УДК 519.6

О СХОДИМОСТИ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

О.В. Глазырина, М.Ф. Павлова

Аннотация

Рассмотрено нелинейное вариационное параболическое неравенство с нелокальным, монотонным по градиенту пространственным оператором. С помощью метода штрафа и метода сумматорных тождеств построена явная по пространственному оператору и неявная по оператору штрафа разностная схема. Получены условия устойчивости построенной разностной схемы, доказана теорема о сходимости при минимальных предположениях о гладкости исходных данных.

Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный по градиенту оператор, нелокальный оператор, явная разностная схема с оператором штрафом, устойчивость, сходимость.

1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область пространства R^n, $n \geq 1$, Γ – граница Ω, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Используя принятые обозначения функциональных пространств (см. [1, 2]), определим множество

$$K = \big\{\, v:\ v \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),\ \ v \geq 0\ \text{ п.вс. в } Q_T \big\},\quad p>1.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x,t) \in K$ такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0,T;W^{-1}_{p'}(\Omega)), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\ \text{ п.вс. в } \Omega, \tag{2}$$

удовлетворяющую неравенству

$$\int\limits_0^T \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v-u \Big\rangle\, dt + \int\limits_0^T \langle Lu, v-u\rangle\, dt \geq \int\limits_0^T \langle f, v-u\rangle\, dt \quad \forall\, v \in K. \tag{3}$$

Здесь $p' = p/(p-1)$, $\langle w,v\rangle$ – значение функционала w из $W^{-1}_{p'}(\Omega)$ на элементе v из $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, k_i, u_0, f – заданные функции, L – оператор, определяемый формулой

$$Lu = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\, k_i(x,u,\nabla u, Bu), \tag{4}$$

∇u – градиент u, B – оператор вида

$$(Bu)(t) = \int\limits_{\Omega'} g(x, u(x,t))\, dt, \tag{5}$$

Ω' – область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней, g – известная функция, относительно которой предполагается, что $g(x, u(x,t))$ для почти всех $t \in [0,T]$ интегрируема по Ω' для любой функции $u \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$.

Пространственные операторы с нелокальностями вида (5) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда скорость распространения в точке определяется глобальным состоянием среды (см. [3–5]).

В дальнейшем будем предполагать, что функции $k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны по каждому из аргументов и при любых значениях $x \in \Omega$, ξ_0, $\nu \in R$, ξ^1, ξ^2, $\xi \in R^n$ удовлетворяют условиям

$$| k_i(x, \xi_0, \xi, \nu) | \leq d_0 \sum_{j=1}^n | \xi_j |^{p-1} + d_1, \quad d_0 = \text{const} > 0, \quad d_1 = \text{const} \geq 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^n k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)\xi_i \geq d_2 \sum_{i=1}^n | \xi_i |^p - d_3, \quad d_2 = \text{const} > 0, \quad d_3 = \text{const} \geq 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^n (k_i(x, \xi_0, \xi^1, \nu) - k_i(x, \xi_0, \xi^2, \nu))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \geq 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^n k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)\xi_i \geq 0. \tag{9}$$

Из этих предположений следует, что оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, является непрерывным, ограниченным, коэрцитивным и монотонным по градиенту.

В работе [6] в предположениях (6)–(9) доказана теорема о разрешимости задачи (1)–(5) при любых $f \in L_{p'}(Q_T)$ и неотрицательном начальном значении $u_0 \in L_2(\Omega)$. В [7] доказана единственность обобщенного решения задачи (1)–(5) в случае, когда пространственный оператор является сильно монотонным. Для параболического уравнения с пространственным оператором вида (4), (5) в [8, 9] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения первой начально-краевой задачи. Работы [10, 11] посвящены исследованию сходимости приближенных методов решения этой задачи.

2. Вспомогательные результаты и обозначения

Лемма 1 (см. [6, лемма 1]). *Пусть выполнены условия* (6)–(8) *на коэффициенты оператора* L. *Тогда при выполнении условий* (1), (2) *вариационное неравенство* (3) *эквивалентно вариационному неравенству*

$$\int\limits_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right\rangle dt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (k_i(x, u, \nabla v, Bu) \frac{\partial (v-u)}{\partial x_i}\, dx\, dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^T \langle f, v - u \rangle\, dt \quad \forall\, v \in K. \tag{10}$$

В дальнейшем полагаем, что $\overline{\Omega} = \big\{x \in R^n : \ 0 \le x_i \le l_i, \ i \in \{1, 2, \dots, n\}\big\}$. Обозначим через $\overline{\omega}_h$ равномерную сетку на $\overline{\Omega}$ с шагом h_i по i-му координатному направлению, $\gamma_h = \overline{\omega}_h \bigcap \Gamma$, $\omega_h = \overline{\omega}_h \backslash \gamma_h$. Будем предполагать, что существует константа c такая, что $h \le c\overline{h}$, где $h = \max\limits_{1\le i\le n} h_i$, $\overline{h} = \min\limits_{1\le i\le n} h_i$. На $[0, T]$ определим равномерную сетку с шагом τ

$$\overline{\omega}_\tau = \Big\{t \in [0, T] : \ t = j\tau, \ j = 0, \dots, M, \ M = T/\tau\Big\}, \quad \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \backslash \{0\}.$$

Пусть H – пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$, $\overset{\circ}{H}$ – множество сеточных функций из H, равных нулю на границе γ_h. Введем n-мерный вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, координаты которого могут принимать значения ± 1. Для сеточной функции y определим разностные отношения $\partial_{r_i} y$ по формулам

$$\partial_{r_i} y = \begin{cases} y_{x_i}, & r_i = +1, \\ y_{\overline{x}_i}, & r_i = -1, \end{cases} \qquad \nabla_r y = (\partial_{r_1} y, \partial_{r_2} y, \dots, \partial_{r_n} y).$$

Обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки, содержащую все точки сетки, участвующие в записи выражения $\nabla_r y(x) = (\partial_{r_1} y(x), \partial_{r_2} y(x), \dots, \partial_{r_n} y(x))$, ω_r – множество точек сетки $\overline{\omega}_h$, в которых определена операция ∇_r. В H введем скалярные произведения

$$(y, v)_r = \sum_{x\in\omega_r} \operatorname{mes}\big(H_r(x)\big) y(x) v(x), \quad [y, v] = 2^{-n} \sum_r (y, v)_r,$$

а также нормы

$$\|y\| = [y, y]^{1/2}, \quad \|y\|_p = [|y|^p, 1]^{1/p},$$

$$\|y\|_{+p} = \left(2^{-n} \sum_r \left(\sum_{i=1}^n |\partial_{r_i} y|^p, 1\right)_r\right)^{1/p}, \quad \|y\|_{-p'} = \sup_{z\ne 0} \frac{\big|[y, z]\big|}{\|z\|_{+p}}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие восполнения сеточных функций. Пусть $z \in H$, через $\Pi_r z$ будем обозначать функцию, постоянную на каждой ячейке сетки $\overline{\omega}_h$, определенную следующим образом:

$$\Pi_r z(x') = z(x), \quad \text{где } \ x \in \omega_r : \ x' \in H_r(x).$$

Для сеточных функций аргумента t введем кусочно-постоянные восполнения

$$(\Pi^- w)(t') = w(t), \quad \text{где } \ t = k\tau : \ (k-1)\tau < t' \le k\tau,$$

$$(\Pi^+ w)(t') = w(t), \quad \text{где } \ t = k\tau : \ k\tau \le t' < (k+1)\tau.$$

Если $z(x, t)$ – сеточная функция, определенная на $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, то для нее определим восполнения

$$\Pi_r^\pm z(x, t) = (\Pi_r z(x, t))^\pm = \Pi_r z^\pm(x, t).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2 (см. [6, лемма 2, 3]). *Пусть $\{y_{h\tau}\}$ – последовательность функций, определенных на $\overline{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, для которой справедливы оценки*

$$\sum_{t=0}^{T} \tau \|y_{h\tau}(t)\|_{+p} \le c, \tag{11}$$

$$\|y_{h\tau}(t)\| \le c \quad \forall\, t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{12}$$

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau[y_{h\tau}(t+k\tau)-y_{h\tau}(t),\ y_{h\tau}(t+k\tau)-y_{h\tau}(t)]\le c_1{}^{1)}, \tag{13}$$

здесь k – любое целое число, принадлежащее отрезку $[1,M]$. Тогда существует функция $u\in L_p(0,T;W_p^1(\Omega))\bigcap L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и последовательности шагов $\{\tau\}$ и $\{h\}$ такие, что при $h,\,\tau\to 0$

$$\Pi_r^{\pm}y_{h\tau}\rightharpoonup u,\quad \Pi_r^{\pm}\partial_{r_i}y_{h\tau}\rightharpoonup\frac{\partial u}{\partial x_i}\quad \text{в}\ \ L_p(Q_T), \tag{14}$$

$$\Pi_r^{\pm}y_{h\tau}\ast\rightharpoonup u\quad \text{в}\ \ L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{15}$$

$$\Pi_r^{\pm}y_{h\tau}\to u\quad \text{в}\ \ L_{p^*}(Q_T), \tag{16}$$

$$\Pi_r^{+}y_{h\tau}\to u\quad \text{п.вс. в}\ \ Q_T, \tag{17}$$

*здесь символом $\ast\rightharpoonup$ обозначена *-слабая сходимость,*

$$p^*=\begin{cases}2, & p\ge n,\\ 2, & (pn/(n-p)>2)\wedge(p<n),\\ p\in[1,pn/(n-p)), & (pn/(n-p)\le 2)\wedge(p<n).\end{cases} \tag{18}$$

Лемма 3 (см. [6, лемма 4]). *Пусть Ω – ограниченная область пространства R^n, последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}\subset L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))$ сходится к u сильно в $L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ и слабо в $L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))$, $1<p_0<p_1<\infty$, $1<q_0<q_1<\infty$. Тогда $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится сильно к u в $L_q(0,T;L_p(\Omega))$ при любых $p_0\le p<p_1$, $q_0\le q<q_1$.*

Лемма 4 (см. [11, лемма 3]). *Пусть последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к u в $L_1(0,T;L_{p_1}(\Omega))$, $p_1>1$, функция $g(x,\xi)$, определяющая оператор B, измерима по x при любом $\xi\in R$, непрерывна по ξ для почти всех $x\in\Omega$ и удовлетворяет условию*

$$|g(x,\xi)|\ \le\ g_0(x)\ +\ c_g\,|\xi|^s\quad \forall\,x\in\Omega,\quad \forall\,\xi\in R, \tag{19}$$

где $c_g>0$, $s\in[0,p_1]$ – заданные константы, g_0 – неотрицательная, интегрируемая на Ω функция. Тогда Bu_m сходится сильно к Bu в $L_1(0,T)$ при $m\to\infty$.

3. Построение и исследование явной разностной схемы

Для задачи (1)–(3) рассмотрим явную разностную схему

$$(y_\varepsilon)_t(x,t)+Ay_\varepsilon(x,t)+\frac{1}{\varepsilon}\,\beta\,\widehat{y}_\varepsilon=\varphi(x,t),\quad x\in\omega_h,\quad t\in\overline{\omega}_\tau\backslash\{T\}, \tag{20}$$

$$y_\varepsilon(x,0)=y_0(x),\quad y\,|_{\gamma_h}=0.$$

Здесь оператор β задается равенством

$$\beta w=-|w^-|^{p-2}w^-,$$

A – разностный оператор, действующий из $\overset{\circ}{H}$ в $\overset{\circ}{H}$, определяемый соотношением

$$[Ay_\varepsilon,w]=\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=1}^{n}\big(k_i(x,y_\varepsilon,\nabla_r y_\varepsilon,B_h y_\varepsilon),\partial_{r_i}w\big)_r,$$

[1] Здесь для компактности записи у функции $y_{h\tau}$ не указан аргумент x. Это сокращение будет использовано и в дальнейшем.

где
$$\big(B_h y_\varepsilon\big)(t) = B\big(2^{-n}\sum_r \Pi_r y_\varepsilon(x,t)\big),$$

y_0 – разностный аналог u_0 такой, что при $h \to 0$
$$\Pi_r y_0 \to u_0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \quad \forall\, r, \tag{21}$$

φ – сеточная аппроксимация функции f, которую определим следующим образом:
$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\tau \operatorname{mes}\big(H_r(x)\big)} \int\limits_t^{t+\tau} \int\limits_{H_r(x)} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Справедлива

Лемма 5. *Пусть* $u_0 \in L_2(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ *почти всюду в* Ω, $f \in L_q(0,T;L_{p'}(\Omega))$, *где* $q = \max\{2, p'\}$. *Тогда при любых* $\varepsilon > 0$ *и любых* τ, h *удовлетворяющих условиям*
$$\tau \leq \begin{cases} c\ \dfrac{h^2}{4n^{2/p}}, & 1 < p < 2, \\ c\ \dfrac{h^{p+n(p-2)/2}}{2^p n}, & p \geq 2, \end{cases} \tag{22}$$

для решения разностной схемы (20) *имеют место следующие априорные оценки:*
$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \|y_\varepsilon\|_{+p}^p \leq c \quad \forall\, t' \in \overline{\omega}_\tau, \tag{23}$$
$$\max_{t' \in \overline{\omega}_\tau} \|y_\varepsilon(t')\|^2 \leq c, \tag{24}$$
$$\sum_{t=0}^{t'} \tau^2 \|(y_\varepsilon)_t\|^2 \leq c \quad \forall\, t' \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}, \tag{25}$$
$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'} \tau \|\hat{y}^-{}_\varepsilon\|_p^p \leq c \quad \forall\, t' \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}. \tag{26}$$

Доказательство. Умножим обе части (20) скалярно в H на $2\tau\, \widehat{y}_\varepsilon$. Тогда
$$2\tau[(y_\varepsilon)_t,\, \widehat{y}_\varepsilon] + 2\tau[Ay_\varepsilon,\, \widehat{y}_\varepsilon] + \frac{2\tau}{\varepsilon}[\beta\, \widehat{y}_\varepsilon,\, \widehat{y}_\varepsilon] = 2\tau[\varphi,\, \widehat{y}_\varepsilon]. \tag{27}$$

Воспользовавшись очевидными соотношениями
$$[Ay_\varepsilon,\, \widehat{y}_\varepsilon] = [Ay_\varepsilon,\, y_\varepsilon] + \tau[Ay_\varepsilon,\, -(y_\varepsilon)_t], \quad [\varphi,\, \hat{y}_\varepsilon] = \tau[\varphi,\, y_\varepsilon] + [\varphi,\, (y_\varepsilon)_t],$$

и условием (7), равенство (27) запишем в виде
$$\|\widehat{y}_\varepsilon\|^2 - \|y_\varepsilon\|^2 + \tau^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2 + 2\tau d_2\|y_\varepsilon\|_{+p}^p - 2\tau d_3 \operatorname{mes}\Omega + \frac{2\tau}{\varepsilon}[\beta\, \widehat{y}_\varepsilon,\, \widehat{y}_\varepsilon] \leq \\ \leq 2\tau[\varphi, y_\varepsilon] + 2\tau^2[\varphi, (y_\varepsilon)_t] + 2\tau^2[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]. \tag{28}$$

Оценим правую часть равенства (28). Для оценки первых двух слагаемых применим неравенство Гельдера, ε-неравенство, разностный аналог неравенства Фридрихса. В результате получим

$$2\tau[\varphi, y_\varepsilon] \le \|\varphi\|_{p'}\|y_\varepsilon\|_p \le \frac{2\tau}{\varepsilon_1 p'}\,\|\varphi\|_{p'}^{p'} + \frac{2\tau\, c_\Omega\, \varepsilon_1}{p}\|y_\varepsilon\|_{+p}^p\,. \qquad (29)$$

$$2\tau^2[\varphi, (y_\varepsilon)_t] \le \frac{\tau}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2 + \varepsilon_2^2\tau^3\|(y_\varepsilon)_t\|_p^2 \le \frac{\tau}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2 + \varepsilon_2^2\tau^3 c_\Omega\lambda^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2, \qquad (30)$$

где c_Ω – постоянная из разностного аналога неравенства Фридрихса, константа λ определяется из оценки

$$\|y\|_{+p} \le \lambda\|y\|, \qquad (31)$$

при этом

$$\lambda = \begin{cases} c\,\dfrac{n^{1/p}}{h^{(1+n(p-2)/2p)}}, & p \ge 2, \\ c\,\dfrac{n^{1/p}}{h}, & 1 < p < 2. \end{cases}$$

Заметим, что условия (6) обеспечивают справедливость неравенства

$$\big|[Ay, w]\big| \le \big(\widetilde{d}_0\,\|y\|_{+p}^{p-1} + \widetilde{d}_1\big)\|w\|_{+p} \quad \forall\, y,\, w \in \overset{\circ}{H}, \qquad (32)$$

где $\widetilde{d}_0 = d_0^{p'}\,c(p')\,n^{1+p'/p}$, $\widetilde{d}_1 = d_1^{p'}\,c(p')\,n\,\mathrm{mes}\,(\Omega)$, $c(p')$ – константа, при которой справедливо неравенство $(a+b)^{p'} \le c(p')(a^{p'} + b^{p'})$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2\tau^2[Ay_\varepsilon,\, (y_\varepsilon)_t] &\le 2\tau^2 n(\widetilde{d}_0\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1} + \widetilde{d}_1)\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p} = 2\tau^2 n\widetilde{d}_0\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1}\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p} + \\ &+ 2\tau^2 n\widetilde{d}_1\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p} \equiv I + 2\tau^{3/2}\tau^{1/2}n\widetilde{d}_1\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p} \le I + \tau^3\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p}^2 + c_1\tau, \end{aligned} \qquad (33)$$

где $c_1 = n^2\,\widetilde{d}_1^2$.

По определению оператора β

$$\frac{1}{\varepsilon}\,[\beta\,\widehat{y}_\varepsilon,\, \widehat{y}_\varepsilon] = \frac{1}{\varepsilon}\,\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^p, \qquad (34)$$

Используя (29)–(34) для преобразования (28), нетрудно получить

$$\begin{aligned} &\|\widehat{y}_\varepsilon\|^2 - \|y_\varepsilon\|^2 + \tau^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2 + 2\tau d_2\|y_\varepsilon\|_{+p}^p - \tau d_3\,\mathrm{mes}\,\Omega + \frac{2\tau}{\varepsilon}\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^p \le \\ &\qquad \le \tau\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2 + \frac{2}{\varepsilon_1 p'}\,\|\varphi\|_{p'}^{p'}\right) + \\ &\qquad + \frac{2\tau\, c_\Omega\, \varepsilon_1}{p}\,\|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \tau^3(\varepsilon_2^2\, c_\Omega\, \lambda^2)\|(y_\varepsilon)_t\|^2 + \tau^3\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p}^2 + I + c_1\tau. \end{aligned} \qquad (35)$$

При $1 < p < 2$ оценим I с помощью неравенства Гельдера следующим образом:

$$\begin{aligned} I &\le \frac{\tau\varepsilon_3^{p'}}{p'}\,\|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{\gamma^p\tau^{p+1}}{p\,\varepsilon_3^p}\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p}^p \le \\ &\le \frac{\tau\varepsilon_3^{p'}}{p'}\,\|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{\gamma^p\tau}{p\varepsilon_3^p}\left(\tau^2\frac{\|(y_\varepsilon)_t\|_{+p}^2}{2/p} + \frac{2-p}{2}\right) \le \\ &\le \frac{\tau\varepsilon_3^{p'}}{p'}\,\|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{\gamma^p\tau^3\lambda^2}{2\varepsilon_3^p}\,\|(y_\varepsilon)_t\|^2 + c_2\tau, \end{aligned} \qquad (36)$$

где $\gamma = 2\widetilde{d}_0 n$.

Подставляя (36) в (35) и суммируя полученные неравенства по $t \in \overline{\omega}_\tau$ от 0 до t', имеем

$$\|\widehat{y}_\varepsilon(t')\| + \left(2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}\,c_\Omega^p - \frac{\varepsilon_3^{p'}}{p'}\right)\sum_{t=0}^{t'} \tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^p +$$

$$+\left(1 - \tau(\varepsilon_2^2\,c_\Omega\,\lambda^2) - \frac{\gamma^p\lambda^2\tau}{2\varepsilon_3^p}\right)\sum_{t=0}^{t'}\tau^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2 + \frac{2}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}(t')\|_p^p \le$$

$$\le C\left\{\sum_{t=0}^{t'}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2 \,+\, \frac{2}{\varepsilon_1 p'}\,\|\varphi\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right\}, \quad (37)$$

где C – постоянная, не зависящая от h и τ. Условие (22) позволяет выбрать $h,\ \tau,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ так, чтобы

$$\begin{aligned} &2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}\,c_\Omega^p - \frac{\varepsilon_3^{p'}}{p'} \ge \delta_1 > 0,\\ &1 - \tau(\varepsilon_2^2\,c_\Omega\,\lambda^2) - \frac{\gamma^p\lambda^2\tau}{2\varepsilon_3^p} \ge \delta_2 > 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Из (37) и (38) следуют оценки (23)–(25).

Пусть $p \ge 2$. Оценим I с помощью неравенств Коши – Буняковского и (31), в результате получим

$$I \le \tau^2\gamma\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p/2}\|y_\varepsilon\|_{+p}^{(p-2)/2}\lambda\|(y_\varepsilon)_t\| \le \tau^2\gamma\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p/2}\lambda^{p/2}\|y_\varepsilon\|^{(p-2)/2}\|(y_\varepsilon)_t\| \le$$

$$\le \frac{\tau\varepsilon_3^2}{2}\,\|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{\tau^3\gamma^2\lambda^p}{2\varepsilon_3^2}\,\|y_\varepsilon\|^{p-2}\|(y_\varepsilon)_t\|^2. \quad (39)$$

Подставляя (39) в (35) и суммируя полученные неравенства по t от 0 до $t' \in \overline{\omega}_\tau$, имеем

$$\|\widehat{y}_\varepsilon(t')\|^2 + \left(2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}c_\Omega^p - \frac{\varepsilon_3^2}{2}\right)\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^p +$$

$$+\sum_{t=0}^{t'}\left(1 - \tau(\varepsilon_2^2\,c_\Omega\,\lambda^2) - \frac{\tau\gamma^2\lambda^p}{2\varepsilon_3^2}\,\|y_\varepsilon(t)\|^{p-2}\right)\tau^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2 + \frac{2}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}(t')\|_p^p \le$$

$$\le C\left\{\sum_{t=0}^{t'}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2 + \frac{2}{\varepsilon_1 p'}\,\|\varphi\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right\}. \quad (40)$$

Докажем сначала, что из (40) следует для $\forall\, t' \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}$ оценка вида

$$\|\widehat{y}_\varepsilon(t'))\|^2 \le \widetilde{c}\left(\sum_{t=0}^{T}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2 \,+\, \frac{2}{\varepsilon_1 p'}\,\|\varphi\|_{p'}^{p'}\right) + \|y_0\|^2 + 1\right) = m^2, \quad (41)$$

где $\widetilde{c}$ – постоянная, не зависящая от h и τ. При $t' = 0$ оценка (41) выполняется. Предположим, что (41) справедлива для всех $t' \le t_1,\ t_1 \in \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}$. Докажем, что (41) имеет место при $t' = t_1 + \tau$. Для этого запишем неравенство (40) при $t' = t_1 + \tau$:

$$\|\widehat{y}_\varepsilon(t')\|^2 + \left(2d_2 - \frac{2\varepsilon_1}{p}\,c_\Omega^p - \frac{\varepsilon_3^2}{2}\right)\sum_{t=0}^{t_1}\tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^p +$$

$$+\left(1-\tau(\varepsilon_2^2\, c_\Omega\,\lambda^2)-\frac{\tau\gamma^2\lambda^p}{2\varepsilon_3^2}\,m^{p-2}-\tau\lambda^2\right)\sum_{t=0}^{t_1}\tau^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2\le$$

$$\le C\left\{\sum_{t=0}^{t'}\tau\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2}\,\|\varphi\|_{p'}^2+\frac{2}{\varepsilon_1 p'}\,\|\varphi\|_{p'}^{p'}\right)+\|y_0\|^2+1\right\}. \quad (42)$$

Выбирая в (42) $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ h$ и τ так, чтобы

$$\begin{aligned}&2d_2-2\frac{\varepsilon_1}{p}c_\Omega^p-\frac{\varepsilon_3^2}{2}\ge\delta_1>0,\\ &1-\tau(\varepsilon_2^2\,c_\Omega\,\lambda^2)-\gamma^2\frac{\tau\lambda^p}{2\varepsilon_3^p}\,m^{p-2}\ge\delta_2>0,\end{aligned} \quad (43)$$

нетрудно убедиться в том, что оценка (41) с константой $\widetilde{c}=\max\left\{\frac{2}{\varepsilon_1 p'},\,\frac{1}{\varepsilon_2^2},\,1\right\}$ справедлива и для $t'=t_1+\tau$. Следовательно, (41) имеет место для любых $t\in\overline{\omega}_\tau\backslash\{T\}$. Из (40) и (41) вытекают (23)–(26). Заметим, что постоянная c в (22) выбирается так, чтобы были выполнены оценки (38), (43). Лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы* 5. *Тогда для решения разностной схемы* (20) *имеет место следующая априорная оценка*

$$\frac{1}{\varepsilon^{p'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\,\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^p\le c. \quad (44)$$

Доказательство. Умножим равенство (20) скалярно в H на $-\tau\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}$. Просуммируем полученное тождество по t от 0 до $T-\tau$:

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[(y_\varepsilon)_t,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]+\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[Ay_\varepsilon,\,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]+\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon}[\beta\,\widehat{y}_\varepsilon,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]=\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[\varphi,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]. \quad (45)$$

Поскольку $w=w^+-w^-$, то

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[(y_\varepsilon)_t,\,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]\ge\frac{1}{2}\,\|y_\varepsilon^-(T)\|^2-\frac{1}{2}\,\|y^-{}_0\|^2+\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y_\varepsilon^-)_t\|^2. \quad (46)$$

Далее, из определения оператора β следует

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon}\,[\beta\,\widehat{y}_\varepsilon,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]=\frac{\tau}{\varepsilon}\,\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^p. \quad (47)$$

Справедливо равенство

$$[Ay_\varepsilon,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]=[Ay_\varepsilon,-y_\varepsilon^-]-\tau[Ay_\varepsilon,(y_\varepsilon^-)_t]. \quad (48)$$

Из очевидного неравенства $\partial_{r_i}(y_\varepsilon)\partial_{r_i}(-y^-{}_\varepsilon)\ge0$ для всех r_i и условия (9) следует, что

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[Ay_\varepsilon,-y_\varepsilon^-]\ge0. \quad (49)$$

Используя (46)–(49), из (45) получим

$$\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y_\varepsilon^-)_t\|^2+\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon}\,\|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^p\le\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2[Ay_\varepsilon,(y_\varepsilon^-)_t]+\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[\varphi,-\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}]. \quad (50)$$

Докажем, что справедлива оценка

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2[Ay_\varepsilon,(y_\varepsilon^-)_t]\right| \le C\tau^{1/2}\lambda^{\widehat{p}/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{1/2}, \tag{51}$$

где $\widehat{p}=2$, если $p<2$, и $\widehat{p}=p$, если $p\ge 2$.

Из неравенства (32) вытекает, что

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2[Ay_\varepsilon,(y_\varepsilon^-)_t]\right| \le \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\big(\widetilde{d}_0\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1}+\widetilde{d}_1\big)\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p} =$$

$$= \widetilde{d}_0\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1}\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p}+\widetilde{d}_1\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p}.$$

Пусть $p\ge 2$. В силу неравенства Коши–Буняковского и оценок (23), (24)

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2[Ay_\varepsilon,(y_\varepsilon^-)_t]\right| \le$$

$$\le \widetilde{d}_0\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\,\lambda^{p/2}\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p/2}\,\|y_\varepsilon\|^{p/2-1}\,\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p}+\widetilde{d}_1\lambda\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\,\|(y^-{}_\varepsilon)_t\| \le$$

$$\le \widetilde{d}_0\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|y_\varepsilon(t)\|^{p/2-1}\lambda^{p/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^p\right)^{1/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^3\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\widetilde{d}_1\lambda T^{1/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^3\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|\right)^{1/2} \le C\,\lambda^{p/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^3\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{1/2}. \tag{52}$$

В случае $p<2$ воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2[Ay_\varepsilon,(y_\varepsilon^-)_t]\right| \le \widetilde{d}_0\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^p\right)^{1/p'}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^{2-1/p'}\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p}^p\right)^{1/p}+$$

$$+\widetilde{d}_1\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p} \le C\,\lambda\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^{p+1}\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^p\right)^{1/p}+\widetilde{d}_1\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p} =$$

$$= C\,\lambda\,\tau\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^p\right)^{1/p}+\widetilde{d}_1\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p} \le$$

$$\le C\,\lambda\,\tau\left\{\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{p/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\,1^{2/(2-p)}\right)^{1-p/2}\right\}^{1/p}+\widetilde{d}_1\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|_{+p}$$

$$\le \widetilde{C}\,\lambda\,\tau^{1/2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{1/2}. \tag{53}$$

Подставляя (51) в (50), получим

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{1/2}-C\tau^{1/2}\lambda^{\widetilde{p}/2}\right\}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y^-{}_\varepsilon)_t\|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\sum_{t=0}^{T-\tau}\frac{\tau}{\varepsilon}\,\|\widehat{y}_\varepsilon^-\|_p^p \le \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[\varphi,-\widehat{y}_\varepsilon^-]. \tag{54}$$

Выбирая τ, h так, чтобы $C_1/2 - C\tau^{1/2}\lambda^{\widetilde{p}/2} \geq 0$, из (54) имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}\|_p^p \leq \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[\varphi, -\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}]. \tag{55}$$

Оценивая правую часть (55) с помощью неравенства Гельдера, запишем следующую цепочку неравенств:

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}\|_p^p \leq \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau[\varphi, -\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}] \leq$$

$$\leq \left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}\|_p^p\right)^{1/p}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\varphi\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'} \leq C\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}\|_p^p\right)^{1/p}. \tag{56}$$

Из полученного неравенства (56) вытекает, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\widehat{y}_{\varepsilon}^{\,-}\|_p^p\right)^{1/p'} \leq C.$$

Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы* 5, *тогда для решения разностной схемы* (20) *справедлива априорная оценка*

$$J = \frac{1}{k\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\|\, y_{\varepsilon}(t+k\tau) - y_{\varepsilon}(t)\|^2 \leq c \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, M. \tag{57}$$

Доказательство. Просуммируем (20) по t от $\bar{t}$ до $\bar{t} + (k-1)\tau$, полученное равенство умножим скалярно в H на $\tau(y(\bar{t}+k\tau) - y(\bar{t}))$ и просуммируем по $\bar{t}$ от 0 до $T - k\tau$:

$$J = -\frac{1}{k}\sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau}\tau[Ay_{\varepsilon}(t), y_{\varepsilon}(\bar{t}+k\tau) - y_{\varepsilon}(\bar{t})] +$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau}\frac{\tau}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_{\varepsilon}(t), y_{\varepsilon}(\bar{t}+k\tau) - y_{\varepsilon}(\bar{t})] +$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau}\tau[\varphi(t), y_{\varepsilon}(\bar{t}+k\tau) - y(\bar{t})], \tag{58}$$

откуда в силу (32)

$$J \leq \frac{1}{k}\sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau}\tau\Bigg\{\left(\widetilde{d}_0 \,\|\, y_{\varepsilon}(t)\,\|_{+p}^{p-1} + \widetilde{d}_1\right)\left(\|y_{\varepsilon}(\bar{t}+k\tau)\|_{+p} + \|y_{\varepsilon}(\bar{t})\|_{+p}\right) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{p'}}\,\|y^{-}{}_{\varepsilon}(t)\|_p^{p-1}\left(\|y_{\varepsilon}(\bar{t}+k\tau)\|_p + \|y_{\varepsilon}(\bar{t})\|_p\right) +$$

$$+\|\varphi\|_{p'}\left(\|y_{\varepsilon}(\bar{t}+k\tau)\|_{+p} + \|y_{\varepsilon}(\bar{t})\|_{+p}\right)\Bigg\}. \tag{59}$$

Докажем, что правая часть неравенства (59) ограничена постоянной, не зависящей от τ и ε. Рассмотрим слагаемое

$$J_1 = \frac{1}{k} \sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau} \sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau} \widetilde{d}_0 \parallel y_\varepsilon(t) \parallel_{+p}^{p-1} \ \|y_\varepsilon(\bar{t}+k\tau)\|_{+p}.$$

Оценим его с помощью неравенства Гельдера:

$$J_1 \le \frac{\widetilde{d}_0}{k} \left(\sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau} \sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau} \tau \parallel y_\varepsilon(t) \parallel_{+p}^{p} \right)^{1/p'} \left(\sum_{\bar{t}=0}^{T-k\tau} \sum_{t=\bar{t}}^{\bar{t}+(k-1)\tau} \tau \|y_\varepsilon(\bar{t}+k\tau)\|_{+p}^{p} \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{\widetilde{d}_0}{k} \left(k \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \parallel y_\varepsilon(t) \parallel_{+p}^{p} \right)^{1/p'} \left(k \sum_{\bar{t}=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(\bar{t})\|_{+p}^{p} \right)^{1/p}.$$

Отсюда с учетом (23) следует, что J_1 ограничен сверху постоянной, не зависящей от τ и ε. Оценка остальных слагаемых проводится аналогично. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть выполнены условия леммы* 5, *тогда для решения разностной схемы* (20) *справедлива априорная оценка*

$$J_2 \equiv \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|\Pi_r(y_\varepsilon)_t\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega)}^{p'} \le c. \tag{60}$$

Доказательство. По определению

$$\|\Pi_r(y_\varepsilon)_t\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \ne 0} \frac{\left| \int\limits_\Omega \Pi_r(y_\varepsilon)_t(x,t)\, v(x)\, dx \right|}{\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}}.$$

Имеем

$$\left| \int\limits_\Omega \Pi_r(y_\varepsilon)_t(x,t)\, v(x)\, dx \right| = \left| \sum_{x' \in \omega_r} \int\limits_{H_r(x')} \Pi_r(y_\varepsilon)_t(x,t)\, v(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{x' \in \omega_r} \Pi_r(y_\varepsilon)_t(x',t) \int\limits_{H_r(x')} v(x)\, dx \right| = |(y_\varepsilon, v_{hr})_r|, \tag{61}$$

где v_{hr} – функция из H, определяемая в точках ω_r равенством

$$v_{hr} = \frac{1}{\mathrm{mes}(H_r(x))} \int\limits_{H_r(x)} v(x')\, dx'.$$

Поскольку $y_\varepsilon(x',t) = 0$ для всех $x' \in \gamma_h$ и $t \in \overline{\omega}_\tau$, то $(y_\varepsilon)_t(x',t) = 0$ для всех $x' \in \gamma_h$ и $t \in \overline{\omega}_\tau$. Поэтому

$$|((y_\varepsilon)_t, v_{hr})_r| = \big|[(y_\varepsilon)_t, \widetilde{v}_{hr}]\big|, \tag{62}$$

где

$$\widetilde{v}_{hr}(x,t) = \begin{cases} v_{hr}(x,t), & x \in \omega_h, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \\ 0, & x \in \gamma_h, \quad t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

В силу (61)–(62) и равенства (20)

$$\left|\int\limits_{\Omega} \Pi_r (y_\varepsilon)_t(x,t) v(x)\, dx\right| = \left|[(y_\varepsilon)_t,\, \widetilde{v}_{hr}]\right| \le \left|[Ay_\varepsilon,\, \widetilde{v}_{hr}]\right| + \left|\frac{1}{\varepsilon}\,[\beta\, \widehat{y}_\varepsilon, \widetilde{v}_{hr}]\right| + \left|[\varphi, \widetilde{v}_{hr}]\right|. \quad (63)$$

Используя очевидные оценки

$$\begin{aligned} &\left|[Ay_\varepsilon, \widetilde{v}_{hr}]\right| \le \left(\widetilde{d}_0\, \|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1} + \widetilde{d}_1\right) \|\widetilde{v}_{hr}\|_{+p}, \\ &\left|[\varphi, \widetilde{v}_{hr}]\right| \le c_\Omega\, \|\varphi\|_{p'}\, \|\widetilde{v}_{hr}\|_{+p}, \\ &\left|\frac{1}{\varepsilon}[\beta\, \widehat{y}_\varepsilon, \widetilde{v}_{hr}]\right| \le \frac{c_\Omega}{\varepsilon}\, \|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^{p-1}\, \|\widetilde{v}_{hr}\|_{+p}, \end{aligned}$$

нетрудно получить, что

$$\left|\int\limits_{\Omega} \Pi_r (y_\varepsilon)_t(x,t) v(x)\, dx\right| \le C\left(\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1} + \frac{1}{\varepsilon}\, \|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^{p-1} + \|\varphi\|_{p'} + 1\right) \|\widetilde{v}_{hr}\|_{+p}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left|\int\limits_{\Omega} \Pi_r (y_\varepsilon)_t(x,t) v(x)\, dx\right| \le \\ \le \Bigg\{ \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon\|_{+p}^{p}\right)^{1/p'} + \left(\frac{1}{\varepsilon^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|\widehat{y}_\varepsilon^{\,-}\|_p^{p}\right)^{1/p'} + \\ + \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|\varphi\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'} + 1 \Bigg\} \|\widetilde{v}_{hr}\|_{+p}. \quad (64) \end{aligned}$$

Ясно, что $\|\widetilde{v}_{hr}\|_{+p} \le c\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)}$, поэтому из оценок (38), (44) и неравенства (64) вытекает справедливость утверждения (60). Лемма доказана. □

Из априорных оценок (23), (24) следует ограниченность множества $\{\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon\}$ в пространствах $L_p(Q_T)$ и $L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, а также ограниченность множества $\{\Pi_r^{\pm} \partial_{r_i} y_\epsilon\}$ в пространстве $L_p(Q_T)$. В силу леммы 2 существуют подпоследовательности $\{h\}$, $\{\tau\}$ и $\{\varepsilon\}$[2)] и элемент $u \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$ такие, что при h, τ, $\varepsilon \to 0$

[2)] В дальнейшем за выбранными подпоследовательностями будем сохранять обозначения самих последовательностей.

$$\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \;\; L_p(Q_T), \tag{65}$$

$$\Pi_r^{\pm} \partial_{r_i} y_\varepsilon \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \;\; L_p(Q_T), \tag{66}$$

$$\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon \to u \quad \text{*-слабо в} \;\; L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{67}$$

$$\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon \to u \quad \text{в} \;\; L_{p^*}(Q_T), \tag{68}$$

$$\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon \to u \quad \text{п.вс. в} \;\; Q_T. \tag{69}$$

Из соотношений (65)–(68) и леммы 3 следует справедливость предельного соотношения

$$\Pi_r^{\pm} y \to u \quad \text{в} \;\; L_{p*}(0,T;L_{\widetilde{p}}(\Omega)). \tag{70}$$

Здесь

$$\begin{cases} \widetilde{p} < 2, & \text{если} \;\; (n > p) \wedge (np/(n-p) \le 2), \\ \widetilde{p} = np/(n-p), & \text{если} \;\; (n > p) \wedge (np/(n-p) > 2), \\ \widetilde{p} \in [2, +\infty) & \text{если} \;\; n \le p. \end{cases} \tag{71}$$

Согласно (70) и лемме 4

$$\Pi^{+} B_h(y_\varepsilon) \to Bu \quad \text{в} \;\; L_1(0,T) \tag{72}$$

при $s \in [0, \widetilde{p}]$. Кроме того, (60) обеспечивает существование $\xi_r \in L_{p'}(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ и последовательностей $\{\tau\}, \{h\}, \{\varepsilon\}$, для которых наряду с (65)–(70) справедливо также предельное соотношение

$$\Pi_r^{+} (y_\varepsilon)_t \rightharpoonup \xi_r \quad \text{в} \;\; L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)). \tag{73}$$

Докажем, что

$$\xi_r = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall\, r. \tag{74}$$

Пусть $z \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$, $z(x,T) = 0$, z_τ – снос функции z в точки сетки $\overline{\omega}_\tau$. Воспользовавшись формулой суммирования по частям, запишем следующее равенство:

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int\limits_\Omega \Pi_r (y_\varepsilon)_t z_\tau \, dx = -\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int\limits_\Omega \Pi_r y_\varepsilon (z_\tau)_t \, dx - \int\limits_\Omega \Pi_r u_0(x)\, z_\tau(x,0)\, dx,$$

или в эквивалентном виде

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Pi_r^{+} (y_\varepsilon)_t \Pi^{-} z_\tau \, dx\, dt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Pi_r^{-} y_\varepsilon \Pi^{+} (z_\tau)_t \, dx\, dt - \int\limits_\Omega \Pi_r u_0(x) z_\tau(x,0)\, dx. \tag{75}$$

Учитывая (65) и (73), в равенстве (75) совершим предельный переход при h, τ, $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\int\limits_0^T \langle \xi_r, z \rangle \, dt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u \frac{\partial z}{\partial t} \, dx\, dt - \int\limits_\Omega u_0(x) z(x,0)\, dx. \tag{76}$$

Из (76) при $z \in C_0^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ и определения обобщенной производной по переменной t в пространстве $L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$ вытекает справедливость соотношения (74). В силу единственности обобщенной производной предельная функция в (73) не зависит от r, то есть $\xi_r = \xi$ для любого r. Равенство

$$\int\limits_\Omega u(x,0)z(x,0)\,dx = \int\limits_\Omega u_0 z(x,0)\,dx \quad \forall\, z \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega)) \tag{77}$$

следует из (74), (76) и формулы интегрирования по частям. Из (77), очевидно, вытекает, что $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω.

Докажем теперь, что функция u принадлежит K. Из предельных соотношений (65)–(69) вытекает, что

$$\Pi^\pm(y_\varepsilon^-) \rightharpoonup u^- \quad \text{в} \quad L_p(Q_T). \tag{78}$$

Используя свойство слабой полунепрерывности снизу нормы в пространстве $L_p(Q_T)$ и оценку (3), нетрудно получить, что

$$\|u^-\|_{L_p(Q_T)} \le \underline{\lim}_{\tau,\varepsilon\to 0} \|\Pi^-(y_\varepsilon^-)\|_{L_p(Q_T)} \le \underline{\lim}_{\tau,\varepsilon\to 0} (c\varepsilon^{p'/p}) = 0,$$

то есть $u \in K$.

Докажем, что функция u удовлетворяет неравенству (3). Для этого умножим (20) скалярно в пространстве H на $\widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}$, где v – снос в точки сетки $\overline{\omega}_\tau \times \overline{\omega}_h$ функции $\overline{v} \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ такой, что $\overline{v}(x,T) = 0$, $\overline{v} \ge 0$. Тогда

$$[(y_\varepsilon)_t, \widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}] + [Ay_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}] + \frac{1}{\varepsilon}[\beta y_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}] = [\varphi, \hat{y}_\varepsilon - \hat{v}]. \tag{79}$$

Из неравенства (8) имеем

$$\begin{aligned}
[Ay_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}\,] &= \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n \big(k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r y_\varepsilon, B_h y_\varepsilon), \partial_{r_i}(\widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}\,)\big)_r = \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n \big(k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r y_\varepsilon, B_h y_\varepsilon), \partial_{r_i}(y_\varepsilon - \widehat{v}\,)\big)_r + \\
&+ \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n \big(k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r y_\varepsilon, B_h y_\varepsilon), \partial_{r_i}(\widehat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon)\big)_r \ge \\
&\ge \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n \big(k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r \hat{v}, B_h y_\varepsilon), \partial_{r_i}(y_\varepsilon - \widehat{v}\,)\big)_r + \tau[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t].
\end{aligned} \tag{80}$$

Так как оператор β монотонен и $v \ge 0$, то

$$\frac{1}{\varepsilon}[\beta\, \widehat{y}_\varepsilon, \widehat{y}_\varepsilon - v] \ge 0. \tag{81}$$

Для преобразования первого слагаемого в левой части (79) воспользуемся следующим соотношением:

$$[(y_\varepsilon)_t, \widehat{y}_\varepsilon] \ge \frac{1}{2\tau}\|\widehat{y}_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|y_\varepsilon\|^2. \tag{82}$$

Подставляя (80)–(82) в (79), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\tau}\|\widehat{y}_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|y_\varepsilon\|^2 + [(y_\varepsilon)_t,\, \widehat{v}\,] + \\
&\quad + \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^n \big(k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r \widehat{v}, B_h y_\varepsilon), \partial_{r_i}(y_\varepsilon - \widehat{v}\,)\big)_r + \tau[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t] \le [\varphi,\, \widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}\,].
\end{aligned} \tag{83}$$

Воспользовавшись восполнением $\Pi^+{}_r$, запишем неравенство (83) для всех $t \in [0, T]$. Результат проинтегрируем по отрезку $[0, t']$, $t' \in [0, T]$, тогда

$$\frac{1}{2^n}\sum_r \Big\{ \frac{1}{2\tau}\int_0^{t'}\int_\Omega (\Pi^+{}_r\widehat{y}_\varepsilon)^2\,dx\,dt - \frac{1}{2\tau}\int_0^{t'}\int_\Omega (\Pi^+{}_r y_\varepsilon)^2\,dx\,dt - \int_0^{t'}\int_\Omega \Pi^+{}_r (y_\varepsilon)_t \Pi^+{}_r \widehat{v}\,dx\,dt +$$
$$+\sum_{i=1}^n \int_0^{t'}\int_\Omega \big(\Pi^+{}_r k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r \widehat{v}, B_h(y_\varepsilon))\Pi^+{}_r \partial_{r_i}(y_\varepsilon - \widehat{v}\,)\,dx\,dt\big)\Big\} +$$
$$+\tau \int_{t=0}^{t'} \Pi^+[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]\,dt \le \frac{1}{2^n}\sum_r \int_0^{t'}\int_\Omega \Pi^+{}_r \varphi \Pi^+{}_r(\widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}\,)\,dx\,dt. \tag{84}$$

Заметим, что

$$J = \frac{1}{2\tau}\int_0^{t'}\int_\Omega \big((\Pi^+{}_r\hat{y}_\varepsilon)^2 - (\Pi^+{}_r y_\varepsilon)^2\big)\,dx\,dt = \frac{1}{2\tau}\int_{t'-\tau}^{t'}\int_\Omega (\Pi^+{}_r\hat{y}_\varepsilon)^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Pi_r y_0(x))^2\,dx.$$

В силу выпуклости функционала $\int_\Omega (\Pi^+{}_r\hat{y}_\varepsilon)^2\,dx$

$$\frac{1}{2\tau}\int_{t'-\tau}^{t'}\int_\Omega (\Pi^+{}_r\widehat{y}_\varepsilon)^2\,dx\,dt \ge \frac{1}{2}\int_\Omega \big(\Lambda_\tau \Pi_r y_\varepsilon(t')\big)^2\,dx,$$

где $\Lambda_\tau y_\varepsilon$ – кусочно-линейное восполнение функции y_ε по t, поэтому

$$J \ge \frac{1}{2}\int_\Omega \big(\Lambda_\tau \Pi_r y_\varepsilon(t')\big)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Pi_r y_0(x))^2\,dx. \tag{85}$$

Учитывая (85), из (84) получим неравенство вида

$$\frac{1}{2^n}\sum_r \Big\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \big(\Lambda_\tau \Pi_r y_\varepsilon(t')\big)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Pi_r y_0(x))^2\,dx - \int_0^{t'}\int_\Omega \Pi^+{}_r (y_\varepsilon)_t \Pi^+{}_r \widehat{v}\,dx\,dt +$$
$$+\sum_{i=1}^n \int_0^{t'}\int_\Omega \Pi^+{}_r k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r \widehat{v}, B_h(y_\varepsilon))\,\Pi^+{}_r \partial_{r_i}(y_\varepsilon - \widehat{v}\,)\,dx\,dt\Big\} +$$
$$+\tau \int_{t=0}^{t'} \Pi^+[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]\,dt \le \frac{1}{2^n}\sum_r \int_0^{t'}\int_\Omega \Pi^+{}_r \varphi \Pi^+{}_r(\widehat{y}_\varepsilon - \widehat{v}\,)\,dx\,dt. \tag{86}$$

Ясно, что

$$\tau\Big|\int_{t=0}^{t'} \Pi^+[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]\,dt\Big| \le \tau \int_{t=0}^{T-\tau} \big|\Pi^+[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]\big|\,dt = \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \big|\,[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]\big|.$$

По аналогии с доказательством неравенства (51) нетрудно установить, что

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \big|[Ay_\varepsilon,\, (y_\varepsilon)_t]\big| \le C\tau^{1/2}\lambda^{\widehat{p}/2}\Big(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau^2\|(y_\varepsilon)_t\|^2\Big)^{1/2}, \tag{87}$$

где $\widehat{p}=2,\ p<2$ и $\widehat{p}=p,\ p\ge 2$.

Принимая во внимание оценку (23), имеем, что

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \big|[Ay_\varepsilon, (y_\varepsilon)_t]\big| \le \tau^{1/2}\lambda^{\widehat{p}/2}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \big|[Ay_\varepsilon,\, (y_\varepsilon)_t]\big| \to 0$ при $\tau,\, h,\, \varepsilon \to 0$, если

$$\lim_{\tau,h\to 0}(\tau\lambda^{\widehat{p}}) = 0. \tag{88}$$

Докажем далее, что

$$\int_0^{t'}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \Pi_r^+ k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r\widehat{v}, B_h(y_\varepsilon))\Pi_r^+\partial_{r_i}(y_\varepsilon-\widehat{v})\,dx\,dt \to$$

$$\to \int_0^{t'}\int_\Omega \sum_{i=1}^n k_i(x,u,\nabla\overline{v}, B_h(u))\,\frac{\partial}{\partial x_i}(u-\overline{v})\,dx\,dt, \tag{89}$$

при $h,\, \tau,\, \varepsilon\to 0$. С этой целью убедимся, что при $h,\, \tau,\, \varepsilon\to 0$ справедливы предельные соотношения

$$\Pi_r^+ k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r\widehat{v}, B_h(y_\varepsilon)) \to k_i(x,u,\nabla\overline{v}, Bu) \quad \text{в} \ \ L_{p'}(Q_T), \quad i\in\{1,2,\dots,n\}. \tag{90}$$

Поскольку функции $k_i(x,\xi_0,\xi,\nu)$ непрерывны по x, ξ_0 и ν, то из соотношений (69), (72) следует, что

$$\Pi_r^+ k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r\hat{v}, B_h(y_\varepsilon)) \to k_i(x,u,\nabla\overline{v}, Bu) \quad \text{п.вс. в} \ \ Q_T, \quad i\in\{1,2,\dots,n\}. \tag{91}$$

Пусть

$$J_2 = \int_{Q_{t'}} |\Pi_r^+ k_i(x, y_\varepsilon, \nabla_r\widehat{v}, B_h(y_\varepsilon)) - k_i(x,u,\nabla\overline{v}, Bu)|^{p'}\,dx\,dt. \tag{92}$$

Из неравенства (6) следует, что подынтегральная функция в (92) ограничена сверху функцией, зависящей лишь от $\overline{v}$, и стремится к нулю (см. (91)) при $h,\, \tau,\, \varepsilon\to 0$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе $J_2\to 0$ при $h,\, \tau,\, \varepsilon\to 0$, таким образом, соотношение (90) справедливо.

Проинтегрируем (86) по t' от $T-\lambda$ до T $(\lambda>0)$. В неравенстве (86) перейдем к пределу при $h,\, \tau,\, \varepsilon\to 0$. Согласно (65)–(73)

$$\varliminf_{\tau,\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{T-\lambda}^{T}\int_\Omega \big(\Lambda_\tau\Pi_r y_\varepsilon(t')\big)^2\,dx\,dt' - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_0^2(x)\,dx \le \int_{T-\lambda}^{T}\int_0^{t'}\int_\Omega f(u-\overline{v})\,dx\,dt\,dt' +$$

$$+\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{0}^{t'} < \frac{\partial u}{\partial t}, \overline{v} > \, dt\, dt' -$$

$$-\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{0}^{t'}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n} k_i(x,u,\nabla\overline{v},B_h u)\frac{\partial(u-\overline{v})}{\partial x_i}\,dx\,dt\,dt' \equiv \int\limits_{T-\lambda}^{T} J_1(t')\,dt'. \quad (93)$$

Поскольку норма слабо полунепрерывна снизу, то

$$\varliminf_{\tau,\varepsilon\to 0}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\|\Lambda_\tau \Pi_r y_\varepsilon(t')\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt' \geq \int\limits_{T-\lambda}^{T}\|u(t')\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt'. \quad (94)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\|u(t')\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt' - \frac{\lambda}{2}\|u_0(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int\limits_{T-\lambda}^{T} J_1(t')\,dt'. \quad (95)$$

Напомним, что $\overline{v}\in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))\bigcap K$. Очевидно, что (95) справедливо и для любой функции $\overline{v}$ из K. Запишем (95) в виде

$$\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T}\|u(t')\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt' - \frac{1}{2}\|u_0(x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda}\int\limits_{T-\lambda}^{T} I_1(t')\,dt'. \quad (96)$$

Поскольку $u\in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))$, а $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L_{p'}(0,T;W^{-1}_{p'}(\Omega))$, то, как известно (см. [2, с. 177]), $u\in C(0,T;L_2(\Omega))$. Поэтому $\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ – непрерывная на $(0,T)$ функция. По теореме Лебега о предельном переходе функция J_1 также непрерывна на $(0,T)$. Поэтому в равенстве (96) допусти́м предельный переход при $\lambda\to 0$, а значит,

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} f(u-\overline{v})\,dx\,dt + \int\limits_{0}^{T}\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},\overline{v}\right\rangle dt -$$

$$-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n} k_i(x,u,\nabla\overline{v},Bu)\,\frac{\partial(u-\overline{v})}{\partial x_i}\,dx\,dt.$$

Из последнего соотношения, учитывая равенство (см. [2, с. 177])

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{0}^{T}\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},u\right\rangle dt,$$

получаем, что u удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{0}^{T}\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},u-\overline{v}\right\rangle dt + \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} k_i(x,u,\nabla v,Bu)\,\frac{\partial(u-\overline{v})}{\partial x_i}\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{0}^{T}\left\langle f,u-\overline{v}\right\rangle dt \quad \forall\, v\in K. \quad (97)$$

Из (97) и леммы 1 следует

Теорема 1. *Пусть функции* k_i *удовлетворяют условиям* (6)–(9), *функция* $f \in L_q(0,T;L_{p'}(\Omega))$, *где* $q = \max\{2,p'\}$, $p > 1$, $u_0 \in L_2(\Omega)$: $u_0(x) \geq 0$ *почти всюду в* Ω. *Кроме того, выполнено условие* (19) *с константой* $s \in [0,\widetilde{p}]$ (*см.* (71)). *Тогда существуют последовательности* $\{\tau\}$, $\{h\}$, *удовлетворяющие условию* (88), *и последовательность кусочно-постоянных восполнений решений схемы* (20), *сходящаяся сильно в* $L_{p*}(0,T;L_{\widetilde{p}}(\Omega))$ (*см.* (18)) *к обобщенному решению задачи* (1)–(3). *При условии единственности решения задачи* (1)–(3) *любая последовательность кусочно-постоянных восполнений решений задачи* (20) *будет обладать этим свойством.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-05686, 15-41-02315).

Summary

O.V. Glazyrina, M.F. Pavlova. On Convergence of the Explicit Difference Scheme for Evolution Variational Inequality with Nonlocal Space Operator.

Nonlinear parabolic variational inequality with a nonlocal space operator monotone with respect to the gradient is considered. Using the methods of penalty and summatory identities, explicit difference scheme with respect to the space operator and implicit difference scheme with respect to the penalty operator are constructed. Conditions of stability for the constructed difference scheme are obtained. The theorem of convergence is proved under minimal assumptions on the smoothness of the original data.

Keywords: variational inequality, operator monotone with respect to gradient, nonlocal operator, explicit difference scheme with penalty operator, stability, convergence.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир. – 1972. – 587 с.

2. *Гаевский Х., Грегер К., Захареас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

3. *Chipot M., Molinet L.* Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems // Applicable Analysis. – 2001. – V. 80, No 3–4. – P. 279–315.

4. *Chipot M., Lovat B.* Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. – 2001. – V. 8, No 1. – P. 35–51.

5. *Simon L.* On quasilinear parabolic functional differential equation with discontinuous terms // Ann. Univ. Shi. Budapest. – 2004. – No 47. – P. 211–229.

6. *Glazyrina O.V., Pavlova M.F.* On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator // Differential Equations. – 2014. – V. 50, No 7. – P. 873–887.

7. *Глазырина О.В., Павлова М.Ф.* Теорема единственности решения эволюционного вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором // Материалы X Междунар. конф. «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – Казань: Казан. фед. ун-т, 2014. – С. 205–208.

8. *Pavlova M.F.* On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration // Differential Equations. – 2011. – V. 47, No 8. – P. 1161–1175.

9. *Glazyrina O.V., Pavlova M.F.* The unique solvability of a certain nonlocal nonlinear problem with a spatial operator strongly monotone with respect to the gradient // Russian Mathematics (Iz. VUZ). – 2012. – No 3. – P. 83–86.

10. *Глазырина О.В., Павлова М.Ф.* Исследование сходимости явной разностной схемы для параболического уравнения с нелинейным нелокальным пространственным оператором // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 4. – С. 24–39.

11. *Glazyrina O.V., Pavlova M.F.* Study of the convergence of the finite-element method for solving parabolic equations with a nonlinear nonlocal space operator // Differential Equations. – 2015. – V. 51, No 7. – P. 876–889.

12. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

13. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – Bd. 183, H. 8. – P. 311–341.

Поступила в редакцию
30.07.15

Глазырина Ольга Владимировна – ассистент кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *glazyrina-olga@ya.ru*

Павлова Мария Филипповна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *mpavlova@kpfu.ru*