УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 149, кн. 4 Физико-математические науки *2007*

УДК 519.633

СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА АПРИОРНО АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТКАХ

Г.И. Шишкин

Аннотация

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного квазилинейного параболического уравнения конвекции-диффузии; строятся разностные схемы (нелинейная и линеаризованная) на *априорно* (последовательно) *адаптирующихся* сетках и исследуется их сходимость. Для такой задачи решение классической разностной схемы на равномерной сетке сходится со скоростью $\mathcal{O}\left((\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}\right)$, где $N+1$ и N_0+1 – число узлов сеток по x и t соответственно; схема сходится лишь при условии $N^{-1} \ll \varepsilon$. В настоящей работе построение схемы на априорно адаптирующихся сетках проводится на основе мажоранты сингулярной компоненты сеточного решения, позволяющей по возмущающему параметру ε, шагу равномерной сетки по x, а также по требуемой точности сеточного решения и задаваемому числу итераций K для уточнения решения априорно указать подобласть, на которой сеточное решение требует дальнейшего уточнения. При решении сеточных задач в процессе уточнения решения на подобластях используются равномерные сетки. Ошибка сеточного решения слабо зависит от величины параметра ε; схема сходится *почти ε-равномерно*, а именно при условии $N^{-1} \ll \varepsilon^{\nu}$, где величина $\nu = \nu(K)$ может быть выбрана сколь угодно малой при подходящем достаточно большом K.

Введение

Для сингулярно возмущенных задач хорошо известна проблема разработки специальных сеточных методов, погрешность решений которых слабо зависит от величины параметра ε, в частности методов, сходящихся ε-равномерно [1–3]. Достаточно хорошо разработан метод построения ε-равномерно сходящихся схем на специальных сетках, *априорно* сгущающихся в пограничных и переходных слоях (см., например, [1, 4–7]. Методы, использующие кусочно-равномерные сетки, сгущающиеся в пограничных и переходных слоях (с одной точкой смены шага сетки в окрестности пограничного слоя), получили достаточно широкое распространение ввиду их простоты и удобства в использовании (см., например, [4–7] и библиографию там же).

Известно, что методы экспоненциальной подгонки (их описание см., например, в [2, 3]), преимущество которых состоит в использовании простейших равномерных сеток, *неприменимы* для построения ε-равномерно сходящихся схем в случае широкого круга краевых задач с параболическими слоями [4, 8–10], а также в случае задач для нелинейных уравнений [11].

Отметим растущий интерес к адаптивным методам, в частности к разностным схемам на сетках, которые переизмельчаются по какому-либо закону в подобластях, где вычисленные решения оказываются недостаточно точными – схемы на *апостериорно адаптирующихся* сетках (см., например, [12–15]). В таких схемах переизмельчаемые подобласти определяются на основе анализа *текущих результатов*, получаемых *в процессе вычислений*. В частности, привлекательными представляются адаптирующиеся сетки, являющиеся равномерными на подобластях, подвергающихся переизмельчению.

В этой связи было бы интересным рассмотреть такие численные методы на *априорно адаптирующихся* сетках, в которых сеточные задачи на подобластях, где проводится априорное уточнение решения, решаются на равномерных сетках. Такая схема для линейного сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии рассмотрена в работе [16].

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для квазилинейного параболического уравнения конвекции-диффузии с малым параметром ε при старшей производной. Заметим, что для этой задачи схема на *априорно* сгущающихся в слое *кусочно-равномерных сетках* из работ [4, 5, 8] сходится ε-равномерно, в то время как классическая схема на равномерных сетках сходится лишь при условии $N^{-1} \ll \varepsilon$, где величина N определяет число узлов сетки по x (см. утверждение Теоремы 3.2 в разделе 3).

Для краевой задачи строятся нелинейная и линеаризованная разностные схемы на априорно адаптирующихся *локально-равномерных сетках* (равномерных на подобластях, где уточняется решение) и исследуется их сходимость. При построении схем используются классические аппроксимации дифференциального уравнения.

В случае схемы на *априорно* адаптирующихся сетках границы подобластей, на которых требуется уточнять решение, определяются по *мажоранте сингулярной компоненты сеточного решения*, которая, в свою очередь, определяется возмущающим параметром ε, шагом по x используемой сетки и требуемой точностью сеточного решения. На сетках, адаптирующихся по мажоранте сеточного решения, строятся достаточно простые разностные схемы, ошибки решений которых слабо зависят от параметра ε. Построенные схемы на априорно адаптирующихся сетках сходятся «*почти* ε*-равномерно*», а именно при условии $N^{-1} \ll \varepsilon^{\nu}$, где величина ν, определяющая схему (число итераций, требующихся для уточнения сеточного решения), может выбираться произвольной из $(0, 1]$.

Схемы на адаптирующихся локально-равномерных сетках, сходящиеся *почти* ε*-равномерно*, можно рассматривать как альтернативные классическим схемам на равномерных сетках, сходящимся при условии $N^{-1} \ll \varepsilon$, и схемам метода сгущающихся сеток, сходящимся ε-равномерно.

1. Постановка задачи. Цель работы

1.1. На множестве $\overline{G}$

$$\overline{G} = G \bigcup S, \quad G = D \times (0, T], \tag{1.1}$$

где $D = (0, d)$, рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения

$$\begin{aligned} \big(L\, u\big)\,(x,t) \quad &\equiv \quad L^2\, u(x,t) - f\big(x, t,\, u(x,t)\big) = 0, \quad (x,t) \in G, \\ u(x,t) \quad &= \quad \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь

$$L^2 = \varepsilon\, a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - c(x,t) - p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (x,t) \in G,$$

функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t,u)$ и $\varphi(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$, $\overline{G}\times R_1$ и S соответственно, причем*

$$\begin{gathered}
a_0 \le a(x,t) \le a^0, \quad b_0 \le b(x,t) \le b^0, \quad |c(x,t)| \le c^0, \qquad (1.3)\\
p_0 \le p(x,t) \le p^0, \quad (x,t)\in\overline{G};\\
|f(x,t,u)| \le M, \quad c_1 \le c(x,t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x,t,u) \le c^1, \quad (x,t,u)\in\overline{G}\times R;\\
|\varphi(x,t)| \le M, \quad x\in S; \qquad a_0,\, b_0,\, c_1,\, p_0 > 0;
\end{gathered}$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$.

Считаем, что данные задачи (1.2), (1.1) на множестве $S^* = S_0 \bigcap \overline{S}^{\,L}$ – множестве угловых точек – удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим требуемую по построениям гладкость решения на $\overline{G}$ (см., например, [17]). Здесь $S = S_0 \bigcup S^L$, S_0 и S^L – нижняя и боковая части границы, $S_0 = \overline{S}_0$.

При малых значениях параметра ε в окрестности множества $S_1^L = \{(x,t):\ x = 0,\ 0 < t \le T\}$ появляется регулярный пограничный слой. Здесь S_1^L и S_2^L – левая и правая части боковой границы; $S^L = S_1^L \bigcup S_2^L$.

1.2. Из оценки (3.4) для ошибки сеточного решения из раздела 3 вытекает, что решение классической разностной схемы (3.2) на равномерной сетке (3.3) сходится при условии ($N_{-1} \ll \varepsilon$)

$$\varepsilon^{-1} = o(N), \quad N,\, N_0 \to \infty, \qquad (1.4)$$

где $N+1$ и N_0+1 – число узлов равномерной сетки по x и t соответственно. Если это условие нарушается, например, при $\varepsilon^{-1} = \mathcal{O}(N)$, то, вообще говоря, решение разностной схемы (3.2), (3.3) при $N,\, N_0 \to \infty$ не сходится к решению задачи (1.2), (1.1). Условие (1.4) является весьма ограничительным.

В связи с таким поведением сеточных решений возникает интерес к построению специальных разностных схем, погрешность решений которых не зависит от величины параметра ε. Интерес представляют разностные схемы, которые сходятся при более слабом условии, чем условие (1.4) сходимости классической разностной схемы (3.2), (3.3).

Приведем необходимые в дальнейшем определения. Пусть $z(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$ – решение некоторой разностной схемы и пусть для сеточной функции $z(x,t)$ выполняется оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\lambda(\varepsilon^{-\nu}N^{-1}, N_0^{-1}), \qquad (x,t)\in\overline{G}_h, \qquad (1.5)$$

где $\lambda(\xi_1,\,\xi_2) \to 0$ при $\xi_1,\,\xi_2 \to 0$ равномерно относительно параметра ε, $\nu \ge 0$. По определению решение этой схемы сходится на множестве $\overline{G}_h$ *равномерно по параметру* ε (или ε*-равномерно*), если в оценке (1.5) $\nu = 0$; в этом случае будем также говорить, что схема сходится ε*-равномерно*. При $\nu > 0$ будем говорить, что схема сходится с *дефектом* ν. В том случае, когда величина ν может быть выбрана сколь угодно малой, причем для решения разностной схемы, *контролируемой величиной* ν, выполняется оценка (1.5), будем говорить, что схема сходится *почти* ε*-равномерно с дефектом* ν (или, проще говоря, *почти* ε*-равномерно*).

Дефект классической разностной схемы (3.2), (3.3) равен единице.

Для задачи (1.2), (1.1) разностная схема (3.2), (3.5) из раздела 3 – схема на априорно адаптирующейся сетке (кусочно-равномерной сетке с одной точкой смены шага сетки) сходится ε-равномерно. Отметим, что в схемах на кусочно-равномерных

* Через M (через m) обозначаем достаточно большие (достаточно малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

сетках (см., например, [4–7] и библиографию там) шаг сетки в точках смены шага резко изменяется (отношение шагов не является ε-равномерно ограниченным; в случае задачи (1.2), (1.1) см., например, сетку (3.5) в разделе 3). Численные методы на таких сетках, вообще говоря, могут приводить к ограничениям в использовании эффективных подходов при вычислении решений сеточных задач, как и по улучшению их точности (см., например, [18–22] и библиографию там).

Схемы из [12, 13, 15] – схемы на апостериорно адаптирующихся сетках, сходящиеся почти ε-равномерно, – строятся на основе локально-равномерных сеток – сеток, являющихся равномерными на тех подобластях, на которых уточняется сеточное решение. Достоинство этих схем в том, что их решения «синтезируются» из частей решений вспомогательных промежуточных задач, решаемых на подобластях на равномерных сетках с одним и тем же числом узлов по x, t на каждой подобласти. В этой связи было бы интересным для задачи (1.2), (1.1) рассмотреть почти ε-равномерно сходящиеся схемы на априорно адаптирующихся сетках, строящихся на основе локально-равномерных сеток.

Цель работы – для начально-краевой задачи (1.2), (1.1) построить разностную схему на априорно адаптирующихся локально-равномерных сетках, сходящуюся почти ε-равномерно.

О содержании работы. Априорные оценки решения задачи (1.2), (1.1) обсуждаются в разделе 2. Базовая разностная схема (классическая нелинейная разностная схема на равномерной сетке), на основе которой строится схема на адаптирующихся сетках, приводится в разделе 3. В разделе 4 вводится формальный итерационный алгоритм построения приближенных решений на адаптирующихся сетках. Разностная схема на сетках, адаптирующихся на основе мажоранты сингулярной компоненты сеточного решения, строится в разделе 5; в разделе 6 приводится вспомогательная схема, используемая для обоснования схемы из раздела 5. Обоснование схем из разделов 5 и 6 рассматривается в разделе 7. Линеаризованные безытерационные разностные схемы на адаптирующихся сетках приводятся в разделе 8.

2. Априорные оценки решения

Приведем оценки решения начально-краевой задачи (1.2), (1.1) и их производных. Подобные оценки получены в [23–26]. Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{G}, \tag{2.6}$$

где $U(x,t)$, $V(x,t)$ – регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$ есть сужение на $\overline{G}$ функции $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}\,e$ – решения задачи

$$\begin{aligned} \left(L^e\, U^e\right)(x,t) \quad &\equiv \quad L^{2e}\, U^e(x,t) - f^e\big(x,t,U^e(x,t)\big) = 0, \quad (x,t) \in G^e, \\ U^e(x,t) \quad &= \quad \varphi^e(x,t), \quad (x,t) \in S^e. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь множество $\overline{G}^{\,e}$ – продолжение множества $\overline{G}$ за границу S_1^L, оператор L^{2e} и функция $f^e\big(x,t,\,u\big)$ – продолжения оператора L^2 и функции $f\big(x,t,\,u\big)$ на множества $\overline{G}^{\,e}$ и $\overline{G}^{\,e} \times R$ соответственно, функция $\varphi^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^{\,e}$ – продолжение функции $\varphi(x,t)$, $(x,t) \in S$ на $\overline{G}^{\,e}$. Для продолженных данных задачи (2.7) считаем выполненными условия, подобные условиям (1.3). Для простоты считаем функции $f^e\big(x,t,\,u\big)$ и $\varphi^e(x,t)$ вне m-окрестности множества $\overline{G}$ равными нулю. Функция

$V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$ – решение задачи

$$L^2 V(x,t) - f\big(x,t,\,U(x,t)+V(x,t)\big) + f\big(x,t,\,U(x,t)\big) = 0, \quad (x,t)\in G, \tag{2.8}$$
$$V(x,t) = \varphi_V(x,t), \quad (x,t)\in S,$$

где $\varphi_V(x,t) = \varphi(x,t) - U(x,t)$, $(x,t)\in S$.

Для функций $u(x,t)$, $U(x,t)$, $V(x,t)$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,u(x,t)\right| \le M\,\varepsilon^{-k}, \qquad \left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,U(x,t)\right| \le M\,\big[1+\varepsilon^{2-k}\big],\\ \left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,V(x,t)\right| \le M\,\varepsilon^{-k}\exp\big(-m\,\varepsilon^{-1}x\big), \quad (x,t)\in\overline{G},\\ k+2\,k_0\le 4, \quad k\le 3,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где m – произвольное число из интервала $(0,m_0)$, $m_0 = \min_{\overline{G}}\big[a^{-1}(x,t)\,b(x,t)\big]$.

Теорема 2.1. *Пусть для данных начально-краевой задачи* (1.2), (1.1) *выполняются условие* (1.3), *условие:* $a,b,c,p\in C^{6+\alpha}(\overline{G})$, $f\in C^{6+\alpha}(\overline{G}\times R)$, $\varphi\in C^{6+\alpha}(S)$, $\alpha>0$, *а также условие*

$$\begin{gathered}\varphi(x,t)=0, \quad (x,t)\in S_0, \quad \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\,\varphi(x,t)=0, \quad (x,t)\in S^*,\\ \frac{\partial^{k+k_0+k_u}}{\partial x^k\,\partial t^{k_0}\,\partial u^{k_u}}\,f(x,t,\,u)=0, \quad (x,t)\in S^*, \quad u=0, \quad k,\,k_0,\,k_u\le 6.\end{gathered}$$

Тогда для решения начально-краевой задачи (1.2), (1.1) *и его компонент из представления* (2.6) *справедливы оценки* (2.9).

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству подобных теорем в [23, 24].

Замечание 2.1. Представим функцию $V(x,t)$ из (2.6) в виде суммы функций

$$V(x,t) = V_0(x,t) + v_V(x,t), \quad (x,t)\in\overline{G},$$

где $V_0(x,t)$ и $v_V(x,t)$ – главный член асимптотики по ε сингулярной компоненты решения и остаточный член. Функция $V_0(x,t)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} L^0\,V_0\,(x,t) \;&\equiv\; \left[\varepsilon\,a(0,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(0,t)\frac{\partial}{\partial x}\right] V_0(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\overline{G}\setminus\overline{S}^L,\\ V_0(x,t) \;&=\; \varphi_V(x,t), \quad (x,t)\in\overline{S}^L.\end{aligned}$$

Для функций $V_0(x,t)$ и $v_V(x,t)$ выполняются оценки

$$\begin{gathered}|V_0(x,t)| \le |\varphi_V(0,t)|\,\exp\big(-\varepsilon^{-1}\,a^{-1}(0,t)\,b(0,t)\,x\big),\\ \left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}\,v_V(x,t)\right| \le M\,\varepsilon^{1-k}\exp\big(-m\,\varepsilon^{-1}x\big), \quad (x,t)\in\overline{G},\\ k+2\,k_0\le 4, \quad k\le 3,\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $m = m_{(2.9)}$.

Таким образом, решение задачи (1.2), (1.1) можно представить в виде декомпозиции, отличной от (2.6):

$$u(x,t) = U_{(0)}(x,t) + V_0(x,t), U_{(0)}(x,t) = U(x,t) + v_V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{2.11}$$

где $U_{(0)}(x,t)$, $V_0(x,t)$ – регулярная и сингулярная компоненты решения. Для компонент $U(x,t)$, $V_0(x,t)$, $v_V(x,t)$ из представления (2.11) справедливы оценки (2.9) для $U(x,t)$ и (2.10) для $V_0(x,t)$, $v_V(x,t)$. Первая производная по x функции $v_V(x,t)$ является ε-равномерно ограниченной. Функция $v_V(x,t)$ есть слабый пограничный слой.

3. Базовая схема для задачи (1.2), (1.1)

Приведем ε-равномерно сходящуюся разностную схему, строящуюся на основе классической аппроксимации задачи (1.2), (1.1) на априорно сгущающихся кусочно-равномерных сетках с одной точкой смены шага сетки (см., например, [4, 5]).

3.1. На множестве $\overline{G}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{3.1}$$

где $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ – произвольные, вообще говоря, неравномерные сетки на отрезках $[0,d]$ и $[0,T]$ соответственно. Пусть $h^i = x^{i+1} - x^i$, $x^i, x^{i+1} \in \overline{\omega}$, $h = \max_i h^i$, и $h_t^k = t^{k+1} - t^k$, $t^k, t^{k+1} \in \overline{\omega}_0$, $h_t = \max_k h_t^k$. Предполагаем выполненным условие $h \le M N^{-1}$, $h_t \le M N_0^{-1}$, где $N+1$ и N_0+1 – число узлов сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ соответственно.

Задачу (1.2), (1.1) аппроксимируем разностной схемой [18]

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_{(3.2)}\, z\right)(x,t) &\equiv \Lambda^2 z(x,t) - f(x,t,\, z(x,t)) = 0, \quad (x,t) \in G_h, \\ z(x,t) &= \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $G_h = G \bigcap \overline{G}_h$, $S_h = S \bigcap \overline{G}_h$,

$$\Lambda^2 \equiv \varepsilon\, a(x,t)\, \delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b(x,t)\, \delta_x - c(x,t) - p(x,t)\, \delta_{\overline{t}}, \quad (x,t) \in G_h,$$

$\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x,t)$ – центральная разностная производная на неравномерной сетке,

$$\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x,t) = 2(h^i + h^{i-1})^{-1}[\delta_x\, z(x,t) - \delta_{\overline{x}}\, z(x,t)], \quad (x,t) = (x^i,t) \in G_h;$$

$\delta_x\, z(x,t)$ и $\delta_{\overline{x}}\, z(x,t)$ – первые разностные (вперед и назад) производные.

Нелинейная базовая схема (3.2), (3.1) монотонна ε-равномерно [18]. Справедлив следующий вариант теоремы сравнения, используемый при обосновании сходимости разностных схем.

Теорема 3.1. *Пусть для функций $z^1(x,t)$, $z^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$ выполняются условия*

$$\left(\Lambda\, z^1\right)(x,t) < \left(\Lambda\, z^2\right)(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \quad z^1(x,t) > z^2(x,t), \quad (x,t) \in S_h.$$

Тогда $z^1(x,t) > z^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$.

Принцип максимума для сеточных уравнений приводится в [5, 7, 18, 27].

3.2. Рассмотрим разностные схемы на равномерной и кусочно-равномерной сетках. Пусть для решения $u(x,t)$ задачи (1.2), (1.1) и его компонент выполняются оценки теоремы 2.1. В случае сеток

$$\overline{G}_h = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{3.3}$$

равномерных по обеим переменным, с использованием принципа максимума получаем оценку

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M \left[\left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1} + N_0^{-1} \right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{3.4}$$

Построим базовую схему, сходящуюся ε-равномерно (см., например, [4, 5]). На множестве $\overline{G}$ введем сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega}^* \times \overline{\omega}_0, \tag{3.5a}$$

где $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0(3.3)}$, $\overline{\omega}^*$ – кусочно-равномерная сетка, строящаяся следующим образом. Отрезок $[0,d]$ разбивается на два отрезка $[0,\sigma]$, $[\sigma,d]$, шаги сетки на отрезках $[0,\sigma]$ и $[\sigma,d]$ постоянны и равны $h^{(1)} = 2\,\sigma N^{-1}$ и $h^{(2)} = 2(d-\sigma)N^{-1}$ соответственно. Параметр σ определяется соотношением

$$\sigma = \sigma(\varepsilon,\, N) = \min\left[2^{-1}\, d,\, m^{-1}\,\varepsilon \ln N\right], m = m_{(2.9)}. \tag{3.5b}$$

Для решений разностной схемы (3.2), (3.5) получается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M \left\{ N^{-1} \min\left[\varepsilon^{-1}, \ln N\right] + N_0^{-1} \right\}, \quad (x,t) \in \overline{G}_h, \tag{3.6}$$

а также ε-равномерная оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M \left[N^{-1} \ln N + N_0^{-1} \right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{3.7}$$

Теорема 3.2. *Пусть для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1.2), (1.1) *выполняются оценки теоремы* 2.1. *Тогда разностная схема* (3.2), (3.5) (*схема* (3.2), (3.3)) *сходится* ε*-равномерно* (*при условии* (1.4)). *Для сеточных решений справедливы оценки* (3.4), (3.6), (3.7).

Утверждение теоремы 3.2 является следствием оценок теоремы 2.1 (обеспечивающих аппроксимацию краевой задачи разностной схемой) и теоремы сравнения 3.1 (обеспечивающей устойчивость разностной схемы).

4. Сеточные аппроксимации на локально переизмельчаемых сетках

Приведем алгоритм построения локально переизмельчаемой (в пограничном слое) сетки. На областях, подвергающихся переизмельчению, этот алгоритм использует равномерные сетки по пространству и времени (сетка по времени не переизмельчается).

4.1. Опишем формальный итерационный алгоритм построения приближенных решений задачи (1.2), (1.1). На множестве $\overline{G}$ введем грубую (исходную) сетку

$$\overline{G}_{1h} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0, \tag{4.1a}$$

где $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_0$ – равномерные сетки, $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0(3.3)}$; шаг сетки $\overline{\omega}_1$ есть $h_1 = d\,N^{-1}$. Решение задачи (3.2), (4.1a) обозначим через $z_1(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{1h}$, где $\overline{G}_{1h} = \overline{G}_{1h(4.1)}$. Заметим, что $\overline{G}_{1h(4.1)} = \overline{G}_{h(3.3)}$.

Пусть каким-либо образом найдена величина $d_1 \in \overline{\omega}_1$ такая, что при $x \geq d_1$ сеточное решение $z_1(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{1h}$ хорошо приближает решение задачи (1.2), (1.1), причем

$$|u(x,t) - z_1(x,t)| \leq M\,\delta, \quad (x,t) \in \overline{G}_{1h}, \quad x \geq d_1, \tag{4.2a}$$

где $\delta > 0$ – произвольное достаточно малое число, постоянная M не зависит от δ; $d_1 \in [0, d)$.

Если окажется, что $d_1 > 0$, то определим подобласть, на которой будем переизмельчать сетку:

$$\overline{G}_{(2)} = G_{(2)} \bigcup S_{(2)}, \quad G_{(2)} = G_{(2)}(d_1), \quad G_{(2)} = D_{(2)} \times (0, T], \quad D_{(2)} = (0, d_1), \tag{4.1b}$$

На подобласти $\overline{G}_{(2)}$ введем сетку

$$\overline{G}_{(2)h} = \overline{\omega}_{(2)} \times \overline{\omega}_0,$$

где $\overline{\omega}_{(2)}$ – равномерная сетка с числом узлов $N + 1$.

На множестве $\overline{G}_{(2)h}$ найдем решение $z_{(2)}(x,t)$ сеточной задачи

$$\left(\Lambda_{(3.2)}\, z_{(2)}\right)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_{(2)h},$$

$$z_{(2)}(x,t) = \begin{cases} z_1(x,t), & (x,t) \in S_{(2)h} \setminus S, \\ \varphi(x,t), & (x,t) \in S_{(2)h} \bigcap S, \end{cases}$$

где $G_{(2)h} = G_{(2)} \bigcap \overline{G}_{(2)h}$, $S_{(2)h} = S_{(2)} \bigcap \overline{G}_{(2)h}$. Сеточное множество $\overline{G}_{2h}$ на $\overline{G}$ и функцию $z_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{2h}$ определим соотношениями:

$$\overline{G}_{2h} = \overline{G}_{(2)h} \bigcup \left\{\overline{G}_{1h} \setminus \overline{G}_{(2)}\right\}, \quad z_2(x,t) = \begin{cases} z_{(2)}(x,t), & (x,t) \in \overline{G}_{(2)h}, \\ [0.7ex] z_1(x,t), & (x,t) \in \overline{G}_{1h} \setminus \overline{G}_{(2)}. \end{cases}$$

Пусть при $k \geq 3$ уже построены сеточное множество $\overline{G}_{k-1,h}$ и сеточная функция $z_{k-1}(x,t)$ на этом множестве. Далее, пусть каким-либо образом найдена величина $d_{k-1} \in \omega_{k-1}$ такая, что при $x \geq d_{k-1}$ сеточное решение $z_{k-1}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{k-1,h}$ хорошо приближает решение задачи (1.2), (1.1), причем

$$|u(x,t) - z_{k-1}(x,t)| \leq M\,\delta, \quad (x,t) \in \overline{G}_{k-1,h}, \quad x \geq d_{k-1}. \tag{4.2b}$$

Постоянная M зависит от k, $M_{(4.2b)} = M_{(4.2b)}(k-1)$, где $M(k) = M^*\,k^*$. Здесь

$$\overline{G}_{k-1,h} = \overline{\omega}_{k-1} \times \overline{\omega}_0,$$

$\overline{\omega}_{k-1}$ – сетка, порождающая сетку $\overline{G}_{k-1,h}$; $N_k + 1$ – число узлов сетки $\overline{\omega}_k$, $k \geq 2$; $N_1 = N$.

Если окажется, что $d_{k-1} > 0$, то определим подобласть

$$\overline{G}_{(k)} = G_{(k)} \bigcup S_{(k)}, \quad G_{(k)} = G_{(k)}(d_{k-1}), \quad G_{(k)} = D_{(k)} \times (0, T], \quad D_{(k)} = (0, d_{k-1}). \tag{4.1c}$$

На множестве $\overline{G}_{(k)}$ введем сетку

$$\overline{G}_{(k)h} = \overline{\omega}_{(k)} \times \overline{\omega}_0, \tag{4.1d}$$

* Здесь и далее через M^* обозначаем постоянные, не зависящие от k.

где $\overline{\omega}_{(k)}$ – равномерная сетка с числом узлов $N+1$; $h_{(k)}$ – шаг сетки $\overline{\omega}_{(k)}$. Пусть $z_{(k)}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{(k)h}$ – решение сеточной задачи

$$\begin{gathered}\left(\Lambda_{(3.2)}\, z_{(k)}\right)(x,t)=0, \quad (x,t)\in G_{(k)h},\\ z_{(k)}(x,t)=\begin{cases} z_{k-1}(x,t), & (x,t)\in S_{(k)h}\setminus S,\\ \varphi(x,t), & (x,t)\in S_{(k)h}\bigcap S.\end{cases}\end{gathered} \tag{4.1e}$$

Полагаем

$$\overline{G}_{kh}=\overline{G}_{(k)h}\bigcup\left\{\overline{G}_{k-1,h}\setminus\overline{G}_{(k)}\right\}, \quad z_k(x,t)=\begin{cases} z_{(k)}(x,t), & (x,t)\in\overline{G}_{(k)h},\\ z_{k-1}(x,t), & (x,t)\in\overline{G}_{k-1,h}\setminus\overline{G}_{(k)}.\end{cases}$$

Если при каком-либо значении $k=K_0$ оказалось, что $d_{K_0}=0$, то полагаем $d_k=0$ при $k\ge K_0$. При $k\ge K_0+1$ множества $\overline{G}_{(k)}$ считаем пустыми и функции $z_{(k)}(x,t)$ не вычисляем. Например, при $k\ge K_0$ имеем $z_k(x,t)=z_{K_0}(x,t)$, $\overline{G}_{kh}= =\overline{G}_{K_0h}$.

При $k=K$, где K – заданное фиксированное число, $K\ge 1$, полагаем

$$\overline{G}_h^K=\overline{G}_{Kh}\equiv\overline{G}_h, \quad z^K(x,t)=z_K(x,t)\equiv z(x,t). \tag{4.1f}$$

Пусть найдена величина $d^K\in\overline{\omega}_K$, $d^K=d_K$, такая, что при $x\ge d_K$ решение $z_K(x,t)$ приближает решение задачи (1.2), (1.1); в этом случае имеем

$$|u(x,t)-z^K(x,t)|\le M\,\delta, \quad (x,t)\in\overline{G}_h^K, \quad x\ge d^K. \tag{4.2c}$$

Функцию $z_{(4.1)}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{h(4.1)}$ назовем решением схемы (3.2), (4.1), а функции $z_k(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{kh}$, $k=1,\ldots,K$ – компонентами решения разностной схемы.

4.2. Приведенный алгоритм (назовем его $A_{(4.1)}$) позволяет на основе последовательности величин d_k, $k=1,\ldots,K$ строить решение задачи (3.2), (4.1). Величина N_K+1 – число узлов сетки $\overline{\omega}^K=\overline{\omega}_K$, используемой при построении функции $z^K(x,t)$. Для величины N_K имеем оценку

$$N_K\le K\,(N-1)+1\le K\,N.$$

Отношение $h_{(k)}/h_{(k+1)}$ шагов сетки по x на соседних подобластях адаптивной сетки не превосходит величины N.

В схемах (3.2), (4.1) при решении промежуточных задач (4.1e) не требуется интерполяция для определения значений функций $z_{(k)}(x,t)$ на границе $S_{(k)h}$.

Для схемы (3.2), (4.1) справедлива следующая теорема сравнения.

Теорема 4.1. *Пусть функции* $z_k^1(x,t)$ *и* $z_k^2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{kh}$, $\overline{G}_{kh}=\overline{G}_{kh(4.1)}$, $k=1,2,\ldots,K$ *удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}\left(\Lambda\, z_1^1\right)(x,t)\le\left(\Lambda\, z_1^2\right)(x,t), \quad (x,t)\in G_{(1)h},\\ z_1^1(x,t)\ \ge z_1^2(x,t), \quad (x,t)\in S_{(1)h};\\ \left(\Lambda\, z_k^1\right)(x,t)\le\left(\Lambda\, z_k^2\right)(x,t), \quad (x,t)\in G_{(k)h},\\ z_k^1(x,t)\ge z_k^2(x,t), \quad (x,t)\in S_{(k)h}\bigcap S,\\ z_k^1(x,t)\ge z_{k-1}^1(x,t), \quad z_{k-1}^2(x,t)\ge z_k^2(x,t),\\ (x,t)\in\overline{G}_{kh}\setminus\{G_{(k)}\bigcup\{S_{(k)}\bigcap S\}\}, \quad k=2,\ldots,K.\end{gathered}$$

Тогда $z_K^1(x,t)\ge z_K^2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{Kh}$.

Доказательство данной теоремы проводится индукцией по k, где k – номер шага итерационного процесса.

Сетки $\overline{G}_{kh}$, $k = 1, \ldots, K$, получаемые по алгоритму $A_{(4.1)}$, определяются законом выбора величин d_k, $k = 1, 2, \ldots, K$, а также величинами K, N и N_0. В сетках, получаемых по алгоритму $A_{(4.1)}$, величины d_k будем определять вне зависимости от промежуточных результатов, получаемых в процессе вычислений, то есть сетки $\overline{G}_{kh}$ относятся к априорно сгущающимся сеткам.

Заметим, что в этом классе разностных схем не существует схем, решения которых сходятся ε-равномерно к решению краевой задачи (1.2), (1.1).

5. Разностная схема на априорно адаптирующейся сетке

Рассмотрим разностную схему на априорно адаптирующихся сетках, строящихся на основе мажоранты для сингулярной компоненты сеточного решения.

5.1. Приведем ряд вспомогательных построений. Для дифференциальной и сеточной задач введем ширину пограничного слоя, определяемую по мажорантам для сингулярных компонент их решений.

Функция

$$W^c(x) = W^c(x;\,\varepsilon) = \exp(-m^0\varepsilon^{-1}x), \qquad x \in \overline{D}^{\,\infty}, \tag{5.1a}$$

где

$$\overline{D}^{\,\infty} = [0, \infty), \tag{5.1b}$$

$m^0 = \min\limits_{\overline{G}}[a^{-1}(x,t)b(x,t)]$, является мажорантой (с точностью до постоянного сомножителя) для сингулярной компоненты $V_0(x,t)$ из представления (2.11) решения задачи (1.2), (1.1).

На основе функции $W^c(x)$ введем ширину пограничного слоя для задачи (1.2), (1.1). Скажем, что величина

$$\eta^c = \eta^c(\delta;\,\varepsilon), \tag{5.2a}$$

где $\delta > 0$ – достаточно малая величина, есть *ширина пограничного слоя* (*определяемая по мажоранте для сингулярной компоненты* $V(x,t)$) *с пороговым значением порядка* δ (или, проще говоря, *ширина пограничного слоя, определяемая по мажоранте*), если η^c есть минимум величины η^0, для которой выполняется оценка

$$W^c(x;\,\varepsilon) \le \delta, \quad x \in \overline{D}^{\,\infty}, \quad r(x, \Gamma_1) \ge \eta^0, \tag{5.2b}$$

где Γ_1 – граница множества $\overline{D}^{\,\infty}$; $\overline{D}^{\,\infty} = D^\infty \bigcup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$. Величина η^c может принимать значения, превосходящие $d_{(1.1)}$ (при достаточно малых значениях δ, $\delta \le \delta(\varepsilon)$); η^c определяется формулой

$$\eta^c = (m^0)^{-1}\varepsilon\,\ln\delta^{-1}. \tag{5.2c}$$

5.2. Введем ширину сеточного пограничного слоя, определяемую на основе мажорантной функции для сеточной сингулярной компоненты.

Решение задачи (3.2), (3.1) представим в виде суммы функций, соответствующей декомпозиции (2.6):

$$z(x,t) = z_U(x,t) + z_V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}_h, \tag{5.3}$$

где $z_U(x,t)$ и $z_V(x,t)$ – сеточные функции, приближающие компоненты $U(x,t)$ и $V(x,t)$ из представления (2.6); $z_V(x,t)$ – функция сеточного пограничного слоя.

Функции $z_U(x,t)$ и $z_V(x,t)$ – решения задач

$$(\Lambda_{(3.2)}\, z_U)(x,t)=0,\quad (x,t)\in G_h,\quad z_U(x,t)=U(x,t),\quad (x,t)\in S_h;$$
$$\Lambda^2_{(3.2)}\, z_V(x,t)-f(x,t,z_U(x,t)+z_V(x,t))+f(x,t,z_U(x,t))=0,\quad (x,t)\in G_h,$$
$$z_V(x,t)=\varphi_V(x,t),\quad (x,t)\in S_h,$$

где $\varphi_V(x,t)=\varphi_{V(2.8)}(x,t)$.

Функцию $z_V(x,t)$ из (5.3) представим в виде суммы функций

$$z_V(x,t)=z_{V_0}(x,t)+z_{v_V}(x,t),\quad (x,t)\in \overline{G}_h,$$

где $z_{V_0}(x,t)$ и $z_{v_V}(x,t)$ – главный и остаточный члены сингулярной компоненты – сеточные функции, приближающие компоненты $V_0(x,t)$ и $v_V(x,t)$ из представления (2.11). Функция $z_{V_0}(x,t)$ – решение задачи

$$\Lambda^0\, z_{V_0}\,(x,t)\equiv \Big\{\varepsilon\, a(0,t)\,\delta_{\overline{x}\widehat{x}}+b(0,t)\,\delta_x\Big\}\, z_{V_0}(x,t)=0,\quad (x,t)\in \overline{G}_h\setminus \overline{S}^L,$$
$$z_{V_0}(x,t)=\varphi_V(x,t),\quad (x,t)\in \overline{S}^L_h.$$

Будет удобно рассматривать такую декомпозицию решения разностной схемы (3.2) на сетке (3.3):

$$z(x,t)=z_{U_{(0)}}(x,t)+z_{V_0}(x,t),\quad z_{U_{(0)}}(x,t)=z_U(x,t)+z_{v_V}(x,t),\quad (x,t)\in \overline{G}_h,\quad (5.4)$$

где $z_{U_{(0)}}(x,t)$ и $z_{V_0}(x,t)$ – регулярная и сингулярная компоненты, соответствующие функциям $U_{(0)}(x,t)$ и $V_0(x,t)$ из представления (2.11).

Для функции $z_{V_0}(x,t)$ на сетке (3.3) выполняется оценка

$$|z_{V_0}(x,t)|\le |\varphi_V(0,t)|\,(1+m^0\varepsilon^{-1}h)^{-n},\quad (x,t)\in \overline{G}_h,\quad x=x^n=n\,h,$$

где $m^0=m^0_{(5.1)}$. С учетом априорных оценок (2.9), (2.10) находим, что

$$|U_{(0)}(x,t)-z_{U_{(0)}}(x,t)|\le M\,\left[N^{-1}+N_0^{-1}\right],\quad (x,t)\in \overline{G}_h.$$

Функция

$$W(x)=W(x;\varepsilon,h)=(1+m^0\varepsilon^{-1}h)^{-n},\quad x=x^n\in \overline{D}^{\infty}_h,\quad x^n=n\,h,\qquad (5.5)$$

где $\overline{D}^{\infty}_h$ – равномерная сетка на полуоси $\overline{D}^{\infty}_{(5.1)}$ с шагом h, $m^0=m^0_{(5.1)}$ – является мажорантой (с точностью до постоянного сомножителя) для сингулярной компоненты $z_{V_0}(x,t)$ из представления (5.4) решения разностной схемы (3.2) на сетке (3.3), где $h_{(3.3)}=h_{(5.5)}$. Скажем, что величина

$$\eta=\eta(\delta;\varepsilon,h),\qquad (5.6a)$$

где $\delta>0$ – достаточно малая величина, есть *ширина сеточного пограничного слоя* (*определяемая по мажоранте* $W(x)$ *для сингулярной компоненты* $z_{V_0}(x,t)$) *с пороговым значением порядка* δ (или, проще говоря, *ширина сеточного пограничного слоя, определяемая по мажоранте*), если η есть минимум величины η_0, для которой выполняется оценка

$$W(x;\varepsilon,h)\le\delta,\quad x\in \overline{D}^{\infty}_h,\quad r(x,\Gamma_1)\ge\eta_0.\qquad (5.6b)$$

Величина η может принимать значения, превосходящие $d_{(1.1)}$, η определяется формулой

$$\eta = \eta(\delta;\,\varepsilon, h) = \begin{cases} h \ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h) \quad \text{при} \\ \qquad \left[\ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h)\right]^{\text{int}} = \ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h), \\ h \left\{ \left[\ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h)\right]^{\text{int}} + 1 \right\} \quad \text{при} \\ \qquad \left[\ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h)\right]^{\text{int}} < \ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h), \end{cases} \tag{5.6c}$$

$$\delta \in (0,1), \quad \varepsilon \in (0,1], \quad h = h_{(5.5)},$$

где $[\,a\,]^{\text{int}}$ – целая часть числа a.

Будет удобно для записи величины η использовать следующее обозначение. Величине $a \ge 0$ сопоставим на равномерной сетке $\overline{D}{}^{\infty}_{h(5.5)}$ с шагом h величину $\{a;\,h\}^{\text{int}}$, определяемую соотношением

$$\{a;\,h\}^{\text{int}} = \begin{cases} a & \text{при} \quad h\left[h^{-1}a\right]^{\text{int}} = a, \\ h\left\{h\left[h^{-1}a\right]^{\text{int}} + 1\right\} & \text{при} \quad h\left[h^{-1}a\right]^{\text{int}} < a, \end{cases}$$

где $[a]^{\text{int}} = [a]^{\text{int}}_{(5.6)}$. Величина η представима в следующем виде

$$\eta = \eta(\delta;\,\varepsilon, h) = \{a;\,h\}^{\text{int}}, \tag{5.6d}$$

где $a = h \ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h)$.

5.3. Приведем разностную схему на априорно адаптирующихся сетках.

На множестве $\overline{G}_{(k)}$, $k \ge 1$ определена сетка $\overline{G}_{(k)h}$ с шагом $h_{(k)}$ по x. Определим величины d_k в (4.1) соотношением

$$d_k = d_k(\delta;\,\varepsilon, N) \equiv \min\left[\eta(\delta;\,\varepsilon, h_{(k)}),\, d\right], \quad k = 1, \ldots, K, \tag{5.7a}$$

где $h_{(1)} = dN^{-1}$, $h_{(k)} = d_{k-1}N^{-1}$, $k \ge 2$. Положим

$$\delta = \delta(N) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{5.7b}$$

Разностная схема (3.2), (4.1), (5.7) есть схема на априорно адаптирующихся сетках. Величины d_k вычисляются на основе индикатора η – мажоранты сеточного пограничного слоя, контролируемого параметрами δ, ε, h.

5.4. Для решения разностной схемы (3.2), (4.1), (5.7) с использованием принципа максимума устанавливается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le \\ \le \begin{cases} M\left[\delta(N) + N^{-1} + N_0^{-1}\right], & (x,t) \in \overline{G}_h, \quad r(x,\Gamma_1) \ge d_K, \\ M\left[(\varepsilon + d_{K-1}N^{-1})^{-1} d_{K-1} N^{-1} + \delta(N) + N^{-1} + N_0^{-1}\right], & (x,t) \in \overline{G}_h. \end{cases} \tag{5.8}$$

Таким образом, разностная схема (3.2), (4.1), (5.7) сходится ε-равномерно вне d_K-окрестности границы S_1^L, а также на всем множестве $\overline{G}_h$ при условии $\big(h_{(K)} \ll \ll \varepsilon\big)$:

$$\varepsilon^{-1} = o\big(d_{K-1}^{-1} N\big),$$

существенно более слабом по сравнению с условием (1.4).

Оценка (5.8) не является конструктивной, так как величины $d_{K-1\,(5.7)}$ и $d_{K(5.7)}$ зависят от величин ε, N, K неявно, что затрудняет исследование сходимости схемы (3.2), (4.1), (5.7) в зависимости от величин N, ε, K.

Теорема 5.1. *Пусть для решения задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие теоремы* 3.1. *Тогда для решения разностной схемы* (3.2), (4.1), (5.7) *справедлива оценка* (5.8).

6. Вспомогательная разностная схема на адаптирующихся сетках

Рассмотрим вариант разностной схемы на априорно адаптирующихся сетках, позволяющий выписать эффективные оценки для $\eta(\delta;\, \varepsilon, h_{(k)})$, которые позволят исследовать сходимость схемы на адаптирующихся сетках.

6.1. Отметим некоторые свойства величины $\eta_{(5.6)}$, вытекающие из ее явного вида. Функция $\eta(\delta; \varepsilon, h)$ при фиксированных значениях величин δ, h есть кусочно-постоянная неубывающая функция относительно переменной ε.

Будем предполагать выполненным условие

$$\delta = N^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1]. \tag{6.1}$$

Для величины η имеем оценку

$$\eta(\delta;\, \varepsilon, h_1) > \eta^c(\delta;\, \varepsilon),$$

где $h_1 = h_{1(4.1\text{a})}$. Однако

$$\eta(\delta;\, \varepsilon, h_1) \le M_1 \eta^c(\delta;\, \varepsilon) \tag{6.2a}$$

при условии

$$h_1 \le m_1 (m^0)^{-1} \varepsilon; \quad M_1 = M_1(m_1), \quad m^0 = m^0_{(5.1)}, \tag{6.2b}$$

где $M_1(m_1)$ определяется соотношением

$$\alpha_1 \ln^{-1}(1 + \alpha_1) \le M_1 \quad \text{при} \quad \alpha_1 \le m_1 \tag{6.2c}$$

(например, $M_1(m_1 = 1) = 2$).

В случае выполнения условия

$$\varepsilon \ge \varepsilon^{(0)}$$

для $\eta(\delta;\, \varepsilon, h)$ имеет место оценка снизу

$$\eta(\delta;\, \varepsilon, h_1) \ge h_1,$$

причем при условии

$$\varepsilon \le \varepsilon^{(1)}$$

для $\eta(\delta;\, \varepsilon, h)$ имеем оценку сверху:

$$\eta(\delta;\, \varepsilon, h_1) \le h_1.$$

Здесь величины $\varepsilon^{(j)}$ определяются соотношениями

$$\varepsilon^{(j)} = \varepsilon^{(j)}(\delta, N) = \varepsilon^{(j)}(\delta, N;\, d), \quad j \ge -1; \tag{6.3}$$
$$\varepsilon^{(-1)} = M_2 m^0 d \ln^{-1} \delta^{-1}, \quad \varepsilon^{(0)} = M_1 m^0 d\, N^{-1}, \quad \varepsilon^{(j)} = m^0 d\, \delta (1-\delta)^{-1} N^{-j}, \quad j \ge 1,$$

где $d = d_{(1.1)}$, $N = N_{(4.1a)}$, $m^0 = m^0_{(5.1)}$, $M_1 = M_{1(6.2)}$, M_2 – произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$M_2 \le M_1^{-1},$$

$j \ge -1$ – целое число. При таком выборе постоянных M_1, M_2 имеем, что $\eta(\delta; \varepsilon, h_1) \le d$ при $\delta = \delta_{(6.1)}$, $\varepsilon \le \varepsilon^{(-1)}$.

6.2. Опишем правило определения величин $d_{k(4.1)}$ в сеточной конструкции (3.2), (4.1) при заданных величинах K и ε, рассматривая параметр ε принадлежащим назначенным фиксированным интервалам, определяемым величинами $\varepsilon^{(j)}$. При построении схемы на адаптирующихся сетках при заданном K требуется задать величины d_k при $k \le K-1$. Однако при исследовании схем нам потребуются величины d_k при $k \le K$.

Будем считать, что параметр ε принадлежит одному из следующих интервалов, определяемых величиной j:

$$\varepsilon \in \left[\varepsilon^{(j)},\, 1\right] \quad \text{при} \quad j = -1 \quad \text{либо} \quad \varepsilon \in \left[\varepsilon^{(j)},\, \varepsilon^{(j-1)}\right) \quad \text{при} \quad j \ge 0, \tag{6.4a}$$

где $\varepsilon^{(j)} = \varepsilon^{(j)}_{(6.3)}(\delta, N)$, $j \ge -1$. Величина d_k зависит от K, j, а также от δ, ε, k и выбирается на множестве $\overline{G}_{(k)h}$ таким образом, чтобы для величины $\eta_{(5.6)}(\delta;\, \varepsilon, h_{(k)})$ – ширины сеточного пограничного слоя – выполнялась оценка

$$\eta(\delta;\, \varepsilon, h_{(k)}) \le d_k \quad \text{при} \quad 1 \le k \le K$$

в том случае, когда параметр ε принадлежит одному из интервалов в (6.4a).

Рассмотрим случай, когда выполняется соотношение

$$K = K_{(6.4b)}(j) \equiv j + 2, \quad j \ge -1, \tag{6.4b}$$

где $j = j_{(6.4a)}$ определяет интервал изменения параметра ε. Пусть $\varepsilon \in \left[\varepsilon^{(j)},\, 1\right]$ при $j = -1$. В этом случае $K = 1$; полагаем

$$d_1 = \min\left[\left\{M_1 (m^0)^{-1} \varepsilon \,\ln \delta^{-1};\; h_{(1)}\right\}^{\mathrm{int}},\, d\right], \tag{6.4c}$$

где $\{\ldots\}^{\mathrm{int}} = \{\ldots\}^{\mathrm{int}}_{(5.6)}$. Пусть $\varepsilon \in \left[\varepsilon^{(j)},\, \varepsilon^{(j-1)}\right)$, $j \ge 0$. Полагаем

$$d_1 = d_2 = \left\{M_1 (m^0)^{-1} \varepsilon \,\ln \delta^{-1};\; h_{(1)}\right\}^{\mathrm{int}}, \quad \text{если} \quad j = 0; \tag{6.4d}$$

$$d_1 = \left\{h_{(1)} \ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h_{(1)});\; h_{(1)}\right\}^{\mathrm{int}},$$

$$d_2 = d_3 = \left\{M_1 (m^0)^{-1} \varepsilon \,\ln \delta^{-1};\; h_{(2)}\right\}^{\mathrm{int}}, \quad \text{если} \quad j = 1;$$

$$d_1 = h_{(1)}, \ldots,\; d_k = h_{(k)}, \quad k \le j - 1,$$

$$d_k = \left\{h_{(k)} \ln \delta^{-1} \ln^{-1}(1 + m^0 \varepsilon^{-1} h_{(k)});\; h_{(k)}\right\}^{\mathrm{int}}, \quad k = j,$$

$$d_k = d_{k+1} = \left\{M_1 (m^0)^{-1} \varepsilon \,\ln \delta^{-1};\; h_{(k)}\right\}^{\mathrm{int}}, \quad k = j + 1, \quad \text{если} \quad j \ge 2.$$

Здесь $h_{(i)} = d_{i-1} N^{-1}$, $i = 1, \ldots, j+1$, $d_0 = d_{(1.1)}$, $h_{(1)} = h_{1(4.1)}$, $m^0 = m^0_{(5.1)}$, $M_1 = M_{1(6.2)}$.

Соотношения (6.4b)–(6.4d) задают величины d_k в зависимости от значений δ, ε, $h_{(k)}$ и от соотношения между величинами j и k при $k \le K$, $K = j + 2$.

В том случае, когда

$$K > j+2, \quad j \geq -1, \tag{6.4e}$$

полагаем

$$d_k = d_{k(6.4\mathrm{d})} \quad \text{при} \quad k \leq j+2, \quad d_k = d_{j+2\,(6.4\mathrm{d})} \quad \text{при} \quad j+2 < k \leq K, \quad j \geq -1; \tag{6.4f}$$

здесь $K > K_{(6.4\mathrm{b})}(j)$. Если же

$$K \leq j+1, \quad K \geq 1, \quad j \geq 0, \tag{6.4g}$$

то полагаем

$$d_k = d_{k(6.4\mathrm{d})} \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq K; \tag{6.4h}$$

здесь $K < K_{(6.4\mathrm{b})}(j)$.

Таким образом, для параметра ε из одного из интервалов в (6.4a) при заданном K формулы (6.4) в зависимости от соотношения между K и $j = j_{(6.4\mathrm{a})}$ задают набор величин $d_k = d_k(\delta;\, \varepsilon,\, h_{(k)})$.

Как следует из соотношений (6.4b)–(6.4h), в силу равенства $h_{(k)} = d_{k-1}N^{-1}$ величины d_k определяются лишь параметрами j, k и δ, ε, N; имеем

$$d_k = d_{k(6.4)}(\delta;\, \varepsilon, N) = d_k^j(\delta;\, \varepsilon, N), \quad 1 \leq k \leq K, \quad j \geq -1. \tag{6.4i}$$

Разностная схема (3.2), (4.1), (6.4) – схема на априорно адаптирующихся сетках, последовательно переизмельчаемых в окрестности пограничного слоя. При выборе величин d_k в качестве индикатора используем мажоранту сеточного пограничного слоя, контролируемого параметрами δ, ε, h с учетом того, что параметр ε принадлежит задаваемым интервалам из (6.4a); $\varepsilon \in (0, 1]$.

6.3. При указанном выборе величин $d_{k(6.4)}$ с учетом явного вида ширины сеточного пограничного слоя $\eta_{(5.6)}(\delta;\, \varepsilon, h)$ получаем оценки

$$\eta(\delta; \varepsilon, h_{(1)}) \geq m \quad \text{при} \quad \varepsilon \in \left[\varepsilon^{(-1)},\, 1\right]; \tag{6.5}$$

$$\eta(\delta; \varepsilon, h_{(k)}) \leq d_k, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\eta(\delta; \varepsilon, h_{(k)}) \geq m\, d_k, \quad j+1 \leq k \leq K \quad \text{при} \quad \varepsilon \in \left[\varepsilon^{(j)},\, \varepsilon^{(j-1)}\right), \quad j \geq 0,$$

где $h_{(k)} = d_{k-1}N^{-1}$. Самый маленький шаг, который достигается в этом процессе, не меньше, чем dN^{-K}.

Лемма 6.1. *В случае разностной схемы* (3.2), (4.1), (6.4) *для величин* $\eta(\delta; \varepsilon, h_{(k)})$ *и* $d_{k(6.4\mathrm{i})}$ *справедливы оценки* (6.5).

Лемма 6.2. *В случае разностных схем* (3.2), (4.1), (5.7) *и* (3.2), (4.1), (6.4) *для величин* $d_{k(5.7\mathrm{a})}$ *и* $d^j_{k(6.4\mathrm{i})}$ *справедлива оценка*

$$d_{k\,(3.2,\,4.1,\,5.7\mathrm{a})} \leq d^j_{k\,(3.2,\,4.1,\,6.4\mathrm{i})}, \quad 1 \leq k \leq K, \tag{6.6}$$

где $j = j_{(6.4\mathrm{a})}$ *определяет интервал из* (6.4a), *которому принадлежит параметр* ε.

7. Сходимость разностных схем на адаптирующихся сетках

Рассмотрим разностную схему (3.2), (4.1), (6.4), предполагая выполненным условие

$$\delta = N^{-1}. \tag{7.1}$$

7.1. Пусть $z_{[k]}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{(k)h}$ – решение разностной схемы (3.2) на сетке (4.1d), аппроксимирующей задачу

$$L\,u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in G_{(k)},\quad u(x,t)=\varphi(x,t),\quad (x,t)\in S_{(k)}, \tag{7.2}$$

где $\overline{G}_{(k)}=\overline{G}_{(k)(4.1\mathrm{b})}$, $\overline{G}_{(k)h}=\overline{G}_{(k)h(4.1\mathrm{d})}$, $k\ge 1$. Для решения $z_{[k]}(x,t)$ выполняется оценка

$$|u(x,t)-z_{[k]}(x,t)|\le$$

$$\le\begin{cases} M\left[h_{(1)}(\varepsilon+h_{(1)})^{-1}+N^{-1}+N_0^{-1}\right], & k\ge 1,\quad j=-1,0;\\ M\left[h_{(k)}(\varepsilon+h_{(k)})^{-1}+N^{-1}+N_0^{-1}\right], & k,\,j\ge 1;\qquad (x,t)\in\overline{G}_{(k)h},\end{cases} \tag{7.3}$$

где параметр ε принадлежит одному из интервалов в (6.4a),

$$h_{(k)}=h_{(k)}(j)=h_{(k)}(j;\,N)\le\begin{cases} MN^{-1} & \text{при}\ \ j=-1,\,0,\quad k\ge 1;\\ MN^{-j-1}\ln N, & j\le k-1,\\ MN^{-k}, & k\le j\quad \text{при}\ \ j\ge 1,\quad k\ge 1.\end{cases}$$

При $k\ge j+2$ для функции $z_{[k]}(x,t)$ выполняется оценка

$$|u(x,t)-z_{[k]}(x,t)|\le M\left[N^{-1}\ln N+N_0^{-1}\right],\quad (x,t)\in\overline{G}_{(k)h},\quad k\ge j+2,\quad j\ge -1. \tag{7.4}$$

Вне σ_k^j-окрестности границы S_1^L для $z_{[k]}(x,t)$ выполняется оценка

$$|u(x,t)-z_{[k]}(x,t)|\le M\left[N^{-1}+N_0^{-1}\right], \tag{7.5}$$

$$(x,t)\in\overline{G}_{(k)h},\quad r(x,\Gamma_1)\ge\sigma_k^j,\quad k\ge 1,\ j\ge 0,$$

где $\sigma_k^j=d_k^j$, $1\le k\le j+1$; $\sigma_k^j=d_{j+2}^j$, $k\ge j+2$; $d_k^j=d^j_{k(6.4\mathrm{i})}$.

Лемма 7.3. *Пусть выполняется условие теоремы* 3.2. *Тогда для функции* $z_{[k]}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{(k)h(4.1\mathrm{d})}$ *– решения разностной схемы* (3.2), (4.1d), *аппроксимирующей краевую задачу* (7.2), *справедливы оценки* (7.3)–(7.5).

7.2. Рассмотрим разностную схему (3.2), (4.1), (6.4), (7.1).

С учетом оценок (7.3)–(7.5) для решения разностной схемы (3.2), (4.1), (6.4), (7.1) при $\varepsilon\in(0,1]$ получаем оценку

$$|u(x,t)-z(x,t)|\le$$

$$\le\left\{\begin{array}{ll} M\left\{\min\left[\varepsilon^{-1}N^{-1},\,1\right]+N_0^{-1}\right\}, & K=1\\ M\left\{\min\left[\varepsilon^{-1}N^{-K}\ln N,\,1\right]+N^{-1}\ln N+N_0^{-1}\right\}, & K\ge 2\end{array}\right\},\ (x,t)\in\overline{G}_h, \tag{7.6}$$

$$K\ge 1,\quad \varepsilon\in(0,1].$$

Таким образом, разностная схема сходится на $\overline{G}_h$ при условии $\left(N^{-K}\ln N\ll\varepsilon\right)$:

$$\varepsilon^{-1}=o\left(N^K\ln^{-1}N\right)\quad \text{при}\ \ K\ge 2,\quad \varepsilon\in(0,1].$$

Пусть параметр ε удовлетворяет условию

$$\varepsilon\in(0,\varepsilon^{(j)}],\quad j\ge 2,\quad \varepsilon^{(j)}=\varepsilon^{(j)}_{(6.3)}. \tag{7.7}$$

Для ошибки решения краевой задачи (1.2), (1.1) вне σ_K-окрестности множества S_1^L получается оценка

$$|u(x,t)-z(x,t)| \le M\left[N^{-1}+N_0^{-1}\right], \quad (x,t)\in \overline{G}_h, \quad r(x,\Gamma_1)\ge \sigma_K, \tag{7.8a}$$

где

$$\sigma_K = d_K^j, \quad d_K^j = d^j_{K(6.4i)}, \quad 1\le K\le j-1, \quad j=j_{(7.7)}. \tag{7.8b}$$

Для величины σ_K выполняется соотношение

$$\sigma_K = dN^{-K}. \tag{7.8c}$$

Таким образом, в случае выполнения условия (7.7) решение разностной схемы сходится ε-равномерно с первым порядком точности по x и t вне σ_K-окрестности границы S_1^L, причем σ_K стягивается к нулю со скоростью $O\left(N^{-K}\right)$.

Пусть параметр ε принадлежит одному из интервалов в (6.4a). В этом случае в зависимости от соотношения между величинами K и j получается оценка

$$|u(x,t)-z(x,t)| \le \tag{7.9}$$

$$\le \left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} M\left\{\min\left[\varepsilon^{-1}N^{-1},\,1\right]+N_0^{-1}\right\}, & K=1 \\ M\left\{\min\left[\varepsilon^{-1}N^{-K}\ln N,\,1\right]+N^{-1}\ln N+N_0^{-1}\right\}, & K\ge 2 \end{array}\right\}, & K=j+1 \\ M\left[N^{-1}\ln N+N_0^{-1}\right], & K\ge j+2 \end{array}\right\},$$

$$(x,t)\in\overline{G}_h, \quad K\ge j+1, \quad j\ge -1.$$

Вне σ_K^j-окрестности множества S_1^L имеем оценку

$$|u(x,t)-z(x,t)| \le M\left[N^{-1}+N_0^{-1}\right], \; (x,t)\in \overline{G}_h, \; r(x,\Gamma_1)\ge \sigma_K^j, \; K\ge 1, \; j\ge 0; \tag{7.10a}$$

для величины σ_K^j, где

$$\sigma_K^j = d_K^j, \quad 1\le K\le j+1; \qquad \sigma_K^j = d_{j+2}^j, \quad K\ge j+2; \quad j\ge 0, \tag{7.10b}$$

выполняются оценка

$$\sigma_K^j \le \left\{\begin{array}{ll} M\varepsilon\ln N, & K\ge j+1, \quad j\ge 0, \\ MN^{-K}\ln N, & K=j, \quad j\ge 1, \end{array}\right. \tag{7.10c}$$

и соотношение

$$\sigma_K^j = dN^{-K}, \quad K\le j-1, \quad j\ge 2. \tag{7.10d}$$

Таким образом, в том случае, когда параметр ε принадлежит одному из интервалов в (6.4a), скорость сходимости схемы на множестве $\overline{G}_h$ так же, как и размер окрестности множества S_1^L, вне которой схема сходится со скоростью $O\left(N^{-1}+N_0^{-1}\right)$, существенно зависят от параметров K и j.

В соответствии с оценкой (7.9) для того, чтобы при условии, что параметр ε принадлежит одному из интервалов из (6.4a), получить решение разностной схемы (3.2), (4.1), (6.4), (7.1) с оценкой

$$|u(x,t)-z(x,t)| \le M\left[N^{-1}\ln N+N_0^{-1}\right], \quad (x,t)\in\overline{G}_h,$$

требуется K итераций, где $K=j+2$.

В силу оценки (7.6) разностная схема (3.2), (4.1), (6.4), (7.1) сходится на $\overline{G}_h$ при условии $\left(N^{-1} \ll \varepsilon \text{ при } K=1 \text{ и } N^{-K}\ln N \ll \varepsilon \text{ при } K \geq 2\right)$:

$$\varepsilon^{-1} = o(N) \text{ при } K=1 \text{ и } \varepsilon^{-1} = o\left(N^K \ln^{-1} N\right) \text{ при } K \geq 2, \ N \to \infty, \ \varepsilon \in (0,1]. \tag{7.11}$$

Для того чтобы разностная схема сходилась почти ε-равномерно с дефектом сходимости не выше величины $\nu_{(1.5)}$, достаточно выбрать величину K, удовлетворяющую условию

$$K > K(\nu), \quad K(\nu) = \nu^{-1}. \tag{7.12}$$

Таким образом, разностная схема (3.2), (4.1), (6.4), (7.1), (7.12) сходится почти ε-равномерно с дефектом сходимости ν.

Теорема 7.1. *Пусть для решения задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие теоремы* 3.2. *Тогда разностная схема* (3.2), (4.1), (6.4), (7.1) *сходится на* $\overline{G}_h$ *при условии* (7.11)*; при условии* (7.12) *схема сходится почти* ε*-равномерно с дефектом* ν. *Для сеточного решения выполняются оценка* (7.6)*, а в случае условий* (7.7) *и* (6.4а) *– оценки* (7.8) *и* (7.9), (7.10) *соответственно.*

7.3. В случае разностной схемы (3.2), (4.1), (5.7), (7.1) справедлива следующая теорема, устанавливаемая с учетом оценки (6.6).

Теорема 7.2. *Пусть для решения задачи* (1.2), (1.1) *выполняется условие теоремы* 3.2. *Тогда разностная схема* (3.2), (4.1), (5.7), (7.1) *сходится на* $\overline{G}_h$ *при условии* (7.11)*; при условии* (7.12) *схема сходится почти* ε*-равномерно с дефектом* ν. *Для сеточного решения выполняются оценка* (7.6)*, а в случае условий* (7.7) *и* (6.4а) *– оценки* (7.8) *и* (7.9), (7.10) *соответственно, где в* (7.8) $\sigma_K = d_{K(5.7)}(\delta;\varepsilon,N)$, $\delta = \delta_{(7.1)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(7.7)}$ *при условии, что* $\varepsilon^{-1}h_{(K)} \geq (m^0)^{-1}N$, *и в* (7.10) $\sigma_K^j = d_{K(5.7)}(\delta;\varepsilon,N)$, $\delta = \delta_{(7.1)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(6.4\text{a})}$, $j = j_{(6.4\text{a})}$.

8. Обобщения

8.1. Заметим, что разностная схема (3.2), (3.1) является нелинейной. На сетке (3.1) рассмотрим разностную схему, в которой нелинейный член дифференциального уравнения вычисляется по искомой функции на предыдущем временном слое.

Задаче (1.2), (1.1) сопоставим разностную схему (см. [18])

$$\begin{aligned}\left(\Lambda_{(8.1)}z\right)(x,\,t) \ &\equiv\ \Lambda^2_{(3.2)}z(x,\,t) - f\left(x,t,\,\check{z}(x,\,t)\right) = 0, \quad (x,\,t) \in G_h,\\ z(x,\,t) \ &=\ \varphi(x,\,t), \quad (x,\,t) \in S_h.\end{aligned} \tag{8.1}$$

Здесь $\check{z}(x,\,t) = z(x, t-h_t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, $t > 0$.

В случае выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x,t,\,u) \leq c(x,t), \quad (x,t,\,u) \in \overline{G} \times R \tag{8.2}$$

разностная схема (8.1), (3.1) является монотонной.

Для простоты считаем выполненным условие (8.2).

С учетом оценок решения задачи (1.2), (1.1) для линеаризованной разностной схемы (8.1) на специальной сетке (3.5) получается оценка (подобная оценке (3.7); вывод этих оценок аналогичен выводу оценок в [26]):

$$|u(x,t) - z(x,t)| \leq M\ \left[N^{-1}\ln N + N_0^{-1}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{8.3}$$

В том случае, когда условие (8.2) не выполняется, в задаче (8.1), (3.1) от функции $z(x,\, t)$ перейдем к функции $z^*(x,\, t)$, $z(x,\, t) = z^*(x,\, t)\exp(\alpha\, t)$ и выберем величину α достаточно большой так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x,t,\,u) \le c(x,t) + \delta_{\overline{t}}\left[\exp(\alpha\, t)\right] p(x,t), \quad (x,t,\,u) \in \overline{G} \times R,$$

что обеспечивает монотонность получающейся сеточной задачи. Далее устанавливаем сходимость функции $z^*(x,\, t)$ к функции $u^*(x,\, t)$, $u(x,\, t) = u^*(x,\, t)\exp(\alpha\, t)$. Возвращаясь к функции $z(x,\, t)$, получим оценку (8.3).

Приведенные выше рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема 8.1. *Пусть выполняются условие теоремы* 2.1 *и условие* (8.2)*. Тогда решение линеаризованной разностной схемы* (8.1), (3.5) *сходится к решению задачи* (1.2), (1.1) ε*-равномерно; для сеточных решений справедлива оценка* (8.3)*.*

8.2. Краевой задаче (1.2), (1.1) сопоставим разностную схему (8.1), (4.1), (6.4), (7.1) – линеаризованную схему на апостериорно адаптирующихся сетках.

Для решений разностной схемы (8.1), (4.1), (6.4), (7.1) справедливы утверждения о сходимости, подобные утверждениям теоремы 7.1 о сходимости схемы (3.2), (4.1), (6.4), (7.1).

Теорема 8.2. *Пусть выполняется предположение теоремы* 8.1*. Тогда решение разностной схемы* (8.1), (4.1), (6.4), (7.1) *сходится к решению задачи* (1.2), (1.1) *при условии* (7.11)*, а также* ε*-равномерно* (*со скоростью* $\mathcal{O}\left(N^{-1} + N_0^{-1}\right)$) *вне* σ_K*-окрестности множества* S_1^L*; решение схемы* (8.1), (4.1), (6.4), (7.1), (7.12) *сходится к решению задачи* (1.2), (1.1) *почти* ε*-равномерно с дефектом* ν*. Для сеточных решений справедлива оценка* (7.7)*, а в случае выполнения условий* (7.7) *и* (6.4a) *– оценки* (7.8) *и* (7.9), (7.10) *соответственно.*

Доказательство теоремы 8.2 аналогично доказательству теоремы 7.1.

Для линеаризованной разностной схемы (8.1), (4.1), (5.7), (7.1) справедлива теорема, подобная теореме 7.2.

Теорема 8.3. *Пусть выполняется предположение теоремы* 8.1*. Тогда решение разностной схемы* (8.1), (4.1), (5.7), (7.1) *сходится к решению задачи* (1.2), (1.1) *при условии* (7.11)*, а также* ε*-равномерно (со скоростью* $\mathcal{O}\left(N^{-1} + N_0^{-1}\right)$*) вне* σ_K*-окрестности множества* S_1^L*; решение схемы* (8.1), (4.1), (5.7), (7.1), (7.12) *сходится к решению задачи* (1.2), (1.1) *почти* ε*-равномерно с дефектом* ν*. Для сеточных решений справедлива оценка* (7.7)*, а в случае выполнения условий* (7.7) *и* (6.4a) *– оценки* (7.8) *и* (7.9), (7.10) *соответственно, где в* (7.8) $\sigma_K = d_{K(5.7)}(\delta;\varepsilon,N)$, $\delta = \delta_{(7.1)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(7.7)}$ *при условии, что* $\varepsilon^{-1}h_{(K)} \ge (m^0)^{-1}N$, *и в* (7.10) $\sigma_K^j = d_{K(5.7)}(\delta;\varepsilon,N)$, $\delta = \delta_{(7.1)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(6.4a)}$, $j = j_{(6.4a)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00729), Булевского центра исследований по информатике при Национальном Университете Ирландии, г. Корк, а также Ассоциации по приложениям математики в науке и технике в Ирландии (the Mathematics Applications Consortium for Science and Industry in Ireland (MACSI) under the Science Foundation Ireland (SFI) Mathematics Initiative).

Summary

G.I. Shishkin. Grid approximation of a singularly perturbed quasilinear parabolic convection-diffusion equation on *a priori* adapted meshes.

An initial-boundary value problem is considered for a *quasilinear* singularly perturbed *parabolic convection-diffusion equation.* For such a problem, a solution of a classical difference scheme on uniform grid converges at the rate $\mathcal{O}\left((\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}\right)$, where $N+1$ and N_0+1 are the numbers of nodes in the meshes in x and t respectively; the scheme converges only under the condition $N^{-1} \ll \varepsilon$. In the present paper, nonlinear and linearized finite difference schemes are constructed on *a priori sequentially adapted* grids, and their convergence is studied. The construction of the schemes is carried out on the basis of a *majorant* to the singular component of the discrete solution on uniform grids that allows us to find *a priori subdomains* where the computed solution requires a further improvement. Such subdomain is defined by the perturbation parameter ε, the step-size of a uniform mesh in x, and also by the required accuracy of the grid solution and the prescribed number K of iterations to refine the solution. The *advantage* of this approach consists in the *uniform meshes* used. The error of the discrete solution depends weakly on the parameter ε. The schemes that are constructed in the iterative process converge *almost ε-uniformly,* namely, under the condition $N^{-1} \ll \varepsilon^{\nu}$, where the value $\nu = \nu(K)$ can be chosen arbitrarily small for sufficiently large K.

Литература

1. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859.

2. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, Вып. 2. – С. 237–248.

3. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. – М.: Мир, 1983. – 199 с.

4. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. – 232 с.

5. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 1996. – 180 p.

6. *Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Robust Computational Techniques for Boundary Layers. – Boca Raton: CRC Press, 2000. – 270 p.

7. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. – Heidelberg: Springer, 1996. – 364 p.

8. *Шишкин Г.И.* Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 7. – С. 963–977.

9. *Hemker P.W., Shishkin G.I.* On a class of singularly perturbed boundary value problems for which an adaptive mesh technique is necessary // Proc. of the Second Internat. Colloquium on Numerical Analysis / Eds. D. Bainov, V. Covachev. – International Science Publishers, 1994, – P. 83–92.

10. *Shishkin G.I.* On finite difference fitted schemes for singularly perturbed boundary value problems with a parabolic boundary layer // J. Math. Anal. and Applications. – 1997. – V. 208. – P. 181–204.

11. *Farrell P.A., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* On the non-existence of e-uniform finite difference methods on uniform meshes for semilinear two-point boundary value problems // Math. Comp. – 1998. – V. 67, No 222. – P. 603–617.

12. *Шишкин Г.И.* Апостериорно адаптируемые (по градиенту решения) сетки в аппроксимации сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии // Вычисл. технологии. – 2001. – Т. 6, № 1–2. – С. 72–87.

13. *Шишкин Г.И.* Аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии на адаптивных сетках // Матем. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 103–118.

14. *Shishkin G.I., Shishkina L.P., Hemker P.W.* A class of singularly perturbed convection-diffusion problems with a moving interior layer, *A Posteriori* Adaptive Mesh Technique // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – V. 4, No 1. – P. 105–127.

15. *Шишкин Г.И.* Использование решений на вложенных сетках при аппроксимации сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции–диффузии на адаптирующихся сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Т. 46, № 9. – С. 1617–1637.

16. *Shishkin G.I.* A finite difference scheme on apriori adapted meshes for a singularly perturbed parabolic convection-diffusion problem equation // Numer. Math. J. Chinesse Univ. – accepted.

17. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Наука, М., 1967. – 736 с.

18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 614 с.

19. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. –592 с.

20. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

21. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

22. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.

23. *Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P.*, ε-uniform schemes with high-order time-accuracy for parabolic singular perturbation problems // IMA J. Numer. Anal. – 2000. – V. 20, No 1. – P. 99–121.

24. *Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P.*, Novel defect-correction high-order, in space and time, accurate schemes for parabolic singularly perturbed convection-diffusion problems // Comp. Methods in Appl. Math. – 2003. – V. 3, No 3. – P. 387–404.

25. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Метод Ричардсона высокого порядка точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 980–989.

26. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* The Richardson extrapolation technique for quasilinear parabolic singularly perturbed convection-diffusion equations // Journal of Physics. Conference Series: International Workshop on Multi-Rate Processes & Hysteresis, 3-8 April 2006, University College Cork, Ireland. – 2006. – V. 55. – P. 203–213. – Режим доступа: http://www.iop.org/EJ/toc/1742-6596/55/1/.

27. *Wesseling P.* Principles of Computational Fluid Dynamics. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 652 p.

Поступила в редакцию
23.04.08

Шишкин Григорий Иванович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: *shishkin@imm.uran.ru*