **5**. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})\big/2a$.

Действия с натуральными логарифмами.

1. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. **2.** $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$. **3.** $-\ln a = \ln(1/a)$.

4. $b \ln a = \ln(a^b)$. **5.** $\ln e^a = a$

Формулы тригонометрии.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$.

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2 \alpha$. **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2 \alpha$.

Формулы сложения:

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

Формулы двойных углов:

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Преобразование суммы функций в произведение:

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \sin[(\alpha - \beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha - \beta)/2] \cdot \cos[(\alpha + \beta)/2]$

Понижение степени:

13. $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ **14.** $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^k \quad (k \in R)$	$k\,x^{k-1}$	$k\,x^{k-1}dx$
2	$a^x \quad (a>0, \neq 1)$	$a^x \ln a$	$a^x \ln a dx$
3	e^x	e^x	$e^x dx$
4	$\log_a x \quad (a>0, \neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{dx}{x\ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$

Таблица основных неопределенных интегралов.

№ п/п	$\int f(x)dx$	№ п/п	$\int f(x)dx$
1	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$	**2**	$\int (x+a)^k dx = \frac{(x+a)^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**4**	$\int \frac{dx}{x+a} = \ln\lvert x+a\rvert + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	**6**	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	**8**	$\int \cos x dx = \sin x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	**10**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
11	$\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	**12**	$\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
13	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$	**14**	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
15	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	**16**	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
17	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	**18**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
19	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$		
20	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$		

Предельные значения некоторых функций.

$arctg(+\infty) = \pi/2$, $arctg(-\infty) = -\pi/2$, $\ln(+0) = -\infty$, $\ln(+\infty) = +\infty$,

$e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$, $ctg(\pm 0) = \pm\infty$, $P_n(\infty) = \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ - факториал числа n.

Значения некоторых функций:

$\arcsin 0 = 0$, $arctg 0 = 0$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета»

кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине **«Математика»**

Вариант № ____
(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы №________
***Ф.И.О. студента*__________**
зач. книжка - №__________
Проверил: **преподаватель кафедры математики**
***Ф.И.О. преподавателя*_____**

Набережные Челны
201…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий Семестр 1.*									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**92**
12	**4**	**13**	**22**	**33**	**44**	**53**	**62**	**73**	**84**	**93**
13	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**
14	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**
15	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**
16	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**
17	**9**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**
18	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**
19	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**
20	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**
21	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**
22	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**
23	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**
24	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**
25	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**
26	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**
27	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**
28	**2**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
29	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**
30	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Номер варианта	***Номера выполняемых заданий Семестр 2.***											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**	**101**	**111**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**	**102**	**112**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**	**103**	**113**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**	**104**	**114**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**	**105**	**115**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**	**106**	**116**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**	**107**	**117**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**	**108**	**118**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**	**109**	**119**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**	**109**	**120**
12	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**	**108**	**119**
13	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**	**107**	**118**
14	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**	**106**	**117**
15	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**	**105**	**116**
16	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**	**104**	**115**
17	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**	**103**	**114**
18	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**	**102**	**113**
19	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**118**
20	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**117**
21	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**	**107**	**116**
22	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**	**106**	**115**
23	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**	**105**	**114**
24	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**	**104**	**113**
25	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**	**103**	**112**
26	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**	**102**	**111**
27	**1**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**	**110**	**120**
28	**2**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**119**
29	**3**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**118**
30	**10**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**	**101**	**111**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е