Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
Направление: 01.03.01 математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Бакалаврская работа)

Ассоциативные n-кратные алгебры

Работа завершена:

"___"________2015 г. ____________________________(В.Э. Фомочкина)

Работа допущена к защите:
Кандидат физ.-мат. наук,
Доцент кафедры алгебры
И математической логики КФУ

"___"___________2015 г. ___________________________(Н.А. Корешков)

Заведующий кафедрой алгебры
и математической логики КФУ
доктор физ.-мат. наук, профессор

"___"___________2015 г. __________________________(М.М. Арсланов)

Казань — 2015

Оглавление

Введение

Ассоциативные n-кратные алгебры, рассматриваемые в данной работе возникли из двух источников. С одной стороны они являются частным случаем n-кратных алгебр ассоциативного типа, которые изучались в работе [1]. Эти алгебры являются обобщением алгебр ассоциативного типа, свойства которых изучались в работах [2], [3]. Алгебры ассоциативного типа являются частным случаем алгебр лиевского типа, которые были введены в работах [4], [5]. Ассоциативные n-кратные алгебры обладают тем свойством, что редукция в характеристику $p > 0$ соответствующих коммутаторных алгебр приводит к некоторым классам модулярных алгебр Ли картановского типа. В частности, стандартное умножение в модулярных гамильтоновой и контактной алгебрах является суммой “частичных” умножений соответствующих n-кратных алгебр Ли. Заметим, что возможность представления модулярной алгебры Ли в виде редукции в характеристику $p > 0$ коммутаторной алгебры, некоторой алгебры ассоциативного типа позволяет получить определенные структурные результаты для соответствующей модулярной алгебры Ли.

С другой стороны, коммутаторные алгебры для ассоциативных n-кратных алгебр дают естественные примеры лиевых пучков, которые были введены в работе [6].

Эти аргументы мотивируют изучение структуры ассоциативных -кратных алгебр. В данной работе используя понятие s-идемпотента была описана структура полупростой ассоциативной n-кратной алгебры, а также в терминах сэндвичевой алгебры получено описание конечномерной n-кратной ассоциативной алгебры $A(S)$, которая является простым $A(S)$-модулем.

§1 Основные определения.

Определение 1: Векторное пространство A над полем P называется ассоциативной n-кратной алгеброй, если существует n билинейных отображений $s_i: A \times A \to A,\ i = 1, \dots, n,$ удовлетворяющих условиям

$(as_i b)s_j c = as_i(bs_j c)$ для любых $a, b, c \in A, i, j = 1, \dots, n.$ (1)

Одним из примеров таких алгебр является следующий.

Пусть M_m – векторное пространство всех квадратных матриц размера m над полем P и $s_1, s_2, \dots, s_n$ – некоторый фиксированный набор матриц из M_m. Определим новые умножения в M_m по правилу: $as_i b$, где $a, b, \in M_m$ и приведенное выражение является обычным произведением трех матриц. Легко видеть, что формулы (1) в данном случае, конечно, выполняются.

Так как рассматриваются лишь алгебры, удовлетворяющие определению 1, то часто будем называть их для кратности n-кратными алгебрами, и совокупность отображений $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ обозначать S, а алгебру – A(S).

Определение 2: Векторное пространство V над полем P называется левым модулем над n-кратной алгеброй A (n-кратным A-модулем), если существуют n билинейных отображений $r_i: A \times V \to V, i = 1, \dots, n,$ удовлетворяющих условиям

$(as_i b)r_j v = ar_i(br_j v)$ для любых $a, b, c \in A, v \in V,\ i, j = 1, \dots, n.$ (2)

Совокупность этих отображений обозначим R, а модуль $V(R)$.

Продолжая пример к определению 1, положим V_m – пространство столбцов длины m над полем P, а каждое действие $ar_i v, v \in V_{m,}\ a \in M_m(S)$, (здесь $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ – фиксированный набор матриц) определено правилам $ar_i v = as_i v$, где в правой части приведенной формулы вычисляется обычное произведение матриц и векторов. Легко проверить, что формулы (2), очевидно, выполняются и пространство столбцов V_m можно рассматривать как левый $M_m(S)$ – модуль над n-кратной алгеброй $M_m(S)$.

Второй пример $A(S)$ – модуля получается, когда в качестве пространства V берется сама n-кратная алгебра $A(S)$, а каждое действие $r_i,\ i = 1, \dots, n$ является умножением $s_i, i = 1, \dots, n$ в этой алгебре.

Определение 3. Линейное отображение φ $A(S)$-модуля, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ $V(R), R = \{r_i, \dots, r_n\}$ в $A(S)$-модуль $V'(R'),\ R' = \{r'_1, \dots, r'_n\}$ называется гомоморфизмом, если $\varphi(ar_iv) = ar'_{\pi(i)}\varphi(v)$ для любых $a \in A(S), v \in V(R)$, где r_i-действие n-кратной алгебры $A(S), i = 1, \dots, n$, на пространстве V, r'_i-действие n-кратной алгебры $A(S)$ на пространстве V', π-перестановка индексов $1,2, \dots, n$.

Если φ-биекция, то φ называется изоморфизмом n-кратных $A(S)$-модулей.

Определение 4. 1) Подпространство U в $A(S)$-модуле $V = V(R)$ называется подмодулем, если $AU = U$, где $AU = \langle ar_iu,\ \ u \in U,\ \ a \in A(S), r_i\ \in R\ \rangle_P$. В частности, подпространство I в алгебре $A(S)$ называется левым идеалом, если $AI \subseteq I$, где $AI = \langle as_ix,\ \ x \in I,\ \ a \in A(S),\ \ s_i \in S\rangle_P$. Если дополнительно выполняется условие $IA \subseteq I$, то I называется двусторонним идеалом (или просто идеалом в $A(S)$). (Соответственно, $I -$ подалгебра, если $I\ I \subseteq I$.)

2) Фактормодулем $A(S)$-модуля V по $A(S)$-подмодулю U называется факторпространство $V/U = \{v + U, v \in V\}$ и действие алгебры $A(S)$ на V/U определено правилами : $ar_i(v + U) = ar_iv + U,\ r_i \in R,\ a \in A(S)$. (Соответственно определяется факторалгебра)

3) $A(S)$-модуль $V(R)$ называется неприводимым (простым), если $AV \neq 0$ и единственные его подмодули есть 0 и V.

Определение 5. n-кратная алгебра $A = A(S)$-нильпотентна, если для некоторого натурального m имеет место: $A^m = 0$, где $A^k = AA^{k-1} = \langle asb,\ a \in\ A,\ b \in\ A^{k-1},\ \ s \in S\rangle_P$.

§2 Критерии нильпотентности и полупростоты n-кратных ассоциативных алгебр.

Проверим следующее утверждение.

Предложение 1. Конечная сумма левых нильпотентных идеалов n-кратной алгебры $A(S)$ есть левый нильпотентный идеал.

Доказательство: Единственный нетривиальный факт в сформулированном предложении – это нильпотентность суммы идеалов. Очевидная индукция сводит это утверждение к случаю двух идеалов. Пусть I и J – левые нильпотентные идеалы. т.е $I^n = 0, I^m = 0$ для некоторых n и $m.$ Тогда $(I+J)^{n+m} = 0.$

Действительно, во-первых, заметим, что

$$(I+J)^{n+m} = \sum I^{k_1}J^{r_1} \dots I^{k_s}J^{r_s},$$

где

$$\sum_{i=1}^{s} k_i + \sum_{j=1}^{s} r_j = n + m.$$

Кроме того, в силу включения $AI^s \subseteq I^s$ имеем

$$I^{k_1}J^{r_1} \dots I^{k_s}J^{r_s} \subseteq I^{\mathrm{k}}J^{r_s}, k = \sum_{i=1}^{s} k_i.$$

Если $k \geq n,$ то последние произведение равно нулю. В противном случае

$$\sum_{j=1}^{s} r_j \geq m$$

и, используя включение

$$I^{k_1}J^{r_1} \dots I^{k_s}J^{r_s} \subseteq I^{k_1}J^{r}, r = \sum_{j=1}^{s} r_j\,,$$

опять получаем равенство нулю произведения $I^{k_1}J^{r_1} \dots I^{k_s}J^{r_s}$. Приведенные рассуждения объясняют нильпотентность идеала $I = J$.

□

Если n-кратная алгебра A конечномерна, то, в силу предложения 1, она имеет наибольший нильпотентный идеал, который назовем радикалом алгебры A и обозначим $Rad\ (A)$. Заметим, что конечномерная n-кратная алгебра A

нильпотентна тогда и только тогда, когда каждый элемент этой алгебры нильпотентен относительно любой операции $s \in S$, т.е. для любого $a \in A$ существует $m = m(a, s) \in \mathbb{N}$ такое, что $asa\ .\ .\ .\ sa = 0$. (Здесь количество элементов a равно m.) (см.[6]) Используя стандартные рассуждения, аналогичные случаю ассоциативных алгебр, имеем:

Теорема 1. Пусть A - конечномерная n-кратная алгебра. Тогда $Rad(A/Rad\,A) = 0$.

Доказательство: Пусть $\bar{I}$ - нильпотентный идеал фактор алгебры $A/RadA$. Обозначим через I полный прообраз идеала $\bar{I}$ при естественном гомоморфизме $\varphi: A \to A/RadA$, то есть $\varphi(\ I\ ) = \bar{I}$. Получаем, что $\varphi(\ I^2\ ) = \bar{I}^2, \dots, \varphi(\ I^n\ ) = \bar{I}^n = 0$. Таким образом $I \in Ker\varphi = RadA$. То есть I −нильпотентный идеал и значит $I \subset RadA$. Следовательно, $\varphi(I) = \bar{I} = \bar{0}$. Таким образом $Rad(A/Rad\,A) = 0$.

□

§3 Строение полупростой n-кратной ассоциативной алгебры.

Ассоциативную n-кратную алгебру, радикал которой равен нулю, будем называть полупростой. Исследуем далее структуру полупростой n-кратной алгебры.

Определение 6. Ненулевой элемент e n-кратной алгебры $A(S)$ назовем s-идемпотентом, $s \in S$, если $ese = e$.
Предложение 2. Пусть $A = A(S)$ – полупростая n-кратная алгебра, I −минимальный левый идеал в A. Тогда $I = Ase$ для некоторой операции $s \in S$ и некоторого s-идемпотента e.

Доказательство: Для любой операции $s \in S$ пространство IsI является идеалом алгебры A, содержащимся в I. Так как I – минимальный идеал, а алгебра A не содержит нильпотентных идеалов, то существует операция $s \in S$, для которой $IsI = I$. Отсюда следует, что найдется такой элемент $x \in I$, что $Isx = I$. Поэтому существует $e \in I$, что $esx = x$.

Для данного элемента x обозначим $K_x^{(s)} = \{y \in I,\ ysx = 0\}$. Очевидно, $K_x^{(s)}$ – левый идеал, содержащийся в I. Так как $Isx \neq 0$, то $K_x^{(s)} = 0$.

Умножая соотношение $esx = x$ на e, имеем $es(esx) = esx,$ или $(ese - e)sx = 0$. Так как $K_x^{(s)} = 0$, то $ese = e$, т.е. e является s-идемпотентом, принадлежащим I. Следовательно, Ase - левый идеал n-кратной алгебры A, лежащий в I. Так как $ese \neq 0$ и I минимален, то $I = Ase$.

Теорема 2. Конечномерная полупростая n-кратная алгебра $A = A(S)$ является конечной прямой суммой своих минимальных левых идеалов.

Доказательство: Так как алгебра A конечномерна, то в ней существует ненулевой минимальный левый идеал A_1. В силу предложения 2 $A_1 = Ase_1$ для некоторой операции $s \in S$ и некоторого -идемпотента e_1. Обозначим $A_1' = \{x \in A,\ xse_1 = 0\}$. Тогда A_1' левый идеал в $A(S)$, причем $A_1' \cap A_1 = 0$. С другой стороны, любой элемент a из $A(s)$ можно представить в виде $ase_1 + a - ase_1$. Так как $ase_1 - a \in A_1'$, то $A(S) = A_1 \oplus A_1'$.

В множестве всех ненулевых левых идеалов n – кратной алгебры A, содержащихся в A_1', выберем минимальный идеал A_2. Применяя предложение 2, представим его в виде: $A_2 = A\tilde{s}e_2$, где $\tilde{s} \in S$, $e_2\tilde{s}e_2 = e_2$.

Рассуждая как выше, построим левый идеал A_2' n – кратной алгебры $A(S)$, что $A_1' = A_2 \oplus A_2'$. Повторяя этот процесс, получим цепочку левых идеалов $A \supset A_1' \supset A_2' \supset \ldots$

В силу конечномерности $A(S)$, через конечное число шагов, очередной левый идеал A_m' будет минимальным и процесс закончится. При этом для алгебры $A(S)$ получим разложение $A(S) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{m+1}$, которое удовлетворяет требованиям теоремы.

□

Предложение 3. Минимальные левые идеалы I и I' изоморфны как $A(S)$ – модули тогда и только тогда, когда существуют операция $s \in S$ и элемент $a' \in I'$ такие, что $I' = Isa'$.

Доказательство. Пусть $I' = Isa'$ для некоторого $a' \in I'$ и некоторой операции $s \in S$. Рассмотрим отображение $\varphi: I \to I'$, определенное правилом $\varphi(x) = xsa'$, $x \in I$. Очевидно, φ-гомоморфизм $A(S)$-модулей, а из равенства $I' = Isa'$ следует, что φ-сюръективен. С другой стороны, $Ker\varphi -$ левый идеал n-кратной алгебры $A(S)$, содержащийся в I. Из минимальности идеала I вытекает, что $Ker\varphi = 0$, т.е. φ-биекция.

Обратно, пусть $\varphi : I \to I'$ - изоморфизм двух минимальных идеалов. Согласно предложению 2 существует операция $s \in S$ и s-идемпотент $e \in I$ такие, что $I = Ase$. Так как $ese \neq 0$ и идеал I минимален, то $I = Ise$. Обозначим через a' образ s- идемпотента e при гомоморфизме φ. Тогда $\varphi(I) = Isa'$ т.е $I' = Isa'$.

□

Следствие. Если $A(S)$-полупростая n-кратная алгебра, что ее минимальные левые идеалы I и I' изоморфны как $A(S)$-модули тогда и только тогда, когда $I' = II'$.

Определение 7. Ассоциативная n-кратная алгебра $A(S)$-проста, если она не содержит других двусторонних идеалов, кроме O и $A(S)$.

Теорема 3. Конечномерная полупростая n-кратная алгебра $A(S)$ имеет вид: $A(S) = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_m$, где каждый I_j простая n-кратная ассоциативная алгебра.

Доказательство: Обозначим через C множество всех неизоморфных (как $A(S)$-модули) идеалов из списка $I_1, I_2, \ldots, I_m$, а через D_I сумму всех минимальных левых идеалов алгебры $A(S)$, изоморфных идеалу I. Тогда

$$A(S) = \sum_{I \in C} D_I$$

и каждое подпространство D_I-левый идеал в $A(S)$ (в частности, подалгебра в $A(S)$). Если I и I'- неизоморфные минимальные идеалы, то, в силу следствия, $II' = 0$, а значит $D_I D_{I'} = 0$, т.е. D_I является и правым идеалом в $A(S)$.

Кроме того, $D_I \cap D_{I'} = 0$, когда $I \neq I', I, I' \in C$, поскольку в противном случае пересечение $D_I \cap D_{I'}$ содержало бы минимальный левый идеал изоморфный двум различным идеалам из множества С. Итак, $A(S) = \bigoplus_{I \in C} D_I$.

Покажем, что каждая n-кратная алгебра D_I проста. Пусть B- ненулевой двусторонний идеал в D_I. В силу соотношения $D_I D_{I'} = D_{I'} D_I = 0$, когда $I \ncong I'$, получаем, что B- двусторонний идеал алгебры $A(S)$. Пусть J - минимальный левый идеал алгебры $A(S)$, содержащийся в B. Тогда $J \cong I$, а поэтому $JI = I \subseteq B$. Следовательно, любой минимальный левый идеал K из D_I содержится в B, так как $IK = K \subseteq B$. Значит, $B = D_I$.

□

§4 Строение n-кратной ассоциативной алгебры $A(S)$, являющейся простым $A(S)$ модулем.

Рассмотрим строение конечномерных, простых, n – кратных алгебр.

<u>Определение 8</u>.
1) n-кратные алгебры $A(S),\ S = \{s_1, \dots ,\ s_n\}$ и $A'(S'), S' = \{s_1', \dots, s_n'\}$ такие, что $dim_P\langle S\rangle_P = dim_P\langle S'\rangle_P = n$ - изоморфны, если существует линейное биективное отображение φ, соответствующих пространств этих алгебр, что $\varphi(as_ib) = \varphi(a)s_{\pi i}'\varphi(b), a, b \in A(S), s_i \in S,\ s_{\pi i}' \in S', i = 1, \dots, n$, где π −некоторая перестановка индексов $\{1, 2,\ \dots ,\ n\}$.

2) n-кратный модуль $V(R),\ R = \{r_1, \dots, r_n\}$ над $A(S),\ S = \{s_1,\ \dots ,\ s_n\}$ изоморфен n −кратному модулю $V'(R'),\ R' = \{r_1', \dots, r_n'\}$ над $A'(S')$, $S' = \{s_1', \dots, s_n'\}$, где $A(S)$ и $A'(S')$ изоморфные n −кратные алгебры, если существует биективное линейное отображение векторных пространств V и V' такое, что $\varphi(ar_iv) = a'r_{\pi i}'\varphi(v),\ a \in A(S),\ v \in V(R),\ r_i$- действие n-кратной алгебры $A(S)$ на $V(R),\ r_{\pi i}'$ действие n-кратной алгебры $A'(S)$ на $V'(R'),\ a'$-образ элемента a при изоморфизме n-кратных алгебр $A(S)$ и $A'(S'),\ \pi$-перестановка индексов $\{1, 2, \dots, n\}$.

Если $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ – набор умножений на пространстве A, то

$$\tilde{s} = \sum_{r=1}^{k} a_r s_r,$$

$a_r \in P$, также является умножением на пространстве A. Кроме того, если

$$\hat{s} = \sum_{r=1}^{k} b_r s_r,\quad b_r \in \mathrm{P}$$

еще одно умножение, то $(a\tilde{s}b)\hat{s}c = a\tilde{s}(b\hat{s}c)$, a, b, c $\in A$. Поэтому n-кратной алгеброй будет называться пространство A с пространством умножений $S = \langle s_1, \dots, s_n\rangle, n = dimS$.

Для формулировки результата о строении конечномерной простой n-кратной алгебры введем понятие сэндвичевой алгебры.

<u>Определение 9</u>. 1) Пусть C-подпространство в $M_m(P)$, а $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ подмножество в $M_m(P)$. Если $asb \in C$, для любых $a, b \in C$ и любого $s \in S$, то $C = C(S)$ называется n −кратной сэндвичевой алгеброй.

Очевидно, что $C(S)$ из определения 9 удовлетворяет определению 1 n-кратной алгебры.
Пусть $C = \langle E_{1\alpha}, E_{2\alpha}, \dots, E_{m\alpha} \rangle_P \subset M_m(P),\ S = \{E_{\alpha,1}, E_{\alpha,2}, \dots, E_{\alpha,m}\} \subset M_m(P)$. Тогда $C = C(S) - m$-кратная сэндвичева алгебра с набором умножений из множества S. В дальнейшем эту алгебру будем обозначать C_m.

Покажем, что C_m – простая m-кратная алгебра. Пусть I- ненулевой двусторонний идеал в алгебре C_m. Возьмем $0 \neq x \in I, x = \sum_{i=1}^{m} x_i E_{i\alpha}$. Тогда $E_{j\alpha} s_k x = E_{j\alpha} E_{\alpha k} \sum_{i=1}^{m} x_i E_{i\alpha} = E_{jk} \sum_{i=1}^{m} x_i\, E_{i\alpha} = x_{j\alpha}$. Т.к. $x \neq 0$, то $\exists k{:}\, x_k \neq 0 \Longrightarrow E_{j\alpha} \in I, \forall\, j = \overline{1,m} \Longrightarrow I = C_m$.

<u>Теорема10:</u> Пусть $A(S)$ – n-кратная ассоциативная алгебра, $dimA = m$, являющаяся простым $A(S)$-модулем, над алгебраически замкнутым полем P, причем $n = dim_p \langle S \rangle_p$. Тогда $n = m$ и $A(S)$ изоморфна C_m.

Доказательство: Пусть $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ – линейно независимая над P система умножений алгебры $A(S)$.

Рассмотрим представление $A(S)$ в модуле A. Для каждого $s \in S$ рассмотрим отображение $L(s){:}\, A \to End_p(A)$, которое определено правилом $L_a(s)(x) = asx; x, a \in A$ и $L_a(s)$ – образ элемента a при отображении $L(s)$.

Обозначим через L ассоциативную алгебру, порожденную всеми операторами $L_a(s)$, когда a пробегает все пространство A, s - все множество S.

Так как основное поле P алгебраически замкнуто, то можно отождествить алгебру L и полную матричную алгебру $M_m = M_m(P)$, где $m = dim_p A$.

Отображение $L(s)$ является гомоморфизмом алгебры $A(s)$(алгебры с одной операцией) в алгебру $L_A(s) = \{L_a(s) | a \in A\}$. В силу формулы $L_b(r) L_a(s) = L_{bra}(s)$, где $b, a \in A; r, s \in S$, пространство $L_A(s)$ является левым идеалом алгебры L. Так как размерность любого минимального левого идеала в $L = End_P(A)$ равна $dim_P A = m$, то $dim_P L_A(s) \geq m$, если $L_A(s) \neq 0$. С другой стороны $dim_P L_A(s) \leq dim_P A \Rightarrow dim_P L_A(s) = dim_P A = m$. Так как $s_1 \neq 0$, т.е. $L_A(s_1) \neq 0$, то $A(s_1) \cong L_A(s_1)$.

Любой левый идеал в M_m имеет вид $M_m e$, где e-некоторый идемпотент. Применяя это утверждение к идеалу $L_A(s_1)$, получим, что ранг соответствующей матрицы e равен единице. Выберем базис в A так, чтобы $e = E_{11}$. Тогда $L_A(s_1) = \langle E_{i1}, i = \overline{1,m} \rangle$.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ – базис в $A(s_1)$, соответствующий элементам $\{E_{i1}\}_{i=1}^m$ при изоморфизме $L(s_1)$. Тогда из формул умножения для матричных единиц получаем формулы умножения для элементов $e_i, i = \overline{1,m}$. А именно, $e_i s_1 e_j = \delta_{j1} e_i, i = \overline{1,m}$. Замети, что элементы e_j можно интерпретировать как векторстолбцы вида $(0, \dots, 1_j, \dots, 0)^{\,t}$, так как $E_{i1} = L_{e_i}(s_1)$.

Пусть s еще одно умножение из S, отличное от s_1 и такое, что $L_A(s) \neq 0$. Тогда проведя рассуждения, аналогичные выше для $A(s_1)$, имеем, что $A(s) \cong L_A(s)$, то есть $L_A(s)$- минимальный левый идеал в $L = End_P A$. Следовательно, $L_A(s) = \left\{\sum_{i=1}^m x_i f_i, f_i = \sum_{j=1}^m a_j E_{ij}, x_i \in P\right\}$ для некоторого фиксированного набора $\left\{a_j\right\}_{j=1}^m$ из P. Причем матричная реализация операторов из $L_A(s)$ осуществляется относительно базиса $\{e_i\}_{i=1}^m$, определенного умножением s_1. Если $L_{e_i}(s) = \sum_{r=1}^m x_r^{(i)} f_r = \sum_{r=1}^m \sum_{t=1}^m x_r^{(r)} a_t E_{rt}, i = \overline{1,m}$, то $e_i s_1 e_j = L_{e_i}(s) e_j = \sum_{r=1}^m x_r^{(i)} a_j e_r\, , i, j = \overline{1,m}$.

Рассмотрим соотношение $(e_1 s_1 e_1) s e_i = e_1 s_1 (e_1 s e_i)$. Его левая часть равна $e_1 s e_i = \sum_{r=1}^m x_r^{(1)} a_i e_r$, а правая: $e_1 s_1 \sum_{r=1}^m x_r^{(1)} a_i e_r = x_1^{(1)} a_i e_1$. Из полученного соотношения следует, что $x_r^{(1)} a_i = 0, i = \overline{1,m}, r = \overline{2,m}$. Так как идеал $L_A(s)$ ненулевой, то $\exists i \colon a_i \neq 0$. Таким образом $x_r^{(1)} = 0, r = \overline{2,m},$ то есть $e_1 s e_j = x_1^{(1)} a_j e_1, j = \overline{1,m}$.

Далее рассмотрим соотношение $(e_i s_1 e_1) s e_j = e_i s_1 (e_1 s e_j)$. Его левая часть равна $e_i s e_j = \sum_{r=1}^m x_r^{(i)} a_j e_r$ а правая: $x_1^{(1)} a_j (e_i s_1 e_1) = x_1^{(1)} a_j e$. В результате имеем, что $x_r^{(i)} a_j = 0, j = \overline{1,m}, r = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$.

Как уже отмечалось выше, из того, что идеал $L_A(s)$ ненулевой следует, что $a_j \neq 0$ для некоторого j. Поэтому $x_r^{(i)} = 0, r = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$. То есть $e_i s e_j = x_i^1 a_j e_i,\ i = \overline{2,m}, j = \overline{1,m}$ соединяя полученные формулы с формулами для произведений $e_1 s e_j$, имеем $e_i s e_j = x_i^{(i)} a_j e_i, i, j = \overline{1,m}$.

Если s_r одно из умножений $\{s_i\}_{i=1}^m$, то полученные формулы выглядят следующим образом: $e_i s_r e_j = x_i^{(i)}(r) a_j^{(r)} e_i; i, j = \overline{1,m}$, где все $a_j^{(r)}, j = \overline{1,m}$, равны нулю, если $L_A(s_r) = 0$. Заменяя каждое $s_r, r = \overline{2,m}$ на $\overline{s_r} = s_r + \lambda_r s_1, \lambda_r \in P$, получим при подходящих $\lambda_r; r = \overline{2,n}$,что $x_1^1 a_1^r \neq 0$ в формулах умножения для $s_r, r = \overline{2,n}$.

Рассмотрим соотношение $(e_i s_r e_1) s_r e_1 = e_i s_r (e_1 s_r e_1)$ для любого s_r, отличного от s_1. Его левая часть равна $x_i^{(i)}(r) a_1^{(r)} e_i s_r e_1 = \left(x_i^{(i)}(r) a_1^{(r)}\right)^2 e_i)$, а правая:$x_1^{(1)}(r) a_1^{(1)} e_i s_r e_1 = x_1^{(1)}(r) x_i^{(i)}(r) \left(a_1^{(r)}\right)^2 e_i$. Параметр $x_i^{(i)}(r)$ отличен от нуля, иначе $L_{e_i}(s_r) = 0$, а тогда алгебры $A(s_r)$ и $L_A(s_r)$ неизоморфны, следовательно, $x_i^{(i)}(r) = x_1^{(1)}(r), i = \overline{2,m}$ и обозначая $x_i^{(i)}(r) a_j^{(r)}$ через $c_j^{(r)}$, получим следующие формулы:

$$e_i s_r e_j = c_j^{(r)} e_i\,;\ i,j = \overline{1,m}, r = \overline{1,n}$$

.

Таким образом каждое умножение $s_r, r = \overline{1,n}$, определяется вектором $\left(c_1^{(r)}, \dots, c_m^{(r)}\right)$, причем $c_1^{(1)} = 1, c_j^{(1)} = 0,\ j = \overline{2,m}$.

Покажем, что систему S можно заменить эквивалентной системой $\bar{S}$, в которой каждое умножение $\overline{s_r}$ будет определяться вектором $\left(0, \dots, \underset{r}{1}, \dots, 0, c_{n+1}^{(r)}, \dots, c_m^{(r)}\right), r = \overline{1,n}$, где $n = dim\langle s_r, r = \overline{1,n}\rangle_P$. Рассмотрим систему умножений $\bar{S}$, определенную правилом: $\overline{s_1} = s_1, \overline{s_r} = s_r - c_1^{(r)} s_1, r = \overline{2,n}$. Тогда $e_i \overline{s_r} e_1 = 0, r = \overline{2,n},\ i = \overline{1,m}$, т.е. $c_1^{(r)} = 0, r = \overline{2,n}$ и кроме того, $c_1^{(1)} = 1, c_k^{(1)} = 0, k = \overline{2,m}$.

Пусть уже доказано существование системы S, для которой $c_i^{(i)} = 1, i = \overline{1,q}, c_j^{(t)} = 0, t \neq j, i,j = \overline{1,q}$. Тогда среди коэффициентов $c_{q+s}^{(r)}, s = \overline{1, m-q}; r = \overline{q+1, n}$ должен быть ненулевой. В противном случае ранг матрицы векторов $\left(c_1^{(r)}, \dots, c_m^{(r)}\right), r = \overline{1,n}$ будет меньше n. Если номер столбца с таким ненулевым коэффициентом равен α и $c_\alpha^{(\alpha)} \neq 0$, то меняя местами, базисные элементы e_{q+1} и e_α, получим $c_{q+1}^{(q+1)} \neq 0$. Если же $c_\alpha^{(\alpha)} = 0$, но $c_\alpha^{(\beta)} \neq 0, \beta \in \overline{q+1, n}$, то заменяя s_α на $s_\alpha + s_\beta$, получим предыдущий случай. Заменим s_{q+1} на ${s_{q+1}}/{c_{q+1}^{(q+1)}}$ и рассмотрим систему умножений $\bar{S}$: $\overline{s_{q+1}} = s_{q+1},\ \overline{s_i} = s_i - c_{q+1}^{(i)} s_{q+1},\ i = \overline{1,n},\ i \neq q+1$. Для системы $\bar{S}$ будут выполняться условия: $c_i^{(i)} = 1, i = \overline{1, q+1}, c_j^{(t)} = 0, t \neq j, t,j = \overline{1, q+1}$.

Если $n > m$, то через m шагов приходим к системе, соотношений набор первых m векторов которой равен единичной матрице порядка m. Заменяя s_t

на $s_t - \sum_{j=1}^{n} c_j^{(t)} s_j, t = \overline{n+1,n},$ получим, что остальные $n-m$ умножений s_t- нулевые. Что противоречит их линейной независимости.

Если $n < m$, то для элементов $\widetilde{e_j} = e_j - \sum_{t=1}^{n} c_j^t e_t,\ j = \overline{n+1,m},$ имеем: $e_t \overline{s_r} \tilde{e}_j = 0\ \ i,r = \overline{1,n}$. Поэтому заменяем $\widetilde{e_j}, j = \overline{n+1,m}$ на e_j. В новом базисе, который опять обозначаем e_i имеем:

$$e_i \widetilde{s_r} e_j = \delta_{rj} e_i;\ i,j = \overline{1,m}, r = \overline{1,n}$$

$$e_i \widetilde{s_r} e_j = 0; i,j = \overline{1,m}, r = \overline{n+1,m}$$

Если $n < m$, то пространство $\langle e_j \rangle\ j = \overline{n+1,m}$ образует двусторонний идеал в $A(S)$, т.е. $n = m$ и из полученных формул следует, что $A(S)$ изоморфна сэндвичевой алгебре C_m.

□

Литература

[1] Корешков Н.А. n-кратные алгебры ассоциативного типа // Изв.вузов. Математика. - 2008 - №12. – С. 34-43

[2] Корешков Н.А. О нильпотентности и разложении алгебр ассоциативного типа // Изв.вузов. Математика. - 2006.- №9. –С. 34-42.

[3] Корешков Н.А. Об одном классе алгебр ассоциативного типа // Изв.вузов. Математика. - 2007.- №3. –С. 38-47.

[4] Bahturin Y. Identities.of graded algebras // J. Algebra. 1998 –V.205.N1.-P.1-12

[5] Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. G-тождества неассоциативных алгебр. Матем. сборник. – 1999. –Т.190. -№1.-С. 3-14.

[6] Корешков Н.А. О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр // Изв.вузов. Математика. -2010. -№2.-С.33-38.