

УДК 519.68

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.405-422

## СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*М.М. Карчевский*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

### Аннотация

Предлагается и исследуется смешанный метод конечных элементов решения задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения четвертого порядка дивергентного вида. Предполагается, что область, в которой решается задача, ограничена и имеет размерность, большую или равную двум. При построении конечноэлементной схемы в качестве вспомогательных переменных выбираются все вторые производные искомого решения. При этом используется обычная триангуляция области лагранжевыми симплицияльными (треугольными) элементами порядка не ниже двух. Доказывается существование приближенного решения при любом значении параметра дискретизации, если оператор исходной задачи удовлетворяет обычным условиям ограниченной нелинейности и коэрцитивности. Единственность приближенного решения устанавливается при более жестких ограничениях липшиц-непрерывности и сильной монотонности дифференциального оператора. При этих же условиях конструируется двуслойный итерационный процесс с оценкой скорости сходимости, не зависящей от параметра дискретизации. Получены оценки точности приближенного решения, которые в случае линейности дифференциального уравнения оказываются оптимальными. Приводятся результаты применения предлагаемой методики к решению задачи о равновесии тонкой упругой пластины.

**Ключевые слова:** смешанный метод конечных элементов, оценки точности, итерационный метод, оценки скорости сходимости, теория пластин

### Введение

В настоящей работе конструируется и исследуется метод численного решения задачи Дирихле в ограниченной области произвольной размерности для квазилинейного эллиптического уравнения четвертого порядка в дивергентной форме. В двумерном случае необходимость решения такого сорта задач возникает, в частности, при изучении малых прогибов тонких пластин из физически нелинейного материала (см., например, [1, гл. 9, 10]).

Бигармоническое уравнение или более общий случай – полигармоническое уравнение – в многомерных областях возникает, например, при построении и исследовании кубатурных формул (см. [2], а также [3]). О краевых задачах для так называемых метагармонических уравнений см., например, [4].

С точки зрения численных методов наиболее полно исследован простейший частный случай – краевые задачи для бигармонического уравнения в двумерной ограниченной области. Необходимость решения таких задач часто возникает, например, в линейной теории пластин, плоской теории упругости, гидродинамике (см., например, [5–7]), а также при построении итерационных методов для нелинейных задач теории пластин и оболочек (см., например, [8, 9]). Применение так

называемых конформных элементов эрмитового типа для бигармонического уравнения связано с серьезными трудностями как с точки зрения построения соответствующих дискретных аппроксимаций, так и с их численной реализацией, в особенности, для областей с криволинейными границами (см. [10, гл. 6]). Существенные упрощения этой ситуации достигаются за счет перехода к смешанным методам конечных элементов. Обычно в качестве вспомогательной переменной здесь используется оператор Лапласа от искомой функции (см. [10, гл. 7], [11]). В работах [12–14] бигармоническое уравнение сводилось к системе двух уравнений второго порядка типа Стокса. В работах [15, 16] изучались экономичные итерационные методы решения разностного бигармонического уравнения в прямоугольной области.

Что касается бигармонического уравнения, а также общих уравнений четвертого и более высоких порядков, то в областях размерности, большей двух, конечноэлементные методы решения для них, по-видимому, не рассматривались.

Смешанный метод конечных элементов, применяемый в настоящей работе, основан на идее Г.П. Астраханцева [17] – использовать при построении дискретной аппроксимации исходной задачи в качестве вспомогательных переменных вторые производные искомого решения.

Разрешимость соответствующей системы дискретных нелинейных уравнений доказана при условии, что дифференциальный оператор удовлетворяет стандартным условиям ограниченной нелинейности и коэрцитивности в пространстве  $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ . Единственность решения устанавливается при более жестких ограничениях. Дифференциальный оператор предполагается сильно монотонным и непрерывным по Липшицу. Предлагается двуслойный итерационный метод со скоростью сходимости, не зависящей от параметра дискретизации. В качестве предобуславливателя используется аппроксимация бигармонического оператора.

Получена оценка точности для достаточно гладких (в смысле принадлежности соответствующему пространству Соболева) решений. Эта оценка оказывается оптимальной по вторым производным искомого решения, но не оптимальной по первым производным и самому решению. В случае, когда исходное уравнение линейно, установлена полностью оптимальная оценка.

В заключение в работе обсуждаются различные модификации предлагаемого итерационного метода, не ухудшающие оценки скорости его сходимости, но приводящие к более простым вычислениям. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие возможности дискретных аппроксимаций и итерационных методов на примере линейной задачи об изгибе пластины.

### 1. Постановка исходной задачи

В этом разделе мы следуем [18] (см. также [19]). Пусть  $\Omega$  – ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , с границей  $\Gamma$ . Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного уравнения четвертого порядка, записанного в дивергентной форме,

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\beta u) = f(x), \quad |\beta| \leq 2, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$D^\gamma u(x) = 0, \quad |\gamma| \leq 1, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  – целочисленный индекс дифференцирования,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_i = \partial / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Поясним, что запись  $A_\alpha(x, D^\beta u)$  означает, что функция  $A_\alpha$  зависит, вообще говоря,

от  $x \in \Omega$ ,  $u(x)$  и всех производных от  $u$  первого и второго порядков:  $A_\alpha(x, D^\beta u) = A_\alpha(x, D^2 u, Du, u)$ , где  $Du = (D_1 u, D_2 u, \dots, D_n u)$  – градиент функции  $u$ ,  $D^2 u = \{D_i D_j u\}_{i,j=1}^n$  – матрица Гессе функции  $u$ .

Предполагается, что функции  $A_\alpha = A_\alpha(x, \zeta, \xi)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $\zeta \in M_n^s$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ , где  $M_n^s$  – множество всех вещественных симметричных матриц порядка  $n$ ,  $|\alpha| \leq 2$ , заданы и удовлетворяют условиям Каратеодори, то есть они измеримы по  $x$  при всех  $\zeta \in M_n^s$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ , непрерывны по  $\zeta \in M_n^s$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ , для почти всех  $x$  из  $\Omega$ , существуют постоянная  $c_1 > 0$  такая, что выполнено условие ограниченной нелинейности

$$|A_\alpha(x, \zeta, \xi)| \leq c_1(1 + (|\zeta| + |\xi|)) \quad \forall |\alpha| \leq 2, \quad x \in \Omega, \quad \zeta \in M_n^s, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3)$$

$|\zeta| = \left(\sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}^2\right)^{1/2}$ ,  $|\xi| = \left(\sum_{i=0}^n \xi_i^2\right)^{1/2}$ . Предположим, далее, что выполнено условие коэрцитивности

$$\sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \zeta, \xi) \zeta_\alpha + \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, \zeta, \xi) \xi_\alpha \geq c_0 |\zeta|^2 - K \quad \forall x \in \Omega, \quad \zeta \in M_n^s, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (4)$$

где  $c_0 > 0$ ,  $K \geq 0$  – постоянные. Будем считать, что  $f \in L_2(\Omega)$ .

Под обобщенным решением задачи (1), (2) понимается функция  $u \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} A_\alpha(x, D^\beta u) D^\alpha v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega). \quad (5)$$

## 2. Построение сеточной задачи. Исследование разрешимости

Пусть  $\mathcal{T}_h$  – точная регулярная триангуляция области  $\Omega$  (см. [20], а также [21–23] при  $n = 2$ ). Каждый элемент триангуляции, вообще говоря, – криволинейный симплекс,  $h$  – максимум диаметров симплексов по всем симплексам триангуляции  $\mathcal{T}_h$ .

Для построения приближенного решения будем использовать совместные в пространстве  $C(\Omega)$  лагранжевы элементы, основанные на триангуляции  $\mathcal{T}_h$ . Соответственно, будем обозначать через  $H_l$  стандартное конечномерное пространство непрерывных на области  $\Omega$  функций таких, что сужение функции из  $H_l$  на каждый прямолинейный симплекс из  $\mathcal{T}_h$  есть полином степени  $l$  по совокупности переменных:

$$\sum_{0 \leq m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq l} c_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}.$$

Для криволинейных симплексов образ функции из  $H_l$  при соответствующем отображении на базисный симплекс есть полином степени  $l$  по совокупности переменных (см. подробнее [20–23]). Через  $\overset{\circ}{H}_l$  будем обозначать подпространство функций из  $H_l$ , обращающихся в нуль на  $\Gamma$ .

Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать функцию  $y \in \overset{\circ}{H}_l$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, D_h^2 y, Dy, y) w_\alpha^h(\eta) dx + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, D_h^2 y, Dy, y) D^\alpha(\eta) dx = \int_{\Omega} f(x) \eta(x) dx \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{H}_l. \quad (6)$$

Здесь  $D_h^2 y = \{w_{ij}^h(y)\}_{i,j=1}^n$ , и функции  $w_{ij}^h(y) = w_{ji}^h(y) \in H_l$  определяются по функции  $y \in \overset{\circ}{H}_l$  соотношениями

$$\int_{\Omega} w_{ij}^h(y) \varphi dx = -0.5 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx \quad \forall \varphi \in H_l, \quad (7)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$w_{\alpha}^h(y) = \begin{cases} w_{ii}(y), & \alpha_i = 2, \\ w_{ij}(y), & \alpha_i = 1, \alpha_j = 1. \end{cases}$$

Введем в пространстве  $H_l$  узловой базис Лагранжа  $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^N$ ,  $x \in \Omega$ . Тогда для любой функции  $\eta \in H_l$  имеем  $\eta(x) = \sum_{i=1}^N \eta_i \psi_i(x)$ ,  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , есть так называемые узловые параметры функции  $\eta$ . В дальнейшем всякую функцию из пространства  $H_l$  и вектор ее узловых параметров будем обозначать одним и тем же символом. Полагаем, что узлы с номерами  $d+1, d+2, \dots, N$  принадлежат  $\Gamma$ .

Переходим к исследованию задачи (6), (7). Будем пользоваться здесь и далее следующими обозначениями:

$$\|u\|_0 = \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u\|_{1,0} = \|Du\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u\|_1 = \|u\|_{W_{1,0}^2(\Omega)} = (\|u\|_0^2 + \|u\|_{1,0}^2)^{1/2}.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (3), (4). Тогда задача (6), (7) имеет хотя бы одно решение при любой функции  $f \in L_2(\Omega)$  и при любом  $h > 0$ .

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что уравнения системы (7) можно записать в виде

$$M w_{ij}^h(y) = C_{ij} y, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где  $M$  – матрица Грама базисных функций  $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^N$  (матрица масс)

$$M = \left\{ \int_{\Omega} \psi_k(x) \psi_l(x) dx \right\}_{k,l=1}^N, \quad (9)$$

$C_{ij}$  – прямоугольные матрицы размера  $N_d \times N$ ,  $N_d = N - d$ ,

$$C_{ij} = -0.5 \left\{ \int_{\Omega} (D_i \psi_k(x) D_j \psi_l(x) + D_j \psi_k(x) D_i \psi_l(x)) dx \right\}_{k,l=1}^{k=N, l=N_d}. \quad (10)$$

Хорошо известно, что матрица  $M$  симметрична и положительно определена, следовательно, векторы  $w_{ij}^h(y)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , однозначно определяются по вектору  $y$ .

Таким образом, тождество

$$[Ay, \eta] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} A_{\alpha}(x, D_h^2 y, Dy, y) w_{\alpha}^h(\eta) dx + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_{\alpha}(x, D_h^2 y, Dy, y) D^{\alpha} \eta dx - \int_{\Omega} f(x) \eta(x) dx \quad \forall y, \eta \in \overset{\circ}{H}_l, \quad (11)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  – стандартное скалярное произведение в арифметическом пространстве узловых параметров размерности  $N_d$ , определяет оператор  $A$ , действующий в арифметическом пространстве узловых параметров, соответствующем пространству  $\overset{\circ}{H}_l$ .

Используя условие (3) и известную теорему о непрерывности оператора Немыцкого (см., например, [24, §19]), нетрудно убедиться, что оператор  $A$  непрерывен. Далее, вследствие условия (4) имеем

$$[Ay, y] \geq c_0 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n |w_{i,j}^h(y)|^2 - c_{\Omega}^{1/2} \|y\|_{1,0} \|f\|_0 - K \text{mes}(\Omega). \quad (12)$$

Здесь  $c_{\Omega}$  – постоянная из неравенства Фридрихса

$$\|u\|_0^2 \leq c_{\Omega} \|u\|_{1,0}^2 \quad \forall u \in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Заметим теперь, что из (7) для любой функции  $y \in \mathring{H}_l$  вытекают равенства

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_{\Omega} w_{ii}^h(y) y dx \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$\|y\|_{1,0}^2 \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n |w_{i,j}^h(y)|^2 \quad \forall y \in \mathring{H}_l. \quad (13)$$

Из (12), (13) очевидным образом получаем, что

$$[Ay, y] \geq c_0 c_{\Omega} \|y\|_{1,0}^2 - c_{\Omega}^{1/2} \|y\|_{1,0} \|f\|_0 - K \text{mes}(\Omega).$$

Нетрудно проверить, что  $[Ay \cdot y] \geq 0$  для всех  $y \in \mathring{H}_l$  таких, что  $\|y\|_{1,0} \geq r$ , где  $r = \left( \|f\|_0 + \sqrt{\|f\|_0^2 + 4c_0 K \text{mes}(\Omega)} \right) / (2c_0 c_{\Omega}^{1/2})$ . Отсюда на основании хорошо известной топологической леммы (см., например, [18, с. 60], [19, с. 258], [25, с. 93]) вытекает, что уравнение  $Ay = 0$  имеет по крайней мере одно решение, и оно принадлежит сфере  $S_r(0) = \{\|y\|_{1,0} \leq r\}$ .  $\square$

**Замечание 1.** Найдя  $y$ , можно вычислить функции  $w_{ij}^h(y)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , решая уравнения (8), и использовать их для приближения вторых производных решения задачи (1), (2).

### 3. Уравнения с сильно монотонным и непрерывным по Липшицу оператором

В дальнейшем для очевидного упрощения выкладок будем считать, что

$$A_{\alpha}(x, 0, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad |\alpha| \leq 2. \quad (14)$$

Предположим выполненным условия

$$|A_{\alpha}(x, \zeta, \xi) - A_{\alpha}(x, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi})| \leq c_1 (|\zeta - \tilde{\zeta}| + |\xi - \tilde{\xi}|) \quad \forall x \in \Omega, \quad \tilde{\zeta}, \zeta \in M_n^s, \quad \tilde{\xi}, \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=2} (A_{\alpha}(x, \zeta, \xi) - A_{\alpha}(x, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi})) (\zeta_{\alpha} - \tilde{\zeta}_{\alpha}) + \sum_{|\alpha| \leq 1} (A_{\alpha}(x, \zeta, \xi) - A_{\alpha}(x, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi})) (\xi_{\alpha} - \tilde{\xi}_{\alpha}) &\geq \\ &\geq c_0 |\zeta - \tilde{\zeta}|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \tilde{\zeta}, \zeta \in M_n^s, \quad \tilde{\xi}, \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (16) \end{aligned}$$

$c_0, c_1 > 0$ <sup>1)</sup>. Ясно, что условия (3), (4) следуют из условий (14)–(16).

<sup>1)</sup> В дальнейшем постоянные, не зависящие от  $h$ , также будем обозначать буквой  $c$ , возможно, с индексами. Обозначения для различных постоянных могут совпадать.

Нетрудно убедиться, что при выполнении условий (15), (16)

$$|[Ay - Av, z]| \leq c_1 \|y - v\|_B \|z\|_B \quad \forall y, v, z \in \mathring{H}_l, \quad (17)$$

$$[Ay - Av, y - v] \geq c_0 \|y - v\|_B^2 \quad \forall y, v \in \mathring{H}_l. \quad (18)$$

Здесь  $\|y\|_B^2 = [By, y]$ ,  $B: \mathring{H}_l \rightarrow \mathring{H}_l$  – линейный симметричный положительно определенный оператор (см. (13)), задаваемый при помощи тождества

$$[By, v] = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 w_{i,j}^h(y) w_{i,j}^h(v) dx \quad \forall y, v \in \mathring{H}_l. \quad (19)$$

Из (17), (18) вытекает, что уравнение  $Ay = 0$  имеет одно и только одно решение, и оно может быть построено при помощи итерационного процесса

$$B \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + Ay^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

сходящегося при любых  $\tau \in (0, 2c_0/c_1^2)$ ,  $y^0 \in \mathring{H}_l$  со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой не зависит от  $h$  (см., например, [26, с. 500]).

#### 4. Оценки точности сеточной схемы

В этом разделе будут получены оценки точности схемы (6), (7). При этом нам потребуются следующие свойства сконструированных в [20] операторов интерполирования  $\Pi_h: L_1(\Omega) \rightarrow H_l$  и  $\mathring{\Pi}_h: L_1(\Omega) \rightarrow \mathring{H}_l$ :

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_{L_2(\Omega)} &\leq ch^{l+1} \|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega)}, \\ \|D(u - \Pi_h u)\|_{L_2(\Omega)} &\leq ch^l \|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega)} \quad \forall u \in W_2^{l+1}(\Omega), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \|u - \mathring{\Pi}_h u\|_{L_2(\Omega)} &\leq ch^{l+1} \|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega)}, \\ \|D(u - \mathring{\Pi}_h u)\|_{L_2(\Omega)} &\leq ch^l \|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega)} \quad \forall u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^{l+1}(\Omega), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\|D^2 u - D_h^2(\mathring{\Pi}_h u)\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^{l-1} \|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega)} \quad \forall u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^{l+1}(\Omega). \quad (23)$$

Оценки (21), (22) доказаны в [20] (теоремы 4.1, 5.1). Доказательство оценки (23), фактически содержится в [27, с. 17]. Оно существенно опирается на неравенство (2.5) из [17, с. 1496].

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (14)–(16), а также следующие условия гладкости:

$$u \in W_2^{l+1}(\Omega), \quad A_\alpha(\cdot, D^2 u, Du, u) \in W_2^{l+1}(\Omega), \quad |\alpha| \leq 2. \quad (24)$$

Тогда

$$\|D^2 u - D_h^2 y\|_0 + \|u - y\|_1 \leq ch^{l-1}, \quad (25)$$

где  $u$  – решение исходной задачи (1), (2),  $y$  – решение сеточной схемы (6), (7).

**Доказательство.** Вследствие (18), (11), (6) для любой функции  $v \in \overset{\circ}{H}_l$  имеем

$$c_0 \|y - v\|_B^2 \leq -[Av, y - v] = I \equiv \int_{\Omega} f(y - v) dx - \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} A_{\alpha}(x, D_h^2 v, Dv, v) w_{\alpha}^h(y - v) dx - \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_{\alpha}(x, D_h^2 v, Dv, v) D^{\alpha}(y - v) dx. \quad (26)$$

Используя (5) и условия гладкости (24), при помощи формулы интегрирования по частям получим

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) D^{\alpha} \eta(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} (D^{\alpha_1} A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) D^{\alpha_2} \eta + D^{\alpha_2} A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) D^{\alpha_1} \eta) \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (27)$$

Поэтому, если  $u$  – обобщенное решение задачи (1), (2), для которого выполнены условия (24), то

$$\int_{\Omega} f \eta dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} (D^{\alpha_1} A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) D^{\alpha_2} \eta + D^{\alpha_2} A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) D^{\alpha_1} \eta) dx + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) D^{\alpha} \eta dx \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (28)$$

Тождество (28) верно при любой функции  $\eta \in \overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\Omega)$ , следовательно, и для любой функции  $\eta \in \overset{\circ}{H}_l$ . При помощи элементарных преобразований с учетом (28), (7) получаем, что  $I = \sum_{i=1}^4 I_i$ , где

$$I_1 = 0.5 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} (D^{\alpha_1} (d_{\alpha} - (A_{\alpha}(x, D^{\beta} u)) D^{\alpha_2} (y - v) + D^{\alpha_2} (A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) - d_{\alpha}) D^{\alpha_1} (y - v)) dx,$$

$$I_2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} (d_{\alpha} - A_{\alpha}(x, D^{\beta} u)) w_{\alpha}^h(y - v) dx,$$

$$I_3 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} (A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) - A_{\alpha}(x, D_h^2 v, Dv, v)) D^{\alpha}(y - v) dx,$$

$$I_4 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} (A_{\alpha}(x, D^{\beta} u) - A_{\alpha}(x, D_h^2 v, Dv, v)) w_{\alpha}^h(y - v) dx.$$

Здесь  $d_{\alpha}$ ,  $|\alpha| = 2$ , – произвольные функции из  $H_l$ . Используя теперь условие (15) и неравенства (26), (13), получим, что  $\|y - v\|_B \leq cI_5$ , где

$$I_5 = \sum_{|\alpha|=2} (\|A_{\alpha}(\cdot, D^{\beta}(u)) - d_{\alpha}\|_{1,0} + \|D^{\alpha}(u) - w_{\alpha}^h(v)\|_0) + \|u - v\|_{1,0},$$

следовательно,

$$\|D^2u - D_h^2y\|_0 \leq cI_5 + \|D^2u - D_h^2v\|_0. \quad (29)$$

Кроме того, применяя неравенство треугольника, а затем (13), получим, что

$$\|u - y\|_1 \leq \|u - v\|_{1,0} + c_\Omega cI_5. \quad (30)$$

Полагая, что  $d_\alpha = \Pi_h A_\alpha(\cdot, D^\beta(u))$ ,  $|\alpha| = 2$ ,  $v = \overset{\circ}{\Pi}_h u$  в (29), (30), и используя (21)–(23), получим (25).  $\square$

Оценка (25) не оптимальна относительно  $\|u - y\|_1$ . Оптимальная оценка может быть получена в случае, когда уравнение (1) линейно, а именно, справедлива

**Теорема 3.** Пусть функции  $A_\alpha = A_\alpha(x, \zeta, \xi)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $\zeta \in M_n^s$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $|\alpha| \leq 2$ , линейны по  $\zeta$ ,  $\xi$ , то есть

$$\begin{aligned} A_\alpha(x, \zeta, \xi) &= \sum_{|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)\zeta_\beta + \sum_{|\beta|\leq 1} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\beta, \\ a_{\alpha\beta} &\in L_\infty(\Omega), \quad |\alpha|, |\beta| \leq 2, \end{aligned} \quad (31)$$

выполнены условия

$$\sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \zeta, \xi)\zeta_\alpha + \sum_{|\alpha|\leq 1} A_\alpha(x, \zeta, \xi)\xi_\alpha \geq c_0|\zeta|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \zeta \in M_n^s, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (32)$$

и (24). Тогда

$$\|D^2u - D_h^2y\|_{L_2(\Omega)} + h^{-1}\|u - y\|_{W_2^1(\Omega)} + h^{-2}\|u - y\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^{l-1}. \quad (33)$$

Доказательство теоремы проводится вполне аналогично [17, с. 1500–1502] с использованием методики [28].

## 5. О реализации итерационного метода

Остановимся подробнее на описании итерационного метода (20). Полагая, как обычно,  $y^{k+1} = y^k + \tau w^k$ , получим, что  $Bw^k = \tau Ay^k$ . Укажем сначала возможные способы модификации матрицы  $B$ , которые можно использовать при решении системы вида

$$By = f. \quad (34)$$

1) Поскольку (см. (7)) функция  $w_\alpha^h(y)$  принадлежит  $H_l$  при любом  $y \in \overset{\circ}{H}_l$ , то используя определения матриц  $M$  и  $C_\alpha$ , тождество (19) нетрудно представить в виде

$$[By, \eta] = \left[ \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha^T M^{-1} C_\alpha y, \eta \right] \quad \forall y, \eta \in \overset{\circ}{H}_l,$$

следовательно,

$$B = \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha^T M^{-1} C_\alpha.$$

Матрица  $B$  является заполненной, поэтому непосредственное решение системы (34), даже для не слишком подробной триангуляции области  $\Omega$ , практически невозможно.

2) Систему (34) можно переписать в виде следующей системы с седловой разреженной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{C} \\ \tilde{C}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{C} = (C_{11}, C_{12}, \dots, C_{nn})^T$ ,  $\tilde{M} = \text{diag}(M, M, \dots, M)$ .

3) Пусть  $D$  – диагональная матрица, диагональные элементы которой совпадают с диагональными элементами матрицы  $M$ . Хорошо известно, что существуют положительные, не зависящие от  $h$ , постоянные  $c_1, c_2$  такие, что

$$c_1[M y, y] \leq [D y, y] \leq c_2[M y, y] \quad \forall y \in H_l.$$

Поэтому, если заменить в итерационном методе (20) матрицу  $B$  на разреженную матрицу

$$\tilde{B} = \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha^T D^{-1} C_\alpha, \tag{35}$$

то оценка скорости сходимости по-прежнему не будет зависеть от  $h$ .

Наконец, отметим, что алгоритм вычисления вектора  $Ay$  по любому заданному вектору  $y \in \overset{\circ}{H}_l$  сводится к последовательному выполнению следующих этапов:

- а) вычисляем векторы  $w_\alpha^h$ ,  $|\alpha| = 2$ , решая системы линейных уравнений (8);
- б) вычисляем векторы  $d_\alpha^h \in H_l$ ,  $|\alpha| = 2$ , решая системы линейных алгебраических уравнений

$$\int_{\Omega} d_\alpha^h \varphi \, dx = \int_{\Omega} A_\alpha(x, D_h^2 y, D y, y) \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_l, \quad |\alpha| = 2;$$

в) строим вектор  $Ay \in \overset{\circ}{H}_l$  такой, что

$$\begin{aligned} [Ay, \varphi] = & -0.5 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} (D^{\alpha_1} d_\alpha D^{\alpha_2} \varphi + D^{\alpha_2} d_\alpha D^{\alpha_1} \varphi) \, dx + \\ & + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, D_h^2 y, D y, y) D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}_l. \end{aligned} \tag{36}$$

При реализации вычислений по формулам (36) можно использовать обычный алгоритм «сборки», широко применяемый в методе конечных элементов для эллиптических уравнений второго порядка (см., например, [23, 29, 31]).

Отметим случай, когда уравнение (1) линейно, выполнены условия (31), (32) и условие самосопряженности

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|, |\beta|=2} A_\alpha(x, \zeta, \xi) \tilde{\zeta}_\beta + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} A_\alpha(x, \zeta, \xi) \tilde{\xi}_\beta = \sum_{|\alpha|, |\beta|=2} A_\alpha(x, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi}) \zeta_\beta + \\ + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} A_\alpha(x, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi}) \xi_\beta \quad \forall x \in \Omega, \quad \zeta, \tilde{\zeta} \in M_n^s, \quad \xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

В такой ситуации для решения уравнения  $Ay = 0$  можно применять метод сопряженных градиентов с предобуславливателем  $\tilde{B}$ . Нетрудно показать, что оценка скорости сходимости в этом случае не будет зависеть от  $h$ .

## 6. Численные примеры

В этом параграфе описывается применение предлагаемой методики к решению задачи Дирихле

$$a\Delta^2 u(x) - b\Delta u(x) + cu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (37)$$

$$u(x) = 0, \quad \partial u(x)/\partial \nu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (38)$$

$\nu$  – нормаль к  $\Gamma$ ,  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$  – заданные постоянные. Эта задача описывает равновесии пластины на упругом основании, находящейся под действием нормальной нагрузки и заданных сжимающих усилий в касательной плоскости.

Задача (37), (38) приближалась уравнением

$$Ay = \varphi, \quad (39)$$

где

$$A = a \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha^T M^{-1} C_\alpha - bK + cM,$$

матрицы  $M$ ,  $C_\alpha$ ,  $|\alpha| = 2$ , определяются соотношениями (9), (10),  $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^{N_d}$ ,

$$k_{ij} = \int_{\Omega} [D\psi_i, D\psi_j] dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_d, \quad (40)$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_d})^T,$$

$$\varphi_i = \int_{\Omega} f(x)\psi_i(x) dx. \quad (41)$$

Для приближения вторых производных решения задачи (37), (38) использовались решения уравнений вида (8) (см. замечание 1).

Всюду в дальнейшем полагаем, что  $l = 2$ . Все треугольники применяемых триангуляций прямолинейны. В качестве узловых параметров функции  $y \in H_2$  принимаются ее значения в вершинах треугольников и в средних точках их сторон. Триангуляция области выполнялась стандартными средствами среды MATLAB. При построении узлов, лежащих в серединах сторон треугольников триангуляции, существенно использовались процедуры из [30].

При вычислении интегралов в формулах (10), (40), (41) использовались квадратурные формулы, точные на треугольниках на полиномах второй степени по совокупности переменных, для вычисления интегралов в формулах (9) применялись квадратурные формулы, точные на полиномах четвертой степени по совокупности переменных (см., например, [29, с. 217]). Вычисление матриц  $M$ ,  $C_\alpha$ ,  $K$  проводилось при помощи процедур, описанных в [31].

Для решения уравнения (39) использовался метод сопряженных градиентов (см., например, [32, с. 331]) с предобуславливателем  $\tilde{B}$  (см. (35)). Предварительно строилось разложение Холесского  $\tilde{B} = LL^T$ , где  $L$  – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами. Начальное приближение в итерационном методе всегда полагалось равным нулю. Итерационный метод продолжался до выполнения условия

$$|Ay^j - \varphi| \leq \varepsilon|\varphi|, \quad \varepsilon = 10^{-8}. \quad (42)$$

Здесь  $j$  – номер итерации,  $|y| = [y, y]^{1/2}$ .

Ниже приводятся результаты расчетов для следующих случаев.

Табл. 1

Прямоугольная пластина

$l$	$N$	$j$	$t$	$10^5 y_M$		$10^4 M_2^0$		$-10^4 M_2^l$	
1	43747	25	14.3	127	126	229	231	506	513
1.1	48584	25	16.1	151	150	232	231	534	538
1.2	53117	26	18.8	172	172	228	228	549	554
1.3	56581	26	20.4	191	191	222	222	559	563
1.4	62456	26	24.1	207	207	213	212	563	568
1.5	66444	26	24.9	220	220	203	203	566	570

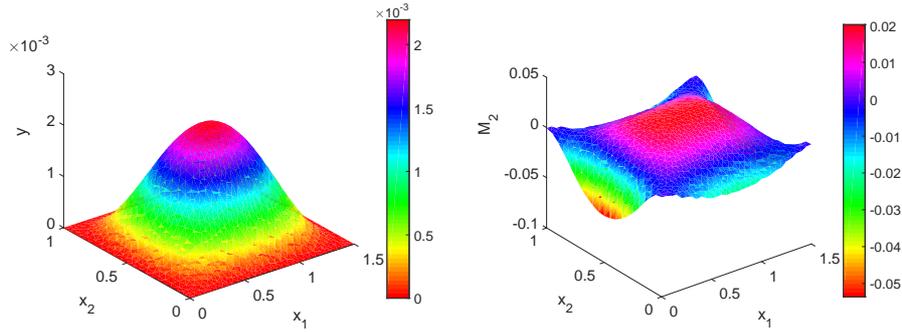


Рис. 1. Прямоугольная пластина. Прогиб (слева), изгибающий момент  $M_2$  (справа)

I. Область  $\Omega = [0, l] \times [0, 1]$  – прямоугольник с основанием  $l$ . В уравнении (37)  $a = 1, b, c = 0, f(x) \equiv 1$ . Задача (37), (38) интерпретируется как задача о равновесии тонкой упругой прямоугольной пластины, жестко защемленной на краях и находящейся под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. В табл. 1 приводятся результаты сравнения решения этой задачи описанным выше методом с приближенным решением Т.Г. Эванса (см. [6, с. 229]), полученным методом тригонометрических рядов. Триангуляции, применяемые нами, строились при условии, что  $h = 0.0125$ .

Поясним обозначения в табл. 1:  $l$  – длина основания прямоугольника  $\Omega$ ;  $N$  – число узлов всех элементов соответствующей триангуляции;  $j$  – число итераций, потребовавшихся для достижения неравенства (42);  $t$  – время (в секундах), затраченное на выполнение итерационного процесса;  $y_M$  – максимальное значение прогиба (достигается в центре пластины): слева – полученное нами, справа – взятое из [6];  $M_2^0$  – изгибающий момент ( $M_2 = -(D_2^2 u + \mu D_1^2 u)$ ,  $\mu = 0.3$  – коэффициент Пуассона) в центре пластины;  $M_2^l$  – изгибающий момент в средней точке правой стороны прямоугольника. В этих столбцах: слева – значения, полученные нами, справа – взятые из [6].

На рис. 1 приведены прогиб и изгибающий момент  $M_2$  для пластины длины  $l = 1.5$ , на рис. 2 – распределение прогиба и изгибающего момента  $M_2$  на прямой  $x_2 = 0.5$ .

II. Область  $\Omega = [0, 1]^2$  – единичный квадрат. Правая часть уравнения (37) выбиралась так, что  $u(x) = (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2)^2$  – точное решение задачи (37), (38).

III. Область  $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  – единичный круг. Правая часть уравнения (37) выбиралась так, что  $u(x) = (1 - (x_1^2 + x_2^2))^2$  – точное решение задачи (37), (38).

IV. Область  $\Omega$  имеет L-образную форму и составлена из единичных квадратов (рис. 5). Правая часть уравнения (37) – тождественная постоянная.

В случаях II–IV принималось, что  $a, b, c = 1$ .

В табл. 2:  $h$  – максимально допустимый диаметр конечного элемента в процедуре построения триангуляции,  $N$  – количество узлов всех элементов соответствующей

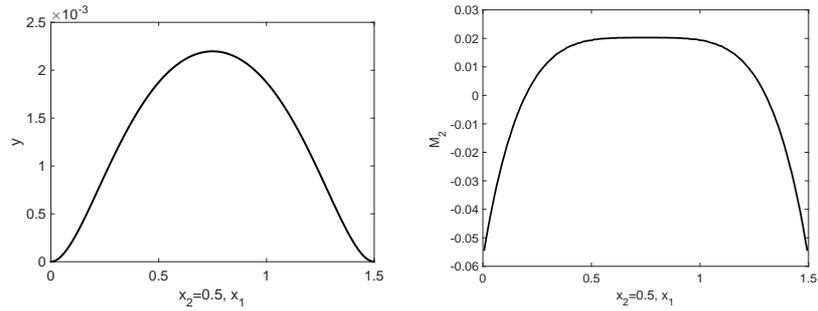


Рис. 2. Прямоугольная пластина. Прогиб (слева), изгибающий момент  $M_2$  (справа) на прямой  $x_2 = 0.5$

Табл. 2

Характеристики сеток и итерационного метода

$h$	Квадрат			Круг			L-область		
	$N$	$j$	$t$	$N$	$j$	$t$	$N$	$j$	$t$
0.2	81	10	0.01	653	18	0.07	537	19	0.06
0.1	289	18	0.3	2197	17	0.28	2017	21	0.29
0.05	1089	20	0.13	8621	18	1.47	8265	22	1.65
0.025	4225	22	0.69	34641	18	7.78	33189	24	9.54
0.0125	16641	23	3.40	138193	18	44.1	132917	26	58.10

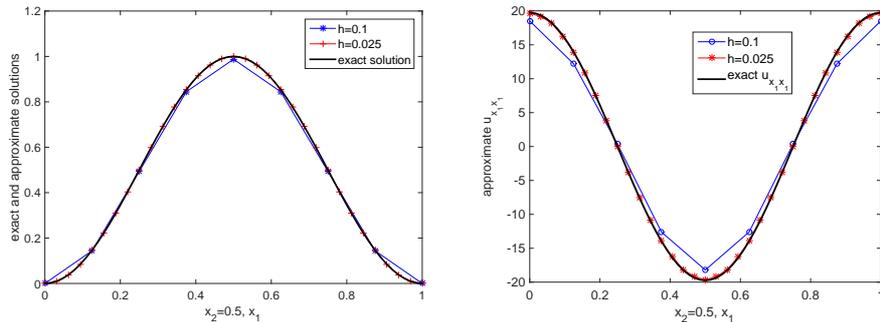


Рис. 3. Единичный квадрат (пример II). Приближенное решение при различных  $h$  (слева). Приближение к производной  $u_{x_1 x_1}$  при различных  $h$  (справа)

ющей триангуляции,  $j$  – количество итераций, потребовавшихся для выполнения критерия (42),  $t$  – время (в секундах), затраченное на выполнение итерационного процесса. Видно, что в каждом из вариантов расчета число итераций практически не зависит от порядка решаемой системы линейных алгебраических уравнений.

Аппроксимационные возможности предлагаемого метода проиллюстрированы рис. 3–5. На рис. 3 изображены графики точного решения, его второй производной по  $x_1$  и их приближений для задачи, описанной в примере II, на сечении области  $\Omega$  прямой  $x_1 = 0.5$ . На рис. 4 – то же самое для задачи, описанной в примере III, на сечении области  $\Omega$  прямой  $x_1 = 0$ . На рис. 5 представлены триангуляция и узлы на L-образной области (слева) и приближенное решение (справа).

Анализ результатов вычислений, представленных в работе, позволяет сделать следующие выводы. Предлагаемый метод дает возможность практически без дополнительных затрат получать вторые производные приближенного решения. Это

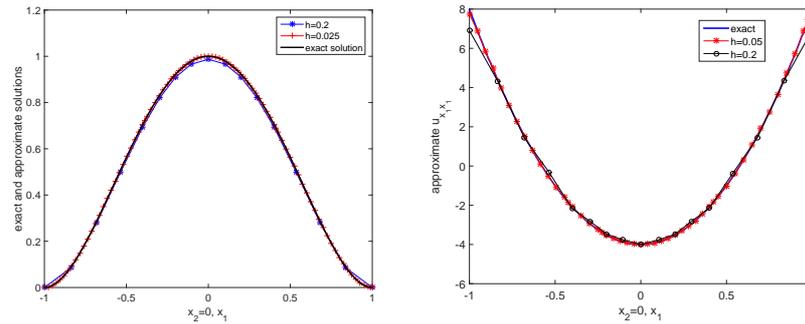


Рис. 4. Единичный круг (пример III). Приближенное решение при различных  $h$  (слева). Приближение к производной  $u_{x_1 x_1}$  при различных  $h$  (справа)

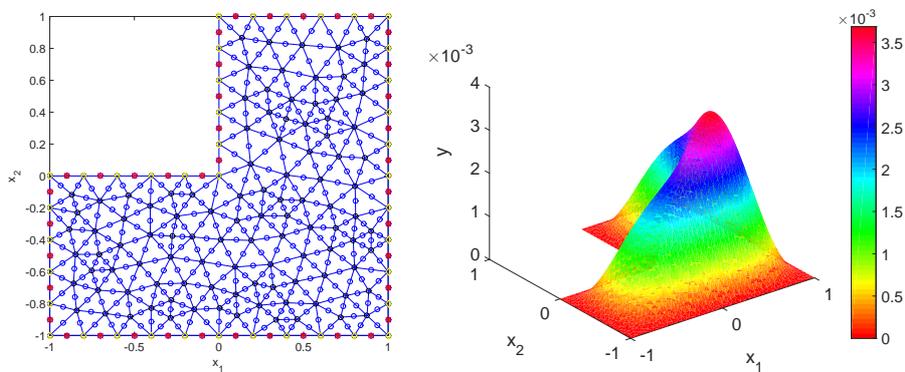


Рис. 5. L-образная область. Триангуляция и узлы при  $h = 0.2$  (слева). Приближенное решение при  $h = 0.05$  (справа)

обстоятельство является особо ценным в приложениях к теории пластин при вычислении моментов. Время, затрачиваемое на получение приближенного решения, практически пропорционально количеству узлов сетки, то есть метод весьма экономичен. Приемлемая точность вычислений достигается уже на весьма грубых сетках.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160014, 19-08-01184).

### Литература

1. Мухлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
3. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. The Theory of Cubature Formulas. – Springer, 1997. – 415 p.
4. Михайлов В.П. О существовании граничных значений у метагармонических функций // Матем. сб. – 1999. – Т. 190, № 7. – С. 17–48.
5. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. V. II: Theory of Plates. – Amsterdam: North-Holland, 1997. – 497 p.

6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Теория пластин и оболочек М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 625 с.
7. Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
8. Ворovich И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
9. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. V. III: Theory of Shells. – Amsterdam: North-Holland, 2000. – 599 p.
10. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
11. Астраханцев Г.П. Об одном способе приближенного решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1977. – Т. 17, № 4. – С. 980–998.
12. Кобельков Г.М. Итерационные процессы для некоторых классов разностных схем // Численные методы механики сплошных среды. – 1981. – Т. 12, № 6. – С. 38–48.
13. Кобельков Г.М. О сведении краевой задачи для бигармонического уравнения к задаче типа Стокса // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283, № 3. – С. 539–541.
14. Кобельков Г.М. О сведении краевой задачи для бигармонического уравнения к задаче с оператором типа Стокса // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 10. – С. 39–46.
15. Карчевский М.М. О некоторых методах решения первой краевой задачи для разностного бигармонического уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1983. – Т. 23, № 5. – С. 1088–1097.
16. Рязжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. – 2013. – Вып. 1. – С. 52–62.
17. Астраханцев Г.П. О смешанном методе конечных элементов в задачах теории оболочек // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Т. 29, № 10. – С. 1492–1504.
18. Дубинский Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Усп. матем. наук. – 1968. – Т. 23, Вып. 1. – С. 45–90.
19. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
20. Bernardi C. Optimal finite-element interpolation on curved domains // SIAM J. Numer. Anal. – 1989. – V. 26, No 5. – P. 1212–1240.
21. Zlamal M. Curved elements in the finite element method. I // SIAM J. Numer. Anal. – 1973. – V. 10, No 1. – P. 229–240.
22. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 206 с.
23. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Казан. ун-т, 2011. – 238 с.
24. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
25. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – СПб.: Лань, 2016. – 276 с.
26. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 592 с.

27. Карчевский М.М. Смешанный метод конечных элементов для нелинейных задач теории пластин // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 7. – С. 18–23.
28. Aubin J.P. Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for the linear elliptic operators by the Galerkin's and finite difference methods // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1967. – V. 21. – P. 599–637.
29. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
30. Bahriawati C., Carstensen C. Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart–Thomas Mfem with a posteriori error control // Comput. Methods Appl. Math. – 2005. – V. 5, No 4. – P. 333–361.
31. Даутов Р.З. Программная реализация метода конечных элементов в MATLAB. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 108 с.
32. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.

Поступила в редакцию  
03.06.19

---

**Карчевский Михаил Миронович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: *Mikhail.Karчевsky@kpfu.ru*

---

ISSN 2541-7746 (Print)  
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

**2019, vol. 161, no. 3, pp. 405–422**

---

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.405-422

### **A Mesh Method for Solving Fourth-Order Quasilinear Elliptic Equations**

*M.M. Karчевsky*

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: *Mikhail.Karчевsky@kpfu.ru*

Received June 3, 2019

#### **Abstract**

A mixed finite element method for solving the Dirichlet problem for a fourth-order quasilinear elliptic equation in divergent form was proposed and investigated. It was assumed that the domain in which the problem is solved is bounded and has a dimension greater or equal to two. When constructing the finite element scheme, all the second derivatives of the required solution were chosen as auxiliary unknowns. The usual triangulation of the domain by Lagrangian simplicial (triangular) elements of orders two and higher was used. Under the assumption that the operator of the original problem satisfies the standard conditions of bounded nonlinearity

and coercivity, the existence of an approximate solution for any value of the discretization parameter was proved. The uniqueness of the approximate solution was established under tighter restrictions, namely, assuming the Lipschitz-continuity and the strong monotony of the differential operator. Under the same conditions, a two-layer iterative process was constructed, and the estimation of the convergence rate independent of the discretization parameter was proved. Accuracy estimates for the approximate solutions, optimal in the case of linearity of the differential equation, were obtained. The results of the application of the proposed technique to the problem of the equilibrium of a thin elastic plate were presented.

**Keywords:** mixed finite element method, accuracy estimates, iterative method, convergence rate estimates, theory of plates

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 18-41-160014, 19-08-01184).

### Figure Captions

Fig. 1. The rectangular plate. The deflection (the left panel) and the bending moment  $M_2$  (the right panel).

Fig. 2. The rectangular plate. The deflection (the left panel) and the bending moment  $M_2$  (the right panel) on the straight line  $x_2 = 0.5$ .

Fig. 3. The unit square (case II). The approximate solution for different  $h$  (the left panel). The approximate derivative  $u_{x_1 x_1}$  for different  $h$  (the right panel).

Fig. 4. The unit disk (case III). The approximate solution for different  $h$  (the left panel). The approximate derivative  $u_{x_1 x_1}$  for different  $h$  (the right panel).

Fig. 5. The L-shaped domain. The triangulation and the nodes for  $h = 0.2$  (the left panel). The approximate solution for  $h = 0.05$  (the right panel).

### References

1. Mikhlin S.G. *The Numerical Performance of Variational Methods*. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1971. 373 p.
2. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas]. Moscow, Nauka, 1974. 808 p. (In Russian)
3. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. *The Theory of Cubature Formulas*. Springer, 1997. 415 p.
4. Mikhailov V.P. Existence of boundary values for metaharmonic functions. *Sb. Math.*, 1999, vol. 190, no. 10, pp. 1417–1448. doi: 10.1070/SM1999v190n10ABEH000431.
5. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity*. Vol. II: Theory of Plates. Amsterdam, North-Holland, 1997. 497 p.
6. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, McGraw-Hill, 1959. 595 p.
7. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Martinus Mijhoff Publ., 1983. 553 p.
8. Vorovich I.I. *Nonlinear Theory of Shallow Shells*. Springer, 1999. 388 p.
9. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity*. Vol. III: Theory of shells. Amsterdam, North-Holland, 2000. 599 p.
10. Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems. In: *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, 2002. xxiii, 529 p.
11. Astrakhantsev G.P. A method for the approximate solution of the Dirichlet problem for the biharmonic equation. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 4, pp. 157–175. doi: 10.1016/0041-5553(77)90113-6.

12. Kobel'kov G.M. Iterative processes for some classes of difference schemes. *Chislennye Metody Mekh. Sploshnoi Sredy*, 1981, vol. 12, no. 6, pp. 38–48. (in Russian).
13. Kobel'kov G.M. Reduction of a boundary value problem for a biharmonic equation to a problem of Stokes type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985, vol. 283, no. 3, pp. 539–541. (In Russian)
14. Kobel'kov G.M. Reduction of a boundary value problem for the biharmonic equation to a problem with an operator of Stokes type. *Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 1985, vol. 29, no. 10, pp. 39–59.
15. Karchevsky M.M. Some methods of solving the first boundary value problem for the biharmonic difference equation. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1983, vol. 23, no. 5, pp. 41–47. doi: 10.1016/S0041-5553(83)80155-4.
16. Ryazhskikh V.I., Slyusarev M.I., Popov M.I. Numerical integration of a biharmonic equation in square field. *Vestn. S.-Peterb. Univ. Ser. 10*, 2013, no. 1, pp. 52–62. (In Russian)
17. Astrakhantsev G.P. On a mixed finite-element method in problems of shell theory. *USSR. Comput. Math. Math. Phys.*, 1989, vol. 29, no. 5, pp. 167–176. doi: 10.1016/0041-5553(89)90195-X.
18. Dubinskii Yu.A. Quasilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order. *Russ. Math. Surv.*, 1968, vol. 23, no. 1, pp. 45–91. doi: 10.1070/RM1968v023n01ABEH001233.
19. Vainberg M.M. *Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations*. John Wiley & Sons, 1974. 356 p.
20. Bernardi C. Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1989, vol. 26, no. 5, pp. 1212–1240.
21. Zlamal M. Curved elements in the finite element method. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1973, vol. 10, no. 1, pp. 229–240.
22. Korneev V.G. *Skhemy metoda konechnykh elementov vysokikh poryadkov tochnosti* [Schemes of High Orders of Accuracy for the Finite Element Method]. Leningrad, Leningr. Gos. Univ., 1977. 206 p. (In Russian)
23. Dautov R.Z., Karchevsky M.M. *Vvedenie v teoriyu metoda konechnykh elementov* [Introduction to the Theory of Finite Element Method]. Kazan, Kazan. Univ., 2011. 238 p. (In Russian)
24. Vainberg M.M. *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*. San Francisco, London, Amsterdam, Holden-Day, 1964. 323 p.
25. Karchevsky M.M., Pavlova M.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Dopolnitel'nye glavy* [Equations of Mathematical Physics. Additional Chapters]. St. Petersburg, Lan', 2016. 276 p. (In Russian)
26. Samarsky A.A., Nikolaev E.S. *Numerical Methods for Grid Equations*. Vol. II: Iterative methods. Basel, Birkhauser. 1989. 502 p.
27. Karchevsky M.M. A mixed finite element method for nonlinear problems in the theory of plates. *Russ. Math.*, 1992, vol. 36, no. 7, pp. 10–17.
28. Aubin J. P. Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for the linear elliptic operators by the Galerkin's and finite difference methods. *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa*, 1967, vol. 21, pp. 599–637.
29. Strang G., Fix G.J. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, 2008. 400 p.
30. Bahriawati C., Carstensen C. Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas Mfem with a posteriori error control. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2005, vol. 5, no. 4, pp. 333–361.

31. Dautov R.Z. *Programmная realizatsiya metoda konechnykh elementov v MATLAB* [Matlab Implementation of the Finite Element Method]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2014. 108 p. (In Russian)
  32. Demmel J.W. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997. 419 p.
- 

*Для цитирования:* Карчевский М.М. Сеточный метод решения квазилинейных эллиптических уравнений четвертого порядка // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 405–422. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.405-422.

*For citation:* Karchevsky M.M. A mesh method for solving fourth-order quasilinear elliptic equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 405–422. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.405-422. (In Russian)