УДК 519.65

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

А.И. Задорин

Аннотация

Исследован вопрос интерполяции функции двух переменных, имеющей области больших градиентов в предположении, что интерполируемая функция представима в виде суммы регулярной составляющей с ограниченными производными до некоторого порядка и двух погранслойных составляющих, известных с точностью до множителя. Такое представление имеет решение сингулярно возмущенной эллиптической задачи. Построена двумерная интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов по каждой переменной, точная на погранслойных составляющих. Получена оценка погрешности, равномерная по градиентам интерполируемой функции в пограничных слоях. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: функция двух переменных, большие градиенты, погранслойная составляющая, неполиномиальная интерполяция, оценка погрешности.

Введение

Многочлен Лагранжа широко используется для интерполяции функций. Однако при наличии у интерполируемой функции больших градиентов применение многочлена Лагранжа может приводить к значительным погрешностям.

В [1] исследован вопрос интерполяции функции одной переменной, соответствующей решению краевой задачи для уравнения с малым параметром ε при старшей производной. Показано, что применение линейной интерполяции в случае такой функции может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. Построена интерполяционная формула, точная на известной с точностью до множителя погранслойной составляющей интерполируемой функции. Погранслойная составляющая соответствует главному члену внутреннего асимптотического разложения решения краевой задачи по параметру ε [2–4]. Предложенный подход к построению интерполяционной формулы соответствует методу построения разностной схемы для задачи с пограничным слоем на основе подгонки к погранслойной составляющей, чем достигается равномерная сходимость схемы [5].

В работах [6–8] погранслойная составляющая рассматривалась как функция общего вида и строились интерполяционные формулы, точные на выделенной погранслойной составляющей. В [8] построена и исследована интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции для функции одной переменной с погранслойной составляющей. Формула построена так, чтобы она была точной на погранслойной составляющей. Преимущество этой формулы состоит в том, что при ее применении нет необходимости решать систему уравнений, соответствующую условиям интерполяции.

В настоящей работе формула из [8] обобщена на двумерный случай для интерполяции функции двух переменных с погранслойными составляющими.

Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от производных погранслойных составляющих. В случае, когда интерполируемая функция является решением сингулярно возмущенной задачи, это соответствует тому, что C и C_j не зависят от малого параметра ε.

1. Одномерная интерполяционная формула

При построении двумерной интерполяционной формулы будем использовать одномерную формулу, точную на погранслойной составляющей, поэтому остановимся на одномерном случае. Пусть функция $u(x)$ имеет представление

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.1}$$

где $p(x)$ – регулярная составляющая, $\gamma\Phi(x)$ – погранслойная составляющая. Предполагаем, что функция $p(x)$ неизвестна и имеет ограниченные производные до некоторого порядка. Постоянная γ неизвестна, а функция $\Phi(x)$ известна, причем производные функции $\Phi(x)$ не являются равномерно ограниченными.

Примером функции вида (1.1) является решение сингулярно возмущенной краевой задачи с возмущающим параметром $\varepsilon \in (0,1]$, когда $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$ [4]. Производные функции $\Phi(x)$ не являются ε-равномерно ограниченными при $\varepsilon \in (0,1]$ и растут по модулю с уменьшением параметра ε.

Пусть на исходном интервале $[a,b]$ задана равномерная сетка

$$\Omega^h = \{x_n : x_n = a + (n-1)h,\ x_1 = a, x_k = b,\ n = 1,2,\dots,k\}.$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ задана в узлах сетки, $u_n = u(x_n),\ n = 1,2,\dots,k$.

Определим многочлен Лагранжа с узлами интерполяции $x_1, x_2, \dots, x_j$ из заданных k узлов сетки Ω^h:

$$L_j(u,x) = \sum_{n=1}^{j} u_n D_n(x), \quad D_n(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{j} \frac{x - x_i}{x_n - x_i}. \tag{1.2}$$

В [8] построена формула для интерполяции функций вида (1.1), точная на погранслойной составляющей $\Phi(x)$:

$$L_{\Phi,k}(u,x) = L_{k-1}(u,x) + \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]u}{[x_1, x_2, \dots, x_k]\Phi}\left[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi,x)\right], \tag{1.3}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_k$ – узлы интерполяции, $[x_1, x_2, \dots, x_k]u$ – разделенная разность [9] для функции $u(x)$.

В соответствии с [9, с. 45] для некоторого $s \in (a,b)$

$$[x_1, x_2, \dots, x_k]\Phi = \Phi^{(k-1)}(s)/(k-1)!. \tag{1.4}$$

Следовательно, формула (1.3) корректна, если $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$. Путем вычисления определителя Вронского несложно убедиться, что система функций $\{1, x, \dots, x^{k-2}, \Phi(x)\}$ является линейно независимой, если $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0$. Тогда эта система может рассматриваться в качестве базиса для построения интерполянта с заданными условиями интерполяции в k узлах. При использовании формулы (1.3) для построения интерполянта нет необходимости в решении системы уравнений, соответствующей условиям интерполяции.

Получим другое представление для формулы (1.3). Согласно [9, с. 45] справедливо соотношение

$$L_{k-1}(u,x) = L_k(u,x) - w_{k-1}(x)\,[x_1, x_2, \dots, x_k]u, \tag{1.5}$$

где $w_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)$. Подставляя соотношение (1.5) в (1.3), получаем

$$L_{\Phi,k}(u,x) = L_k(u,x) + \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]u}{[x_1, x_2, \dots, x_k]\Phi}\,[\Phi(x) - L_k(\Phi, x)]\,. \tag{1.6}$$

Таким образом, интерполяционная формула (1.3) может быть представлена в виде (1.6). Из (1.6) явно следует, что эта формула является интерполяционной и точной на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Учитывая то, что интерполяция многочленом Лагранжа $L_k(u,x)$ точна на многочленах степени $(k-1)$, и свойство разделенной разности (1.4), получаем, что интерполяционная формула (1.6) точна на многочленах степени $(k-2)$.

Итак, интерполяционная формула (1.6) точна на многочленах степени $(k-2)$ и на функции $\Phi(x)$.

В [8] получена оценка погрешности формулы (1.6), которая приведена в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть*

$$M_k(\Phi, x) = \frac{\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)}{\Phi(x_k) - L_{k-1}(\Phi, x_k)}. \tag{1.7}$$

Тогда

$$|L_{\Phi,k}(u,x) - u(x)| \le \max_s |p^{(k-1)}(s)|\;[|M_k(\Phi,x)| + 1]\,h^{k-1}, \quad x,\, s \in [a,b]. \tag{1.8}$$

В [6] обоснована равномерная ограниченность $|M_k(\Phi,x)|$ при $k = 2, 3$. Обоснование проведено с использованием условия $\Phi^{(k-1)}(x) \ne 0$ при $x \in (a,b)$.

В соответствии с [10] справедлива следующая лемма о погрешности формулы (1.6).

Лемма 2. *Пусть*

$$\Phi^{(k-1)}(x) > 0,\ \Phi^{(k)}(x) \ge 0, \quad x \in (a,b) \tag{1.9}$$

или

$$\Phi^{(k-1)}(x) < 0,\ \Phi^{(k)}(x) \le 0, \quad x \in (a,b). \tag{1.10}$$

Тогда $|M_k(\Phi,x)| \le 1$ *и при этом*

$$|L_{\Phi,k}(u,x) - u(x)| \le 2\max_s |p^{(k-1)}(s)| h^{k-1}, \quad x,\, s \in [a,b]. \tag{1.11}$$

Из (1.11) следует, что погрешность интерполяционной формулы (1.6) равномерна по погранслойной составляющей $\Phi(x)$ и ее производным. Таким свойством не обладает интерполяция многочленом Лагранжа.

Условия (1.9) выполнены, например, в случае экспоненциального пограничного слоя [4], когда $\Phi(x) = e^{(x-1)/\varepsilon}$, $x \in [0,1]$.

В [10] исследована устойчивость интерполянта (1.6) к возмущению интерполируемой функции $u(x)$. Пусть $\widetilde{u}(x)$ – возмущенная функция по отношению к $u(x)$. В [10] установлено, что

$$\max_x \left| L_{\Phi,k}(u,x) - L_{\Phi,k}(\widetilde{u},x) \right| \le \max_{n=1,2,\dots,k} |u(x_n) - \widetilde{u}(x_n)| \Lambda_{\Phi,k}, \quad x \in [a,b], \tag{1.12}$$

где

$$\Lambda_{\Phi,k} = 2^{k-2} + \left(1 + 2^{k-2}\right) \max_x |M_k(\Phi,x)|. \tag{1.13}$$

Ниже нам потребуется соотношение (см. [9, с. 44])

$$\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x) = w_{k-1}(x)[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x]\Phi. \tag{1.14}$$

Зададим константу Лебега [9] для многочлена Лагранжа $L_k(u, x)$:

$$\lambda_k = \max_x \sum_{n=1}^{k} |D_n(x)|,$$

где $D_n(x)$ определена в (1.2). Тогда

$$|L_k(u, x)| \le \max_{n=1,2,\dots,k} |u_n|\lambda_k. \tag{1.15}$$

По аналогии с [11, с. 26], в случае равноотстоящих узлов имеем, что $\lambda_k \le 2^{k-1}$. Учитывая (1.15), получим оценку устойчивости для многочлена Лагранжа

$$|L_k(u, x)| \le \max_{n=1,2,\dots,k} |u_n| 2^{k-1}. \tag{1.16}$$

2. Двумерная интерполяционная формула

Рассмотрим вопрос построения интерполяционной формулы для функции двух переменных с погранслойной составляющей по каждой переменной. Такая функция, в частности, возникает при решении эллиптической задачи с регулярными пограничными слоями [12]. Применение полиномиальной интерполяционной формулы на сетке с шагом h для этой функции может привести [1] к погрешностям порядка $O(1)$.

Итак, пусть для достаточно гладкой функции $u(x, y)$ справедливо представление

$$u(x, y) = p(x, y) + d_1(y)\Phi(x) + d_2(x)\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y), \tag{2.1}$$

где $(x, y) \in \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = [a, b]\times[c, d]$. Предполагаем, что в (2.1) регулярная составляющая $p(x, y)$ не задана в явном виде и имеет ограниченные производные до некоторого порядка, функции $d_1(y)$, $d_2(x)$ имеют ограниченные производные до некоторого порядка и не заданы, постоянная d_3 не задана, а погранслойные составляющие $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ известны и их производные не являются равномерно ограниченными.

Представление (2.1) справедливо для решения следующей эллиптической задачи с регулярными пограничными слоями:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega;$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{2.2}$$

где $\Gamma = \overline{\Omega} \diagdown \Omega$, функции a, b, c, f, g достаточно гладкие; считаем, что угловые пограничные слои отсутствуют,

$$a(x) \ge \alpha > 0, \quad b(y) \ge \beta > 0, \quad c(x, y) \ge 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Согласно [12], решение задачи (2.2) представимо в виде (2.1), при этом

$$\Phi(x) = \exp(-a(0)\varepsilon^{-1}x), \quad \Theta(y) = \exp(-b(0)\varepsilon^{-1}y),$$

производные составляющих $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ неограниченно растут с уменьшением ε.

Интерполяционные формулы для функции вида (2.1) строились и исследовались в [13, 14] с использованием одномерной интерполяции (1.3). В [13] построена двумерная интерполяционная формула с двумя узлами в каждом направлении, в [14] – с тремя узлами по x и y. Построенные формулы являются точными на составляющих $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ и обладают соответственно первым и вторым порядком точности по шагу сетки равномерно по производным погранслойных составляющих.

В настоящей работе формулы из [13, 14] обобщены на случай, когда интерполяционная формула использует k_1 узлов интерполяции по x и k_2 узлов интерполяции по y. Предполагаем, что $k_1 \geq 2,\ k_2 \geq 2$.

Зададим сетку $\Omega^h = \Omega_x^{h_1} \times \Omega_y^{h_2}$ в исходной области $\overline{\Omega}$:

$$\Omega_x^{h_1} = \{x_i : x_i = a + (i-1)h_1,\ i = 1, 2, \ldots, k_1\}, \quad h_1 = (b-a)/(k_1 - 1),$$

$$\Omega_y^{h_2} = \{y_j : y_j = c + (j-1)h_2,\ j = 1, 2, \ldots, k_2\}, \quad h_2 = (d-c)/(k_2 - 1).$$

При построении двумерной интерполяционной формулы для функции $u(x,y)$ по каждому направлению используем одномерную интерполяционную формулу (1.3).

Итак, сначала при заданном значении y в соответствии с (1.3) зададим интерполяцию по x

$$L_x(u,x,y) = L_{k_1-1}(u,x,y) + \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}]u}{[x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}]\Phi}\left[\Phi(x) - L_{k_1-1}(\Phi, x)\right]. \tag{2.3}$$

В (2.3) $L_{k_1-1}(u,x,y)$ соответствует интерполяции по x функции $u(x,y)$ многочленом Лагранжа с узлами интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1}$.

По аналогии с (2.3) зададим интерполяционную формулу по y при заданном значении x

$$L_y(u,x,y) = L_{k_2-1}(u,x,y) + \frac{[y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}]u}{[y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}]\Theta}\left[\Theta(y) - L_{k_2-1}(\Theta, y)\right]. \tag{2.4}$$

Используя (2.4), после интерполяции по x осуществляем интерполяцию по y:

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y) = L_{k_2-1}(L_x(u,x,y),x,y) + \\ + \frac{[y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}]L_x(u,x,y)}{[y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}]\Theta}\left[\Theta(y) - L_{k_2-1}(\Theta, y)\right]. \tag{2.5}$$

Итак, построена двумерная интерполяционная формула (2.3), (2.5).

Формула (2.3), (2.5) задана корректно, если знаменатель в (2.3), (2.5) не обращается в нуль. Согласно (1.4) это условие выполняется, если

$$\Phi^{(k_1-1)}(x) \neq 0, x \in (a,b), \quad \Theta^{(k_2-1)}(y) \neq 0, y \in (c,d).$$

В дальнейшем эти условия будем предполагать выполненными.

Пусть $r(x)$ и $s(y)$ – ограниченные функции. Несложно убедиться в справедливости равенства

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(r(x)s(y),x,y) = L_x(r(x),x,y)L_y(s(y),x,y). \tag{2.6}$$

Учитывая соотношения (1.4) и (1.14), получаем

$$L_x(x^s,x,y) = x^s, \quad s = 0,1,\ldots,k_1-2; \quad L_y(y^s,x,y) = y^s, \quad s = 0,1,\ldots,k_2-2. \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) вытекает, что двумерная интерполяционная формула (2.3), (2.5) является точной на функциях

$$x^i,\ x^i\Theta(y), \quad i = 0,1,\ldots,k_1-2, \quad y^j,\ y^j\Phi(x), \quad j = 0,1,\ldots,k_2-2, \quad \Phi(x)\Theta(y). \tag{2.8}$$

Лемма 3. *Для некоторой постоянной C, не зависящей от производных функций $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$, справедлива оценка погрешности*

$$|u(x,y) - L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y)| \le$$
$$\le C\left(1 + \max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right)\left(1 + \max_y |M_{k_2}(\Theta,y)|\right)\left[h_1^{k_1-1} + h_2^{k_2-1}\right], \qquad (2.9)$$

где $(x,y) \in \overline{\Omega}$, $M_{k_1}(\Phi,x), M_{k_2}(\Theta,y)$ определяются согласно (1.7).

Доказательство. Зададим

$$\widetilde{u}(x,y) = p(x,y) + \widetilde{d}_1(y)\Phi(x) + \widetilde{d}_2(x)\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y), \qquad (2.10)$$

где

$$\widetilde{d}_1(y) = \sum_{j=0}^{k_2-2} \frac{(y-s_1)^j d_1^{(j)}(s_1)}{j!},$$
$$\widetilde{d}_2(x) = \sum_{j=0}^{k_1-2} \frac{(x-s_2)^j d_2^{(j)}(s_2)}{j!}, \qquad (2.11)$$
$$s_1 = \frac{c+d}{2}, \quad s_2 = \frac{a+b}{2}.$$

Погрешность формулы (2.3), (2.5) оценим на основе неравенства

$$|u(x,y) - L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y)| \le |u(x,y) - \widetilde{u}(x,y)| +$$
$$+ |\widetilde{u}(x,y) - L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y)| + |L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u}-u,x,y)|. \qquad (2.12)$$

Оценим каждый из трех модулей в правой части (2.12).

1. Оценка $|L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u}-u,x,y)|$. Учитывая (1.14), интерполяционную формулу (2.5) запишем в виде

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y) = L_{k_2-1}(L_x(u,x,y),x,y) +$$
$$+ [L_x(u,x,y_k) - L_{k_2-1}(L_x(u,x,y_k),x,y_k)]\, M_{k_2}(\Theta,y). \qquad (2.13)$$

Аналогично,

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y) = L_{k_2-1}(L_x(\widetilde{u},x,y),x,y) +$$
$$+ [L_x(\widetilde{u},x,y_k) - L_{k_2-1}(L_x(\widetilde{u},x,y_k),x,y_k)]\, M_{k_2}(\Theta,y), \qquad (2.14)$$

Вычитая (2.14) из (2.13), получаем

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u-\widetilde{u},x,y) = L_{k_2-1}(L_x(u-\widetilde{u},x,y),x,y) +$$
$$+ [L_x(u-\widetilde{u},x,y_k) - L_{k_2-1}(L_x(u-\widetilde{u},x,y_k),x,y_k)]\, M_{k_2}(\Theta,y). \qquad (2.15)$$

Для многочлена Лагранжа $L_k(u,x)$ справедлива оценка устойчивости (1.16). Следовательно,

$$|L_{k_2-1}(u-\widetilde{u},x,y)| \le \max_{j=1,2,\ldots,k_2-1} |u(x,y_j) - \widetilde{u}(x,y_j)| 2^{k_2-2}. \qquad (2.16)$$

Из(1.12) имеем

$$\max_x |L_x(u-\widetilde{u},x,y)| \le \max_{n=1,2,\dots,k_1} |u(x_n,y)-\widetilde{u}(x_n,y)|\Lambda_{\Phi,k_1}, \tag{2.17}$$

где Λ_{Φ,k_1} задается согласно (1.13).

Принимая во внимание (2.16), (2.17), из (2.15) получаем

$$|L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u-\widetilde{u},x,y)| \le \max_{n=1,2,\dots,k_1} \max_{j=1,2,\dots,k_2} |u(x_n,y_j)-\widetilde{u}(x_n,y_j)|\Lambda_{\Phi,k_1}\Lambda_{\Theta,k_2}, \tag{2.18}$$

где Λ_{Φ,k_1}, Λ_{Θ,k_2} определены в (1.13).

2. Оценка $|\widetilde{u}(x,y)-L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y)|$. Учитывая линейность интерполянта $L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y)$ по функции $\widetilde{u}(x,y)$, оценим погрешность интерполяции на каждом слагаемом в (2.10).

Из (2.8) и (2.11) получаем, что интерполяционная формула $L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y)$ точна на функциях $\widetilde{d}_1(y)\Phi(x)$, $\widetilde{d}_2(x)\Theta(y)$, $d_3\Phi(x)\Theta(y)$. Следовательно,

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y)-\widetilde{u}(x,y) = L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(p,x,y)-p(x,y). \tag{2.19}$$

Согласно с [9, с. 44] справедливо соотношение

$$p(x,y)-L_{k_2-1}(p,x,y) = w_{k_2-1}(y)[y_1,y_2,\dots,y_{k_2-1},y]p, \tag{2.20}$$

где $w_{k_2-1}(y)=(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_{k_2-1})$. Из (2.20), (2.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(p,x,y) &= L_{k_2-1}(L_x(p,x,y),x,y)+ \\ &+[L_x(p,x,y_{k_2})-L_{k_2-1}(L_x(p,x,y),x,y_{k_2})]\,M_{k_2}(\Theta,y), \end{aligned} \tag{2.21}$$

поэтому

$$\begin{aligned} |L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(p,x,y)-p(x,y)| &\le |L_{k_2-1}(L_x(p,x,y),x,y)-p(x,y)|+ \\ &+|L_x(p,x,y_{k_2})-L_{k_2-1}(L_x(p,x,y),x,y_{k_2})|\,|M_{k_2}(\Theta,y)|. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Запишем неравенство (2.22) в виде

$$\begin{aligned} &|L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(p,x,y)-p(x,y)| \le \\ &\le |(L_{k_2-1}(p,x,y)-p(x,y))+L_{k_2-1}\left(L_x(p,x,y)-p(x,y),x,y\right)|+ \\ &+\Big|\left(L_x(p,x,y_{k_2})-p(x,y_{k_2})\right)+\left(p(x,y_{k_2})-L_{k_2-1}(p,x,y_{k_2})\right)+ \\ &+L_{k_2-1}\left(p(x,y_{k_2})-L_x(p,x,y_{k_2}),x,y_{k_2}\right)\Big|\,|M_{k_2}(\Theta,y)|. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Получим вспомогательные оценки.

Для погрешности интерполяции многочленом Лагранжа в случае равномерной сетки справедлива оценка [9, с. 42]

$$|L_{k_1-1}(p,x,y)-p(x,y)| \le \max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)|h_1^{k_1-1}, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}. \tag{2.24}$$

По аналогии с (2.24) имеем

$$|L_{k_2-1}(p,x,y)-p(x,y)| \le \max_s |p_y^{(k_2-1)}(x,s)|h_2^{k_2-1}, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}. \tag{2.25}$$

Используя оценку (1.8) в двумерном случае, получаем

$$|L_x(p,x,y)-p(x,y)| \le \max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)| \left[1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right] h_1^{k_1-1}. \tag{2.26}$$

Из (1.16) следует, что

$$|L_{k_2-1}(\widetilde{p}-p,x,y)| \le \max_{j=1,2,\dots,k_2-1} |\widetilde{p}(x,y_j)-p(x,y_j)| 2^{k_2-2}. \tag{2.27}$$

Подставим оценки (2.25)–(2.27) в (2.23), тогда

$$|L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(p,x,y)-p(x,y)| \le \max_s |p_y^{(k_2-1)}(x,s)| h_2^{k_2-1}+$$
$$+\max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)| \left[1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right] 2^{k_2-2} h_1^{k_1-1}+$$
$$+\Big\{ \max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)| \left[1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right] h_1^{k_1-1}+\max_s |p_y^{(k_2-1)}(x,s)| h_2^{k_2-1}+$$
$$+\max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)| \left[1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right] 2^{k_2-2} h_1^{k_1-1}\Big\} |M_{k_2}(\Theta,y)|,$$

откуда в силу (2.19)

$$|L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(\widetilde{u},x,y)-\widetilde{u}(x,y)| \le \max_s |p_y^{(k_2-1)}(x,s)|(1+|M_{k_2}(\Theta,y)|) h_2^{k_2-1}+$$
$$+\max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)| \left[1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right] \Lambda_{\Theta,k_2} h_1^{k_1-1}, \tag{2.28}$$

где Λ_{Θ,k_2} соответствует (1.13).

3. Оценка $|u(x,y)-\widetilde{u}(x,y)|$. Из (2.1), (2.10) следует, что

$$u(x,y)-\widetilde{u}(x,y)=[d_1(y)-\widetilde{d}_1(y)]\Phi(x)+[d_2(x)-\widetilde{d}_2(x)]\Theta(y), \tag{2.29}$$

поэтому, учитывая остаточный член в разложениях (2.11), получаем

$$\left|d_2(x)-\widetilde{d}_2(x)\right| \le \max_s |d_2^{(k_1-1)}(s)| \frac{(b-a)^{k_1-1}}{2^{k_1-1}(k_1-1)!},$$

$$\left|d_1(y)-\widetilde{d}_1(y)\right| \le \max_s |d_1^{(k_2-1)}(s)| \frac{(d-c)^{k_2-1}}{2^{k_2-1}(k_2-1)!}.$$

Наконец из (2.29)

$$|u(x,y)-\widetilde{u}(x,y)| \le \max_s |d_1^{(k_2-1)}(s)| \frac{(k_2-1)^{k_2-1}}{2^{k_2-1}(k_2-1)!} \max_s |\Phi(s)| h_2^{k_2-1}+$$
$$+\max_s |d_2^{(k_1-1)}(s)| \frac{(k_1-1)^{k_1-1}}{2^{k_1-1}(k_1-1)!} \max_s |\Theta(s)| h_1^{k_1-1}. \tag{2.30}$$

Итак, все три слагаемых в (2.12) оценены.

Подставляя (2.18), (2.28), (2.30) в (2.12), получаем

$$|u(x,y)-L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y)| \le \Big[\max_s |d_1^{(k_2-1)}(s)| \frac{(k_2-1)^{k_2-1}}{2^{k_2-1}(k_2-1)!} \max_s |\Phi(s)| h_2^{k_2-1}+$$
$$+\max_s |d_2^{(k_1-1)}(s)| \frac{(k_1-1)^{k_1-1}}{2^{k_1-1}(k_1-1)!} \max_s |\Theta(s)| h_1^{k_1-1}\Big] \left[1+\Lambda_{\Phi,k_1}\Lambda_{\Theta,k_2}\right]+$$

$$+\max_s |p_y^{(k_2-1)}(x,s)|(1+|M_{k_2}(\Theta,y)|)h_2^{k_2-1}+$$

$$+\max_s |p_x^{(k_1-1)}(s,y)|\left[1+\max_x |M_{k_1}(\Phi,x)|\right]\Lambda_{\Theta,k_2}h_1^{k_1-1}. \quad (2.31)$$

Из оценки (2.31) следует оценка (2.9). Лемма доказана. □

Пусть для составляющей $\Phi(x)$ выполнены ограничения (1.9) или (1.10) и аналогичные ограничения выполнены для составляющей $\Theta(y)$. Тогда в соответствии с леммой 2 выполняются оценки

$$|M_{k_1}(\Phi,x)|\le 1, \quad |M_{k_2}(\Theta,y)|\le 1.$$

В этом случае оценка (2.9) принимает вид

$$|u(x,y)-L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y)|\le C_1\left[h_1^{k_1-1}+h_2^{k_2-1}\right], \quad C_1=4C. \quad (2.32)$$

Оценка (2.32) равномерна по погранслойным составляющим $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ и их производным.

3. Результаты численных экспериментов

Пусть $\overline{\Omega}=[0,1]^2$ и Ω^h – прямоугольная сетка в $\overline{\Omega}$,

$$\Omega^h=\{(x_i,y_j), \quad x_i=ih, \quad y_j=jh, \quad i,j=0,1,\dots,N, \quad Nh=1\}.$$

Остановимся на интерполяционной формуле (2.3), (2.5) при $k_1=k_2=2$. Пусть $K_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]-$ произвольная ячейка сетки Ω^h.

Зададим интерполяционную формулу для данной ячейки:

$$L_{\Phi,\Theta,2,2}(u,x,y)=(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j})\,\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\cdot\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}+$$

$$+(u_{i,j+1}-u_{i,j})\,\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}+(u_{i+1,j}-u_{i,j})\,\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}+u_{i,j}, \quad (3.1)$$

где $(x,y)\in K_{i,j}$, $u_{i,j}=u(x_i,y_j)$, $\Theta_j=\Theta(y_j)$, $\Phi_i=\Phi(x_i)$. Несложно убедиться, что формула (3.1) является интерполяционной для узлов ячейки $K_{i,j}$ и точной на погранслойных составляющих $\Phi(x)$, $\Theta(y)$.

Предполагаем, что $\Phi'(x)\ne 0$, $x_i<x<x_{i+1}$, $\Theta'(y)\ne 0$, $y_j<y<y_{j+1}$. Тогда для всех $(x,y)\in K_{i,j}$

$$|M_2(\Phi,x)|=\left|\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\right|\le 1, \quad |M_2(\Theta,y)|=\left|\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}\right|\le 1.$$

Используя оценку (2.32), для некоторой постоянной C получаем оценку погрешности

$$|L_{\Phi,\Theta,2,2}(u,x,y)-u(x,y)|\le Ch, \quad (x,y)\in K_{i,j}. \quad (3.2)$$

При $\Phi(x)=x$, $\Theta(y)=y$ из (3.1) следует полиномиальная интерполяционная формула

$$L_{2,2}(u,x,y)=(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j})\,\frac{x-x_i}{h}\cdot\frac{y-y_j}{h}+$$

$$+(u_{i,j+1}-u_{i,j})\,\frac{y-y_j}{h}+(u_{i+1,j}-u_{i,j})\,\frac{x-x_i}{h}+u_{i,j}. \quad (3.3)$$

Теперь остановимся на интерполяционной формуле с тремя узлами в каждом направлении. Интерполяционную формулу строим для произвольной сдвоенной ячейки сетки

$$K_{i,j}^{(2h)} = \{x_{i-1} \le x \le x_{i+1}, \quad y_{j-1} \le y \le y_{j+1}\}$$

с условием интерполяции в девяти узлах $\{x_{i,j}, x_{i\pm1,j\pm1}, x_{i,j\pm1}, x_{i\pm1,j}\}$. Интерполяционная формула (2.3), (2.5) принимает вид

$$L_x(u,x,y) = u(x_i,y) + \frac{u(x_i,y) - u(x_{i-1},y)}{h}(x-x_i) + \\ + \frac{u(x_{i+1},y) - 2u(x_i,y) + u(x_{i-1},y)}{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}} \left[\Phi(x) - \Phi_i - \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h}(x-x_i)\right], \\ x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad y \in [y_{j-1}, y_{j+1}], \tag{3.4}$$

$$L_{\Phi,\Theta,3,3}(u,x,y) = L_x(u,x,y_j) + \frac{L_x(u,x,y_j) - L_x(u,x,y_{j-1})}{h}(y-y_j) + \\ + \frac{L_x(u,x,y_{j+1}) - 2L_x(u,x,y_j) + L_x(u,x,y_{j-1})}{\Theta_{j+1} - 2\Theta_j + \Theta_{j-1}} \times \\ \times \left[\Theta(y) - \Theta_j - \frac{\Theta_j - \Theta_{j-1}}{h}(y-y_j)\right]. \tag{3.5}$$

Численные эксперименты. Рассмотрим функцию

$$u(x,y) = \left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right)\left(1 - e^{-2y/\varepsilon}\right)(1-x)(1-y) + \cos\frac{\pi x}{2}e^{-y}, \ \varepsilon > 0, \ x, \, y \in [0,1], \tag{3.6}$$

с погранслойными составляющими $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$, $\Theta(y) = e^{-2y/\varepsilon}$, которые при малых значениях ε соответствуют экспоненциальному пограничному слою [3].

Пусть $\widetilde{x}_i = (x_{i-1}+x_i)/2$, $\widetilde{y}_j = (y_{j-1}+j_j)/2$. В табл. 1–3 приведены погрешности

$$\Delta = \max_{i,j}\left|\mathrm{Int}(u, \widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j) - u(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\right|$$

для различных интерполяционных формул, Int – исследуемый интерполянт.

В табл. 1 приведена погрешность Δ полиномиальной интерполяционной формулы (3.3) в зависимости от ε и h. Из таблицы следует, что погрешность полиномиальной интерполяции есть величина порядка $O(1)$ при $\varepsilon \ll h$.

В табл. 2 приведена погрешность Δ в случае интерполяционной формулы (3.1), точной на погранслойных составляющих. В соответствии с результатами вычислений при $\varepsilon \approx 1$ погрешность есть $O(h^2)$, а при $\varepsilon \ll 1$ – $O(h)$, что согласуется с оценкой (3.2).

Остановимся на численном анализе интерполяционной формулы (3.4), (3.5). В [6] доказано, что в случае погранслойных составляющих экспоненциального вида, соответствующих рассматриваемому примеру, для некоторой постоянной C справедливы оценки $|M_3(\Phi,x)| \le C$, $|M_3(\Theta,y)| \le C$. Тогда справедлива оценка погрешности (2.32) при $k_1 = k_2 = 3.$. Таким образом, в случае функции (3.6) справедлива оценка погрешности

$$\max_{x,y}|L_{\Phi,\Theta,3,3}(u,x,y) - u(x,y)| \le Ch^2. \tag{3.7}$$

В табл. 3 приведена погрешность Δ сплайн-интерполяционной формулы (3.4), (3.5). Численные результаты подтверждают оценку погрешности (3.7). При $\varepsilon = 1$

Табл. 1

Погрешность полиномиальной интерполяционной формулы (3.3)

ε	h				
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	$5.22e-3$	$1.34e-3$	$3.37e-4$	$8.47e-5$	$2.12e-5$
2^{-2}	$5.06e-2$	$1.57e-2$	$4.41e-3$	$1.17e-3$	$3.01e-4$
2^{-3}	$1.49e-1$	$5.71e-2$	$1.80e-2$	$5.08e-3$	$1.35e-3$
2^{-4}	$3.20e-1$	$1.65e-1$	$6.37e-2$	$2.01e-2$	$5.69e-3$
2^{-5}	$5.61e-1$	$3.38e-1$	$1.77e-1$	$6.89e-2$	$2.18e-2$
2^{-6}	$6.73e-1$	$5.82e-1$	$3.53e-1$	$1.87e-1$	$7.23e-2$
2^{-7}	$6.90e-1$	$7.02e-1$	$5.92e-1$	$3.61e-1$	$1.92e-1$
2^{-8}	$6.90e-1$	$7.19e-1$	$7.17e-1$	$5.98e-1$	$3.66e-1$

Табл. 2

Погрешность интерполяционной формулы (3.1), точной на погранслойных составляющих

ε	h				
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	$8.65e-3$	$2.20e-3$	$5.52e-4$	$1.38e-4$	$3.46e-5$
2^{-2}	$3.58e-2$	$9.24e-3$	$2.33e-3$	$5.85e-4$	$1.46e-4$
2^{-3}	$7.07e-2$	$1.93e-2$	$4.99e-3$	$1.26e-3$	$3.17e-4$
2^{-4}	$1.22e-1$	$3.73e-2$	$1.02e-2$	$2.63e-3$	$6.68e-4$
2^{-5}	$1.66e-1$	$6.27e-2$	$1.92e-2$	$5.22e-3$	$1.36e-3$
2^{-6}	$1.89e-1$	$8.60e-2$	$3.17e-2$	$9.68e-3$	$2.64e-3$
2^{-7}	$1.92e-1$	$9.81e-2$	$4.37e-2$	$1.59e-2$	$4.86e-3$
2^{-8}	$1.92e-1$	$1.00e-1$	$5.00e-2$	$2.20e-2$	$7.97e-3$

Табл. 3

Погрешность интерполяционной формулы (3.4), (3.5), точной на погранслойных составляющих

ε	h				
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	$4.57e-4$	$5.90e-5$	$7.41e-6$	$9.26e-7$	$1.16e-7$
2^{-2}	$1.96e-3$	$3.39e-4$	$4.99e-5$	$6.78e-6$	$8.84e-7$
2^{-3}	$4.67e-3$	$1.20e-3$	$2.16e-4$	$3.24e-5$	$4.44e-6$
2^{-4}	$7.27e-3$	$2.66e-3$	$7.07e-4$	$1.23e-4$	$1.95e-5$
2^{-5}	$3.40e-3$	$4.14e-3$	$1.47e-3$	$3.94e-4$	$7.21e-5$
2^{-6}	$6.83e-3$	$1.96e-3$	$2.20e-3$	$7.77e-4$	$2.10e-4$
2^{-11}	$8.08e-3$	$2.11e-3$	$5.35e-4$	$1.34e-4$	$5.33e-5$
2^{-12}	$8.08e-3$	$2.11e-3$	$5.35e-4$	$1.34e-4$	$3.97e-5$

пограничные слои отсутствуют и формула (3.4), (3.5) имеет погрешность порядка $O(h^3)$, с уменьшением ε погрешность интерполяции повышается до величины порядка $O(h^2)$.

Замечание. Если известно, что ячейка, в которой необходимо осуществить интерполяцию функции $u(x,y)$ вида (2.1), находится вне погранслойной области, и в этой ячейке частные производные этой функции до необходимого порядка равномерно ограничены, то лучше использовать полиномиальную интерполяционную формулу. Рассмотрим пример интерполяции функции (3.6) при $k_1 = k_2 = 2$. Если $x \geq -2\varepsilon \ln \varepsilon, y \geq -\varepsilon \ln(\varepsilon/2)$, то $|\Phi''(x)| \leq 1$, $|\Theta''(y)| \leq 1$. При выполнении этих условий для всех $(x,y)\in K_{i,j}$ функция $u(x,y)$ имеет ограниченные производные до второго порядка, и можно применять полиномиальную интерполяционную формулу (3.3). В противном случае, когда ячейка $K_{i,j}$ пересекается с погранслойной областью, необходимо использовать формулу (3.1).

Заключение

В работе рассмотрен вопрос интерполяции функции двух переменных с погранслойной составляющей по каждой переменной. Такая функция, в частности, соответствует решению эллиптической задачи с пограничными слоями. Применение полиномиальных интерполяционных формул для указанных функций приводит к погрешностям порядка $O(1)$. Нами построена интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции в каждом направлении, точная на погранслойных составляющих. Получена оценка погрешности, равномерная по производным выделенных погранслойных составляющих, задающих основной рост интерполируемой функции в пограничных слоях. Таким образом, погрешность построенной интерполяционной формулы равномерна по градиентам интерполируемой функции в пограничных слоях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00618, 15-01-06584).

Summary

A.I. Zadorin. Interpolation of the Function of Two Variables with Large Gradients in the Boundary Layers.

The problem of interpolation for the function of two variables with large gradients in the boundary layers is investigated. It is suggested that the function can be represented as a sum of a regular component with bounded derivatives up to some order and of two boundary layer components. The boundary layer components are known, but their coefficients are uncertain. Such representation is typical for the solution of a singular perturbed elliptic problem. A two-dimensional interpolation formula, which is exact on the boundary layer components, is deduced. The formula has the arbitrary number of nodes in each direction. The accuracy estimate, which is uniform in gradients of the interpolated function in the boundary layers, is proved. The results of numerical experiments are provided.

Keywords: function of two variables, large gradients, boundary layer component, non-polynomial interpolation, error estimation.

Литература

1. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 267–275.

2. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

3. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.

4. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. Revised Edition. – Singapore: World Scientific, 2012. – 176 p.

5. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. – С. 237—248.

6. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 221–233.
7. *Zadorin A.I.* Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B. – 2011. — V. 2, No 2–3. – P. 262–279. – doi: 10.1134/S1995423913040022.
8. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Electron. Math. Rep. – 2012. – V. 9. – P. 445–455.
9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
10. *Блатов И.А. Задорин Н.А.* Анализ интерполяционной формулы, точной на погранслойной составляющей интерполируемой функции // Наука и мир. – 2015. – № 2 (18). – С. 13–17.
11. *Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Упражнения по численным методам. Часть два. – М.: Моск. гос. ун-т, 2003. – 200 с.
12. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow problems. – Berlin: Springer, 2008. – 348 p.
13. *Vulkov L.G., Zadorin A.I.* Two-Grid Algorithms for the Solution of 2D Semilinear Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equations Using an Exponential Finite Difference Scheme // AIP Conf. Proc. – 2009. – V. 1186, No 1. – P. 371–379. – doi: 10.1063/1.3265351.
14. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Интерполяция функций с погранслойными составляющими и ее применение в двухсеточном методе // Сиб. электр. матем. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 247–267.

Поступила в редакцию
28.04.15

Задорин Александр Иванович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, г. Омск, Россия.

E-mail: *zadorin@ofim.oscsbras.ru*