УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.714

ОЦЕНКИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЖНОСТИ ПРЕДИКАТНЫХ СХЕМ В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ

М.С. Шуплецов

Аннотация

Рассматривается задача синтеза для специального класса управляющих систем – класса так называемых предикатных схем, который обобщает многие из традиционных классов схем (схемы из функциональных элементов, контактные схемы и др.). Данные схемы строятся на основе предикатных элементов и зачастую не имеют заранее фиксированного направления протекания сигналов.

Исследуется асимптотическое поведение функции Шеннона $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$ для сложности реализации предикатов от n переменных предикатными схемами в полном базисе $\mathfrak{B}$ специального вида. Для $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$ получены следующие асимптотические оценки высокой степени точности

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) = \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}} - 1}\right) \log_2 n \pm O(1)}{n}\right),$$

где $\rho_{\mathfrak{B}}$ и $k_{\mathfrak{B}}$ – константы, зависящие от базиса.

Ключевые слова: схемы из предикатных элементов, сложность, функция Шеннона, оценки высокой степени точности.

---

1. Основные определения и формулировка результатов

В данной работе рассматривается задача синтеза [1, 2] для специального класса управляющих систем – класса так называемых предикатных схем [3]. В ней содержится развернутое изложение и развитие результатов [4], которые характеризуют поведение функции Шеннона для сложности предикатных схем в ряде базисов. Напомним, что в традиционных классах управляющих систем (схемы из функциональных элементов, контактные схемы и др.) поведение функции Шеннона для сложности схем на уровне асимптотики было установлено О.Б. Лупановым [1], а на уровне оценок высокой степени точности – С.А. Ложкиным [5, 6].

Предикатная схема представляет собой двудольный граф, у которого все вершины одной доли помечены символами базисных предикатных элементов, а вершины другой доли – символами внутренних и входных переменных. Функционирование предикатного элемента с k полюсами задается его характеристической функцией от k переменных, связанных с этими полюсами, и определяется тем, что элемент находится в допустимом состоянии, если данная функция равна 1. Схема находится в допустимом состоянии на некотором наборе значений входных переменных тогда и только тогда, когда существует набор значений внутренних переменных такой, что все предикатные элементы, из которых построена схема, находятся в допустимых состояниях. Соответствующий набор входных переменных схемы будем называть допустимым.

Суперпозиция схем, как обычно, сводится к переименованию переменных, добавлению и изъятию переменных, а также к объединению схем с возможным отождествлением некоторых вершин, помеченных символами переменных, и соответствующим переименованием этих переменных.

Вопросы полноты для модели предикатных схем были решены в [7]. Схемная интерпретация для рассматриваемой модели, которая существенно упрощает постановку задачи синтеза, была предложена С.А. Ложкиным [3].

Класс предикатных схем достаточно близок к модели неявных и параметрических представлений функций, предложенной А.В. Кузнецовым [8], в рамках которой рассматриваются системы функциональных уравнений, построенные над заданной системой функций. Основные результаты, связанные с решением задачи синтеза для модели неявных и параметрических представлений функций, были получены О.М. Касим-Заде [9].

В дальнейшем, если это не вызывает разночтений, мы не будем различать предикат и его характеристическую функцию и будем считать, что предикат $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если его характеристическая функция χ_π существенно зависит от переменной x_i. Рассмотрим произвольный базис $\mathfrak{B} = \{\pi_i\}_{i=1}^{b}$, где каждому предикату π_i, $i = 1, \ldots, b$, с k_i полюсами сопоставлено положительное число $\mathcal{L}_i$, которое характеризует вес этого предиката. Для каждого базисного предиката с двумя и более полюсами определим его *приведенный вес* следующим образом: $\rho_i = \dfrac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}$. Тогда приведенным весом $\rho_{\mathfrak{B}}$ базиса $\mathfrak{B}$ назовем величину

$$\rho_{\mathfrak{B}} = \min_{i:\, 1 \leqslant i \leqslant b,\, k_i > 1} \left\{ \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1} \right\},$$

а через $k_{\mathfrak{B}}$ обозначим максимальное число полюсов у базисных предикатов, на которых достигается приведенный вес базиса. Для описания предикатной схемы Σ в базисе $\mathfrak{B}$ с n полюсами и m внутренними переменными, которая реализует предикат π, будем использовать запись вида

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = \exists\, y_1 \ldots \exists\, y_m \bigwedge_{i=1}^{b} \bigwedge_{j=0}^{r_i} \pi_i \left(z_1^{(i,j)}, \ldots, z_{k_i}^{(i,j)} \right),$$

где $y_1, \ldots, y_m$ – внутренние переменные схемы, r_i – число вершин-предикатов, помеченных символом π_i, $z_l^{(i,j)}$, $l = 1, \ldots, k_i$ – переменная, которая совпадает с некоторой внутренней или входной переменной схемы Σ.

Рассмотрим предикат $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, и выделим две переменные этого предиката. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что это переменные x_1 и x_2. Пусть для любого i, $i = 3, \ldots, n$, существует такой набор $\alpha^i = (\alpha_3, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, что характеристическая функция $\chi_\varphi(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ равна[1] $x_2^{\sigma_1} \vee x_1^{\sigma_2} \vee x_i^{\sigma_3}$ или $x_2^{\sigma_1} \vee (x_1 \oplus x_i \oplus \sigma_4)$, а также существует набор $\beta = (\beta_3, \ldots, \beta_n)$ такой, что $\chi_\varphi(x_1, x_2, \beta_3, \ldots, \beta_n) = x_1^{\sigma_5} \vee x_2^{\sigma_6}$. Предикат φ, который обладает указанными свойствами, будем называть *проводящим*, его полюс, соответствующий первой выделенной переменной, – *стоком*, второй переменной – *затвором*, а полюса, соответствующие остальным переменным, – *истоками* данного предиката. При этом набор α^i, $i = 3, \ldots, n$, будем называть *i-м проводящим набором*, а набор β – *затворным набором* проводящего предиката φ. Базис $\mathfrak{B}$, приведенный вес которого достигается на проводящем предикате, будем называть *обобщенно-проводящим базисом*.

[1]Символом σ с различными индексами будем обозначать булевы константы.

Пусть $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ – класс предикатных схем, построенных в базисе $\mathfrak{B}$, а $\Pi_2(n)$ – множество всех булевых предикатов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Под сложностью $\mathcal{L}(\Sigma)$ предикатной схемы Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$, понимается сумма весов её предикатов, а под сложностью $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(\phi)$ предиката ϕ – минимальная из сложностей реализующих его схем в базисе $\mathfrak{B}$. Введем обычным образом функцию Шеннона

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) = \max_{\phi \in \Pi_2(n)} \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(\phi)$$

для класса $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ относительно функционала сложности $\mathcal{L}$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Если $\mathfrak{B}$ – обобщенно-проводящий базис, то для функции Шеннона $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$ имеет место следующее равенство*[2]

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) = \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\left(2 + \dfrac{1}{k_{\mathfrak{B}} - 1}\right) \log n \pm O(1)}{n} \right).$$

2. Верхняя оценка функции Шеннона $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$

Для получения верхней оценки функции Шеннона модифицируем для модели предикатных схем технику получения оценок высокой степени точности, предложенную С.А. Ложкиным в работах [5, 6].

Рассмотрим произвольный предикат $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, и выделим некоторую переменную x_i, $i = 1, \ldots, n$. Разбиение $D = (X_1, \ldots, X_d)$ множества $X = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ всех остальных переменных предиката φ назовем *селекторным относительно* x_i, если для любого j, $j = 1, \ldots, d$, и для любой переменной $x \in X_j$ найдутся константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d$ такие, что при подстановке их соответственно вместо переменных из $X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_d$ характеристическая функция χ_φ предиката φ становится равной $x_i^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2}$ или $x_i \oplus x \oplus \sigma_3$.

Рассмотрим проводящий предикат $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, и, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что стоку предиката соответствует переменная x_1, а затвору – переменная x_2. Тогда возьмем p предикатов $\varphi(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$, $i = 1, \ldots, p$, и построим предикат $\psi_(y, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n}, \ldots, x_{p,2}, \ldots, x_{p,n})$, который получается отождествлением стоков всех этих предикатов и приписыванием полученному полюсу переменной y. Предикат ψ будем называть *φ-проводящей звездой порядка* p, а полюс, отвечающий отождествленным стокам, и соответствующую переменную y – *центральным полюсом* и *центральной переменной* соответственно.

Лемма 1. *Пусть предикат $\psi(y, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n}, \ldots, x_{p,2}, \ldots, x_{p,n})$ – $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$-проводящая звезда порядка p. Тогда существует такое селекторное относительно центральной переменной y разбиение $D = (X_1, \ldots, X_d)$ всех остальных переменных предиката ψ, что*

$$d = p + n - 2, \quad |X_1| = \ldots = |X_p| = 1 \;\; \text{и} \;\; |X_{p+1}| = \ldots = |X_{p+n-2}| = p.$$

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что переменные $x_{j,2}$, $j = 1, \ldots, p$, отвечают затворам проводящих предикатов φ,

[2] Все логарифмы в работе берутся по основанию 2, поэтому основание логарифма будем опускать.

из которых составлена проводящая звезда ψ. Рассмотрим такое разбиение $D = (X_1, \dots, X_{p+n-2})$ переменных $X = \{x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{p,2}, \dots, x_{p,n}\}$, что $X_i = \{x_{i,2}\}$, $i = 1, \dots, p$, и $X_i = \{x_{1,i-p+2}, \dots, x_{p,i-p+2}\}$, $i = p+1, \dots, p+n-2$. Покажем, что разбиение D является селекторным.

Зафиксируем сначала некоторое i, $i \in [1, p]$. По определению проводящего предиката найдется затворный набор $\beta = (\beta_3, \dots, \beta_n)$ такой, что, подставляя на места всех переменных из компоненты X_{p+k}, $k = 1, \dots, (n-2)$, константу β_{k+2}, получим равенство

$$\chi_\psi(y, x_{1,2}, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots, x_{p,2}, \beta_3, \dots, \beta_n) = (y^{\sigma_1} \vee x_{1,2}^{\sigma_2}) \wedge \dots \wedge (y^{\sigma_1} \vee x_{p,2}^{\sigma_2}).$$

Далее, подставляя значение σ_2, на места переменных из компонент X_k, $k \neq i$, $k = 1, \dots, p$, из характеристической функции χ_ϕ получаем функцию $y^{\sigma_1} \vee x_{i,2}^{\sigma_2}$.

Теперь зафиксируем i, $i \in [p+1, p+n-2]$, и произвольное j, $j \in [1, p]$. Тогда существует такой проводящий набор $(\alpha_3, \dots, \alpha_{i-p+1}, \alpha_{i-p+3}, \dots, \alpha_n)$ с номером $(i-p+2)$, что, подставляя на места всех переменных из компоненты X_{p+k}, $k \neq (i-p)$, $k = 1, \dots, (n-2)$, константу α_{k+2}, для характеристической функции χ_φ можно получить следующее представление:

$$\chi_\varphi = g_1(y, x_{1,2}, x_{1,i-p+2}) \wedge \dots \wedge g_p(y, x_{p,2}, x_{p,i-p+2}),$$
$$g_r \in \left\{x_{r,2}^{\sigma_3} \vee y^{\sigma_4} \vee y_{r,i-p+2}^{\sigma_5}, x_{r,2}^{\sigma_3} \vee (y \oplus x_{r,i-p+2} \oplus \sigma_6)\right\}, \quad r = 1, \dots, p.$$

Остается подставить константу $\overline{\sigma}_3$ на место переменной $x_{j,2} \in X_j$ и так подставить константы на места переменных $x_{r,2} \in X_r$, $r = 1, \dots, p$, чтобы функции g_r при $r \neq j$ и $r = 1, \dots, p$ стали тождественно равными 1. При этом характеристическая функция χ_φ становится равной $y^{\sigma_4} \vee x_{j,i-p+2}^{\sigma_5}$ или $y \oplus x_{j,i-p+2} \oplus \sigma_6$.

Лемма доказана. □

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная ФАЛ от n переменных и $\eta(z, x_1, \dots, x_n)$ – предикат от $(n+1)$ переменной. Тогда будем говорить, что η *моделирует* f, если

$$\chi_\eta(z, x_1, \dots, x_n) = z \sim f(x_1, \dots, x_n).$$

Введем также более общее определение моделирования. Пусть $h(x_1, \dots, x_n)$ — ФАЛ от n переменных, а $\eta(z, x_1, \dots, x_n)$ — предикат от $(n+1)$ переменной. Будем говорить, что пара $\mathfrak{P} = (h, \eta)$ *слабо моделирует функцию* f, если для любого набора $\widetilde{\alpha} \in B^n$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ и характеристической функции предиката η выполняется одно из следующих равенств:

$$\chi_\eta(z, \widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}) \oplus z \oplus h(\widetilde{\alpha}) \quad \text{или} \quad \chi_\eta(z, \widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}) \vee (z \sim h(\widetilde{\alpha})).$$

При этом функцию h будем называть *сигнальной функцией моделирования* $\mathfrak{P}$.

Пусть $P_2(n)$ – множество всех ФАЛ от n переменных $x_1, \dots, x_n$. Тогда обобщим понятие универсального множества [1, 5, 6] на случай произвольного предиката $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_p)$ от $(p+1)$ переменной.

Множество ФАЛ G, $G \subseteq P_2(m)$, называется *φ-универсальным множеством* (*φ-УМ*) *порядка* m *и ранга* p, если существует такая ФАЛ $h(x_1, \dots, x_m)$ от m переменных, что для любой ФАЛ $f(x_1, \dots, x_m)$ из $P_2(m)$ существуют ФАЛ $g_1, \dots, g_p \in G$ и предикат η такие, что пара (h, η) слабо моделирует ФАЛ f и верно равенство:

$$\eta(z, x_1, \dots, x_m) = \exists\, y_1 \dots \exists\, y_p \varphi(z, y_1, \dots, y_p) \bigwedge_{r=1}^{p} (y_i \sim g_i(x_1, \dots, x_m)). \tag{1}$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(y, x_1, \ldots, x_p)$ *– предикат от* $(p+1)$ *переменной и* $D = (X_1, \ldots, X_d)$ *– селекторное относительно* y *разбиение переменных* $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ *предиката* φ, *где* $|X_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, d$. *Пусть, кроме того,* $s_1, \ldots, s_d$ *– чётные числа, удовлетворяющие условию* $s_1 p_1 + \ldots + s_d p_d \geqslant 2^m$. *Тогда существует* φ*–УМ* G *порядка* m *и ранга* p *такое, что* $|G| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_d}$ *и существует система предикатов* $\vec{\mathcal{G}}$, *моделирующих все функции* G, *каждая из которых может быть реализована предикатной схемой* $\Sigma_{\mathcal{G}}$ *в базисе* $\mathfrak{B}$ *со сложностью не больше, чем* $c_{\mathfrak{B}}|G| + O(d \cdot 2^{m+s/2})$, *где* $s = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} s_i$ *и* $c_{\mathfrak{B}}$ *– константа, зависящая от базиса* $\mathfrak{B}$.

Доказательство. По определению селекторного разбиения существует набор констант $\{\alpha_{i,j,k}\}$ таких, что для всякого j, $j = 1, \ldots, d$, и любого k, $k = 1, \ldots, p_j$, при подстановке в функцию φ констант $\alpha_{i,j,k}$, $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, d$ соответственно на места всех переменных из $X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_d$ получается, что χ_φ равна $x_{j,k}^{\sigma_{j,k,1}} \vee y^{\sigma_{j,k,2}}$ или $x_{j,k} \oplus y \oplus \sigma_{j,k,2}$, где $x_{j,k}$ – k-я переменная компоненты X_j. Разобьём куб B^m на подмножества (полосы) $\delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,p_1}, \delta_{2,1}, \ldots, \delta_{2,p_2}, \ldots, \delta_{d,1}, \ldots, \delta_{d,p_d}$, состоящие из наборов с подряд идущими номерами и обладающие тем свойством, что номер любого набора из предшествующего множества меньше, чем номер любого набора из последующего множества. Указанное разбиение выберем так, чтобы мощность полосы $\delta_{j,k}$ была равна s_j при всех k, $k = 1, \ldots, p_j$. При этом суммарная мощность всех полос равна $\sum\limits_j s_j p_j \geqslant 2^m$, следовательно куб B^m будет полностью покрываться данными полосами. Рассмотрим при каждом i, $i = 1, \ldots, d$, множество G_i всех функций, принимающих значение $\alpha_{i,j,k}$ на полосе $\delta_{j,k}$ при $j \neq i$, $k = 1, \ldots, p_j$, и принимающих одинаковые значения на наборах с одинаковыми номерами из полос $\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \ldots, \delta_{i,p_i}$. При этом $|G_i| = s_i$, $i = 1, \ldots, d$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_m)$ – ФАЛ, которая на всех наборах компоненты $\delta_{j,k}$, $j = 1, \ldots, d$, $k = 1, \ldots, p_j$, принимает значение $\sigma_{j,k,2}$. Покажем, что множество $G = G_1 \cup \cdots \cup G_d$ является φ-УМ. Пусть $f \in P_2(m)$ – произвольная функция. Рассмотрим предикат $\eta(z, x_1, \ldots, x_m)$, получающийся при помощи суперпозиции (1), в которой функция g_r, $r = 1, \ldots, p$, совпадает с одной из функций множества G_i, $i = 1, \ldots, d$, если переменная y_r предиката φ принадлежит компоненте X_i селекторного разбиения D. В силу (1) и по построению множеств $G_1, \ldots, G_{j-1}, G_{j+1}, \ldots, G_d$ для любого набора $\beta \in B^m$, принадлежащего полосе $\delta_{j,k}$, и предикатов η и φ верны следующие представления:

$$\eta(z, \beta) = \varphi(z, g_1(\beta), \ldots, g_p(\beta)),$$
$$\varphi(z, g_1(\beta), \ldots, g_p(\beta)) \in \{g^{\sigma_{j,k,1}} \vee (z \oplus h(\beta)),\ g \oplus z \oplus h(\beta)\},$$

где g – функция, подставленная на место k-й переменной из множества X_j. В случае, когда $\eta(z, \beta) = g^{\sigma_{j,k,1}} \vee (z \oplus h(\beta))$, функцию $g \in G_j$ выберем так, чтобы при $\beta \in \delta_{j,k}$ было выполнено равенство $g(\beta) = f(\beta) \oplus \sigma_{j,k,1}$, а в случае, когда $\eta(z, \beta) = g \oplus z \oplus h(\beta)$, – равенство $g(\beta) = f(\beta)$. Тогда на множестве $\delta_{j,k}$ пара (h, η) будет слабо моделировать ФАЛ f.

Действуя подобным образом, можно выбрать оставшиеся функции $g_1, \ldots, g_p$ так, чтобы пара (h, η) слабо моделировала функцию f на всём кубе B^m.

В работе [5] показана возможность реализации системы ФАЛ G в классе схем из функциональных элементов при помощи метода каскадов со сложностью, не превосходящей $c|G| + d \cdot 2^{m+s/2}$, где c – некоторая константа. Так как рассматриваемая модель обобщает этот класс и для нее существует аналог метода каскадов, то, используя технику моделирования, эту оценку можно перенести на систему предикатов $\vec{\mathcal{G}}$ при увеличении сложности в константу раз. Таким образом, можно построить предикатную схему $\Sigma_{\mathcal{G}}$ со сложностью не больше, чем $c_{\mathfrak{B}}|G|+d\cdot 2^{m+s/2}$.

Лемма доказана. □

Предикат $Q_n(z, x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1})$ будем называть предикатным мультиплексором, если для него допустимыми являются только такие наборы $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \delta_0, \ldots, \delta_{2^n-1})$, что $\delta_{\nu(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} = \sigma_0$, где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – номер набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, а остальные переменные δ_i, $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, $i \neq \nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, принимают произвольные булевы значения. Используя предикатные аналоги замыкающего контакта и инвертора (см. [3]), предикатный мультиплексор можно реализовать на основе контактного дерева со сложностью не большей, чем $2^{n+1} + n - 1$.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{B}$ – обобщенно-проводящий базис, то для любого предиката ϕ, $\phi \in \Pi_2(n)$, существует реализующая его предикатная схема Σ_ϕ, $\Sigma_\phi \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_\phi) \leqslant \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}}-1}\right)\log n + O\left(1\right)}{n}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим разложение предиката $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ по части его переменных

$$\phi\left(x', x''\right) = \exists\, z \exists\, y_0 \ldots \exists\, y_{2^{n-r}-1}\, Q_{n-r}\left(z, x'', y_0, \ldots, y_{2^{n-r}-1}\right)\left(z \sim h\left(x'\right)\right) \bigwedge_{\sigma''=(\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_n)} \eta_{\sigma''}\left(y_{\nu(\sigma'')}, x'\right), \quad (2)$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$ и для всех σ'', $\sigma'' \in B^{n-r}$, пара $(h, \eta_{\sigma''})$ слабо моделирует характеристическую функцию так называемого остаточного предиката $\phi_{\sigma''}(x') = \phi(x', \sigma'')$. Пусть $\pi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, $i \in [1, b]$, – базисный предикат с максимальным числом полюсов, на котором достигается приведенный вес. Тогда $k_i = k_{\mathfrak{B}}$ и предикат π_i является проводящим, так как $\mathfrak{B}$ – обобщенно-проводящий базис. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что переменная x_1 предиката π_i является центральной переменной. Тогда на основе этого предиката построим π_i-проводящую звезду $\psi(x_1, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_{\mathfrak{B}}}, \ldots, x_{p,2}, \ldots, x_{p,k_{\mathfrak{B}}})$ порядка p, где p – параметр, значение которого будет определено далее. Для предиката ψ по лемме 1 существует такое селекторное относительно переменной x_1 разбиение $D = (X_1, \ldots, X_d)$ переменных $X = \{x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_{\mathfrak{B}}}, \ldots, x_{p,2}, \ldots, x_{p,k_{\mathfrak{B}}}\}$, что $d = p + k_{\mathfrak{B}} - 2$, $|X_i| = 1$, $i = 1, \ldots, p$, и $|X_j| = p$, $j = (p+1), \ldots, (p+n-2)$. Пусть s', s'' и s_1, …, s_d – такие параметры, что $\sum\limits_{i=1}^{d} s_i p_i \geqslant 2^r$, $s_1 = \ldots = s_p = s'$, $s_{p+1} = \ldots = s_{p+n-2} = s''$ и s', s'' – четные, тогда по лемме 2 существует ψ-УМ G порядка r и ранга $p(k-1)$.

Таким образом, для получения всех предикатов $\eta_{\sigma''}$, $\sigma'' \in B^{n-r}$ в представлении (2) необходимо соответствующим образом соединить 2^{n-r} проводящих звезд ψ со схемой Σ_G, которая моделирует все функции ψ-УМ G.

Оценим сложность схемы Σ_ϕ, получаемой на основе разложения (2) с использованием ψ-УМ G. Пусть Σ_Q, Σ_h и Σ_ψ – подсхемы, реализующие предикатный мультиплексор, предикат, моделирующий сигнальную функцию h, и подсхема, реализующая 2^{n-r} проводящих звезд ψ, соответственно. Так как в силу [3] функция

Шеннона $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$ имеет порядок $2^n/n$, то схему Σ_h можно построить со сложностью [3] $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(\Sigma_h) \leqslant c_{\mathfrak{B}} \dfrac{2^r}{r}$. Так как предикатный мультиплексор можно реализовать на основе контактного дерева, то для подсхемы Σ_Q и для подсхемы Σ_ψ по построению выполняются следующие неравенства:

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(\Sigma_Q) \leqslant c_1 2^{n-r}, \quad \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(\Sigma_\psi) \leqslant 2^{n-r} p \mathcal{L}_i.$$

По лемме 2 подсхема Σ_G может быть реализована со сложностью, не превосходящей $c_2 \left(p 2^{s'} + (k_{\mathfrak{B}} - 2)\, 2^{s''}\right) + O\left(p 2^{r+s/2}\right)$, где $s = \max\{s', s''\}$. Определим параметры s' s'' и r следующим образом:

$$s' = \lceil n - 3\log n \rceil + c_3, \quad s'' = \lceil n - 2\log n \rceil + c_4, \quad r = \lceil 2\log n \rceil,$$

где константы c_3 и c_4 подбираются так, чтобы s' и s'' были четными числами, и положим $p = \left\lceil \dfrac{2^r}{s' + (k_{\mathfrak{B}} - 2)s''} \right\rceil$. Тогда для сложности всей схемы верны следующие неравенства:

$$\mathcal{L}(\Sigma_\phi) \leqslant \frac{\mathcal{L}_i 2^n}{s' + (k_{\mathfrak{B}} - 2)s''} + c_5 \left(2^{n-r} + \frac{2^r}{r} + p 2^{s'} + (k_{\mathfrak{B}} - 2) 2^{s''}\right) + O(p 2^{r+s/2}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho_{\mathfrak{B}} 2^n}{n - \left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}} - 1}\right)\log n + c_6} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \leqslant \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}} - 1}\right)\log n + O(1)}{n}\right).$$

Теорема доказана. □

3. Нижняя оценка функции Шеннона $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$

Рассмотрим предикатные схемы, которые реализуют предикаты, отличные от тождественно ложного предиката. Предикатной схеме Σ сопоставим граф G с помеченными ребрами и вершинами, который получается из схемы Σ применением ко всем вершинам-предикатам схемы следующих преобразований:

1) выберем некоторую вершину-предикат, которая отвечает предикату φ;

2) выберем пару различных вершин-переменных, которые соединены ребром с выбранной вершиной-предикатом (если таких вершин не существует, то выбираем единственную вершину-переменную, связанную с выбранной вершиной-предикатом);

3) удалим из схемы выбранную вершину-предикат и все инцидентные ей ребра;

4) выбранную пару вершин-переменных соединяем ребром, которое помечено символом предиката φ, индексами переменных, которые отвечают выбранным вершинам-переменных, и набором символов, который соответствует остальным переменным предиката (если была выбрана единственная вершина, то помечаем её символом предиката φ);

5) удалим все изолированные вершины внутренних и входных переменных.

[3]Символом c с различными индексами будем обозначать действительные положительные константы.

Граф G, полученный в результате такого преобразования, будем называть *преобразованной схемой*, при этом граф G не содержит петель и изолированных вершин, его вершины соответствуют некоторым внутренним и внешним переменным исходной схемы Σ, а ребра – базисным предикатам схемы. Нетрудно видеть, что по графу G можно восстановить исходную схему Σ с точностью до эквивалентности, и что число вершин в схеме Σ не более чем в константу раз больше, чем вершин в графе G.

Для получения нижней оценки воспользуемся мощностными соображениями. Пусть $\|\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{L},n)\|$ – число попарно неэквивалентных схем из класса $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ сложности не более $\mathcal{L}$ от n переменных $x_1,\ldots,x_n$; тогда, используя приведенную в [5, 6] технику, число попарно неэквивалентных предикатных схем можно оценить сверху через число попарно неизоморфных преобразованных схем.

Лемма 3. *Для любого полного базиса $\mathfrak{B}=\{\pi_j\}_{j=1}^b$, натурального n и $\mathcal{L}$ выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{L},n)\| \leqslant a^{\mathcal{L}}(a'\mathcal{L})^{n+2}\left(\frac{c\mathcal{L}}{(\log(c'\mathcal{L}))^{k_{\mathfrak{B}}/(k_{\mathfrak{B}}-1)}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\rho_{\mathfrak{B}}}}, \tag{3}$$

где a, a', c и c' – некоторые положительные константы, зависящие от базиса $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Рассмотрим преобразованную схему G, построенную для произвольной схемы $\Sigma\in\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ сложности $\mathcal{L}$ с n входными полюсами. Пусть $L=\sum_{i=1}^{b} s_i$ – число ребер в схеме G. Тогда для того, чтобы задать схему G с точностью до изоморфизма, достаточно:

1) для всех i, $i=1,\ldots,b$, выбрать целое число s_i, $s_i\geqslant 0$, – число базисных предикатов типа π_i в схеме G – так, чтобы
$$\mathcal{L}_1 s_1+\cdots+\mathcal{L}_b s_b\leqslant\mathcal{L}; \tag{4}$$

2) зафиксировать R, $R\in[1,L]$, и Y, $Y\in[2R,L+R]$, – число компонент связности, на которые распадается G, и число вершин в схеме G соответственно;

3) в каждой компоненте связности с номером i, $i=1,\ldots,R$, выбрать Y_i, $Y_i\geqslant 2$, – число вершин графа G, которые попали в эту компоненту, и выбрать полюса схемы среди всех её вершин;

4) в каждой компоненте связности выбрать остовное дерево, а потом распределить оставшиеся ребра схемы G по $N=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{R}Y_i(Y_i-1)$ парам вершин с возможными повторениями;

5) приписать каждому ребру соответствующий символ предиката π_i, $i=1,\ldots,b$, пару индексов, которые задают положение инцидентных вершин-переменных и набор символов переменных и специальных символов, который соответствует остальным (k_i-2) переменным данного предиката;

6) приписать некоторым вершинам наборы символов-предикатов.

Число различных решений неравенства (4) в целых неотрицательных числах не превосходит, очевидно, величины $\binom{L+b-1}{b}\leqslant c_1^L$. Аналогично, число распределений вершин схемы по компонентам связности можно оценить сверху значением

$\binom{L+R-1}{R} \leqslant c_2^L$. Число различных вариантов выбора полюсов схемы, очевидно, не превосходит $Y^n \leqslant (c_3 \cdot L)^n$, а число способов выбора остовных деревьев в компонентах связности можно оценить сверху величиной $\prod\limits_{j=1}^{R} 4^{Y_j-1} = 4^{Y-R} \leqslant c_4^L$. Число различных приписываний наборов символов-предикатов вершинам не превосходит c_5^L.

Число возможных распределений оставшихся $L-(Y-R)$ ребер по N парам вершин можно оценить сверху числом сочетаний длины $L-(Y-R)$ из N элементов с возможными повторениями. Решая соответствующую задачу целочисленной оптимизации, нетрудно показать, что максимум числа пар вершин, по которым можно распределять оставшиеся ребра, достигается в случае, когда во все компоненты связности, кроме одной, попало ровно две вершины, а в оставшуюся компоненту попали все остальные вершины. Положим $y = Y - R$; в силу того, что в каждую компоненту связности входит не менее двух вершин, то $R < y$ и выполняются следующие неравенства:

$$N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{R} Y_i(Y_i-1) \leqslant R - 1 + \frac{1}{2}(Y-R+1)(Y-R) \leqslant y + y^2 \leqslant 2y^2. \qquad (5)$$

Используя неравенство (5) и свойства биномиальных коэффициентов, для числа возможных распределений оставшихся ребер можно получить следующие неравенства:

$$\binom{N+L-y-1}{L-y} \leqslant \binom{2y^2+L-y}{L-y} \leqslant \left(3\left(\frac{2y^2}{L-y}+1\right)\right)^{L-y}. \qquad (6)$$

Далее, если $\dfrac{2y^2}{L-y} < 1$, то из (6) следует, что число распределений ребер не превосходит c_6^L, а в противном случае это число не превосходит $\left(\dfrac{c_7 y^2}{L-y}\right)^{L-y}$. Пользуясь условиями леммы, число возможных распределений меток ребер при выбранном наборе целых чисел $(s_1, \ldots, s_b)$ можно оценить сверху следующим образом: число приписываний ребрам символов предикатов и специальных индексов не больше, чем c_8^L, а число приписываний ребрам символов переменных не превосходит

$$\prod_{i=1}^{b} (c_9 Y)^{s_i \max\{k_i-2,0\}} \leqslant (c_{10} y)^{\sum\limits_{i=1}^{b} s_i \max\{k_i-2,0\}}. \qquad (7)$$

Пусть $a,\ m,\ \tau,\ \alpha$ – действительные параметры такие, что

$$a \geqslant 2, \quad m \geqslant 1, \quad \tau \geqslant 1, \quad \alpha \geqslant 0,$$

тогда выполняется следующее неравенство (см. [6]):

$$F(y) = \max_{0 \leqslant y \leqslant m} \left(\frac{a y^\tau}{m-y}\right)^{m-y} y^{\alpha m} \leqslant \left(\beta t m^\alpha (\log t)^{-\alpha-\tau}\right)^m, \qquad (8)$$

где $\beta = \beta(\alpha,\tau),\ t = a m^{\tau-1}$. Для набора $s = (s_1, \ldots, s_b)$ введем следующие функции:

$$\varphi(s) = s_1 + \cdots + s_b, \quad \psi(s) = \mathcal{L}_1 s_1 + \cdots + \mathcal{L}_b s_b, \quad \lambda(s) = \sum_{i\colon 1 \leqslant i \leqslant b,\, k_i > 1} \frac{s_i \mathcal{L}_i}{\rho_i},$$

где $\rho_i = \dfrac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}$, $1 \leqslant i \leqslant b$, k_i, – определенный выше приведенный вес i-го предиката.

Пусть $\|U(s, Y, R)\|$ – число попарно неизоморфных схем с зафиксированным набором $s = (s_1, \ldots, s_b)$ и параметрами Y и R; введем следующую величину

$$\|U(s,n)\| = \max_{\substack{1 \leqslant R \leqslant \varphi(s), \\ 2R \leqslant Y \leqslant \varphi(s)+R}} \|U(s, Y, R)\|. \tag{9}$$

Тогда число попарно неизоморфных преобразованных схем можно оценить следующим образом:

$$\|\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{L}, n)\| \leqslant \sum_{\psi(s) \leqslant \mathcal{L}} \sum_{R=1}^{\varphi(s)} \sum_{Y=2R}^{\varphi(s)+R} \max_{\psi(s) \leqslant \mathcal{L}} \|U(s,\, n)\|. \tag{10}$$

В силу предыдущих рассуждений и неравенств (6)– (8) значение величины (9) можно оценить сверху следующим образом

$$\|U(s,\, n)\| \leqslant c_{11}^{\varphi(s)} (c_3 \varphi(s))^n \max_{0 \leqslant y \leqslant \varphi(s)} \left(\frac{c_7 y^2}{\varphi(s) - y} \right)^{\varphi(s) - y} y^{\sum\limits_{i=1}^{b} s_i \max\{k_i - 2, 0\}} \leqslant$$

$$\leqslant c_{11}^{\varphi(s)} (c_3 \varphi(s))^n \left(\frac{c_{12} \varphi(s)}{(\log c_{13} \varphi(s))^{1 + \frac{\varphi(s)}{\lambda(s)}}} \right)^{\lambda(s)}, \tag{11}$$

Из этой оценки вытекает, что для того, чтобы получить максимум величины (9), среди всех наборов чисел $(s_1, \ldots, s_b)$ удовлетворяющих неравенству (4) нужно сначала отобрать те наборы, у которых $s_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, b$, тогда и только тогда, когда приведенный вес базиса $\rho_{\mathfrak{B}}$ достигается на i-м базисном предикате. Далее среди этих наборов необходимо выбрать те, у которых ненулевые компоненты соответствуют предикатам с $k_{\mathfrak{B}}$ полюсами. Тогда из (11) вытекает справедливость неравенства (3).

Лемма доказана. □

Теорема 2. *Если $\mathfrak{B}$ – произвольный полный базис, то справедлива следующая нижняя оценка:*

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) \geqslant \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}} - 1}\right) \log n - O(1)}{n} \right) \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся «мощностным» тождеством $\|\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}, n)\| = 2^{2^n}$, которое вытекает непосредственно из определений, а так же результатами леммы 3. Так как в работе [3] доказано, что порядок функции Шеннона $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$ равен $2^n/n$, то, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$\log \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) \leqslant n - \log n + c_1, \quad \log\log \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) \leqslant \log n + c_2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$2^{2^n} \leqslant a^{\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)} (a' \cdot \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n))^{n+2} \left(\frac{c' \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)}{(\log(c'' \mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)))^{k_{\mathfrak{B}}/(k_{\mathfrak{B}} - 1)}} \right)^{\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)/\rho_{\mathfrak{B}}}. \tag{13}$$

Используя технику получения нижних оценок [1, 5, 6], из (13) получаем оценку (12). Теорема доказана. □

Таким образом из утверждений теоремы 1 и теоремы 2 вытекает справедливость основной теоремы данной работы.

Автор искренне признателен и благодарен профессору, доктору физико-математических наук С.А. Ложкину за внимание к процессу подготовки материала, руководство, обсуждение результатов и ценные замечания, которые позволили улучшить содержание статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00817а).

Summary

M.S. Shupletsov. High Accuracy Asymptotic Bounds for Predicate Circuits over a Class of Specific Predicate Bases.

Synthesis problem for a specific class of control systems called predicate circuits is considered. This class generalizes most of well-known control-system classes (such as circuit of functional elements, contact circuits etc.). Predicate circuits are constructed with the use or predicate elements and therefore usually have no predefined direction of signal distribution.

Asymptotic behavior of the Shannon's function $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n)$ is investigated for complexity of n-variable predicate implementation with the use of predicate circuits over basis $\mathfrak{B}$ of specific structure. The following high accuracy asymptotic bounds are acquired

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(n) = \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}} - 1} \right) \log n \pm O(1)}{n} \right),$$

where $\rho_{\mathfrak{B}}$ and $k_{\mathfrak{B}}$ are basis-dependent constants.

Key words: circuits of predicate elements, complexity, Shannon's function, high accuracy asymptotic bounds.

Литература

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 136 с.
2. *Shannon C.E.* The synthethis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. – 1949. – V. 28, No 1. – P. 59–98.
3. *Ложкин С.А., Шуплецов М.С.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности предикатных схем из одного класса // Материалы XVI Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). – М.: Изд-во мех.-матем. фак-та МГУ, 2006. – С. 72–77.
4. *Шуплецов М.С.* Оценки сложности предикатных схем в некоторых базисах // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XV Междунар. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Казань: Отечество, 2008. – С. 134–135.
5. *Ложкин С.А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Матем. вопр. кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6. – С. 189–214.
6. *Ложкин С.А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, – М., 1997.

7. *Боднарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. – 1969. – № 3. – С. 1–10; № 5. – С. 1–9.

8. *Кузнецов А.В.* О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. – М.: Наука, 1979. – С. 5–33.

9. *Касим-Заде О.М.* О сложности параметрических представлений булевых функций // Матем. вопр. кибернетики. – М.: Наука, 1998.– Вып. 7. – С. 85–160.

Поступила в редакцию
25.02.09

Шуплецов Михаил Сергеевич – аспирант кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *miklesh@shupletsov.ru*