

Карчевский М.М.
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.
НЕСЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ**

На примере одной простенькой задачи математической физики опишем основные этапы современного математического моделирования и продемонстрируем некоторые, на первый взгляд неожиданные, затруднения, которые могут подстергать даже опытного исследователя.

Пусть требуется описать изменение температуры в металлическом цилиндре, нагреваемом распределенными в нем источниками тепла. Например, электрическим током, протекающим по цилиндру. Будем считать, ток течет только вдоль оси цилиндра, цилиндр достаточно длинный. Коэффициент теплопроводности и теплоемкость материала цилиндра не меняются вдоль оси цилиндра, но зависят от расстояния данной точки до оси цилиндра. Например, материал цилиндра может быть слоистым. Процесс перераспределения тепла в цилиндре предполагается установившимся, так что температура цилиндра со временем не меняется и в каждой точке цилиндра зависит лишь от расстояния этой точки до оси цилиндра.

При этих предположениях температура может быть найдена как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1/x)(xk(x)u'(x))' = -f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

(см., например, [1]). Здесь x — расстояние от данной точки цилиндра до его оси, $k(x)$ — значение коэффициента теплопроводности в этой точке, f — плотность распределения источников тепла. Для простоты письма считаем, что радиус сечения цилиндра равен единице. К уравнению (1) требуется присоединить условие, описывающее теплообмен цилиндра с окружающей его средой. Будем полагать, что на границе цилиндра поддерживается температура, равная нулю:

$$u(1) = 0. \quad (2)$$

Из соображений симметрии естественно положить

$$u'(0) = 0. \quad (3)$$

(см. подробнее [1, 2]).

Формально говоря, решение этой задачи можно выписать в явном виде, но при этом возникнут интегралы, содержащие функции k, f . Аналитическое вычисление этих интегралов чаще всего оказывается невозможным. Поэтому естественно прибегнуть к приближенному, численному, решению задачи (1), (2).

Будем разыскивать приближенное решение не на всем отрезке $[0, 1]$, а лишь на дискретном множестве точек, то есть на сетке

$$\{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\}. \quad (4)$$

Значения приближенного решения будем обозначать через $y_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Положим далее, что

$$y_x(x_i) = (y(x_i + h) - y(x_i))/h, \quad y_{\bar{x}}(x_i) = (y(x_i) - y(x_i - h))/h.$$

Заменяя уравнение (1) и граничные условия (2), (3) их разностными аналогами, получим

$$(1/x_i)(\bar{x}_i a(x_i) y_{\bar{x}})_x(x_i) = -f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (5)$$

$$a_1 y_x(x_0) = -hf_0/4, \quad (6)$$

$$y_N = 0. \quad (7)$$

Здесь $\bar{x}_i = x_i - h/2$, $a(x_i) = k(\bar{x}_i)$ (подробнее см. [2]). Уравнения (5)–(7) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$. Только три диагонали матрицы этой системы оказываются ненулевыми. Поэтому решение задачи (5)–(7) легко находится даже при очень больших N , например, методом прогонки (см. [2]). Если функции k, f имеют достаточно большое число производных, то точность приближенного решения характеризуется неравенством (см. [2])

$$\|y - u\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i) - u(x_i)| \leq Ch^2. \quad (8)$$

Постоянная C определяется функциями k, f , но, к сожалению, выражается через них весьма сложным образом, поэтому для реальной оценки погрешности неравенство (8) используется редко. Польза оценки (8), однако, несомненна, так как она показывает, что с уменьшением шага сетки приближенное решение стремится к точному, причем со скоростью не ниже, чем $O(h^2)$.

Впрочем оценка (8) может оказаться слишком пессимистической, а условия при которых она получена, излишне жесткими. Поэтому полезно исследовать поведение разностной схемы (5)–(7) в ходе реальных вычислительных экспериментов.

Будем считать далее, что $k(x) \equiv 1$. Нетрудно убедиться тогда, что при $f(x) = p^2 x^{p-2}$, $p \geq 2$, функция

$$u(x) = 1 - x^p \quad (9)$$

есть решение задачи (1)–(3). Пусть число точек сетки (4) увеличивается по закону:

$$N = 4, N = 8, N = 12, \dots, N = 124.$$

На рис. 1, с. 5, приведена зависимость погрешности приближенного решения от числа точек сетки в самой простой ситуации, когда $p = 2$, то есть $f(x) \equiv 4$. Мы потерпели неудачу. Погрешность ведет себя хаотически и имеет тенденцию к увеличению с ростом числа узлов сетки. Это никак не согласуется с оценкой (8).

Попробуем немного изменить p . Положим $p = 2.01$. На рис. 2 показана зависимость погрешности схемы от шага сетки в этом случае.

Теперь погрешность монотонно убывает с уменьшением шага сетки, причем зависимость похожа на степенную: $\|y - u\|_c = C_1 h^\alpha$, C_1, α — положительные постоянные. Попытаемся определить α нарисовав график зависимости $\log(\|y - u\|_c)$ от $\log(h)$. Видно (рис. 3), что — это прямая.

Для того, чтобы определить угловой коэффициент прямой, то есть показатель α , проще всего использовать функцию `polyfit` пакета Матлаб, приближая полученные числовые данные полиномом первого порядка в среднеквадратическом смысле. В результате получаем $\alpha = 1.82$, что совсем неплохо согласуется с теоретической оценкой (8).

Закрепляя успех, проведем аналогичные вычисления для набора значений параметра p , $p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Результаты вычислений приведены на рис. 4. Имеем отличное согласование с оценкой (8).

Проиллюстрируем, наконец, рисунками 5–8 характер приближения точного решения (9) решением разностной схемы (5)–(7) при уменьшении шага сетки, положив для определенности $p = 5$. На последнем рисунке точное и приближенное решение неразличимы.

Так почему же случай $p = 2$ выпал из этого ряда столь удачных численных экспериментов? Надеюсь, внимательный читатель сумеет ответить на этот вопрос.

Консультации можно получить по адресу: mkarchev44@yandex.ru.

Автор благодарен студентке Т.В. Сугловой. Выполненные ею вычисления во многом способствовали написанию данной статьи.

Список литературы

- [1] Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- [2] С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

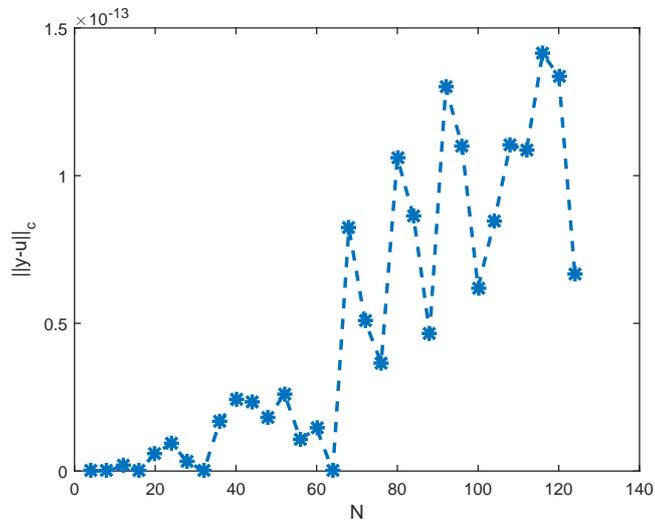


Рис. 1: Погрешность разностной схемы при $p = 2$

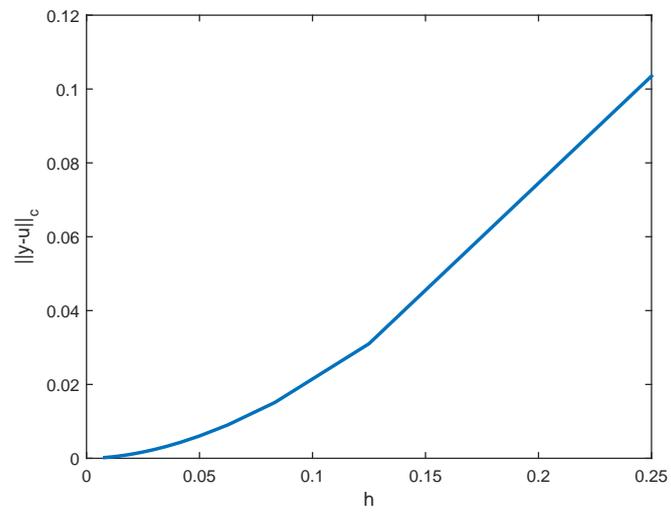


Рис. 2: Погрешность разностной схемы при $p = 2.01$

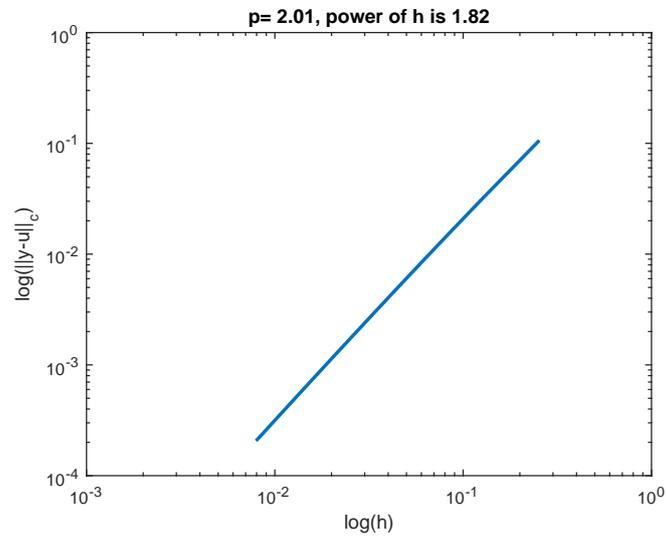


Рис. 3: Погрешность разностной схемы при $p = 2.01$ (логарифмическая зависимость)

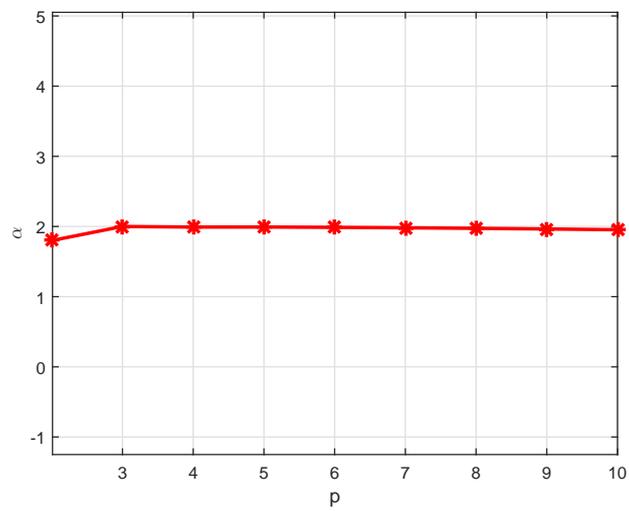


Рис. 4: Экспериментальная зависимость α от p

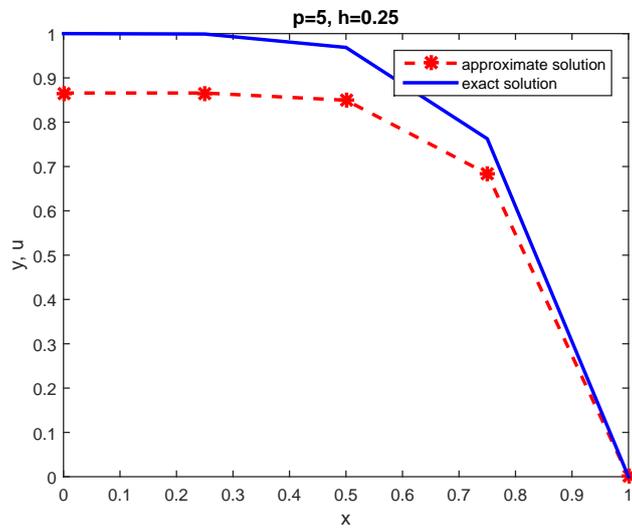


Рис. 5: Точное и приближенное решения, $p = 5$

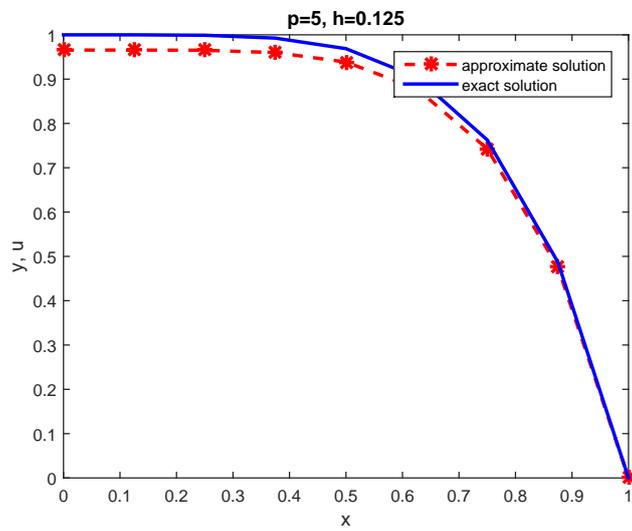


Рис. 6: Точное и приближенное решения, $p = 5$

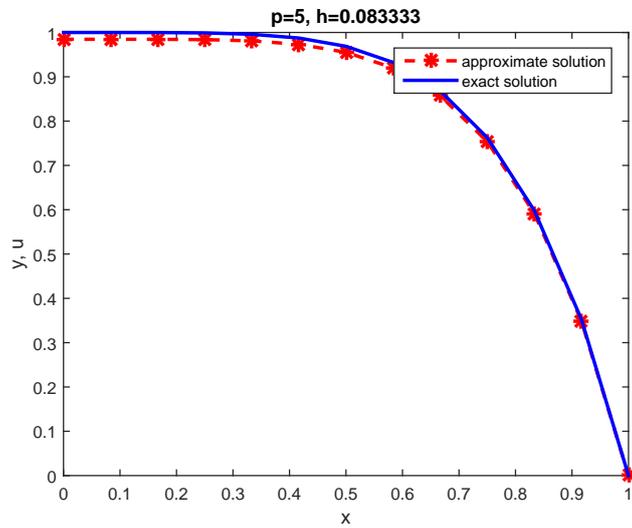


Рис. 7: Точное и приближенное решения, $p = 5$

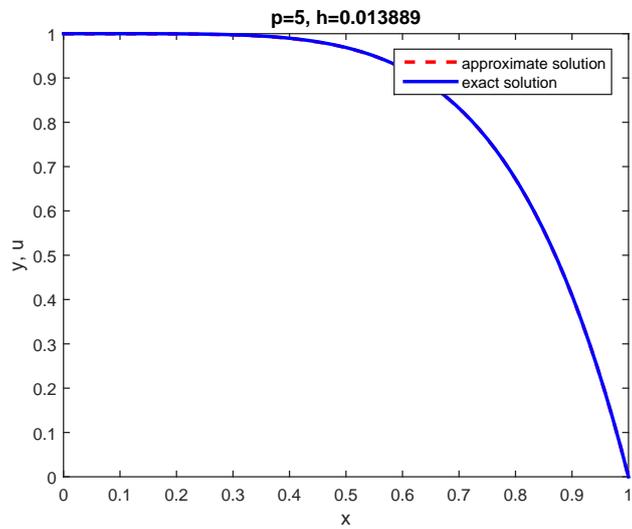


Рис. 8: Точное и приближенное решения, $p = 5$