

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ГРУНТА В ЗОНЕ ОПОРЫ МНОГОПРОЛЕТНОГО МОСТА

*Д.В. Бережной, И.С. Кузнецова, А.А. Саченков*

### Аннотация

В статье представлена методика расчета и определены области пластического деформирования в многослойном грунте в зоне опоры многопролетного моста, возникающие при надвижке пролетного строения.

**Ключевые слова:** пластическое деформирование, многослойный грунт, метод конечных элементов.

### Введение

Целью работы являются теоретические исследования и проведение расчетов по определению несущей способности опоры моста с учетом ее взаимодействия с окружающим грунтовым массивом. Массив пород в зоне опоры имеет достаточно сложное структурно-тектоническое строение. Отмечается крупное тектоническое нарушение, которое унаследовала палеодолина реки. Проектируемая и существующая опоры мостового перехода находятся прямо на борту этого нарушения, осложненного многочисленными трещинами (бортового отпора, напластования, карстообразования). В основании этой опоры расположен ряд карстовых полостей, заполненных продуктами выщелачивания и суффозионного выноса из перекрывающих отложений высотой.

Для защиты опоры строящегося мостового перехода от негативного воздействия активно развивающегося сульфатно-карбонатного карста и обеспечения эксплуатационной надежности мостового перехода возможно инъекционное укрепление карстующихся грунтов в основании опоры методом «геокомпозит» с тампонажем карстовых полостей цементным раствором.

Исходя из вышеуказанного можно сделать вывод о том, что площадка опоры указанного мостового перехода находится в исключительно сложных инженерно-геологических условиях и требует проведения дополнительного и более тщательного анализа несущей способности опоры совместно с окружающим грунтовым массивом при учете возможных противокарстовых мероприятий. Целью данных исследований является решение вопроса о целесообразности проведения работ по укреплению грунтов в районе опоры.

Грунты в зоне опоры являются физически нелинейными средами и подчиняются закону Гука в небольшом диапазоне прикладываемых нагрузок. Существуют многочисленные математические модели [1–4], позволяющие описать процесс их деформирования, которые различаются сложностью разрешающих уравнений. В настоящей работе используется модель, аналогичная модели идеально пластического тела. В соответствии с ней предполагается, что до предельного состояния справедлив закон Гука, а после его достижения среда начинает деформироваться без увеличения воспринимаемой нагрузки, что приводит к перераспределению

напряжений во всем объеме. Построение вычислительного алгоритма основано на дискретизации расчетной области в рамках конечно-элементной методики [5–8]. Рассчитываемую опору и прилегающий к ней грунт можно представить как трехмерный массив, обладающий специфическими свойствами.

Мягкие грунтовые среды (глины, суглинки, лессы, пески и др.) отличаются слабыми связями между частицами грунта, которые разрушаются при избыточных нагрузках порядка 0.1 МПа.

В нормальном состоянии частицы грунта образуют скелет с множеством пор, которые заполнены газом (воздухом) и жидкостью. При нагружении происходит разрушение скелета и переукладка частиц, объем пор уменьшается.

При снятии нагрузки прежняя структура не восстанавливается. Поэтому одним из характерных свойств мягких грунтовых сред является пластическое поведение как сдвиговых, так и объемных деформаций. Кроме того, появляются вязкие эффекты, поскольку переукладка частиц осуществляется не мгновенно, а за конечный промежуток времени. Величина деформации грунта и характер ее изменения во времени зависят от величины нагрузки на грунт и размеров площадки, к которой она приложена.

Приложение к грунту нагрузки вызывает взаимные перемещения твердых минеральных частиц, воды и воздуха, входящих в состав грунта. Возможны следующие виды перемещений:

- смещение грунтовых частиц и структурных агрегатов, сопровождающееся разрушением некоторых из них, изменением их взаимного расположения и образованием точек контакта;
- выжимание воды и воздуха из пустот грунтового скелета, сопровождающее его более плотную укладку и сближение частиц;
- сжатие пузырьков воздуха, защемленных в порах грунта и не имеющих возможности выжимания.

Для деформаций грунта характерна значительная объемная сжимаемость. При уплотнении грунтов более компактная укладка грунтовых частиц приводит к изменению их механических свойств, которые могут быть направлены как к повышению (усиление молекулярного сцепления между частицами грунтового скелета), так и к снижению прочности грунта (ослабление и нарушение структуры в грунте).

При действии внешних сил в грунте возникают как упругие деформации, восстанавливающиеся при удалении нагрузки, так и пластические, не восстанавливающиеся при удалении нагрузки. К числу необратимых пластических деформаций относятся взаимные сдвиги грунтовых частиц, разрушение структурных элементов и грунтовых частиц, выжимание из грунта воздуха. Упругими деформациями грунта, восстанавливающимися при удалении нагрузки, являются сжатие от выжимания воды, сжатие защемленных объемов воздуха, собственные упругие деформации грунтовых частиц, деформации пленок связной воды.

## 1. Разрешающие уравнения

Грунты, в которых размещаются исследуемые опоры, представляют собой «слойный пирог» из песков, глин, суглинков, известняка, песчаника и т. д. Для песков и глин предельное состояние хорошо описывается условием прочности Мизеса – Боткина [3], которое записывается в виде

$$\tau_i + \sigma_0 \operatorname{tg} \varphi^* - c^* = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi^*$  – угол внутреннего трения на октаэдрических площадках,  $c^*$  – предельное сопротивление чистому сдвигу. Эти параметры определяются через коэффициент

сцепления  $c$  и угол внутреннего трения  $\varphi$  следующими соотношениями:

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad c^* = \frac{2\sqrt{3} c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}. \quad (2)$$

Значения  $c$ ,  $\varphi$  определяются экспериментально по результатам инженерно-геологических изысканий. В частности, для песков коэффициент сцепления либо равен нулю, либо очень мал, но угол внутреннего трения достаточно велик (до  $20 - 30^\circ$ ). Для глин и суглинков ситуация обратная – угол внутреннего трения при значительном коэффициенте сцепления мал. В отличие от пластического течения классических конструкционных материалов, пластическое деформирование грунтов сопровождается изменением объема, так как градиент к поверхности пластичности от функций вида (1) не полностью определяется девиатором напряжений

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kj}} = \frac{S_{kj}}{2\tau_i} + \delta_{kj} \frac{\operatorname{tg} \varphi^*}{3}. \quad (3)$$

После несложных преобразований получается выражение «упругопластической матрицы» в виде

$$D_{kjm}^{ep} = D_{kjm} - \frac{(S_{kj}G/\tau_i + K\delta_{kj}\operatorname{tg} \varphi^*)(S_{mn}G/\tau_i + K\delta_{mn}\operatorname{tg} \varphi^*)}{G + K\operatorname{tg}^2 \varphi^*}, \quad (4)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $K$  – модуль всестороннего сжатия.

## 2. Вычислительный алгоритм

Используемая нами итерационная процедура типа «метода начальных напряжений» представляет собой следующую последовательность действий. Первое приближение определяется из решения вариационного уравнения принципа виртуальных перемещений в предположении справедливости закона Гука:

$$\begin{aligned} \sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k + \sum_m \iint_{S_m} \{\sigma\}^T \{\delta\hat{\varepsilon}\} dS_m + \sum_n \int_{L_n} \sigma_n \delta\varepsilon_n dL_n = \\ = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\{\sigma\}$ ,  $\{\varepsilon\}$  – векторы напряжений и деформаций на  $k$ -м трехмерном фрагменте (бетонном массиве или грунте);  $\{\hat{\sigma}\}$ ,  $\{\hat{\varepsilon}\}$  – векторы напряжений и деформаций в двумерных мембранных фрагментах;  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$  – напряжения и деформации в арматуре;  $\{Q\}$ ,  $\{P\}$  – векторы массовой и поверхностной нагрузок.

В дальнейшем предполагаем, что кинематические связи между фрагментами (условия непрерывности перемещений) и кинематические граничные условия выполняются априори. Уравнения равновесия для каждого фрагмента, статические условия сопряжения и статические граничные условия выполняются автоматически в интегральном смысле.

В этом случае разрешающее уравнение линейно и записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sum_k \iiint_{V_k} \left\{ \varepsilon^{(1)} \right\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k + \sum_m \iint_{S_m} \left\{ \hat{\varepsilon}^{(1)} \right\}^T [\hat{D}] \{\delta\hat{\varepsilon}\} dS_m + \\ + \sum_n \int_{L_n} \varepsilon_n^{(1)} E \delta\varepsilon_n dL_n = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Все последующие шаги итераций основаны на линейных уравнениях для приращений

$$\begin{aligned} \sum_k \iiint_{V_k} \left\{ \Delta \varepsilon^{(k+1)} \right\}^T [D] \{ \delta \varepsilon \} dV_k + \sum_m \iint_{S_m} \left\{ \Delta \hat{\varepsilon}^{(k+1)} \right\}^T [\hat{D}] \{ \delta \hat{\varepsilon} \} dS_m + \\ + \sum_n \int_{L_n} \Delta \varepsilon_n^{(k+1)} E \delta \varepsilon_n dL_n = \sum_k \iiint_{V_k} \left\{ \sigma_H^{(k)} \right\}^T \{ \delta \varepsilon \} dV_k, \quad (7) \end{aligned}$$

из которых находятся

$$\left\{ \Delta u^{(k+1)} \right\}, \quad \left\{ \Delta \varepsilon^{(k+1)} \right\}, \quad \left\{ \Delta \sigma^{(k+1)} \right\} = [D] \left\{ \Delta \varepsilon^{(k+1)} \right\}. \quad (8)$$

Истинное деформированное состояние определяется как

$$\left\{ u^{(k+1)} \right\} = \left\{ u^{(k)} \right\} + \left\{ \Delta u^{(k+1)} \right\}, \quad \left\{ \varepsilon^{(k+1)} \right\} = \left\{ \varepsilon^{(k)} \right\} + \left\{ \Delta \varepsilon^{(k+1)} \right\}. \quad (9)$$

«Пробные» напряжения для анализа возможного предельного состояния и определения истинных и дополнительных напряжений находятся как

$$\left\{ \sigma^{(k+1)} \right\} = \left\{ \sigma_T^{(k)} \right\} + \left\{ \Delta \sigma^{(k+1)} \right\}, \quad (10)$$

где  $\left\{ \sigma_T^{(k)} \right\}$  – истинные напряжения, соответствующие принятой теории прочности. Для их вычисления по напряжениям (10) строится «упругопластическая матрица» (4) и определяются

$$\left\{ \sigma_T^{(k+1)} \right\} = \left\{ \sigma_T^{(k)} \right\} + \left[ D_{ep}^{(k+1)} \right] \left\{ \Delta \varepsilon^{(k+1)} \right\}. \quad (11)$$

В правой части уравнения (8) фигурируют так называемые «начальные» или «дополнительные» напряжения, которые вводятся как разности «пробных» напряжений (10) и истинных (11):

$$\left\{ \Delta \sigma^{(k+1)} \right\} = \left\{ \sigma^{(k)} \right\} - \left\{ \sigma_T^{(k+1)} \right\}. \quad (12)$$

Переход от вариационной задачи к алгебраической производится посредством дискретизации методом конечных элементов.

### 3. Расчетная схема

Расчетная область (рис. 1) представляется в виде трехмерного массива размером  $144 \text{ м} \times 144 \text{ м}$  в плане и от 6 до 88 м (максимальное значение) по вертикали.

По середине грунтового массива (в плане) расположена опора, основание которой представляют 16 цилиндрических свай, расположенных в шахматном порядке ( $4 \times 4$ ) в середине грунтового массива в плане (рис. 2). Над сваями расположен трехмерный блок, моделирующий основание опоры размером  $9.5 \text{ м} \times 13.8 \text{ м}$ . Этот блок считается практически не деформируемым, так как через него передается нагрузка от веса опоры и пролетной части моста (с учетом подвижной нагрузки). Под основанием опоры моделируются 3 карстовые полости: верхняя (I) имеет форму параллелепипеда размерами  $18 \text{ м} \times 18 \text{ м}$  в плане и 2 м толщиной, две другие имеют форму усеченных конусов с радиусами оснований (II)  $7 \text{ м} \times 6 \text{ м}$  и (III)  $8 \text{ м} \times 6.5 \text{ м}$  и высотой по 2 м (рис. 3).

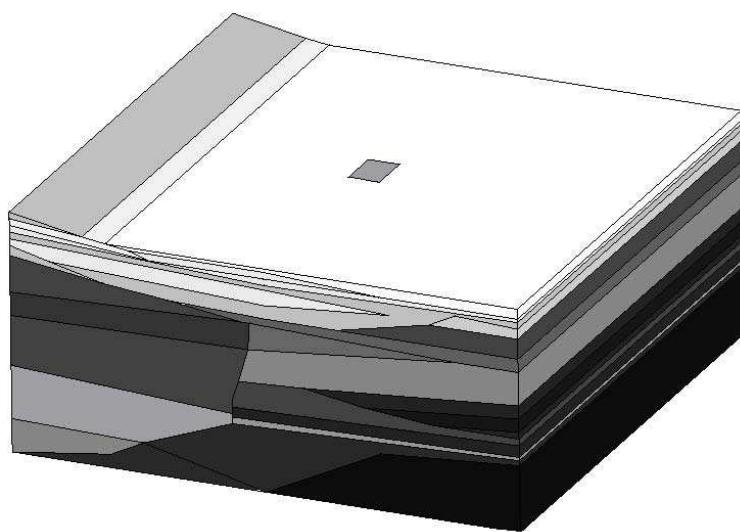


Рис. 1. Расчетная область

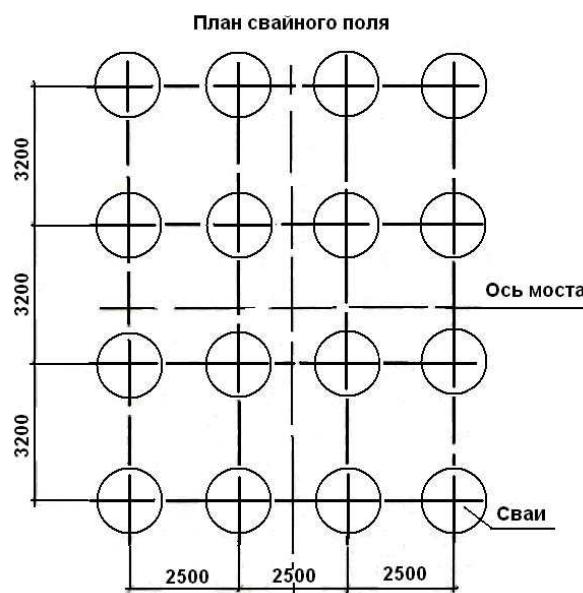


Рис. 2. Конструкция опоры (свайное поле)

В инженерно-геологическом разрезе мостового перехода по данным лабораторных и геофизических исследований выделено несколько инженерно-геологических элементов. В табл. 1 представлены физико-механические характеристики грунтов, составляющих грунтовую толщу в окрестности опоры, где  $\gamma_c$  – плотность грунта в природном состоянии,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

На рис. 3 приведено продольное сечение расчетной области с обозначением составляющих грунтового массива (табл. 1). При расчетах принято, что структура грунтового массива постоянна по ширине расчетной области. На рис. 4 приведен

Табл. 1

## Физико-механические характеристики грунтов

№	Основной грунт (условное обозначение)	$\gamma_c$ , кг/м <sup>3</sup>	E, Мпа	$\mu$	c, КПа	$\varphi$ , гр
1	Глина полутвердая (2)	1950	13	0.42	48	16
2	Суглинок тугопластичный (2а)	1990	3	0.35	22	15
3	Суглинок мягкопластичный (2б)	2010	10	0.35	15	14
4	Песок мелкий (3)	2010	20	0.3	1.5	31
5	Песок гравелистый (3б)	2040	35	0.3	2	30
6	Гравийный грунт (4)	2060	32	0.3	10	12
7	Глина тугопластичная (5)	2170	7	0.42	21	13
8	Глина полутвердая (5а)	2050	18	0.42	32	17
9	Щебенистый грунт (6)	2040	332.4	0.42	30	14
10	Глина полутвердая палеоген-неоген-новая (7)	1950	21	0.42	28	24
11	Глина тугопластичная загипсованная (7а)	2130	17	0.42	33	21
12	Мергель глинистый (8)	2140	15	0.42	23	20
13	Заполнитель карстовых полостей (9а)	1940	19	0.42	22	23
14	Гипс низкой прочности (10)	2460	2094	0.47	23	21
15	Гипс пониженной прочности (10а)	2460	2094	0.47	21	20
16	Гипс малопрочный (10б)	2640	2200	0.47	20	19
17	Гипс средней прочности (10в)	2720	2400	0.47	18	17
18	Гипс, ангидрит (10г)	2900	2950	0.47	15	19

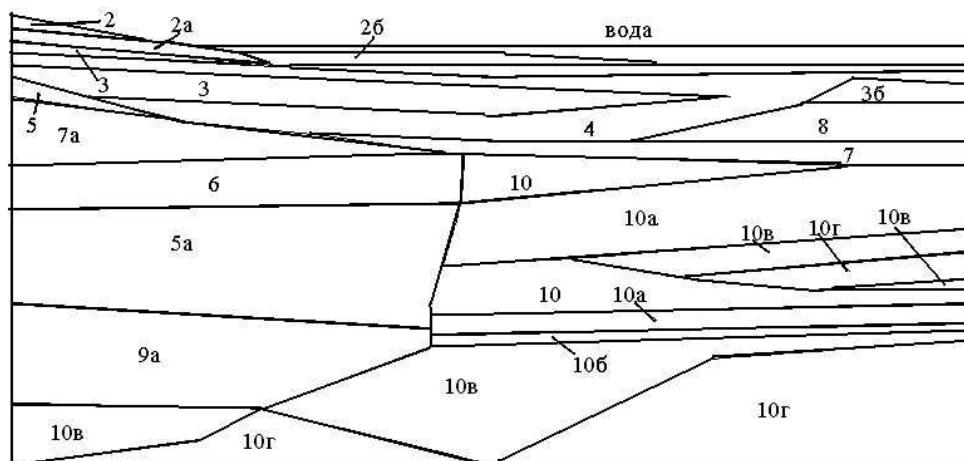


Рис. 3. Продольный разрез по краю расчетной области

продольный разрез расчетной области по плоскости, проходящей через оси центральных свай опоры.

На рис. 5 представлен контур расчетной области вместе с расположенными в грунтовом массиве основанием опоры и карстовыми полостями. При расчете счи-

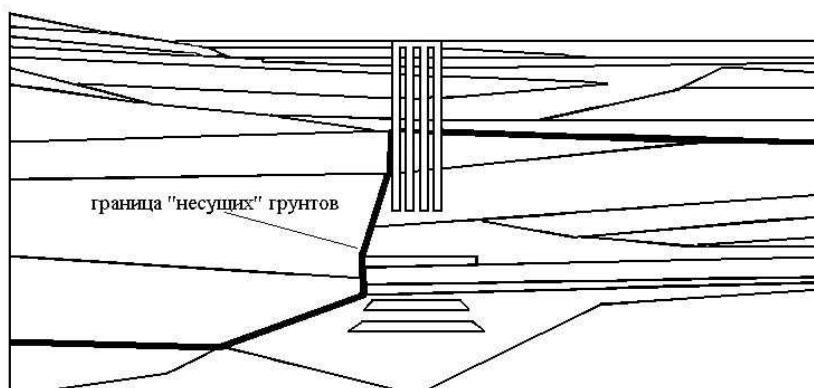


Рис. 4. Продольный разрез расчетной области через основание опоры

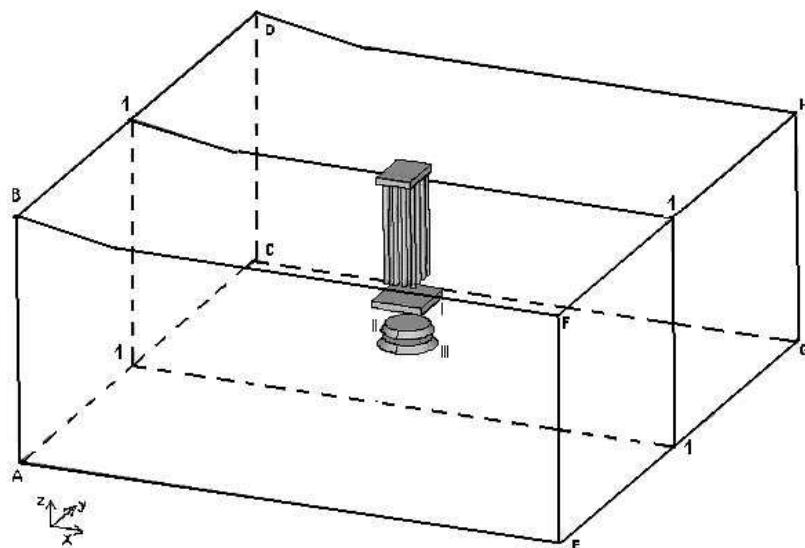


Рис. 5. Контур расчетной области

тается, что по плоскостям  $ABCD$  и  $EFGH$  отсутствуют перемещения вдоль оси  $X$ , по плоскостям  $ABFE$  и  $CDHG$  – перемещения вдоль оси  $Y$ , по плоскости  $ACGE$  – перемещения вдоль оси  $Z$ .

Разбиение расчетной области на конечные элементы приведено на рис. 6. На рис. 7 показана дискретизация основания опоры и карстовых полостей.

Расчеты проводились с учетом этапности нагружения. На первом этапе вычислений прикладывается нагрузка от собственного веса грунта и расположенных в нем цилиндрических свай опоры. На втором этапе к трехмерному блоку, расположенному над цилиндрическими сваями (рис. 8) прикладываются нагрузки от веса опоры, пролета моста и подвижной нагрузки, величины которых приведены в табл. 2.

На третьем этапе к трехмерному блоку прикладывается сила трения (175 т) между пролетом и верхом опоры, возникающая при надвижке.

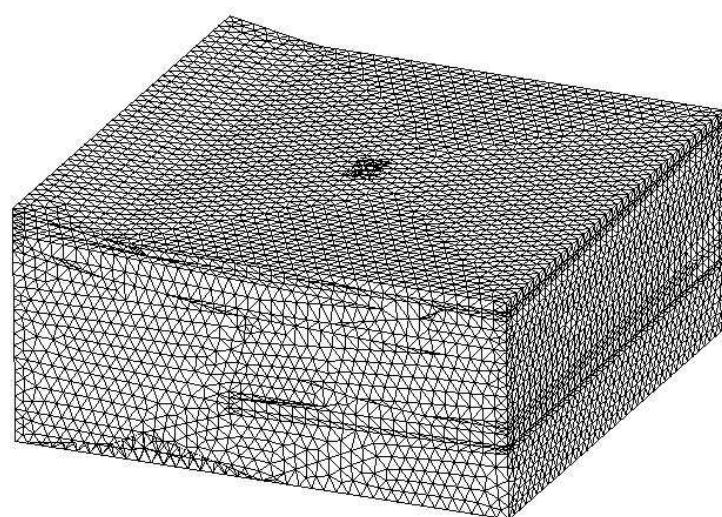


Рис. 6. Конечно-элементное разбиение расчетной области

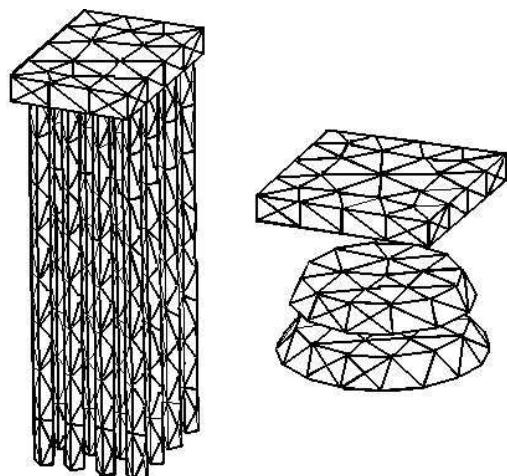


Рис. 7. Дискретизация основания опоры и карстовых полостей

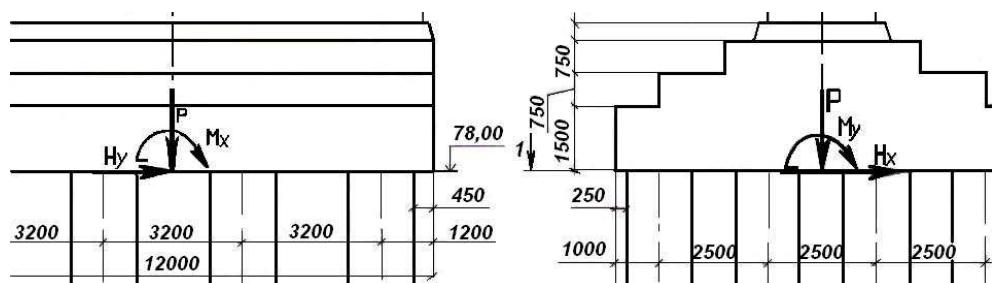


Рис. 8. Схема приложения нагрузки

Табл. 2

Расчетная нагрузка на основание опоры

$P$ , т	$H_x$ , т	$H_y$ , т	$M_x$ , т·м	$M_y$ , т·м
2994	0	59.9	1268.8	0

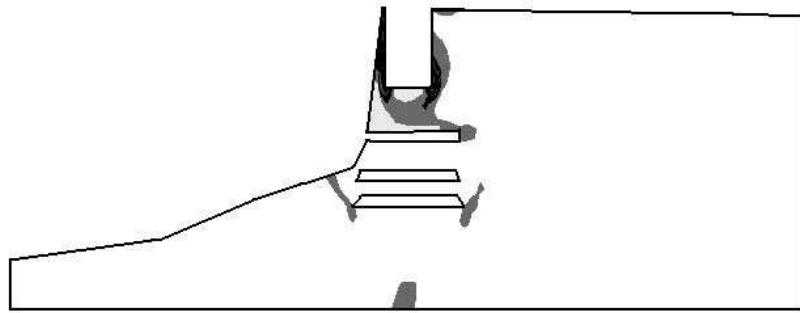


Рис. 9. Распределение интенсивности пластических деформаций

Расчеты проводились с использованием трехмерных линейных 8-узловых конечных элементов сплошной среды, узловыми неизвестными которого являются проекции вектора перемещений на координатные оси рабочей плоскости. В некоторых случаях для сохранения приемлемой для расчета формы конечных элементов вместо восьмиугольных искривленных параллелепипедов используются искривленные треугольные призмы и тетраэдры.

Для иллюстрации результатов расчета на рис. 9 приведено распределение интенсивности пластических деформаций в сечении 1111 (рис. 5) при надвижке для случая, когда все карстовые полости забетонированы. Распределение приведено для «несущих» грунтов, граница которых отмечена на рис. 4.

### Заключение

Предложенная нами методика расчета позволяет эффективно решать трехмерные задачи пластического деформирования грунтовых массивов, взаимодействующих с расположенными в них конструкциями, в условиях сложного силового нагружения.

Анализ результатов выполненных расчетов позволяет сделать вывод о том, что основными опасными факторами, определяющими несущую способность опоры мостового перехода являются наличие карстовых полостей, расположенных в грунтовом массиве под указанной опорой; место посадки опоры на борту палеодолины реки.

Для защиты опоры от негативного воздействия активно развивающегося сульфатно-карбонатного карста и обеспечения эксплуатационной надежности мостового перехода возможно инъекционное укрепление карстующихся грунтов в основании опоры методом струйной цементации. Результаты выполненных расчетов показывают прочностную эффективность выбранного решения. Вместе с тем наличие закрепления в рассматриваемых условиях грунтового массива в окрестности опоры не может гарантировать надежного результата и оставляет большую степень неопределенности с точки зрения как требуемой геометрии областей закрепления, так и требуемой прочности закрепленных грунтов.

Результаты проведенных расчетов при моделировании различных вариантов нагружения для случая закрепленных грунтов в местах наличия карстовых полостей показали, что в большинстве расчетных случаев разрушение происходит в области грунтов борта палеодолины реки, расположенных вблизи опоры.

На основании вышеописанного можно однозначно сделать вывод о необходимости переноса опоры мостового перехода через реку в место, характеризующееся отсутствием карстовых полостей, расположенных под опорой и расположенное вдали от борта палеодолины реки.

### Summary

*D.V. Berezhnoi, I.S. Kuznetsova, A.A. Sachenkov. The Modeling of Plastic Deformation of Multilayer Soil in the Zone of Multispan Bridge Footing.*

The design procedure is presented and plastic deformation domains arising with span sliding are defined in multilayer soil in the zone of multispan bridge footing.

**Key words:** plastic deformation, multilayer soil, finite element method.

### Литература

1. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т, 1989. – 607 с.
2. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 448 с.
3. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
4. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
5. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: Даc, 2001. – 300 с.
6. Секаева Л.Р., Бережной Д.В., Коноплев Ю.Г. Исследование взаимодействия деформируемых конструкций с сухими и водонасыщенными грунтами // «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов»: Тр. докл. XX Междунар. конф. – СПб., 2001. – Т. III. – С. 156–159.
7. Бережной Д.В., Голованов А.И., Паймушин В.Н., Пискунов А.А. Расчет напряженно-деформированного и предельного состояний железобетонных конструкций, взаимодействующих с грунтовым основанием // Проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород, 2001. – Вып. 63. – С. 170–179.
8. Бережной Д.В., Голованов А.И., Паймушин В.Н., Сидоров И.Н., Клементьев Г.А. Исследование напряженно-деформированного и предельного состояния сухих и водонасыщенных грунтов // «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов»: Тр. докл. XX Междунар. конф. – СПб., 2001. – Т. II. – С. 82–86.

Поступила в редакцию  
07.12.09

---

**Бережной Дмитрий Валерьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.

E-mail: *Dmitri.Berezhnoi@ksu.ru*

**Кузнецова Ирина Сергеевна** – аспирант теоретической механики Казанского государственного университета.

E-mail: *e\_xo@mail.ru*

**Саченков Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.