УДК 517.958+539.3

О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ, СОПРЯЖЕННОГО С ИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

А.В. Ануфриева, К.Н. Стехина, Д.Н. Тумаков

Аннотация

Рассмотрена волноводная структура, образованная трансверсально-изотропным слоем, сопряженным с изотропной полуплоскостью. Построено общее решение уравнений, описывающих распространение упругих волн в трансверсально-изотропной среде. Выделен спектр данной волноводной структуры. На пространстве собственных волн введено полускалярное произведение. Показано, что волны, соответствующие дискретному спектру, образуют ортогональную систему функций относительно полускалярного произведения.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный слой, собственные волны, полускалярное произведение.

Введение

Слоистые среды имеют волноводные свойства, в таких структурах волны могут распространяться без источников. Упругим волнам в слоистых средах посвящены, например, монографии [1, 2], в которых основное внимание уделено задачам об отражении и преломлении упругих волн и физической интерпретации результатов. В работе [3] найдены собственные волны полуоткрытого изотропного волновода, относящиеся к дискретной и непрерывной частям спектра. Показано, что значения продольной постоянной распространения (спектрального параметра) образуют на комплексной плоскости множество, состоящее из вертикальной полуоси, горизонтального отрезка и отдельных точек. Доказано, что собственные волны полуоткрытого волновода ортогональны и образуют полную систему мод, по которой как по базису может быть разложена любая волна, распространяющаяся в бесконечном полуоткрытом волноводе.

Однако в своем большинстве среды являются анизотропными. Простейший случай анизотропии – это трансверсально-изотропные среды. Подобные слои можно встретить как в природе, так и в технике [4]. В настоящей работе исследованы свойства собственных волн волноводной структуры, которую образуют находящиеся в полном контакте упругие трансверсально-изотропная полоса и изотропная полуплоскость.

Анализ спектра волноводных структур необходим прежде всего в задачах сопряжения, когда поле в каждой сопрягаемой части представляется в виде суперпозиции собственных волн данной структуры. Например, в задачах дифракции на стыке двух волноводов удобно искать поля в каждом из волноводов в виде рядов по модам [5]. Представляют отдельный интерес и задачи отыскания спектра в геофизике [6]. В настоящей работе показано наличие непрерывного спектра волновода, образованного трансверсально-изотропным слоем и изотропной упругой полуплоскостью, и выделены интервалы возможного существования дискретного спектра.

Наличие дискретного спектра конкретной волноводной структуры зависит не только от геометрии волновода, но и от значений упругих параметров сред, образующих его. Например, в работах [7, 8] проведен анализ некоторых изотропных волноводных структур и построены дисперсионные кривые для дискретного спектра. Дисперсионные уравнения для определения собственных значений трансверсально-изотропных волноводов существенно сложнее, чем для изотропного случая, и нам неизвестны исследования подобных структур.

1. Постановка спектральной задачи

Рассмотрим свободные упругие колебания волноводной структуры (см. рис. 1), представляющей собой трансверсально-изотропный слой $(0 < y < L)$ с постоянными плотностью ρ_2 и тензором модуля упругости $\mathbf{K}$, плотно прилегающий к полубесконечной изотропной полуплоскости $(y > L)$ с постоянными плотностью ρ_1 и коэффициентами Ламе λ_1, μ_1.

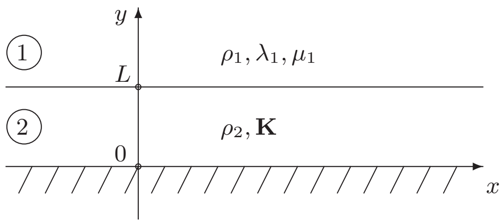

Рис. 1. Геометрия задачи

Будем искать при $y > L$ решения плоской гармонической задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \rho_1 \omega^2 u_{x1} = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y} + \rho_1 \omega^2 u_{y1} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{x1} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y}, \quad \sigma_{y1} = \lambda_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial u_{y1}}{\partial y}, \\ \tau_1 = \mu_1 \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y1}}{\partial x} \right), \end{gathered} \tag{2}$$

описывающие распространение упругих волн в изотропной среде. Процесс распространения колебаний в однородной трансверсально-изотропной среде $(0 < y < L)$ описывается уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} + \rho_2 \omega^2 u_{x2} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y2}}{\partial y} + \rho_2 \omega^2 u_{y2} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{x2} = k_{11}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial u_{y2}}{\partial y}, \quad \sigma_{y2} = k_{12}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial u_{y2}}{\partial y}, \\ \tau_2 = k_{33}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y2}}{\partial x} \right). \end{gathered} \tag{4}$$

На границе раздела сред должны быть выполнены условия сопряжения

$$\begin{aligned} &u_{x1}(x, L+0) = u_{x2}(x, L-0), \quad &&u_{y1}(x, L+0) = u_{y2}(x, L-0), \\ &\tau_1(x, L+0) = \tau_2(x, L-0), \quad &&\sigma_{y1}(x, L+0) = \sigma_{y2}(x, L-0) \end{aligned} \tag{5}$$

при $y = L$. Будем исследовать случай, когда волновод установлен на жесткое основание, что соответствует условиям при $y = 0$:

$$u_{x2}(x, 0) = 0, \quad u_{y2}(x, 0) = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим такие решения системы (1), (2), которые ограничены при $y \to +\infty$. Все искомые функции задачи (1)–(4) полагаем непрерывно дифференцируемыми в областях $0 < y < L$, $y > L$ и непрерывно продолжимыми на границы этих областей.

Далее предположим, что зависимость искомых функций по координате x имеет вид $\exp\{i\xi x\}$, где комплексное число ξ представляет собой спектральный параметр. Таким образом, осуществляем переход к функциям u_{xn}, u_{yn}, σ_{xn}, σ_{yn} и τ_n, которые являются решениями системы следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &i\xi\sigma_{x1} + \tau_1' + \rho_1\omega^2 u_{x1} = 0, \quad i\xi\tau_1 + \sigma_{y1}' + \rho_1\omega^2 u_{y1} = 0,\\ &\sigma_{x1} = i(\lambda_1 + 2\mu_1)\xi u_{x1} + \lambda_1 u_{y1}', \quad \sigma_{y1} = i\lambda_1\xi u_{x1} + (\lambda_1 + 2\mu_1)u_{y1}',\\ &\tau_1 = \mu_1\,(u_{x1}' + i\xi u_{y1}) \end{aligned} \tag{7}$$

для $y > L$ и

$$\begin{aligned} &i\xi\sigma_{x2} + \tau_2' + \rho_2\omega^2 u_{x2} = 0, \quad i\xi\tau_2 + \sigma_{y2}' + \rho_2\omega^2 u_{y2} = 0,\\ &\sigma_{x2} = ik_{11}\xi u_{x2} + k_{12}u_{y2}', \quad \sigma_{y2} = ik_{12}\xi u_{x2} + k_{22}u_{y2}',\\ &\tau_2 = k_{33}\,(u_{x2}' + i\xi u_{y2}) \end{aligned} \tag{8}$$

для $0 < y < L$. В системе (7), (8) все искомые функции считаем функциями переменной y и параметра ξ. Для краткости будем опускать зависимость по y, например, вместо $u_x(\xi, y)$ писать $u_x(\xi)$.

Исследуем задачу на собственные комплексные значения ξ, при которых система (7), (8) с условиями сопряжения (5) и граничными условиями (6) имеет нетривиальные решения (для функций в условиях (5) и (6) также принимаем указанную выше зависимость по x вида $\exp\{i\xi x\}$). Такие значения ξ определяют собственные волны полуоткрытого волновода с трансверсально-изотропным слоем.

2. Формула Грина и произведение мод

Для задачи теории упругости в однородной изотропной среде в работе [3] сформулировано и доказано тождество Лагранжа. Аналогичное утверждение справедливо и для трансверсально-изотропной среды.

Лемма 1 (тождество Лагранжа). *Для произвольных чисел α и β решения систем уравнений* (7), (8) *при $\xi = \alpha$ и $\xi = \beta$ совместно с граничными условиями* (5) *и* (6) *удовлетворяют следующему тождеству:*

$$\begin{aligned} &[\tau_2(\alpha)u_{x2}^*(\beta) - u_{x2}(\alpha)\tau_2^*(\beta) + \sigma_{y2}(\alpha)u_{y2}^*(\beta) - u_{y2}(\alpha)\sigma_{y2}^*(\beta)]' -\\ &\quad - (\beta^* - \alpha)i[u_{x2}(\alpha)\sigma_{x2}^*(\beta) - \sigma_{x2}(\alpha)u_x^*(\beta) + u_{y2}(\alpha)\tau_2^*(\beta) - \tau_2(\alpha)u_{y2}^*(\beta)] = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Для вывода тождества Лагранжа (9) нужно записать линейную комбинацию из уравнений системы (8) с множителями $u_{x2}^*(\beta)$, $u_{y2}^*(\beta)$, $i\beta^* u_{x2}^*(\beta)$, $u_{y2}^{*\prime}(\beta)$, $u_{x2}^{*\prime}(\beta) + i\beta^* u_{y2}^*(\beta)$ и системы уравнений, полученной из (8) после подстановки $\xi = \beta$ и комплексного сопряжения, с множителями $-u_{x2}(\alpha)$, $-u_{y2}(\alpha)$, $i\alpha u_{x2}(\alpha)$, $-u_{y2}'(\alpha)$, $-u_{x2}'(\alpha) + i\alpha u_{y2}(\alpha)$, откуда после приведения подобных членов и перегруппировки слагаемых вытекает справедливость (9).

Лемма 2 (формула Грина). *Для несобственного интеграла, содержащего решения систем уравнений* (5)–(8), *справедливо равенство*

$$\int_0^{+\infty} [u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta) + u_y(\alpha)\tau^*(\beta) - \tau(\alpha)u_y^*(\beta)]\,dy =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} i\,\frac{\tau(\alpha)u_x^*(\beta) - u_x(\alpha)\tau^*(\beta) + \sigma_y(\alpha)u_y^*(\beta) - u_y(\alpha)\sigma_y^*(\beta)}{\beta^* - \alpha}. \quad (10)$$

Формула (10) – результат интегрирования тождества Лагранжа (9) по y от 0 до $+\infty$. При этом нужно учесть, что решения систем уравнения (7) и (8) удовлетворяют условиям сопряжения при $y = L$ и граничным условиям при $y = 0$.

Отметим, что вопрос существования несобственного интеграла в (10) остается открытым, и ответ на него полностью зависит от существования предела правой части. Так, если при $A \to +\infty$ функции в правой части (10) растут не быстрее полинома некоторой степени, то предел в правой части понимается в смысле сходимости в пространстве распределений медленного роста.

Будем считать, что собственному значению α соответствует собственная волна, определяемая вектор-функцией $w(\alpha) = (u_x(\alpha), u_y(\alpha), \sigma_x(\alpha), \tau(\alpha))$. Введем билинейную форму на множестве собственных волн по формуле

$$\langle w(\alpha), w(\beta)\rangle = i\int_0^{+\infty} [u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta) + u_y(\alpha)\tau^*(\beta) - \tau(\alpha)u_y^*(\beta)]\,dy. \quad (11)$$

Для билинейной формы $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ выполняются условия линейности

$$\langle av_1(\alpha) + bv_2(\alpha), w(\beta)\rangle = a\langle v_1(\alpha), w(\beta)\rangle + b\langle v_2(\alpha), w(\beta)\rangle$$

и комплексной сопряженности

$$\langle v(\alpha), w(\beta)\rangle^* = \langle w(\beta), v(\alpha)\rangle.$$

Билинейная форма $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ в общем случае будет неотрицательно определенной. Такую билинейную форму будем называть полускалярным произведением (в пространстве всех собственных функций волновода).

Уточним физический смысл значения полускалярного произведения (11) при $\beta = \alpha$. Как известно, вектор плотности потока энергии равен

$$\left(-\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_x - \frac{\partial u_y}{\partial t}\tau, \quad -\frac{\partial u_x}{\partial t}\tau - \frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_y\right).$$

Если перейти к комплексным амплитудам функций, то среднее (по периоду времени) его значение равно

$$\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\,(u_x^*\sigma_x + u_y^*\tau, u_x^*\tau + u_y^*\sigma_y).$$

Таким образом, полускалярное произведение собственной волны полуоткрытого волновода на себя пропорционально потоку энергии, которую волна переносит через его сечение. Заметим, что поток энергии собственной волны, соответствующей мнимому собственному значению ξ, равен нулю. Именно поэтому билинейная форма (11) не является скалярным произведением.

Для того чтобы полускалярное произведение (11) стало скалярным, нужно, чтобы в пространстве, в котором определена билинейная форма (11), отсутствовали волны с мнимыми собственными значениями.

3. Упругие волны в трансверсально-изотропной среде

Найдем решения системы (8). Для этого из (8) исключим σ_{x2} и приведем систему к виду $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$, где $\mathbf{v} = (u_{x2}, u_{y2}, \sigma_{y2}, \tau_2)$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi & 0 & 1/k_{33} \\ -i\xi\, k_{12}/k_{22} & 0 & 1/k_{22} & 0 \\ 0 & -\rho\,\omega^2 & 0 & -i\xi \\ -\rho\,\omega^2 + \xi^2\, k_{11} - \xi^2 k_{12}^2/k_{22} & 0 & -i\xi\, k_{12}/k_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\gamma_{2n} = \sqrt{\kappa_{2n}^2 - \xi^2}, \quad \kappa_{2n} = \sqrt{\frac{\rho_2}{k_{nn}}}\,\omega, \quad \Gamma_\pm = \frac{\Omega_\pm}{\sqrt{2k_{22}k_{33}}},$$

где

$$\Omega_\pm = \sqrt{P \pm \sqrt{P^2 - 4k_{11}k_{22}k_{33}^2\gamma_{21}^2\gamma_{23}^2}},$$

$$P = \xi^2\left(k_{12}^2 - k_{11}k_{22} + 2k_{12}k_{33}\right) + \rho_2\omega^2\left(k_{22} + k_{33}\right).$$

Матрица $\mathbf{M}$ имеет собственные значения $\mp i\Gamma_+$ и $\mp i\Gamma_-$, им соответствуют собственные векторы $\Lambda_+^{-1}(\pm F_+, G_+, \pm H_+, \Lambda_+)$ и $\Lambda_-^{-1}(\pm F_-, G_-, \pm H_-, \Lambda_-)$, где

$$F_\pm = i\Omega_\pm\sqrt{\frac{k_{22}}{2k_{33}}}\left(\Omega_\pm^2 - 2k_{33}\left(\rho_2\omega^2 + \xi^2 k_{12}\right)\right),$$

$$G_\pm = i\xi\left(2k_{11}k_{22}k_{33}\gamma_{21}^2 + k_{12}\Omega_\pm^2\right),$$

$$H_\pm = \sqrt{2k_{22}\ k_{33}}\,\xi\left(k_{12}\left(\rho_2\omega^2 + k_{12}\xi^2\right) + k_{11}k_{22}\gamma_{21}^2\right)\Omega_\pm,$$

$$\Lambda_\pm = \Omega_\pm^2\left(\xi^2 k_{12}^2 + k_{11}k_{22}\gamma_{21}^2\right) - 2\rho_2\omega^2 k_{11}k_{22}k_{33}\gamma_{21}^2.$$

Таким образом, общее решение системы, описывающей распространение упругих колебаний в трансверсально-изотропной среде, можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_{x2} &= A_2F_+e^{-i\Gamma_+y} - B_2F_+e^{i\Gamma_+y} + C_2F_-e^{-i\Gamma_-y} - D_2F_-e^{i\Gamma_-y}, \\ u_{y2} &= A_2G_+e^{-i\Gamma_+y} + B_2G_+e^{i\Gamma_+y} + C_2G_-e^{-i\Gamma_-y} + D_2G_-e^{i\Gamma_-y}, \\ \sigma_{y2} &= A_2H_+e^{-i\Gamma_+y} - B_2H_+e^{i\Gamma_+y} + C_2H_-e^{-i\Gamma_-y} - D_2H_-e^{i\Gamma_-y}, \\ \tau_2 &= A_2\Lambda_+e^{-i\Gamma_+y} + B_2\Lambda_+e^{i\Gamma_+y} + C_2\Lambda_-e^{-i\Gamma_-y} + D_2\Lambda_-e^{i\Gamma_-y}, \end{aligned} \tag{12}$$

где A_2, B_2, C_2 и D_2 – произвольные постоянные.

4. Собственные волны трансверсально-изотропного слоя, прикрепленного к подложке

Смещения в общем решении системы (7) можно представить в виде [3]

$$\begin{aligned} u_{x1} &= -A_1\xi e^{-i\gamma_{11}(y-L)} + B_1\xi e^{i\gamma_{11}(y-L)} + C_1\gamma_{12}e^{-i\gamma_{12}(y-L)} + D_1\gamma_{12}e^{i\gamma_{12}(y-L)}, \\ u_{y1} &= A_1\gamma_{11}e^{-i\gamma_{11}(y-L)} + B_1\gamma_{11}e^{i\gamma_{11}(y-L)} + C_1\xi e^{-i\gamma_{12}(y-L)} - D_1\xi e^{i\gamma_{12}(y-L)}, \\ \sigma_{x1} &= -A_1Qe^{-i\gamma_{11}(y-L)} + B_1Qe^{i\gamma_{11}(y-L)} - C_1M_2e^{-i\gamma_{12}(y-L)} - D_1M_2e^{i\gamma_{12}(y-L)}, \\ \sigma_{y1} &= -A_1Pe^{-i\gamma_{11}(y-L)} + B_1Pe^{i\gamma_{11}(y-L)} + C_1M_2e^{-i\gamma_{12}(y-L)} + D_1M_2e^{i\gamma_{12}(y-L)}, \\ \tau_1 &= -A_1M_1e^{-i\gamma_{11}(y-L)} - B_1M_1e^{i\gamma_{11}(y-L)} - C_1Pe^{-i\gamma_{12}(y-L)} + D_1Pe^{i\gamma_{12}(y-L)}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$M_n = -i2\mu_1\xi\gamma_{1n}, \quad Q = i\left((\lambda_1 + 2\mu_1\xi^2) + \lambda_1\gamma_{11}^2\right), \quad P = i\left(\rho_1\omega^2 - 2\mu_1\xi^2\right),$$

$$\gamma_{1n} = \sqrt{\kappa_{1n}^2 - \xi^2}, \quad \kappa_{11} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}}\,\omega, \quad \kappa_{12} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}}\,\omega.$$

Ветви функций γ_{1n} выбираем так, чтобы вещественные и мнимые части были неотрицательными. Стоит отметить, что для трансверсально-изотропной среды волновые числа в плоскости упругой симметрии κ_{2n}, так же как и κ_{1n}, могут быть выражены через λ_2 и μ_2 [9].

Волну, переносящую энергию в каком-либо заданном направлении, будем называть движущейся в этом направлении волной.

Теорема 1 (о структуре непрерывного спектра). *Движущиеся вправо собственные волны полуоткрытого упругого волновода существуют при значениях параметра ξ, принадлежащих положительной мнимой полуоси, интервалу $(-\kappa_{12}, 0)$, и образуют непрерывный спектр на этих множествах.*

Доказательство. Рассмотрим возможные типы спектров. Дисперсионное уравнение может быть получено, если выражения (12) и (13) удовлетворяют условиям сопряжения (5) и граничному условию (6). Существенным моментом здесь является количество неизвестных (амплитуд) при шести уравнениях. Решения (13) должны удовлетворять условию ограниченности поля на бесконечности, поэтому в представлении решения при заданных ξ важно поведение γ_{1n}.

Рассмотрим только те волны, которые переносят энергию вправо, то есть вдоль оси x, или(и) затухают в том же направлении. При этом параметр ξ должен лежать во втором квадранте комплексной плоскости вместе с его границами ($\mathrm{Re}\,\xi \le 0$, $\mathrm{Im}\,\xi \ge 0$). Заметим также, что в силу положительности коэффициентов Ламе: $\kappa_{11} < \kappa_{12}$.

Пусть $\xi \in (-\kappa_{11}, 0)$, тогда все $\gamma_{1j}(\xi)$ будут вещественными. В выражениях (12) и (13) останутся все (восемь) неизвестных коэффициентов. Тогда в системе из шести уравнений (5), (6) неизвестных будет на два больше, и, следовательно, можно найти две линейно независимых собственных волны упругого волновода, относящихся к непрерывному спектру.

При $\xi \in (-\kappa_{12}, -\kappa_{11})$ значение $\gamma_{12}(\xi)$ остается вещественным, а значение $\gamma_{11}(\xi)$ становится чисто мнимым с положительной мнимой частью. В этом случае в формулах (13) полагаем $A_1 = 0$. Тогда в системе вида (5), (6) остается семь неизвестных коэффициентов, один из которых – произвольная постоянная в решении. Интервал $(-\kappa_{12}, -\kappa_{11})$ также относится к непрерывной части спектра исследуемой задачи, но здесь каждому значению ξ соответствует одна мода.

При $\xi < -\kappa_{12}$ амплитуды A_1 и C_1 равны нулю. Поэтому в системе из шести уравнений остается шесть неизвестных коэффициентов. Ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель матрицы ее коэффициентов.

□

В теореме указано наличие только непрерывного спектра оператора задачи о собственных волнах трансверсально-изотропного слоя, сопряженного с изотропной полуплоскостью. Дискретный (а, возможно, и непрерывный) спектр возможен лишь при $\xi < -\kappa_{12}$. Его наличие определяется упругими параметрами и толщиной трансверсально-изотропного слоя. Заметим, что если слой является изотропным, то, как показано в работе [3], дискретный спектр расположен в интервале между волновыми числами поперечных волн двух сред.

Теорема 2 (об ортогональности волноводных мод). *Собственные волны полуоткрытого упругого волновода, соответствующие дискретному вещественному спектральному параметру* ξ, *образуют ортогональную систему волн относительно полускалярного произведения* (11).

Доказательство. Ортогональность сразу следует из формул (10) и (11), так как функции, соответствующие дискретному спектру, на бесконечности обращаются в нуль. Полускалярное произведение функции дискретной волны самой на себя не обращается в нуль из следующих соображений. Как указано выше, билинейная форма (11) представляет собой поток энергии упругой волны. Исходя из физических соображений, заключаем, что поток энергии волноводной моды является ненулевым, и, следовательно, соответствующее полускалярное произведение будет положительным. □

Отметим также, что указанный в теореме набор волн образует ортогональную, но неполную систему в пространстве всех решений.

Выводы

Для волноводной структуры, образованной трансверсально-изотропным слоем и сопряженной с ним изотропной полуплоскостью, найдены интервалы существования дискретного и непрерывного спектров. На пространстве собственных волн введено полускалярное произведение. Показано, что волны, соответствующие дискретному спектру, образуют ортогональную систему функций относительно полускалярного произведения.

Summary

A.V. Anufrieva, K.N. Stekhina, D.N. Tumakov. Eigenwaves of a Transversely Isotropic Layer Interfaced to an Isotropic Half-Plane.

The waveguide structure formed by a transversely isotropic layer interfaced to an isotropic half-plane is considered. The general solution of equations describing the elastic wave propagation in a transversely isotropic medium is obtained. The spectrum of the waveguide structure is determined. The semi-inner product is defined on the space of the eigenwaves. It is shown that the waves corresponding to the discrete spectrum form the system of orthogonal functions with respect to the semi-inner product.

Keywords: transversely isotropic layer, eigenwaves, semi-inner product.

Литература

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
2. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic waves in layered media. – N. Y.; Toronto; London: McGraw-Hill Book Comp., 1957. – 381 p.
3. *Вдовина К.Н., Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н.* Об ортогональности собственных волн полуоткрытого упругого волновода // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 9. – С. 69–75.
4. *Anufrieva A.V., Tumakov D.N.* Diffraction of a plane elastic wave by a gradient transversely isotropic layer // Advances in Acoustics and Vibration. – 2013. – V. 2013. – Art. ID 262067, P. 1–8.
5. *Stekhina K.N., Tumakov D.N.* Diffraction of an elastic wave by the jump inhomogeneity in the elastic layer // Proc. Int. Conf. Days on Diffraction. – 2013. – P. 136–140.

6. *Кипоть В.Л., Тумаков Д.Н., Еронина Е.В.* Амплитудно-частотные характеристики стратифицированной геологической среды // Георесурсы. – 2011. – № 6. – С. 2–6.

7. *Плещинская И.Е., Стехина К.Н., Тумаков Д.Н.* О собственных колебаниях композита, зажатого между жесткой поверхностью и упругим полупространством // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2013. – Т. 16, № 17. – С.42–44.

8. *Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н.* О собственных колебаниях слоистого упругого композита // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2011. – № 18. – С. 111–115.

9. *Аннин Б.Д.* Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 5–14.

Поступила в редакцию
28.03.14

Ануфриева Анастасия Вадимовна – аспирант Института вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *nastya-anufrieva@mail.ru*

Стехина Кристина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *kstekhina@yandex.ru*

Тумаков Дмитрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *dtumakov@kpfu.ru*