Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Специализация: Математический анализ

Специальность: 010101 – Функциональный анализ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

Слабая топология в терминах сетей. Примеры и контрпримеры

Работа завершена:

«__»__________2015г ______________ Хабирова В.Ф.

Работа проверена:

Зав. кафедрой математического анализа,
профессор, д.ф.-м.н. ______________ Насыров С.Р.

Научный руководитель,
к.ф.-м.н. ______________ Скворцова Г.Ш.

Рецензент,
к.ф.-м.н. ______________ Турилова Е.А.

г. Казань, 2015

Содержание

§ 1. Введение

В данной дипломной работе рассматриваются особенности слабой сходимости сетей в гильбертовом пространстве, а также понятие слабой сходимости в пространстве ограниченных операторов.

Как известно,слабая топология не является метризуемой. Поэтому для полноценного описания топологических понятий, относящихся к слабой топологии, сходящихся последовательностей уже не достаточно. В классическом курсе математического анализа используются в основном понятия последовательности. Поэтому представляется интересным изучение слабой сходимости в терминах сетей.

Подробное исследование в этой области проводили такие математики, как Биркгоф, Келли. Однако эта тема остается актуальной и по сей день.

Целью данной работы является: изучение теорем и утверждений относящихся к слабой сходимости сетей в гильбертовом пространстве, самостоятельное построение,а также изучение привиденных в литературе соответствующих примеров и контрпримеров. В частности построены: пример неограниченной слабо сходящейся сети; пример фундаментальной сети, не обладающей слабым пределом; пример показывающий, что из слабой сходимости не следует сходимость по норме. Исследованы вопросы метризуемости, полноты, неприрывности алгебраических операций в слабой топологии. Изучены вопросы связи слабой и топологии нормы.

§ 2. Основные определения

Привидем основные понятия и теоремы, используемые в дипломной работе:

Топологическое пространство. Пусть E — множество и указана система τ частей множества E, обладающая свойствами:

1. $\emptyset, E \in \tau$
2. если $X_1, \ldots, X_n \in \tau$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i \in \tau$
3. если $(X_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство из τ, то $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \in \tau$

В этом случае система τ называется *топологией в* E,а элементы системы τ называются *открытыми множествами.*

Множество E с фиксированной в некотором τ топологией называется *топологическим пространством* и обозначается (E, τ).

Метрика.

Пусть M - множество. Функция $d : M \times M \to R$, называется *метрикой* в M, если оно обладает свойствами:

1)$d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,

2)$d(x, y) = d(y, x)$,

3)$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

где $x, y, z \in M$ - произвольны. Множество M с фиксированной в нем метрикой называется *метрическим пространством.*

Метризуемое топологическое пространство.

Топологическое пространство τ называется *метризуемым*, если его топологию можно задать с помощью какой либо метрики.

Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным.

Норма.

Нормой в линейном пространстве L называется конечный функционал, удовлетворяющий следующим условиям:

1)$p(x) \geq 0$, причем $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2)$p(x + y) \leq p(x) + p(y), x, y \in L$,

3)$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \forall a$.

Нормированное пространство.

Линейное пространство L, в котором задана некоторая норма, называется *нормированным пространством.*

Направленность(сеть).

Пусть X — произвольное множество, A - множество с отношением порядка, то есть бинарное отношение со свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности такое, что $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A \exists \alpha \in A \alpha \leqslant \alpha_1, \alpha \leqslant \alpha_2$. Отображение $\alpha \to X_\alpha$ множества A в H называется *направленностью или сетью.*

Векторное пространство.

Векторным пространством над полем Λ называется абелева группа X в аддитивной записи для которой задано отображение $\Lambda \times X \to X$, записываемое в мультипликативной форме, причем удовлетворяются требования:

$\lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)$;

$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

$1 \cdot x = x(x, y \in X, \lambda, \mu \in \Lambda$.

Линейное отображение.

Пусть X, Y - векторные пространства над полем Λ. Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным*, если

$A(x+y) = Ax + Ay$;

$A(\lambda x) = \lambda A(x)(x, y \in X, \lambda \in \Lambda)$.

Линейным функционал.

Линейным функционалом называются линейные отображения $\phi : E \to \Lambda$, обладающие свойством линейности по своему аргументу: $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$ и $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.

Линейное отображение $F : H \to \Lambda$ называется *ограниченным*, если существует $C > 0$ такое, что $|F(f)| \leqslant C||f||(f \in H)$. Величина $||F|| = \inf\{C||F(f)| \leqslant C||f||(f \in H)\}$ называется *нормой* отображения F.В нормированном пространстве через H^* обозначим множество линейных ограниченных функционалов.

Слабая топология.

Слабой топологией называется такая топология, что при $f_\alpha \to f \Rightarrow \varphi(f_\alpha \to \varphi(f) \forall \varphi$принадлежащих множеству линейных ограниченных функционалов.

Скалярное произведение.

Положительная билинейная форма a в векторном пространстве E называется скалярным произведением, если $a(f,f)=0$ влечет $f=\theta$.

Унитарное пространство.

Векторное пространство, в котором фиксированно некоторое произведение, называется унитарным пространством.

При этом $||f|| = \sqrt{(f,f)}$.

Гильбертово пространство.

Унитарное пространство полное относительно нормы, определяемой скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством.*

Пространство ℓ_2.

Определим ℓ_2 - метрическое пространство элементвми которого являются последовательности $f=(f_i)=(f_1,f_2,\ldots)$ комплескных чисел, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f_i|^2<+\infty$.

Теорема Рисса.

Если F — линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве H, то существует и определен однозначно вектор $g\in H$ такой что

$$F(f)=(f,g)(f\in H).$$

при этом $||F||=||g||$.

Принцип равномерной ограниченности.

Пусть $L\subset H$ и $\sup\limits_{g\in L}(f,g)<+\infty$ для любого $f\in H$. Тогда $\sup\limits_{F\in M}||F||<+\infty$.

Пространство $B(H)$.

$B(H)$ — множество всех линейных ограниченных операторов действующих в гильбертовом пространстве H над полем Λ.

Слабая топология в гильбертовом пространстве.

Слабой топологией в гильбертовом пространстве H называется топология, относительно которой непрерывны все отображения $F_g : H\to\Lambda(g\epsilon H)$, где $F_g(f)=(f,g)$, $(f\epsilon H)$.

Другими словами, фундаментальную систему окрестностей вектора $f_0\epsilon H$

в слабой топологии образуют множества вида

$$\{f\epsilon H|(f-f_0,g_k)<1,g_1...g_n\epsilon H\}$$

.

Слабая топология(W — топология) в $B(H)$.

Слабая топология в $B(H)$ определяется фундаментальной системой окрестностей нуля:

$$\{A\in B(H)|(Af_k,g_k)|<1,f_k,g_k\in Hk=\overline{1,n}\}$$

Фундаментальная система окрестностей точек $A_0\in B(H)$ определяется тогда как $\{A_0+U\}$, где U пробегает указанную ваше систему окрестностей нуля.

Сильная топология(S — топология) в $B(H)$.

Сильная топология(S — топология) в $B(H)$ определяется системой окрестностей нуля $\{A\in B(H)||Af_k||<1,f_k\in Hk=\overline{1,n}\}$.

Слабо фундаментальная сеть.

Сеть $\{g_n\}$ в гильбертовом пространстве называется *слабо фундаментальной*, если сеть чисел $\{(f,g_n)\}$ фундаментальна для любого вектора f из этого пространства.

Сходимость сети A_α к оператору A в W-топологии.

СетьA_αсходится к операторуA в$W-$топологии$(A_\alpha\overset{\text{сл}}{\to}A)$, тогда и только тогда, когда $lim_\alpha(A_\alpha f,g)=(Af,g)$ для любых $f,g\in H$, или (с учетом поляризационного тождества) тогда и только тогда, когда $lim_\alpha(A_\alpha f,f)=(Af,f)$ для любого $f\in H$.

Слабо полное гильбертово пространство.

Гильбертово пространство или его подмножество называются *слабо полными*, если каждая слабо фундаментальная сеть имеет слабый предел.

Если этим свойством обладают лишь слабо фундаментальные последовательности, то пространство называется *секвенциально слабо полным.*

§ 3. Слабая топология в гильбертовом пространстве

Приведем и докажем основные свойства слабой топологии.

Исследуем связь слабой сходимости и сходимости по норме.

Утверждение 3.1

Из сходимости по норме следует слабая сходимость.

Доказательство. Рассмотрим сеть f_α, такую что f_α сходится по норме к f.

Покажем, что сеть f_α сходится слабо.

$||f_\alpha - f|| \to 0$

$| < f_\alpha - f, g > | \leq ||f_\alpha - f||||g|| \to 0.$

Следовательно, из сходимости по норме следует слабая сходимость.

$\square$

Однако, обратное неверно, что доказывает следующий пример. Отсюда следует, что слабая топология слабее топологии нормы.

Пример 3.2.

Привидем пример слабо сходящейся последовательности, которая не сходится по норме.

В гильбертовом пространстве $H, H = l_2$ рассмотрим последовательность $f_n = (f_1, f_2, \ldots)$,где

$f_1 = (1, 0, \ldots)$

$f_2 = (0, 1, \ldots)$

$\vdots$

$f_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$

$(f_n, g) \to 0$, для каждого g, в частности для $g = e_k$

$(f_n, e_k) = f_n^k \to 0$, то есть $f_n \xrightarrow{w} 0$.

Но при этом f_n не стремится по норме к 0, так как $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_n^i|^2 = 1 \nrightarrow 0$

Рассмотрим условия, при которых все же из слабой сходимости следует сходимость по норме.

Утверждение 3.3

Если $f_\alpha \overset{\text{сл}}{\to} f$ *и* $||f_\alpha|| \to ||f||$, *то* $f_\alpha \to f$.

$||f_\alpha - f|| = (f_\alpha - f, f_\alpha - f) = ||f_\alpha||^2 - (f, f_\alpha) - (f_\alpha, f) + ||f||^2$ Так как $f_\alpha \overset{\text{сл}}{\to} f$, то $(f, f_\alpha) \to ||f||^2$ и $(f, f_\alpha) \to ||f||^2$, $||f_\alpha||^2 \to ||f||^2$.

Следовательно $||f_\alpha - f|| \to 0$.

Заметим, что в конечномерном пространстве слабая топология и топология нормы совпадают.

Утверждение 3.4

В конечномерном гильбертовом пространстве слабая сходимость и сходимость по норме совпадают.

Доказательство. Рассмотрим последовательность x_n элементов пространства E, где E - конечномерно.

Из сходимости по норме следует слабая сходимость.

Возьмем $e_1, ...e_n$ - базис.

$x = \sum\limits_1^n x_i e_i$

Покажем, что из слабой сходимости следует сходимость по норме:

$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \to (x, e_n) = x^{(1)}$

$\vdots$

$x_k^{(n)} = (x_k, e_1) \to (x, e_1) = x^{(n)}$

$||x|| = \sqrt{(\sum\limits_{i=1}^n x_i e_i)^2}$

$||x_n - x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_n^i - x^i)^2} \to 0.$

Следовательно, из слабой сходимости следует сходимость по норме. А значит слабая сходимость и сходимость по норме совпадают.

□

Утверждение 3.5. [1]

В сепарабельном гильбертовом пространстве слабая топология единичного шара метризуема.

Доказательство. Пусть $B_1(0)$ - единичный шар. Согласно рассмотренному утверждению 3.6 - единичный шар$B_1(0)$ слабо компактен. Тогда задача сводится к доказательству счетной базы для его слабой топологии.

Пусть $h_j : j = 1, 2, 3...$- счетное всюду плотное в $B_1(0)$ множество.

$U(p, q, r) = f \in B : |(f - h_p, hj)| < \frac{1}{q}, j = 1, ...r$, где $p, q, r = 1, 2, 3...$ - обозначим за базу слабых окрестностей $B_1(0)$.

Покажем, что если $f_0 \in B_1(0), k$ - натуральное число, $g_1, ...g_k$ - произвольные векторы, ε - положительное число, и $U =$

$f \in B : |(f - f_0, g_i)| < \varepsilon, i = 1, ...k,$ то существуют такие числа $p, q, r,$ что $f_0 \in U(p, q, r) \in U$.

$(f - f_0, g_i)| \le |(f - h_p, hj)| + |(h_p - f_0, hj)| + |(f - f_0, g_i - h_j)| \le |(f - h_p, hj)| + ||h_p - f_0|| \cdot ||h_j|| + ||f - f_0|| \cdot ||g_i - h_j||$.

$\forall i = 1, 2, ...k$ выберем j_i такое, что$\frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{3}$ и выберем j так, чтобы выполнялось неравенство $||g_i - h_{j_i}|| < \frac{1}{2}q$,

Возьмем $r \ge j_i$ для $i = 1, ...k$,

Выберем p, такое что $||h_p - f_0|| \le \frac{1}{qm}$, где $m = max||h_j|| : j = 1, ...r$.

Если $j = 1, ...r$, то $|(f_0 - h_p, hj)| \le ||(f - h_p|| \cdot ||hj)|| \le \frac{1}{q}$, так что $f_0 \in U(p, q, r)$. При $f \in U(p, q, r)$ и $i = 1, ...k$, получим:

$|(f - h_p, h_{j_i})| < \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{3}$,

$||h_p - f_0|| \cdot ||h_{j_i} \le \frac{1}{qm} \cdot m < \frac{\varepsilon}{3}$

$||f - f_0|| \cdot ||g_i - h_j|| < \frac{\varepsilon}{3}$

$||f|| < 1, ||f_0|| < 1$.

Доказательство окончено.

□

Утверждение 3.6

Единичный шар в бесконечномерном гп не компактен в топологии нормы.

Доказательство. Покажем, что единичный шар $B_1(0)$ в ℓ_2 не компактен.

Рассмотрим $B_{\frac{1}{2}}(x), x\epsilon B_1(0)$ - открытое покрытие $\overline{B_1(0)}$.

Пусть существует конечное подпокрытие из векторов $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$. Тогда существует шар $B_{\frac{1}{2}}(x_i)$, которое содержит бесконечно много векторов e_n.

$\forall x, y \epsilon B_{\frac{1}{2}}(x) ||x - y|| \le 1$, однако $||e_n - e_m|| = \sqrt{2} > 1$.

Следовательно, единичный шар в бесконечномерном гп не компактен в топологии нормы.

□

В слабой топологии вырисовывается иная картина.

Утверждение 3.7 [1]

Замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве слабо компактен.

Доказательство. H - гильбертово пространство.

$\overline{B_1(0)}$ - замкнутый единичный шар.

$\forall f \in H$ поставим в соответствие круг на комплексной плоскости $D_f = z : |z| \leq ||f||$.

Обозначим D - прямое произведение всех кругов. D_f с обычной топологией произведения.

$f \to (f, g)$.

$\forall g \in B_1(0)$ поставим в соответствие точку $\varphi(g) \in D$. Тогда отображение представляет собой гомеоморфизм $B_1(0)$. Действительно, если $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, то есть $(f, g_1) = (f, g_2) \forall f$, то $g_1 = g_2$, так что отображение φ взаимно однозначно. Кроме того, оно непрерывно, так как $g_i \to g$ (слабо) тогда и только тогда, когда $(f, g_i) \to (f, g) \forall f \in H$, то есть $\varphi(g_i) \to \varphi(g)$ в D.

Из теоремы Рисса о представлении линейного функционала на H следует, что область значений отображения φ состоит в точности из тех элементов $\eta \in D$, которые на самом деле являются линейными функционалами на H, причем $||\eta|| < 1$.

Покажем, что образ единичного шара замкнут.

Рассмотрим фиксированную пару чисел α, β, векторы f, g и образуем подмножество $E(\alpha, \beta, f, g) \in D$, определенное формулой

$E(\alpha, \beta, f, g) = \eta \in D : \eta(\alpha f + \beta g) = \alpha\eta(f) + \beta\eta(g)$.

Множество всех линейных функционалов в D (образ единичного шара при отображении φ) совпадает при пересечении всех множеств вида $E(\alpha, \beta, f, g)$.

Каждая из функций $\eta \to \eta(f), \eta \to \eta(g), \eta \to \eta(\alpha f + \beta g)$ непрерывна на D (из определения топологии произведения).

Следовательно, каждое множество $E(\alpha, \beta, f, g)$ замкнуто, а значит область значений отображения компактно.

Тогда единичный шар слабо компактен. □

Рассмотрим свойства слабо сходящихся последовательностей. Заметим, что не все из них будут переноситься на слабо сходящиеся сети.

Утверждение 3.8 [2]

(а) Всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена по норме.

(б) Всякая ортонормированная последовательность слабо сходится к нулю.

(в) Пусть $(e_i)_{i \in J}$ *- полная ортонормированная система в гп H. Последо-*

вательность векторов $(f_n) \subset H$ *слабо сходится к* $f \in H$ *тогда и только тогда, когда*

$(i) \forall i \in J : (f_n, e_i) \to (f, e_i)$

$(ii) \sup ||f_n|| < +\infty$.

Доказательство. (а). Если $g_n \overset{\text{сл}}{\to} g (n \in N)$, то, как следует из определения слабой топологии $\forall f \in H (f, g_n) \to (f, g)$. Так как сходящаяся последовательность ограничена, $\sup |(f, g_n)| < +\infty$, откуда следует, по принципу равномерной ограниченности, $\sup ||(g_n)|| < +\infty$ (где $M = g_1, g_2, ...g_n, ...$)

(б). Пусть (e_n) - ортонормированная последовательность и $f \in H$ произволен. Скаляры (f, e_n) являются коэффициентами Фурье вектора f относительно e_n, так что $(f, e_n) \to 0$ (так как из неравенства Бесселя следует, что $\sum_{i \in J} |(f, e_i)|^2 \leq ||f||^2$

(в). Необходимость: Если $f_n \overset{\text{сл}}{\to} f$, то (i) - выполняется по определению, а (ii) - в силу (а).

Достаточность:

Пусть L - линеал, являющейся линейной оболочкой системы $(e_i)_{i \in J}$. По $(i) : (f_n, l) \to (f, l) \forall l \subset L$.

$h \in H$ - произволен, $\varepsilon > 0$.

Пусть $k = \sup ||f_n||$. Так как L - плотен в H, то сущесвует $l \in L$, такой, что $||h - l < \varepsilon||$.

Для достаточно больших n:

$|(f_n, l) - (f, l)| < \varepsilon$. Следовательно для таких n:

$|(f_n, h) - (f, h)| \leq |(f_n, h - l) + (f_n, l) + (f, l - h)| \leq K \cdot \varepsilon + \varepsilon + ||f|| \cdot \varepsilon = (k + 1 + ||f||) \cdot \varepsilon$. □

Для сетей утверждение 3.8 не всегда верно.

Пример 3.9.

Приведем пример не ограниченой слабо сходящаяся сети. Более того, эта сеть сходится по норме.

Доказательство. Пусть f - произвольно и $||f|| \neq 0$

Рассмотрим сеть $f_\alpha = \alpha f$, при $\alpha \in (1, +\infty)$.

Направление сети зададим таким образом, что $\alpha \prec \beta$, если $\alpha \geq \beta ||f_\alpha|| = \alpha ||f||$.

Тогда $||f_\alpha|| \xrightarrow[\alpha\to 1]{} ||f||$,так как $\forall\varepsilon\exists\alpha_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{||f||}\forall\alpha \succ \alpha_0 ||f_\alpha|| - ||f|| = (\alpha - 1)||f|| < \varepsilon$,

При этом сеть f_α не ограничена по норме.

То есть получили не ограниченную слабо сходящаюся сеть.

$\square$

§ 4. Примеры и контрпримеры

Слабая топология обладает многими интересными особенностями. Рассмотрим некоторые из них.

Пример 4.1

Если линеал L плотен в H, а последовательность f_n в H такова, что $(f_n, l) \to (f, l) \forall l \in L$, то отсюда еще не следует, что $f_n \overset{\text{сл}}{\to} f$. Построим соответствующий пример.

Доказательство. Рассмотрим в L_2 последовательность $f_n = n \cdot e_n$, где $e_n = (0, ..., 0, 1, 0...)$.

$g = \sum_{k \in \sigma} e_k \lambda_k, k \in \sigma$ - конечна.

При $n > \max_{k \in \sigma} k$ $(f_n, \sum_{k \in \sigma} e_k \lambda_k) = 0$. То есть $(f_n, g) \to 0$ при $n \to +\infty$ $\forall g \in L$.

Возьмем $g = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ... \frac{1}{n}, ...) \in \ell_2$. Тогда $(n \cdot e_n, g) = 1$,то есть $f_n \overset{\text{сл}}{\nrightarrow} f$.

□

Пример 4.2[1]

Бесконечномерное гильбертово пространство не является слабо полным, то есть существуют фундаментальные сети, не обладающие слабым пределом.

Доказательство. Пусть ξ_i - неограниченный линейный функционал, $e_j, j \in J$ - базис Гамеля.

Каждому подмножеству J множества индексов поставим в соответствие конечномерное подпространство M_J, порожденное всеми $e_j, j \in J$.

Рассмотрим линейный функционал ξ_J равный ξ на M_J, и равный 0 на H/M_j.

M_J - конечномерно $\Rightarrow \xi_J$ - ограничены. Зададим сеть $J \to g_J$ следующим образом: $\xi_J(f) = (f, g_J) \forall f$ и $\forall J$, где множество $J \subset I$, J- конечно - упорядочено по включению.

Для заданного вектора f_0 рассмотрим такое конечное множество J_0, что $f_0 \in M_{J_0}$.

Если $J_0 \subset J$ и $J_0 \subset K$, то $(f_0, g_J) - (f_0, g_K) = 0$. Поэтому g_J - слабо фундаментальная сеть. Но она не может сходится ни к одному из векторов пространства.

В самом деле, предположим, $\exists g \in H$ такой что, $g_J \to g$ слабо, так что $(f_0, g_J) \to (f_0, g) \forall f_0$ то есть, $\xi_J(f_0) \to (f_0, g) \forall f_0$, где f_0 - фиксировано.

Если J_0, такое что $f_0 \in M_{J_0}$, то $\xi_{J_0}(f_0) = \xi(f_0)$.

Следовательно, $\xi(f_0) = (f_0, g) \forall f_0$. Но это невозможно, так как ξ - неограниченный линейный функционал.

$\square$

§ 5. Слабая топология в $B(H)$

Утверждение 5.1[2]

Равномерная топология $B(H)$ сильнее s-топологии, которая в свою очередь сильнее w-топологии. Если $dim H = \infty$, то указанные топологии попарно различны.

Доказательство. Рассмотрим последовательность V_n операторов в ℓ_2, действующих по формуле

$V_n(f_1, f_2, ...) = (\underbrace{0, ...0, 0,}_{n} f_1, f_2), f = (f_1, f_2, ...) \in \ell_2.$

Тогда $V_n \xrightarrow{w} 0$.

$||V_n f|| = ||f||$. Следовательно, $V_n \overset{s}{\nrightarrow} 0$. Таким образом s- топология строго сильнее w-топологии.

Рассмотрим теперь последовательность операторов P_n, действующих по формуле

$P_n(f_1, f_2, ...) = f_n e_n, f = (f_1, f_2, ...) \in \ell_2$, где $e_n = (\underbrace{0, ...0, 0,}_{n-1} 1, 0, ...)$.

Так как $\sum_n |f_n|^2 < +\infty$, то $f_n \to \theta$. Следовательно, $P_n f \to \theta (f \in \ell_2)$, а значит $P_n \xrightarrow{s} 0$.

С другой стороны, $||P_n|| = sup_{||f||=1} ||P_n f|| \geq ||P_n e_n|| = 1$. □

Утверждение 5.2[2]

Операция сопряжения непрерывна в равномерной и слабой топологии.

Доказательство. Пусть $A_\alpha \to A$.

Тогда для любого $f \in H$,

$\lim_\alpha (A_\alpha^* f, f) = \lim_\alpha (f, A_\alpha f) = \overline{\lim_\alpha (A_\alpha f, f)} = (Af, f) = \overline{(f, A^* f)} = (A^* f, f)$, то есть $A_\alpha^* \xrightarrow{w} A^*$.

Покажем теперь, что операция сопряжения непрерывна в равномерной топологии.

Пусть $A_n \to A$.

Тогда для любого $f \in H$

$\lim_n (A_n^* f, f) = \lim_n (f, A_n f) = \overline{\lim_n (A_n f, f)} = \lim_n (Af, f)$.

Если A_n - фундаментальна, то $A_n f$ - фундаментальна и существует $Af = \lim_n A_n f$.

Поэтому $\lim_n (Af, f) = \overline{(f, A^* f)} = (A^* f, f)$, то есть $A_n^* \to A$ □

Утверждение 5.3

Отображения $A \to AB, A \to BA$ при фиксированном B w - неприрывны.

Доказательство. $A_\alpha \to A \Rightarrow \lim\limits_\alpha (A_\alpha f, g) = (Af, g)$

Пусть $g = B^* g'$.

$\lim\limits_\alpha (A_\alpha f, B^* g') = (Af, B^* g\prime) = (BAf, g')$.

С другой стороны $\lim\limits_\alpha (A_\alpha f, B^* g') = \lim\limits_\alpha (BA_\alpha f, g')$.

Следовательно, $\lim\limits_\alpha (BA_\alpha f, g') = (BAf, g\prime)$, то есть $A \xrightarrow{\text{сл}} BA$.

Если $f = Bf'$, то $\lim\limits_\alpha (A_\alpha Bf', g) = (ABf', g)$, то есть $A \xrightarrow{\text{сл}} AB$. □

Утверждение 5.4[2]

Пространство $B(H)$ слабо секвенциально полно.

Доказательство. Пусть последовательность (A_n) — слабо фундаментальна, то есть $\forall f, g \in H \exists N = N(f, g) \forall n, m > N(|((A_n - A_m)f, g)| < 1) \Rightarrow$ $\forall f \in H A_n f$ фундаментальна в слабой топологии гильбертового пространства H. По пример 4 §4 всякая слабо фундаментальная последовательность слабо сходится, то есть $A_n f \to g$.

Обозначим через A оператор, который $f \in H$ ставит в соответствие g. Покажем, что $A \in B(H)$ и $A_n \xrightarrow{W} H$.

Покажем, что A — ограничен.

Так как операция сопряжения непрерывна в слабой топологии $A_\alpha^* \xrightarrow{\text{сл}} A^*$. Следовательно A_n W—фундаментальна $\Rightarrow \forall g \in H A_n^* g \xrightarrow{\text{сл}} Ag$.

Всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме, то есть $\exists C > 0$ такая,что $||A_n^* g|| \leqslant C(n \in N)$

Рассмотрим семейство линейных ограниченных функционалов в H:

$F_{n,f}(\cdot) = (\cdot, A_n f)(n \in N, ||f|| = 1)$

$\forall g \in H \sup\limits_{n,||f||=1} |F_{n,f}(g)| = \sup\limits_{n,||f||=1} |(g, A_n f)| = \sup\limits_{n,||f||=1} |(A_n^* g, f)| \leqslant \sup\limits_{n,||f||=1} ||A_n g|| \quad ||f|| = \sup\limits_n ||A_n^* g|| < \infty$

По теореме Рисса

$\sup\limits_{n,||f||=1} ||A_n f|| = \sup\limits_{n,||f||=1} ||F_{n,f}|| < +\infty$, то есть $\sup\limits_n ||A_n|| = \sup\limits_{n,||f||=1} ||A_n f|| < +\infty$

$||A|| = \sup\limits_{||f||=||g||=1} |(Af, g)| \sup\limits_{||f||=||g||=1} \lim\limits_n |(Af, g)| \leqslant \sup\limits_{||f||=||g||=1} \sup\limits_n ||A_n|| ||f|| ||g|| = \sup\limits_n ||A_n|| < +\infty]$. □

§ 6. Заключение

В работе изучены основные свойства слабой топологии в гильбертовом пространстве, а также слабой топологии в пространстве $B(H)$. В ходе дипломной работы был освоен материал, представленный в соответствующей литературе. Рассмотрены особенности сходимости сетей, доказан ряд утверждений связанных со слабой топологией в гильбертовом пространстве.

Построены следующие примеры:

1) *Если линеал* L *плотен в* H, *а последовательность* f_n *в* H *такова, что* $(f_n, l) \to (f, l) \forall l \in L$, *то отсюда еще не следует, что* $f_n \overset{\text{сл}}{\to} f$;

2) пример неограниченной слабо сходящейся сети,

3)пример того, что из слабой сходимости не следует сходимость по норме.

4)рассмотрен пример фундаментальной сети, не обладающей слабым пределом.

Самостоятельно или частично самостоятельно доказаны следующие утверждения:

- *Если* $f_\alpha \overset{\text{сл}}{\to} f$ *и* $||f_\alpha|| \to ||f||$, *то* $f_\alpha \to f$.

- *В конечномерном гильбертовом пространстве слабая сходимость и сходимость по норме совпадают.*

- *Единичный шар в бесконечномерном гп не компактен в топологии нормы.*

- *Отображения* $A \to AB, A \to BA$ *при фиксированном* B *w - неприрывны.*

Список литературы

1. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970 г. - 352 с.

2. Луговая Г.Д. Элементарная теория гильбертовых пространств.Казань: Казанский Государственный университет им. В.И. Ульянова - Ленина 1985 г. - 40 с.

3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. - 3-е изд., перераб. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - 752 с.

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. Наука, главная редакция физико-математической литературы, М., 1972 - 496 с.

5. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по метаматическому анализу. 4-е издание. Казань: Казанский Государственный университет им. В.И. Ульянова - Ленина , 2005 - 374 с.