УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 154, кн. 1* Физико-математические науки *2012*

УДК 512

# НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ТОЖДЕСТВ ПОДПРОСТРАНСТВ $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ МАТРИЧНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ $M^{(m,k)}(F)$

*С.Ю. Антонов*

**Аннотация**

Введены и исследованы несколько видов многочленов свободной ассоциативной алгебры $F\{Z\}$. Найдены условия, при которых эти многочлены являются тождествами подпространств $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ супералгебры $M^{(m,k)}(F)$.

**Ключевые слова:** $T$-идеал, полиномиальное тождество, матричная супералгебра.

---

## Введение

Пусть $F$ – произвольное поле, $F\{Z\}$ – свободная ассоциативная алгебра, порожденная счетным множеством $Z = \{z_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, $m$, $k$ – любые натуральные числа, $M_{m+k}(F)$ – алгебра $(m+k)\times(m+k)$-матриц с элементами из $F$, $M^{(m,k)}(F) = (M_{m+k}(F), M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F))$ – матричная супералгебра, градуированная подпространствами:

$$M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m\times m}(F) & 0_{m\times k} \\ 0_{k\times m} & D_{k\times k}(F) \end{pmatrix} \right\},\ M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B_{m\times k}(F) \\ A_{k\times m}(F) & 0_{k\times k} \end{pmatrix} \right\}.$$

Через $L(Z)$ будем обозначать линейную оболочку множества $Z$. Напомним, что многочлен $f(z_{i_1},\ldots,z_{i_n}) \in F\{Z\}$ называется полиномиальным тождеством подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$, где $i = 0,1$, если для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(F\{Z\}, M_{m+k}(F))$ такого, что $\varphi(L(Z)) \subseteq M_i^{(m,k)}(F)$, справедливо равенство: $\varphi(f(z_{i_1},\ldots,z_{i_n})) = 0$.

Нетрудно видеть, что множество всех полиномиальных тождеств подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$, $i = 0,1$, образует двусторонний идеал алгебры $F\{Z\}$, который называется идеалом тождеств подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$ и обозначается символом $T[M_i^{(m,k)}(F), M_{m+k}(F)]$. Мы будем использовать более короткую запись $T[M_i^{(m,k)}(F)]$.

В [1] показано, что $f_3(z_1,z_2,z_3) = z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1 \in T[M_1^{(1,1)}(F)]$, $f_5(z_1,\ldots,z_5) = z_1z_2z_3z_4z_5 - z_1z_4z_5z_2z_3 + z_3z_2z_5z_4z_1 - z_3z_4z_1z_2z_5 + z_5z_2z_1z_4z_3 - z_5z_4z_3z_2z_1 \in T[M_1^{(2,1)}(F)]$.

В настоящей работе мы обобщаем конструкцию многочленов $f_3(z_1,z_2,z_3)$, $f_5(z_1,\ldots,z_5)$, приводим их основные свойства и показываем, что полученные многочлены, названные нами квазимногочленами Капелли, являются тождествами подпространств $M_i^{(m,k)}(F)$ начиная с некоторой степени.

## 1. Определение и основные свойства квазимногочленов Капелли

Пусть $S_n$ – симметрическая группа степени $n$, $A_n = \{\pi \in S_n \mid \operatorname{sgn}\pi = 1\}$, $A_n^- = \{\tau \in S_n \mid \operatorname{sgn}\tau = -1\}$, $X = \{z_{2n-1}\}_{n\in\mathbf{N}}$, $Y = \{z_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$. Кроме того, для любого

$n \in \mathbf{N}$ положим $x_n = z_{2n-1}$, $y_n = z_{2n}$. Очевидно, что $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = Z$. Рассмотрим многочлены вида

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)};$$

$$g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)};$$

$$f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{sgn\, \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} y_{\tau(n)};$$

$$g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

которые в дальнейшем будем называть квазимногочленами Капелли.

Установим основные свойства введенных нами многочленов.

**Предложение 1.** *Многочлены $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ обладают следующими свойствами:*

1) *если отображения $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{N}$, $\psi : \{1, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N}$ неинъективны, то*

$$f_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \ldots, y_{\psi(n-1)}) = 0,$$
$$g_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \ldots, y_{\psi(n-1)}) = 0;$$

2) *для любого $\sigma \in A_n$*

$$f_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$g_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y});$$

3) *для любого $\mu \in A_n^-$*

$$f_{2n-1}(x_{\mu(1)}, \ldots, x_{\mu(n)}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = -g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$g_{2n-1}(x_{\mu(1)}, \ldots, x_{\mu(n)}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = -f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y});$$

4) *для любого $\rho \in A_{n-1}$*

$$f_{2n-1}(x_1, \ldots, x_n, y_{\rho(1)}, \ldots, y_{\rho(n-1)}) = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$g_{2n-1}(x_1, \ldots, x_n, y_{\rho(1)}, \ldots, y_{\rho(n-1)}) = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y});$$

5) *для любого $\omega \in A_{n-1}^-$*

$$f_{2n-1}(x_1, \ldots, x_n, y_{\omega(1)}, \ldots, y_{\omega(n-1)}) = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$g_{2n-1}(x_1, \ldots, x_n, y_{\omega(1)}, \ldots, y_{\omega(n-1)}) = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}).$$

**Доказательство.** Проведем его для многочлена $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, поскольку для $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ оно аналогично.

1. Для отображений $\varphi$ и $\psi$ имеем

$$f_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \ldots, y_{\psi(n-1)}) =$$
$$= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \cdots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))}.$$

Если $\varphi$, $\psi$ неинъективны, то для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, и $r, s \in \in \{1, \ldots, n-1\}$, $r \neq s$, справедливы равенства $\varphi(i) = \varphi(j)$, $\psi(r) = \psi(s)$.

Пусть $\pi$, $\tau$ – произвольные элементы групп $S_n$ и $S_{n-1}$ соответственно. Тогда $\pi(a) = i$, $\pi(b) = j$, $\tau(c) = r$, $\tau(d) = s$ для некоторых $a, b \in \{1, \ldots, n\}$, $c, d \in \{1, \ldots, n-1\}$. Рассмотрим подстановки $\pi' \in S_n$, $\tau' \in S_{n-1}$, для которых

$$\pi'(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{если } v \notin \{a, b\}, \\ j, & \text{если } v = a, \\ i, & \text{если } v = b, \end{cases} \qquad \tau'(m) = \begin{cases} \tau(m), & \text{если } m \notin \{c, d\}, \\ s, & \text{если } m = c, \\ r, & \text{если } m = d. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \cdots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))} + \\ &\quad + \operatorname{sgn} \pi' \delta_{\operatorname{sgn} \pi' \operatorname{sgn} \tau'} x_{\varphi(\pi'(1))} y_{\psi(\tau'(1))} \cdots y_{\psi(\tau'(n-1))} x_{\varphi(\pi'(n))} = \\ &\quad = \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \cdots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))} - \\ &\quad - \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi - \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi'(1))} y_{\psi(\tau'(1))} \cdots y_{\psi(\tau'(n-1))} x_{\varphi(\pi'(n))} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \ldots, y_{\psi(n-1)}) = 0$.

2. Для произвольного $\sigma \in A_n$ имеем

$$\begin{aligned} &f_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(\pi(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(\pi(n))} = |\,\text{пусть } \pi = \sigma^{-1}\alpha\,| = \\ &= \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \alpha \delta_{\operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(n))} = \\ &= f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

3. Для произвольного $\mu \in A_n^-$ имеем

$$\begin{aligned} &f_{2n-1}(x_{\mu(1)}, \ldots, x_{\mu(n)}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\mu(\pi(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\mu(\pi(n))} = |\,\text{пусть } \pi = \mu^{-1}\alpha\,| = \\ &= \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \mu \operatorname{sgn} \alpha \delta_{\operatorname{sgn} \mu \operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \tau} x_{\mu(\mu^{-1}\alpha(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\mu(\mu^{-1}\alpha(n))} = \\ &= -\sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \alpha \delta_{-\operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \tau} x_{\alpha(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\alpha(n)} = -g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

4. Для произвольного $\rho \in A_{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} &f_{2n-1}(x_1, \ldots, x_n, y_{\rho(1)}, \ldots, y_{\rho(n-1)}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\rho(\tau(1))} \cdots y_{\rho(\tau(n-1))} x_{\pi(n)} = |\,\text{пусть } \tau = \rho^{-1}\gamma\,| = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\gamma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \gamma} x_{\pi(1)} y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(1))} \cdots y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(n-1))} x_{\pi(n)} = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

5. Для произвольного $\omega \in A_{n-1}^-$ имеем

$$\begin{aligned} &f_{2n-1}(x_1, \ldots, x_n, y_{\omega(1)}, \ldots, y_{\omega(n-1)}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\omega(\tau(1))} \cdots y_{\omega(\tau(n-1))} x_{\pi(n)} = |\,\text{пусть } \tau = \omega^{-1}\alpha\,| = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\alpha \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \omega \operatorname{sgn} \alpha} x_{\pi(1)} y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(1))} \cdots y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(n-1))} x_{\pi(n)} = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

$\square$

Аналогично доказывается

**Предложение 2.** *Многочлены* $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x},\bar{y})$ *обладают свойствами:*
1) *если отображения* $\varphi,\psi:\{1,\ldots,n\}\to\mathbf{N}$ *неинъективны, то*

$$f_{2n}(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)},y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(n)})=0,$$

$$g_{2n}(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)},y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(n)})=0;$$

2) *для любого* $\sigma\in A_n$

$$f_{2n}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},y_1,\ldots,y_n)=f_{2n}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},y_1,\ldots,y_n)=g_{2n}(\bar{x},\bar{y});$$

3) *для любого* $\mu\in A_n^-$

$$f_{2n}(x_{\mu(1)},\ldots,x_{\mu(n)},y_1,\ldots,y_n)=-g_{2n}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_{\mu(1)},\ldots,x_{\mu(n)},y_1,\ldots,y_n)=-f_{2n}(\bar{x},\bar{y});$$

4) *для любого* $\rho\in A_n$

$$f_{2n}(x_1,\ldots,x_n,y_{\rho(1)},\ldots,y_{\rho(n)})=f_{2n}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_1,\ldots,x_n,y_{\rho(1)},\ldots,y_{\rho(n)})=g_{2n}(\bar{x},\bar{y});$$

5) *для любого* $\omega\in A_n^-$

$$f_{2n}(x_1,\ldots,x_n,y_{\omega(1)},\ldots,y_{\omega(n)})=g_{2n}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_1,\ldots,x_n,y_{\omega(1)},\ldots,y_{\omega(n)})=f_{2n}(\bar{x},\bar{y}).$$

**Предложение 3.** *Справедливы равенства:*
*a*) *если* $n=2r$, *то*

$$f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n/2}x_{2i-1}f_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}})-x_{2i}g_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n/2}f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i}-g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1};$$

*b*) *если* $n=2r+1$, *то*

$$f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{(n+1)/2}x_{2i-1}f_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}})-\sum_{i=1}^{(n-1)/2}x_{2i}g_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}})=$$

$$=\sum_{i=1}^{(n+1)/2}f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1}-\sum_{i=1}^{(n-1)/2}g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i};$$

*c*) *если* $n=2r$, *то*

$$g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n/2}x_{2i-1}g_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}})-x_{2i}f_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n/2}g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i}-f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1};$$

*d) если* $n = 2r+1$, *то*

$$g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y}) x_{2i}.$$

**Доказательство.** *a)* $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i(y_1,\ldots,y_{n-1},x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n)$, причем для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$x_i t_i(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n) =$$
$$= \sum_{\pi \in S'_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi \delta_{\operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $S'_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_n(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma\mu_i$, где

$$\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & n \\ i & 1 & \ldots & i-2 & i-1 & i+1 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) = i.$$

Заметим также, что $\operatorname{sgn}\mu_i = (-1)^{i-1}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma\mu_i) \delta_{\operatorname{sgn}(\sigma\mu_i)\operatorname{sgn}\tau} x_{\sigma\mu_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma\mu_i(n)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma \delta_{(-1)^{i-1}\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\tau} y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \ldots y_{\tau(i)} x_{\sigma(i+1)} \cdots$$
$$\cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} f_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} g_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}).$$

Докажем вторую часть равенства a). Для этого заметим, что

$$f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{n-1}) x_i,$$

причем для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$v_i(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n,\bar{y}) x_i = \sum_{\pi \in \widetilde{S}_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi \delta_{\operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $\widetilde{S}_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in \widetilde{S}_n(i)$ можно представить в виде: $\pi = \sigma\rho_i$, где

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n & i \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) = i.$$

Заметим также, что $\operatorname{sgn}\rho_i = (-1)^{n-i}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma\rho_i)\delta_{\operatorname{sgn}(\sigma\rho_i)\operatorname{sgn}\tau} x_{\sigma\rho_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma\rho_i(n)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{n-i}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots$$

$$\cdots x_{\sigma(i-1)} y_{\tau(i-1)} x_{\sigma(i+1)} y_{\tau(i)} \cdots x_{\sigma(n)} y_{\tau(n-1)} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{i}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i} - g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1}.$$

b) Рассуждая так же, как и при доказательстве свойства a), получим:

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}});$$

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{i-1}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}.$$

c) Рассуждая так же, как и при доказательстве свойства a), получим:

$$g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{i}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau} y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \cdots$$

$$\cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}});$$

$$g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{i-1}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i} - f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1}.$$

d) Рассуждая так же, как и при доказательстве свойства a), получим:

$$g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{i}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau} y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \cdots$$

$$\cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}});$$

$$g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{\sigma\in S_n(i)}\sum_{\tau\in S_{n-1}}\operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^i\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau}x_{\sigma(1)}y_{\tau(1)}\cdots y_{\tau(n-1)}x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i}.$$

□

Аналогично предыдущему доказывается

**Предложение 4.** *Справедливы равенства:*
*a) если* $n = 2r$, *то*

$$f_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1}f_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i}g_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n/2} f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i} + g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1};$$

*b) если* $n = 2r+1$, *то*

$$f_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1}f_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i}g_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i};$$

*c) если* $n = 2r$, *то*

$$g_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1}g_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i}f_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n/2} g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i} + f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1};$$

*d) если* $n = 2r+1$, *то*

$$g_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1}g_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i}f_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i}.$$

**Замечание 1.** Используя предложения 3, 4, можно получить различного рода разложения многочленов $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, например, если $n = 2r$, то

$$f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n/2}\sum_{j=1}^{n/2}(x_{2i-1}y_{2j-1}f_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y}_{\widehat{2j-1}}) - x_{2i}y_{2j-1}g_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y}_{\widehat{2j-1}})) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n/2}\sum_{j=1}^{n/2-1}(x_{2i-1}y_{2j}g_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y}_{\widehat{2j}}) - x_{2i}y_{2j}f_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y}_{\widehat{2j}})).$$

Совместно с многочленами $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x},\bar{y})$ рассмотрим транспонированные по отношению к ним многочлены:

$$f^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_{n-1}} sgn\,\pi\delta_{\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau} x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)};$$

$$g^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi\delta_{-\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau} x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)};$$

$$f^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\delta_{\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau} y_{\tau(n)}x_{\pi(n)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)};$$

$$g^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\delta_{-\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau} y_{\tau(n)}x_{\pi(n)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)}.$$

**Утверждение 1.** *Справедливы равенства:*

$$f^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \\ = (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\rho\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\rho} x_{\sigma(1)}y_{\rho(1)}\cdots y_{\rho(n-1)}x_{\sigma(n)};$$

$$g^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\rho\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{n}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\rho} x_{\sigma(1)}y_{\rho(1)}\cdots y_{\rho(n-1)}x_{\sigma(n)}.$$

**Доказательство.** Проведем его для первого равенства, поскольку для второго оно аналогично. Итак,

$$f^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi\delta_{\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau} x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)} = \\ = |\text{пусть } \pi=\sigma\alpha,\ \tau=\rho\beta,|$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1\end{pmatrix},\quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1\end{pmatrix};$$
$$\operatorname{sgn}\alpha = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} = (-1)^{n(n-1)/2},$$

$$\operatorname{sgn}\beta = (-1)^{(n-2)+(n-3)+\ldots+1} = \\ = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} = (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{-2(n-1)/2} = (-1)^{n-1}\operatorname{sgn}\alpha| = \\ = (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\rho\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}\beta\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\ \beta\operatorname{sgn}\rho} x_{\sigma(1)}y_{\rho(1)}\cdots y_{\rho(n-1)}x_{\sigma(n)} = \\ = (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\rho\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\delta_{(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\rho} x_{\sigma(1)}y_{\rho(1)}\cdots y_{\rho(n-1)}x_{\sigma(n)}.$$

□

**Следствие 1.** *Пусть* $n=2r+1$, *тогда*

$$f^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^r f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}),\quad g^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^r g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}).$$

**Следствие 2.** *Пусть* $n=2r$, *тогда*

$$f^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^r g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}),\quad g^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^r f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}).$$

По аналогии с утверждением 1 можно доказать

**Утверждение 2.** *Справедливы равенства:*

$$f_{2n}^*(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n(n-1)/2} f_{2n}(\bar{y},\bar{x}), \quad g_{2n}^*(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n(n-1)/2} g_{2n}(\bar{y},\bar{x}).$$

Мы закончим этот пункт обобщением известного равенства $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Пусть $M_{k\times m}(F)$, $M_{m\times k}(F)$ – матричные векторные пространства, $\mathrm{Sym}_k(F) = \{A \in M_k(F) \mid A^T = A\}$, $\mathrm{Alt}_k(F) = \{A \in M_k(F) \mid A^T = -A\}$.

**Предложение 5.** *Для любых* $A_1,\ldots,A_n \in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\ldots,B_n \in M_{m\times k}(F)$

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n) = \begin{cases} \mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n), & \text{\textit{если}} \ \ n = 2r+1; \\ -\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n), & \text{\textit{если}} \ \ n = 2r; \end{cases}$$

$$\mathrm{tr}\, g_{2n}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n) = \begin{cases} \mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n), & \text{\textit{если}} \ \ n = 2r+1; \\ -\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n), & \text{\textit{если}} \ \ n = 2r. \end{cases}$$

**Доказательство.** Проведем его для первого равенства, поскольку для второго оно аналогично. Итак,

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n) = \mathrm{tr} \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}\,\pi\delta_{\mathrm{sgn}\,\pi\mathrm{sgn}\,\tau} A_{\pi(1)}B_{\tau(1)}\cdots A_{\pi(n)}B_{\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}\,\pi\delta_{\mathrm{sgn}\,\pi\mathrm{sgn}\,\tau}\mathrm{tr}\left((A_{\pi(1)}B_{\tau(1)}\cdots A_{\pi(n)})B_{\tau(n)}\right) =$$

$$= \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}\,\pi\delta_{\mathrm{sgn}\,\pi\mathrm{sgn}\,\tau}\mathrm{tr}\left(B_{\tau(n)}A_{\pi(1)}B_{\tau(1)}\cdots A_{\pi(n)}\right)$$

Положим $\tau = \sigma\mu$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix},$$

и заметим, что $\mathrm{sgn}\,\mu = (-1)^{n-1}$. Тогда

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n) =$$

$$= \mathrm{tr} \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\,(\sigma\mu)\delta_{\mathrm{sgn}\,(\sigma\mu)\mathrm{sgn}\,\pi} B_{\sigma\mu(n)}A_{\pi(1)}B_{\sigma\mu(1)}\ldots A_{\pi(n)} =$$

$$= (-1)^{n-1}\mathrm{tr} \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\delta_{(-1)^{n-1}\mathrm{sgn}\,\sigma\mathrm{sgn}\,\pi} B_{\sigma(1)}A_{\pi(1)}\ldots B_{\sigma(n)}A_{\pi(n)} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n), & \text{если} \ \ n = 2r+1; \\ -\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n), & \text{если} \ \ n = 2r. \end{cases}$$

□

Из предложения 5 и утверждения 2 вытекает

**Утверждение 3.** *Пусть* $n = 2r+1$, $A_1,\ldots,A_n \in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\ldots,B_n \in M_{m\times k}(F)$. *Тогда*

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n) = \mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n) = (-1)^{(n-1)/2}\,\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1^T,\ldots,B_n^T,A_1^T,\ldots,A_n^T);$$

$$\mathrm{tr}\, g_{2n}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n) = \mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\ldots,B_n,A_1,\ldots,A_n) = (-1)^{(n-1)/2}\,\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1^T,\ldots,B_n^T,A_1^T,\ldots,A_n^T).$$

**Следствие 3.** *Пусть* $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n\in \mathrm{Sym}_k(F)(\mathrm{Alt}_k(F))$. *Тогда*

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=(-1)^{(n-1)/2}\,\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n);$$

$$\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=(-1)^{(n-1)/2}\,\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n).$$

**Следствие 4.** *Пусть*

$$\mathrm{char}\, F\neq 2,\quad n-1=2(2s+1),\quad A_1,\dots,B_n\in \mathrm{Sym}_k(F)(\mathrm{Alt}_k(F)).$$

*Тогда*

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)=0;\quad \mathrm{tr}\, g_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)=0.$$

**Доказательство.** В силу следствия 3

$$\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=\ =-\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n);$$

$$\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=\ =-\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n).$$

Отсюда и из того, что $\mathrm{char}\, F\neq 2$, получаем равенства $\mathrm{tr}\, f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)= =0$; $\mathrm{tr}\, g_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=0$. Применяя предложение 5, получаем требуемый результат. Следствие доказано. □

## 2. Некоторые тождества подпространств $M_1^{(m,k)}(F)$, $M_0^{(m,k)}(F)$

В этом пункте мы найдем условия, при которых квазимногочлены Капелли являются тождествами для подпространств $M_i^{(m,k)}(F)$.

**Утверждение 4.** *Пусть при некотором* $q\in \mathbf{N}$, *любых* $A_1,\dots,A_q\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_{q-1}\in M_{m\times k}(F)$ $f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1})=0$, *тогда*

$$g_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1})=0.$$

*Верно и обратное. Пусть* $g_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1})=0$, *тогда*

$$f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1})=0.$$

**Доказательство.** В силу 5) предложения 1 для произвольной подстановки $\omega\in A^-_{q-1}$ имеем $f_{2q-1}(\bar{x},y_{\omega(1)},\dots,y_{\omega(q-1)})=g_{2q-1}(\bar{x},\bar{y})$. Следовательно,

$$0=f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_{\omega(1)},\dots,B_{\omega(q-1)})=g_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_{1}),\dots,B_{q-1}).$$

Обратно, по свойству 5) предложения 1 для произвольной подстановки $\omega\in A^-_{q-1}$ имеем $g_{2q-1}(\bar{x},y_{\omega(1)},\dots,y_{\omega(q-1)})=f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y})$. Следовательно,

$$0=g_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_{\omega(1)},\dots,B_{\omega(q-1)})=f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1}).$$

□

Аналогичным образом доказывается

**Утверждение 5.** *Пусть при некотором* $q\in \mathbf{N}$, *любых* $A_1,\dots,A_q\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_q\in M_{m\times k}(F)$ $f_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q)=0$, *тогда*

$$g_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q)=0.$$

*Верно и обратное. Пусть* $g_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q)=0$, *тогда*

$$f_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q)=0.$$

**Замечание 2.** С учетом утверждений 4 и 5 дальнейшее исследование значений многочленов $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x},\bar{y})$ от различных наборов матриц достаточно провести, например, для многочленов $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, что и сделано ниже.

**Утверждение 6.** *Пусть при некотором* $q\in\mathbf{N}$, *любых* $A_1,\dots,A_q\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_{q-1}\in M_{m\times k}(F)$ $f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1})=0$. *Тогда для всякого* $n\geq q$, *произвольных* $A_1,\dots,A_n\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_n\in M_{m\times k}(F)$ *верно равенство:* $f_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)=0$, $f_{2n-1}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_{n-1})=0$.

**Доказательство.** Очевидно, что $q>1$. Далее, если $n=q$, то в силу предложения 4 при $n=2r$ и $n=2r+1$ соответственно имеем:

$$f_{2n}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n/2} f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i}+g_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1},$$

$$f_{2n}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1}+g_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i}.$$

Отсюда и из утверждения 4 получаем, что в обоих случаях

$$f_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)=0.$$

Пусть $n=q+r$, тогда равенства

$$f_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)=0,\quad f_{2n-1}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_{n-1})=0$$

вытекают из замечания 1 и утверждений 4, 5. □

Аналогичным образом доказываются

**Утверждение 7.** *Пусть при некотором* $q\in\mathbf{N}$, *любых* $A_1,\dots,A_q\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_q\in M_{m\times k}(F)$ $f_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q)=0$. *Тогда для всякого* $n\geq q+1$, *произвольных* $A_1,\dots,A_n\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_n\in M_{m\times k}(F)$ *верны равенства:* $f_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n)=0$, $f_{2n-1}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_{n-1})=0$.

**Утверждение 8.** *Пусть при некотором* $q\in\mathbf{N}$, *любых* $B_1,\dots,B_q\in M_{m\times k}(F)$, $A_1,\dots,A_{q-1}\in M_{k\times m}(F)$ $f_{2q-1}(B_1,\dots,B_q,A_1,\dots,A_{q-1})=0$. *Тогда для всякого* $n\geq q$, *произвольных* $B_1,\dots,B_n\in M_{m\times k}(F)$, $A_1,\dots,A_n\in M_{k\times m}(F)$ *верны равенства:* $f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=0$, $f_{2n-1}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_{n-1})=0$.

**Утверждение 9.** *Пусть при некотором* $q\in\mathbf{N}$, *любых* $B_1,\dots,B_q\in M_{m\times k}(F)$, $A_1,\dots,A_q\in M_{k\times m}(F)$ $f_{2q}(B_1,\dots,B_q,A_1,\dots,A_q)=0$. *Тогда для всякого* $n\geq q+1$, *произвольных* $B_1,\dots,B_n\in M_{m\times k}(F)$, $A_1,\dots,A_n\in M_{k\times m}(F)$ *верны равенства:* $f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n)=0$, $f_{2n-1}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_{n-1})=0$.

Теперь покажем, что число $q$, о котором говорится в утверждениях 7–9, действительно существует.

**Утверждение 10.** *Пусть* $q=mk+1$. *Тогда для любых матриц* $A_1,\dots,A_q\in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_q\in M_{m\times k}(F)$ *справедливо равенство:* $f_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q)=0$.

**Доказательство.** Оно вытекает из линейности многочлена $f_{2q}(\bar{x},\bar{y})$ по каждой группе переменных и части 1) предложения 2. □

**Следствие 5.** *Пусть* $q = \max\{m^2+1, k^2+1\}$. *Тогда* $f_{2q}(\bar{x},\bar{y}) \in T[M_0^{(m,k)}(F)]$.

**Утверждение 11.** *Пусть* $q = mk+2$. *Тогда для любых матриц* $A_1,\dots,A_q \in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_{q-1} \in M_{m\times k}(F)$ *справедливо равенство:* $f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1}) = 0$.

**Доказательство.** Вытекает из линейности многочлена $f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y})$ по каждой группе переменных и части 1) предложения 2. □

**Следствие 6.** *Пусть* $q = \max\{m^2+2, k^2+2\}$. *Тогда* $f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}) \in T[M_0^{(m,k)}(F)]$.

**Замечание 3.** В работе [1] показано, что при $m = 2$ многочлен $f_5(z_1,\dots,z_5) \in \in T[M_1^{(m,1)}(F)]$. Несложно показать, что это будет верно и при $m > 2$. Отсюда вытекает, что число $q$ в утверждении 11, а значит, и в утверждении 10 можно понизить до числа 3.

Обозначим через $d(m,k,F)$ $(t(m,k,F))$ наименьшее натуральное число $n$, при котором многочлен $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$ (соответственно $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$) удовлетворяет условию: при любых $A_1,\dots,A_n \in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_n \in M_{m\times k}(F)$ справедливо равенство $f_{2n}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_n) = 0$ (соответственно $f_{2n-1}(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_{n-1}) = = 0$).

Кроме того, пусть $d'(m,k,F)$ $(t'(m,k,F))$ означает наименьшее натуральное число $n$, при котором многочлен $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$ (соответственно $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$) удовлетворяет условию: при любых $B_1,\dots,B_n \in M_{m\times k}(F)$, $A_1,\dots,A_n \in M_{k\times m}(F)$ справедливо равенство $f_{2n}(B_1,\dots,B_n,A_1,\dots,A_n) = 0$ (соответственно $f_{2n-1}(B_1,\dots,B_n, A_1,\dots,A_{n-1}) = 0$).

**Утверждение 12.** *Пусть* $m \ge k > 1$. *Тогда справедливы неравенства:* $d(m,k,F) \ge 2k$, $t(m,k,F) \ge 2k$, $d'(m,k,F) \ge 2k$, $t'(m,k,F) \ge 2k$.

**Доказательство.** Для многочлена $f_{2(2k-1)}(\bar{x},\bar{y})$ рассмотрим следующую подстановку аргументов, называемую двойной лестницей:

$$(x_1,\dots,x_k,\dots,x_{2k-1}) = (e_{1\,1}, e_{2\,2},\dots,e_{k\,k}, e_{k\,k-1}, e_{k-1\,k-2},\dots,e_{2\,1}),$$

$$(y_1,\dots,y_k,\dots,y_{2k-1}) = (e_{1\,2}, e_{2\,3},\dots,e_{k-1\,k}, e_{k\,k}, e_{k-1\,k-1},\dots,e_{1\,1}),$$

где $e_{i\,j}$ – матричные единицы. Нетрудно видеть, что

$$f_{2(2k-1)}(e_{1\,1},\dots,e_{2\,1},e_{1\,2},\dots,e_{1\,1}) = \\ = e_{1\,1}+e_{2\,2}+\ldots+e_{k\,k}+e_{k\,k}+\ldots+e_{2\,2} = \begin{cases} 2E - e_{1\,1}, & \text{если } \operatorname{char} F \neq 2; \\ e_{1\,1}, & \text{если } \operatorname{char} F = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что $d(m,k,F) < 2k$ $(t(m,k,F) < 2k)$. Тогда для некоторого $q \in \mathbf{N}$ многочлен $f_{2q}(\bar{x},\bar{y})$ $(f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}))$ удовлетворяет условию: для любых $A_1,\dots A_q \in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\dots,B_q \in M_{m\times k}(F)$ справедливо равенство: $f_{2q}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_q) = 0$ $(f_{2q-1}(A_1,\dots,A_q,B_1,\dots,B_{q-1}) = 0)$. Следовательно, в силу утверждения 7 (утверждения 6) многочлен $f_{2(2k-1)}(\bar{x},\bar{y})$ обращается в нуль на двойной лестнице, а это противоречит (1). Отсюда заключаем, что наше предположение неверно, и потому $d(m,k,F), t(m,k,F) \ge 2k$.

Предположим, что $d'(m,k,F) < 2k$ $(t'(m,k,F) < 2k)$. Тогда для некоторого $q \in \mathbf{N}$ многочлен $f_{2q}(\bar{x},\bar{y})$ $(f_{2q-1}(\bar{x},\bar{y}))$ удовлетворяет условию: для любых $B_1,\dots,B_q \in M_{m\times k}(F)$, $A_1,\dots A_q \in M_{k\times m}(F)$ $f_{2q}(B_1,\dots,B_q,A_1,\dots,A_q) = 0$

($f_{2q-1}(B_1,\ldots,B_q,A_1,\ldots,A_{q-1})=0$). Следовательно, в силу утверждения 9 (утверждения 8) многочлен $f_{2(2k-1)}(\bar{x},\bar{y})$ обращается в нуль на двойной лестнице, а это противоречит (1). Отсюда заключаем, что наше предположение неверно, и потому $d'(m,k,F)$, $t'(m,k,F)\geq 2k$. Утверждение доказано. □

**Предложение 6.** *Пусть $m,k$ – любые натуральные числа, причем $m\geq k$, $F$ – произвольное поле. Тогда при $n\geq mk+1$ многочлены $f_{2n}(\bar{x},\bar{y}), g_{2n}(\bar{x},\bar{y})\in$ $\in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, а при $n<2k$ $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x},\bar{y})\notin T[M_1^{(m,k)}(F)]$.*

**Доказательство.** В силу утверждения 4 доказательство достаточно провести для многочлена $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$. Пусть $n=mk+1$,

$$a^i=\begin{pmatrix}0_{m\times m} & B^i_{m\times k}\\ A^i_{k\times m} & 0_{k\times k}\end{pmatrix},\quad b^j=\begin{pmatrix}0_{m\times m} & C^j_{m\times k}\\ D^j_{k\times m} & 0_{k\times k}\end{pmatrix}\in M_1^{(m,k)}(F),$$

где $i$, $j=1,\ldots,n$. Тогда согласно утверждению 10

$$f_{2n}(a^1,\ldots,a^n,b^1,\ldots,b^n)=\begin{pmatrix}f_{2n}(B^1,\ldots,B^n,D^1,\ldots,D^n) & 0_{m\times k}\\ 0_{k\times m} & f_{2n}(A^1,\ldots,A^n,C^1,\ldots,C^n)\end{pmatrix}=0.$$

Пусть $n>mk+1$, тогда то, что $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})\in T[M_1^{m,k}(F)]$, следует из утверждений 7 и 9. Вторая часть предложения 6 вытекает из утверждения 12. Предложение доказано. □

Аналогичным образом доказывается

**Предложение 7.** *Пусть $m,k$ – любые натуральные числа, причем $m\geq k$, $F$ – произвольное поле. Тогда при $n\geq mk+2$ многочлены $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})\in$ $\in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, а при $n<2k$ $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})\notin T[M_1^{(m,k)}(F)]$.*

**Замечание 4.** Очевидно, что задача о нахождении наименьшего числа $n$, при котором многочлены $f_{2n}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})\in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, эквивалентна задаче о значениях функций $\max\{d(m,k,F),d'(m,k,F)\}$, $\max\{t(m,k,F),t'(m,k,F)\}$.


## Summary

*S.Yu. Antonov.* Some Types of Identities of Subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of Matrix Superalgebra $M^{(m,k)}(F)$.

Some types of polynomials of free associative algebra $F\{Z\}$ have been introduced and investigated. The conditions under which these polynomials are the identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of superalgebra $M^{(m,k)}(F)$ have been found.


**Key words:** $T$-ideal, polynomial identity, matrix superalgebra.

## Литература


1. *Антонов С.Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(2,1)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(2,1)}(F)$ // Труды Междунар. конф. КЛИН-2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 27–30.


Поступила в редакцию
01.12.11

**Антонов Степан Юрьевич** – старший преподаватель кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: *antonovst-vm@rambler.ru*