**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специальность 010100 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

Метод построения канонической системы решений задач линейного сопряжения для двумерного вектора

Работа завершена:
Студент 05-005 группы математического отделения
«____»______________2015 г. ______________А.Р. Шагапова

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент
«____»______________2015 г. ______________С.Н. Киясов
Заведующий кафедрой,
доктор физико-математических наук, профессор
«____»______________2015 г. ______________А.М. Елизаров

Казань – 2015 г.

Оглавление

1. Введение.

Пусть Γ - простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$.

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) & ... & g_{1n} \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) & ... & g_{2n} \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) & ... & g_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & g_{n3} & ... & g_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

- H - непрерывная и неособенная на Γ матрица-функция порядка n $(\Delta(t) = \det G(t) \neq 0, t \in \Gamma), g(t) = (g^1(t), g^2(t), ..., g^n(t))$ - вектор-функция класса $H(\Gamma)$. Задача линейного сопряжения для n - мерного вектора состоит в отыскании кусочно-аналитической вектор-функции

$$\mathbf{w}(z) = (\omega^1(z), \omega^2(z), ..., \omega^n(z))$$

с H - непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^+(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) + \mathbf{g}(t) \tag{2}$$

Если вектор-функция $\mathbf{g}(t) \equiv 0$ на Γ, получим однородную задачу линейного сопряжения

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t), t \in \Gamma. \tag{3}$$

Совокупность n решений однородной задачи (3)

$$\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z), \mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z), ..., \mathbf{w}_{\mathbf{n},\varkappa_\mathbf{n}}(z) \tag{4}$$

имеющие на бесконечности порядки $-\varkappa_1, -\varkappa_2, ..., -\varkappa_n$ соответственно (положительный порядок означает порядок полюса), называется канонической системой решений задачи, если выполняются следующие условия:

1. Определитель матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} \omega^1_{1,\varkappa_1}(z) & \omega^1_{2,\varkappa_2}(z) & ... & \omega^1_{n,\varkappa_n}(z) \\ \omega^2_{1,\varkappa_1}(z) & \omega^2_{2,\varkappa_2}(z) & ... & \omega^2_{n,\varkappa_n}(z) \\ ... & ... & ... & ... \\ \omega^n_{1,\varkappa_1}(z) & \omega^n_{2,\varkappa_2}(z) & ... & \omega^n_{n,\varkappa_n}(z) \end{pmatrix} \tag{5}$$

не обращается в нуль на конечном расстоянии.

2. Определитель $\Delta^0(z) = \det \parallel z^{\varkappa_j}\omega^i_{j,\varkappa_j}(z) \parallel, i, j = 1, 2, ..., n$ принимает на бесконечности конечное значение, отличное от нуля.

Матрица (5) называется канонической матрицей однородной задачи линейного сопряжения (3). Для канонической матрицы на Γ выполняется тождество

$$X^+(t) = G(t)X^-(t),$$

В силу которого приходят к представлению

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}, \Delta(t) = \det G(t) = \frac{\Delta^+(t)}{\Delta^-(t)}, t \in \Gamma, \tag{6}$$

В представлении (6) через $\Delta^+(z)$ и $\Delta^-(z)$ обозначены определители матриц $X^+(z)$ и $X^-(z)$ соответственно.

Целые числа $\varkappa_1, \varkappa_2, ..., \varkappa_n$ по канонической системе решений (4) определяются однозначно и называются частными индексами, а их сумма $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + ... + \varkappa_n = ind \det G(t)$ - суммарным индексом матрицы-функции (1) (индекс Коши $\det G(t)$).

В дальнейшем, не ограничивая общности, предполагается, что частные индексы упорядочены по убыванию, то есть выполняются неравенства

$$\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq ... \geq \varkappa_n. \tag{7}$$

Тогда любая другая каноническая матрица $\tilde{X}(z)$ получается из канонической матрицы (5) по формуле

$$\tilde{X}(z) = X(z)P(z),$$

в которой $P(z)$ - полиномиальная матрица с постоянным определителем ([1], с.30). Если в (7) выполняются строгие неравенства, матрица $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = \begin{pmatrix} p_0^1(z) & p^1_{\varkappa_1-\varkappa_2}(z) & p^1_{\varkappa_1-\varkappa_3}(z) & ... & p^1_{\varkappa_1-\varkappa_n}(z) \\ 0 & p_0^2 & p^2_{\varkappa_2-\varkappa_3}(z) & ... & p^2_{\varkappa_2-\varkappa_n}(z) \\ & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & p_0^n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

в котором $p^i_m(z), i = 1, 2, ..., n$ - произвольные полиномы степени $m \geq 0$.

Если для совокупности n решений задачи (3) $\mathbf{w_{1,k_1}}(z), \mathbf{w_{2,k_2}}(z), ..., \mathbf{w_{n,k_n}}(z)$, имеющих на бесконечности порядки $-k_1, -k_2, ..., -k_n$ соответственно, выполняется лишь первое свойство канонической системы решений, то эти решения образуют нормальную систему решений, а составленная из их компонент матрица $X(z)$ называется нормальной матрицей однородной задачи линейного сопряжения (3). Имеет место следующее предложение.

Предложение 1.1. Если постороена нормальная система решений однородной задачи линейного сопряжения, то каноническую систему решений можно построить эффективно.

При этом, соответствующая каноническая матрица $\tilde{X}(z)$ будет иметь вид

$$G(t) = G_0^+(t)G_0(t)G_0^-(t),$$

в котором $P(z)$ - некоторая полиномиальная матрица с постоянным определителем, "понижающая"порядки столбцов нормальной матрицы $X(z)$ суммарно на $k_1 + k_2 + ... + k_n - \varkappa$ едениц.

Каноническая система решений (4) позволяет записать любое кусочно-аналитическое решение задачи (3), имеющее на бесконечности заданный порядок k (при $k > 0$ допускающее полюс на бесконечности) по формуле

$$\mathbf{w}(z) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,\varkappa_i+k}(z)\mathbf{w}_{\mathbf{i},\varkappa_\mathbf{i}}(z) \tag{9}$$

где $p_{i,\varkappa_i+k}(z), i = 1, 2, ..., n$ - произвольные полиномы степени не выше $\varkappa_i + k$, которые следует положить равными тождественному нулю, если $\varkappa_i + k < 0$. При $k = -1$ формула (9) определит все решения однородной задачи линейного сопряжения, исчезающие на бесконечности.

По канонической матрице однородной задачи (3) решение неоднородной задачи (2) может быть записано в виде

$$\mathbf{w}(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[X^+(\tau)]^{-1}\mathbf{g}(\tau)}{\tau - z} d\tau + X(z)\mathbf{p}(z) \tag{10}$$

В этой формуле компонентами вектора $\mathbf{p}(z)$ являются некоторые полиномы, степени которых определяются порядком решения на бесконечности как в (9), поэтому второе слагаемое в (10) является решением однородной задачи (3), а на вектор-функцию $\mathbf{g}(t)$ накладываются, если это необходимо, условия принадлежности первого слагаемого (10) искомому классу решений - условия разрешимости задачи, которые получаются как условия равенства нулю соответствующих коэффициентов разложения на бесконечности вектор-функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[X^+(\tau)]^{-1}\mathbf{g}(\tau)}{\tau - z} d\tau = -\sum_{j=0}^{\infty} \int_\Gamma [X^+(\tau)]^{-1}\mathbf{g}(\tau)\tau^j d\tau \frac{1}{z^{j+1}}.$$

Пусть $\mathbf{w}(z) = (\omega^1(z), \omega^2(z), \omega^3(z))$ - кусочно-мероморфное решение однородной задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией:

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

(матрица-функция (1) при n = 3)

$$\begin{gathered} \omega^{1+}(t) = g_{11}(t)\omega^{1-}(t) + g_{12}(t)\omega^{2-}(t) + g_{13}(t)\omega^{3-}(t), \\ \omega^{2+}(t) = g_{21}(t)\omega^{1-}(t) + g_{22}(t)\omega^{2-}(t) + g_{23}(t)\omega^{3-}(t), \\ \omega^{3+}(t) = g_{31}(t)\omega^{1-}(t) + g_{32}(t)\omega^{2-}(t) + g_{33}(t)\omega^{3-}(t) \\ (\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t)), t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{12}$$

В работе [2] вводится следующее определение.

Определение. Решение $\mathbf{w}$(z) задачи линейного сопряжения (12) - решение с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ

$$\frac{\omega^{1+}(t)}{\omega^{1-}(t)} = \lambda_1(t), \frac{\omega^{2+}(t)}{\omega^{2-}(t)} = \lambda_2(t), \frac{\omega^{3+}(t)}{\omega^{3-}(t)} = \lambda_3(t) \tag{2.2}$$

(полагается, что компонента тройки λ_k равна тождественному нулю, неограничена или является неопределенной, что, как и выше, будет обозначаться символами $0, \infty, 0/0$, если соответственно $\omega^{k+}(t) \equiv 0, \omega^{k-}(t) \equiv 0, \omega^k(t) \equiv 0; k = 1, 2, 3, t \in \Gamma$).

Очевидно, множество всех кусочно-мероморфных решений задачи (12) представляет собой трехмерное векторное пространство V над полем рациональных функций, базисом которого является любая каноническая система решений

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_1}(z) &= (\omega^1_{1,\varkappa_1}(z), \omega^2_{1,\varkappa_1}(z), \omega^3_{1,\varkappa_1}(z)), \\ \mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_2}(z) &= (\omega^1_{2,\varkappa_2}(z), \omega^2_{2,\varkappa_2}(z), \omega^3_{2,\varkappa_2}(z)), \\ \mathbf{w}_{\mathbf{3},\varkappa_3}(z) &= (\omega^1_{3,\varkappa_3}(z), \omega^2_{3,\varkappa_3}(z), \omega^3_{3,\varkappa_3}(z)), \end{aligned} \tag{14}$$

$\mathbf{w}_{\mathbf{i},\varkappa_\mathbf{i}}(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\varkappa_i, i = 1, 2, 3 (\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \varkappa_3, \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \varkappa$ - суммарный индекс матрицы-функции (11)). Пусть $\mathbf{w}_\mathbf{1}(z), \mathbf{w}_\mathbf{2}(z)$ - два кусочно-мероморфных решения задачи (12).

Векторное пространство V всех нетривиальных кусочно-мероморфных решений задачи (12) может быть представлено в виде бесконечной суммы непересекающихся подпространств $V_k, k = 1, 2, ...$, образованных решениями задачи с одной и той же тройкой (13) (V_0 содержит лишь нулевое решение с тройкой (0/0, 0/0, 0/0) котрое считается принадлежащим всем V_k). В качестве представителя подпространства рассматривается решение $\mathbf{w}(z) = (\omega^1(z), \omega^2(z), \omega^3(z))$ без конечных полюсов, имеющее наинизший возможный порядок на бесконечности. Это решение с точностью до мультипликативной постоянной получается домножением на соответствующий полином любого кусочно-мероморфного решения задачи, принадлежащего данному подпространству. Представитель подпространства может оказаться не единственным (размерность подпространства больше единицы), если не все решения, входящие в рассматриваемое подпространство имеют вид $r(z)\mathbf{w}(z)$, где $r(z)$ - рациональная функция.

Предложен метод построения канонической системы решений в задаче линейного сопряжения для трехмерного вектора при наличии двух решений задачи.

Пусть

$$\mathbf{w}_\mathbf{i}(z) = (\omega^1_i(z), \omega^2_i(z), \omega^3_i(z)), i = 1, 2$$

- решения задачи линейного сопряжения (12) порядков k_1 и k_2 на бесконечности, являющиеся представителями различных подпространств V_1 и V_2 или различными представителями одного подпространства векторного пространства V кусочно-мероморфных решений этой задачи, а разложения этих решений по функциям искомой канонической системы решений (14) этой задачи имеют вид

$$\mathbf{w}_\mathbf{i}(z) = p_{i1}(z)\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z) + p_{i2}(z)\mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z) + p_{i3}(z)\mathbf{w}_{\mathbf{3},\varkappa_\mathbf{3}}(z), i = 1, 2. \tag{15}$$

где $p_{ij}(z), i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ - некоторые полиномы.

Через Δ^+ и Δ^- обозначаются определители канонической матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} \omega^1_{1,\varkappa_1}(z) & \omega^1_{2,\varkappa_2}(z) & \omega^1_{3,\varkappa_3}(z) \\ \omega^2_{1,\varkappa_1}(z) & \omega^2_{2,\varkappa_2}(z) & \omega^2_{3,\varkappa_3}(z) \\ \omega^3_{1,\varkappa_1}(z) & \omega^3_{2,\varkappa_2}(z) & \omega^3_{3,\varkappa_3}(z) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Пусть тогда $\Delta_{ij}(z), i,j = 1,2,3$ - алгебраическое дополнение элемента $\omega^i_{j,\varkappa_j}(z)$ матрицы-функции (16).

Разрешая разложения (15) относительно полиномов $p_{ij}, j = 1,2,3$, приходят к равенствам:

$$p_{i1}(z) = (\omega_i^1(z)\Delta_{11}(z) + \omega_i^2(z)\Delta_{21}(z) + \omega_i^3(z)\Delta_{31}(z))/\Delta(z), \tag{17}$$

$$p_{i2}(z) = (\omega_i^1(z)\Delta_{12}(z) + \omega_i^2(z)\Delta_{22}(z) + \omega_i^3(z)\Delta_{32}(z))/\Delta(z), \tag{18}$$

$$p_{i3}(z) = (\omega_i^1(z)\Delta_{13}(z) + \omega_i^2(z)\Delta_{23}(z) + \omega_i^3(z)\Delta_{33}(z))/\Delta(z) \tag{19}$$

$$p(z) = p_{12}(z)p_{23}(z) - p_{13}(z)p_{22}(z) \tag{20}$$

Вводят новые обозначения:

$$\omega_{ij}(z) = \omega_1^i(z)\omega_2^j(z) - \omega_1^j(z)\omega_2^i(z), i,j = 1,2,3; i \neq j \tag{21}$$

$$(\omega_{ij}(z) = -\omega_{ji}(z)),$$

получают:

$$p(z)\Delta(z) = \omega^1_{1,\varkappa_1}(z)\omega_{23}(z) + \omega^2_{1,\varkappa_1}(z)\omega_{31}(z) + \omega^3_{1,\varkappa_1}(z)\omega_{12}(z) \tag{22}$$

Отсюда вытекают равенства:

$$p(z)\Delta(z) = \omega^{1+}_{1,\varkappa_1}(z)\omega^+_{23}(z) + \omega^{2+}_{1,\varkappa_1}(z)\omega^+_{31}(z) + \omega^{3+}_{1,\varkappa_1}(z)\omega^+_{12}(z) \tag{23}$$

$$p(z)\Delta(z) = \omega^{1-}_{1,\varkappa_1}(z)\omega^-_{23}(z) + \omega^{2-}_{1,\varkappa_1}(z)\omega^-_{31}(z) + \omega^{3-}_{1,\varkappa_1}(z)\omega^-_{12}(z) \tag{24}$$

Здесь отмечается одно тождество для введенных функций (21):

$$\omega_i^1(z)\omega_{23}(z) + \omega_i^2(z)\omega_{31}(z) + \omega_i^3(z)\omega_{12}(z) \equiv 0, i = 1,2 \tag{25}$$

Далее переходят к построению первой вектор-функции канонической системы решений (14).

I. Пусть для выбранных решений $\mathbf{w_1}(z), \mathbf{w_2}(z)$ выполняются условия

$$\omega^+_{12}(z) \neq 0, z \in D^+ \cup \Gamma,$$

$$\omega^-_{12}(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}. \tag{26}$$

Исключая из первого и второго краевых условий (12), записанных для $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ компоненту $\omega^{3-}_{1,\varkappa_1}$ согласно

$$p_i(z)\Delta(z) = \omega^1_{i,\varkappa_i}(z)\omega_{23}(z) + \omega^2_{i,\varkappa_i}(z)\omega_{31}(z) + \omega^3_{i,\varkappa_i}(z)\omega_{12}(z), i = 1,2,3 \tag{27}$$

приходят на Γ к задаче линейного сопряжения

$$\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} = \frac{\omega_1^{1+}\omega_2^{2-} - \omega_2^{1+}\omega_1^{2-}}{\omega^-_{12}}\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} + \frac{\omega_2^{1+}\omega_1^{1-} - \omega_1^{1+}\omega_2^{1-}}{\omega^-_{12}}\omega^{2-}_{1,\varkappa_1} + \frac{g_{13}\Delta^- p}{\omega^-_{12}} \tag{28}$$

$$\omega^{2+}_{1,\varkappa_1} = \frac{\omega^{2+}_1\omega^{2-}_2 - \omega^{2+}_2\omega^{2-}_1}{\omega^-_{12}}\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} + \frac{\omega^{2+}_2\omega^{1-}_1 - \omega^{2+}_1\omega^{1-}_2}{\omega^-_{12}}\omega^{2-}_{1,\varkappa_1} + \frac{g_{23}\Delta^- p}{\omega^-_{12}}$$

Вводя новые неизвестные функции

$$\mathbf{\Omega}^+ = (\omega^{1+}_{1,\varkappa_1}, \omega^{2+}_{1,\varkappa_1}), \mathbf{W}^-(t) = (W^{1-}(t), W^{2-}(t)), t \in \Gamma \tag{29}$$

$$W^{1-} = \frac{\omega^{2-}_2\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} - \omega^{1-}_2\omega^{2-}_{1,\varkappa_1}}{\omega^-_{12}}, W^{2-} = -\frac{\omega^{2-}_1\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} - \omega^{1-}_1\omega^{2-}_{1,\varkappa_1}}{\omega^-_{12}} \tag{30}$$

приходят к задаче линейного сопряжения

$$\mathbf{\Omega}^+(t) = F(t)\mathbf{W}^-(t) + f(t), t \in \Gamma \tag{31}$$

с аналитической в D^+ матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} \omega^{1+}_1(t) & \omega^{1+}_2(t) \\ \omega^{2+}_1(t) & \omega^{2+}_2(t) \end{pmatrix}, detF(t) = \omega^+_{12}(t) \neq 0, t \in \Gamma \tag{32}$$

и вектор-функцией

$$\mathbf{f}(t) = (\frac{g_{12}(t)\Delta^-(t)p(t)}{\omega^-_{31}(t)}, \frac{g_{32}(t)\Delta^-(t)p(t)}{\omega^-_{31}(t)}). \tag{33}$$

Если же определитель матрицы-функции обращается в нуль, то метод решения видоизменяется, а именно, приходится применять метод отщепления нулей. И итоговая формула будет иметь другой вид, что будет показано на приведенных ниже примерах.

Полагая на Γ

$$\mathbf{W}^+(t) = F^{-1}(t)\mathbf{\Omega}^+(t) = (W^{1+}(t), W^{2+}(t)), \tag{34}$$

где

$$W^{1+} = \frac{\omega^{2+}_2\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} - \omega^{1+}_2\omega^{2+}_{1,\varkappa_1}}{\omega^+_{12}}, W^{2+} = -\frac{\omega^{2+}_1\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} - \omega^{1+}_1\omega^{2+}_{1,\varkappa_1}}{\omega^+_{12}} \tag{35}$$

придем к задаче "о скачке"

$$\mathbf{W}^+(t) = \mathbf{W}^-(t) + \mathbf{g}(t), t \in \Gamma \tag{36}$$

с вектор функцией $\mathbf{g}(t) = F^{-1}(t)\mathbf{f}(t)$, определенной формулой

$$\mathbf{g} = (\frac{(g_{13}\omega^{2+}_2 - g_{23}\omega^{1+}_2)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}, -\frac{(g_{13}\omega^{2+}_1 - g_{23}\omega^{1+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}). \tag{37}$$

Тогда:

$$\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} = \omega^{1+}_1(P\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_2 - g_{23}\omega^{1+}_2)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{1+}_2(-P\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_1 - g_{23}\omega^{1+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega^{2+}_{1,\varkappa_1} = \omega^{2+}_1(P\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_2 - g_{23}\omega^{2+}_2)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{2+}_2(-P\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_1 - g_{23}\omega^{1+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega^{3+}_{1,\varkappa_1} = (p\Delta^+ - \omega^{1+}_{1,\varkappa_1}\omega^+_{23} - \omega^{2+}_{1,\varkappa_1}\omega^+_{31})/\omega^+_{12} \tag{38}$$

$$\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} = \omega^{1-}_1(-Q\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_2 - g_{23}\omega^{1+}_2)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{1-}_2(Q\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_1 - g_{23}\omega^{1+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega^{2-}_{1,\varkappa_1} = \omega^{2-}_1(-Q\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_2 - g_{23}\omega^{1+}_2)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{2-}_2(Q\left[\frac{(g_{13}\omega^{2+}_1 - g_{23}\omega^{1+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{12}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega^{3-}_{1,\varkappa_1} = (p\Delta^- - \omega^{1-}_{1,\varkappa_1}\omega^-_{23} - \omega^{2-}_{1,\varkappa_1}\omega^-_{31})/\omega^-_{12}$$

Для степени s полинома (20) была получена оценка сверху. Действительно, обозначая через s_{ij} степень полинома $p_{ij}, i = 1,2; j = 1,2,3$, из (15) и свойства канонической системы решений получают $k_i = \max(s_{ij} - \varkappa_j), j = 1,2,3 (p_{ij}(z) \equiv 0$, если $k_i + \varkappa_j < 0)$. Значит, $s_{i2} - \varkappa_2 \le k_i, s_{i3} - \varkappa_3 \le k_i, i = 1,2$. Следовательно, $s \le k_1 + k_2 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = k_1 + k_2 + \varkappa - \varkappa_1 \le k_1 + k_2 + \varkappa + \min(k_1, k_2)$.

Так как первая функция канонической системы решений $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ имеет наинизший возможный порядок на бесконечности, то $-\varkappa_1 < \min(k_1, k_2)$. Поэтому, в общем случае, решение задачи (30), (21), следует искать в классе функций, ограниченных на бесконечности. Если заведомо $-\varkappa_1 < \min(k_1, k_2)$, например, при k_1, k_2 и $\varkappa$, большем нуля, то решение задачи ищем в классе функций, изчезающих на бесконечности.

II. Если выполняются неравенства

$$\omega^+_{12}(z) \equiv 0, \omega^+_{23}(z) \ne 0, z \in D^+ \cup \Gamma,$$

$$\omega^-_{12}(z) \ne 0, z \in \Gamma \cup D^- \setminus \left\{\infty\right\}.$$

Получают:

$$\omega^{2+}_{1,\varkappa_1} = \omega^{2+}_1(P\left[\frac{(g_{23}\omega^{3+}_2 - g_{33}\omega^{2+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{23}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{2+}_2(-P\left[\frac{(g_{23}\omega^{3+}_1 - g_{33}\omega^{2+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{23}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega^{3+}_{1,\varkappa_1} = \omega^{3+}_1(P\left[\frac{(g_{23}\omega^{3+}_2 - g_{33}\omega^{2+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{23}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{3+}_2(-P\left[\frac{(g_{23}\omega^{3+}_1 - g_{33}\omega^{2+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{23}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} = \frac{(p\Delta^+ - \omega^{2+}_{1,\varkappa_1}\omega^+_{31})}{\omega^+_{23}}$$

$$\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} = \omega^{1-}_1(-Q\left[\frac{(g_{23}\omega^{3+}_2 - g_{33}\omega^{2+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{23}\omega^-_{12}}\right] + c) + \omega^{1-}_2(Q\left[\frac{(g_{23}\omega^{3+}_1 - g_{33}\omega^{2+}_1)\Delta^- p}{\omega^+_{23}\omega^-_{12}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}=\omega_1^{2-}(-Q\left[\frac{(g_{23}\omega_2^{3+}-g_{33}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+c)+\omega_2^{2-}(Q\left[\frac{(g_{23}\omega_1^{3+}-g_{33}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}=\frac{(p\Delta^- -\omega_{\varkappa_1}^{1-}\omega_{23}^{-}-\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}\omega_{31}^{-})}{\omega_{12}^{-}}$$

III. Пусть теперь

$$\omega_{12}^{+}(z)\equiv 0,\omega_{23}^{+}(z)\equiv 0,\omega_{31}^{+}(z)\neq 0, z\in D^+\cup\Gamma,$$

$$\omega_{12}^{-}(z)\neq 0, z\in\Gamma\cup D^-\setminus\left\{\infty\right\},$$

тогда,

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+}=\omega_1^{1+}(-P\left[\frac{(g_{13}\omega_2^{3+}-g_{33}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+c)+\omega_2^{1+}(P\left[\frac{(g_{13}\omega_1^{3+}-g_{33}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+}=\omega_1^{3+}(-P\left[\frac{(g_{13}\omega_2^{3+}-g_{33}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+c)+\omega_2^{3+}(P\left[\frac{(g_{13}\omega_1^{3+}-g_{33}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+}=\frac{p\Delta^+}{\omega_{31}^{+}}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-}=\omega_1^{1-}(Q\left[\frac{(g_{13}\omega_2^{3+}-g_{33}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+c)+\omega_2^{1-}(-Q\left[\frac{(g_{13}\omega_1^{3+}-g_{33}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}=\omega_1^{2-}(Q\left[\frac{(g_{13}\omega_2^{3+}-g_{33}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+c)+\omega_2^{2-}(-Q\left[\frac{(g_{13}\omega_1^{3+}-g_{33}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^{+}\omega_{12}^{-}}\right]+d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}=\frac{(p\Delta^- -\omega_{\varkappa_1}^{1-}\omega_{23}^{-}-\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}\omega_{31}^{-})}{\omega_{12}^{-}}$$

IV. Предположим, что для выбранных решений $\mathbf{w_1}(z),\mathbf{w_2}(z)$ выполняются условия:

$$\omega_{12}^{+}(z)\neq 0, z\in D^+\cup\Gamma,$$

$$\omega_{12}^{-}(z)\equiv 0,\omega_{23}^{-}(z)\neq 0, z\in\Gamma\cup D^-\setminus\left\{\infty\right\},$$

тогда,

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+}=\omega_1^{1+}(P\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{2+}-g_{21}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^{+}\omega_{23}^{-}}\right]+c)+\omega_2^{1+}(-P\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{2+}-g_{21}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^{+}\omega_{23}^{-}}\right]+d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \omega_1^{2+}(P\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{2+} - g_{21}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{2+}(-P\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{2+} - g_{21}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \frac{(p\Delta^+ - \omega_{1,\varkappa_1}^{1+}\omega_{23}^+ - \omega_{1,\varkappa_1}^{2+}\omega_{31}^+)}{\omega_{12}^+}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = \omega_1^{2-}(-Q\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{2+} - g_{21}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{2-}(Q\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{2+} - g_{21}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = \omega_1^{3-}(-Q\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{2+} - g_{21}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{3-}(Q\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{2+} - g_{21}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = \frac{(p\Delta^- - \omega_{1,\varkappa_1}^{2-}\omega_{31}^-)}{\omega_{23}^-}$$

V. Пусть для решений $\mathbf{w_1}(z), \mathbf{w_2}(z)$ выполняются условия:

$$\omega_{12}^+(z) \equiv 0, \omega_{23}^+(z) \neq 0 z \in D^+ \cup \Gamma,$$

$$\omega_{12}^-(z) \equiv 0, \omega_{23}^-(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^- \setminus \left\{\infty\right\}.$$

Тогда:

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \omega_1^{2+}(P\left[\frac{(g_{21}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{2+}(-P\left[\frac{(g_{21}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \omega_1^{3+}(P\left[\frac{(g_{21}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{3+}(-P\left[\frac{(g_{21}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = \frac{(p\Delta^+ - \omega_{1,\varkappa_1}^{2+}\omega_{31}^+)}{\omega_{23}^+}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = \omega_1^{2-}(-Q\left[\frac{(g_{21}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{2-}(Q\left[\frac{(g_{21}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = \omega_1^{3-}(-Q\left[\frac{(g_{21}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + c) + \omega_2^{3-}(Q\left[\frac{(g_{21}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = \frac{(p\Delta^- - \omega_{\varkappa_1}^{2-}\omega_{31}^- - \omega_{1,\varkappa_1}^{2-}\omega_{31}^-)}{\omega_{23}^-}$$

VI. Пусть

$$\omega_{12}^{+}(z) \equiv 0, \omega_{23}^{+}(z) \equiv 0, \omega_{31}^{+}(z) \neq 0, z \in D^{+} \cup \Gamma,$$

$$\omega_{12}^{-}(z) \equiv 0, \omega_{23}^{-}(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^{-} \setminus \{\infty\}.$$

Получим

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = \omega_1^{1+}(-P\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{1+}(P\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \omega_1^{3+}(-P\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{3+}(P\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \frac{p\Delta^{+}}{\omega_{31}^{+}}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = \omega_1^{2-}(Q\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{2-}(-Q\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = \omega_1^{3-}(Q\left[\frac{(g_{11}\omega_2^{3+} - g_{31}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{3-}(-Q\left[\frac{(g_{11}\omega_1^{3+} - g_{31}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{31}^{+}\omega_{23}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = \frac{(p\Delta^{-} - \omega_{1,\varkappa_1}^{2-}\omega_{31}^{-})}{\omega_{23}^{-}}$$

VII. Если для решений $\mathbf{w_1}(z), \mathbf{w_2}(z)$ выполняются условия:

$$\omega_{12}^{+}(z) \neq 0, z \in D^{+} \cup \Gamma,$$

$$\omega_{12}^{-}(z) \equiv 0, \omega_{23}^{-}(z) \equiv 0, \omega_{31}^{-}(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^{-} \setminus \{\infty\}.$$

Тогда:

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = \omega_1^{1+}(P\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{2+} - g_{22}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{12}^{+}\omega_{31}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{1+}(-P\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{2+} - g_{22}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{12}^{+}\omega_{31}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \omega_1^{2+}(P\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{2+} - g_{22}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{12}^{+}\omega_{31}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{2+}(-P\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{2+} - g_{22}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{12}^{+}\omega_{31}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \frac{p\Delta^{+} - \omega_{1,\varkappa_1}^{1+}\omega_{23}^{+} - \omega_{1,\varkappa_1}^{2+}\omega_{31}^{+}}{\omega_{12}^{+}}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = \omega_1^{1-}(-Q\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{2+} - g_{22}\omega_2^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{12}^{+}\omega_{31}^{-}}\right] + c) + \omega_2^{1-}(Q\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{2+} - g_{22}\omega_1^{1+})\Delta^{-}p}{\omega_{12}^{+}\omega_{31}^{-}}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = \omega_1^{3-}(-Q\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{2+} - g_{22}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{3-}(Q\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{2+} - g_{22}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{12}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = \frac{p\Delta^-}{\omega_{31}^-}$$

VIII. Если для выбранных решений $\mathbf{w_1}(z), \mathbf{w_2}(z)$ выполняются условия:

$$\omega_{12}^+(z) \equiv 0, \omega_{23}^+(z) \neq 0, z \in D^+ \cup \Gamma,$$

$$\omega_{12}^-(z) \equiv 0, \omega_{23}^-(z) \equiv 0, \omega_{31}^-(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}.$$

Тогда условия:

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \omega_1^{2+}(P\left[\frac{(g_{22}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{2+}(-P\left[\frac{(g_{22}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \omega_1^{3+}(P\left[\frac{(g_{22}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{3+}(-P\left[\frac{(g_{22}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = \frac{(p\Delta^+ - \omega_{1,\varkappa_1}^{2+}\omega_{31}^+)}{\omega_{23}^+}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = \omega_1^{1-}(-Q\left[\frac{(g_{22}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{1-}(Q\left[\frac{(g_{22}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = \omega_1^{3-}(-Q\left[\frac{(g_{22}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{3-}(Q\left[\frac{(g_{22}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{2+})\Delta^- p}{\omega_{23}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = \frac{p\Delta^-}{\omega_{31}^-}$$

IX. Пусть, наконец, выполняются условия:

$$\omega_{12}^+(z) \equiv 0, \omega_{23}^+(z) \equiv 0, \omega_{31}^+(z) \neq 0, z \in D^+ \cup \Gamma,$$

$$\omega_{12}^-(z) \equiv 0, \omega_{23}^-(z) \equiv 0, \omega_{31}^-(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\},$$

получаем:

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = \omega_1^{1+}(-P\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{1+}(P\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \omega_1^{3+}(-P\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{3+}(P\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \frac{p\Delta^+}{\omega_{31}^+}$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = \omega_1^{1-}(Q\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{1-}(-Q\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = \omega_1^{3-}(Q\left[\frac{(g_{12}\omega_2^{3+} - g_{32}\omega_2^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + c) + \omega_2^{3-}(-Q\left[\frac{(g_{12}\omega_1^{3+} - g_{32}\omega_1^{1+})\Delta^- p}{\omega_{31}^+\omega_{31}^-}\right] + d),$$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = \frac{p\Delta^-}{\omega_{31}^-}$$

Для второй и третьей вектор-функций канонической системы решений (14) при выполнении, например, условий (26) оказывается справедливым представление (38), в котором $p(z)$, c и d - некоторые полиномы, для степеней которых указана оценка сверху. Поэтому вектор-функция $\mathbf{w}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z)$ определяется из соответствующего представления (38) как имеющая на бесконечности порядок больше или равный $-\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z)$, домноженной на любой полином. Третья вектор-функция канонической системы решений (14) может быть найдена из того же представления, как имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2$ и не связанная с вектор-функциями $\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z)$ и $\mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z)$ никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами.

2. Метод решения задачи линейного сопряжения для двумерного вектора при известном частном решении задачи.

В работе научного руководителя [3] предложен метод построения канонической ситемы решений в задаче линейного сопряжения для двумерного вектора по одному известному решению задачи. Построение канонической системы решений в ней сводилось к решению пяти скалярных задач линейного сопряжения и определенного числа линейных алгебраических систем, которые могли возникать из условия разрешимости этих задач. В дипломной работе было предложено применить метод решения задач линейного сопряжения для трехмерного вектора к задаче для двумерного вектора.

Рассмотрим однородную задачу линейного сопряжения для двумерного вектора с матрицей-функцией

$$\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}, t \in \Gamma.$$

Очевидно, если $\mathbf{w}(z) = (\omega^1(z), \omega^2(z))$ - кусочно-мероморфное решение этой задачи, то $\mathbf{w}(z) = (\omega^1(z), \omega^2(z), r(z))$, где $r(z)$ - рациональная функция, будет решением однородной задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & 0 \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \Gamma.$$

Так как $\mathbf{w}_1(z) = (0, 0, r(z))$ является решением задачи с этой матрицей-функцией заключается, что наличие кусочно-мероморфного решения задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией позволяет построить её каноническую систему решений. Поэтому результат может служить другим методом построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для двумерного вектора по её кусочно-мероморфному решению.

Реализацию предложенного метода покажем на приведенных примерах.

2.1. Пример 1.

Матрица-функция мероморфно продолжима в область $D^+ : |z| < 1$ и имеет вид

$$G(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t \\ \frac{t}{\sin t} & 2 \end{pmatrix}$$

$(\Delta(t) = t(\Delta^+(t) = 1, \Delta^-(t) = \frac{1}{t}, t \in \Gamma : |t| = 1))$. В данном случае фактически можно говорить об аналитической продолжимости указанной матрицы-функции в область $|z| < 1$, так как её элемент $\frac{t}{sint}$ допускает аналитическое продолжение при помощи доопределения функции $\frac{z}{\sin z}$ в её устранимой особой точке $z = 0$. Решение в данном случае легко подбирается. Полагая на Γ $\mathbf{w}^-(t) = (1, 0)$, из краевых условий (2) можно найти

$$\mathbf{w}^+(t) = (t, t/\sin t).$$

Перейдем к задаче линейного сопржения с матрицей-функцией

$$G(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t & 0 \\ \frac{t}{\sin t} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Для неё решение двумерной задачи определяет следующее решение

$$\mathbf{w_1^-}(t) = (1, 0, t)$$
$$\mathbf{w_1^+}(t) = (t, t/\sin t, t)$$

За второе решение задачи возьмем

$$\mathbf{w_2^-}(t) = (0, 0, 1)$$
$$\mathbf{w_2^+}(t) = (0, 0, 1)$$

Порядки компонент решения на бесконечности равны $k_1 = 1, k_2 = 0$ и реализуется случай 9.

Для разностей (21) выполняются условия:

$$\omega_{12}^+(z) \equiv 0, \omega_{31}^+(z) \neq 0, z \in D^+ \cup \Gamma,$$

$$\omega_{12}^-(z) \equiv 0, \omega_{23}^-(z) \equiv 0, \omega_{31}^-(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$$

Исключая из первого и второго краевых условий (12) записанных для $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ компоненту $\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}$ согласно (27) приходят на Γ к задаче линейного сопряжения

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = \frac{\omega_2^{1+}\omega_1^{3-} - \omega_1^{1+}\omega_2^{3-}}{\omega_{31}^-}\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} + \frac{\omega_1^{1+}\omega_2^{1-} - \omega_2^{1+}\omega_1^{1-}}{\omega_{31}^-}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} + \frac{g_{12}\Delta^- p}{\omega_{31}^-}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \frac{\omega_2^{3+}\omega_1^{3-} - \omega_1^{3+}\omega_2^{3-}}{\omega_{31}^-}\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} + \frac{\omega_1^{3+}\omega_2^{1-} - \omega_2^{3+}\omega_1^{1-}}{\omega_{31}^-}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} + \frac{g_{32}\Delta^- p}{\omega_{31}^-}$$

в котором $g_{12} = \sin t$ и $g_{32} = 0$.

Вводя новые неизвестные функции

$$\mathbf{\Omega}^+ = (\omega_{1,\varkappa_1}^{1+}, \omega_{1,\varkappa_1}^{3+}), \mathbf{W}^-(t) = (W^{1-}(t), W^{3-}(t)), t \in \Gamma,$$

где

$$W^{1-} = \frac{-\omega_2^{3-}\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} + \omega_2^{1-}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}}{\omega_{31}^-}, W^{3-} = \frac{\omega_1^{3-}\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} - \omega_1^{1-}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}}{\omega_{31}^-}$$

находим:

$$W^{1-} = \omega_{1,\varkappa_1}^{1-}$$
$$W^{2-} = -t\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} + \omega_{1,\varkappa_1}^{3-}.$$

Приходим к задаче линейного сопряжения

$$\mathbf{\Omega}^{+}(t) = F(t)\mathbf{W}^{-}(t) + f(t), t \in \Gamma$$

с аналитической в D^{+} матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} \omega_1^{1+}(t) & \omega_2^{1+}(t) \\ \omega_1^{3+}(t) & \omega_2^{3+}(t) \end{pmatrix}, detF(t) = \omega_{12}^{+}(t), t \in \Gamma$$

и вектор-функцией

$$\mathbf{f}(t) = (\frac{g_{12}(t)\Delta^{-}(t)p(t)}{\omega_{31}^{-}(t)}, \frac{g_{32}(t)\Delta^{-}(t)p(t)}{\omega_{31}^{-}(t)}).$$

Матрица-функция $F(t)$ и вектор-функция $\mathbf{f}(t)$ имеют вид:

$$F(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin t}{t}p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как эта матрица-функция $F(t)$ обращается в нуль, нужно использовать метод отщепления нулей. Для этого рассмотрим матрицу $V(t)$, которая имеет вид

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $F_1(t)$ матрицу-функцию:

$$F_1(t) = F(t)V(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная к матрице-функцие $F_1(t)$ будет иметь вид:

$$F_1^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t+1 & -t \end{pmatrix},$$

Полагая на Γ

$$\begin{gathered} \mathbf{W}_1^{+}(t) = F_1^{-1}(t)\mathbf{\Omega}^{+}(t) = (W_1^{1+}(t), W_1^{3+}(t)), \\ \mathbf{W}_1^{-}(t) = V^{-1}(t)\mathbf{W}^{-}(t) \end{gathered} \tag{40}$$

придем к задаче "о скачке"

$$\mathbf{W}_1^{+}(t) = \mathbf{W}_1^{-}(t) + \mathbf{g}(t), t \in \Gamma$$

с вектор функцией $\mathbf{g}(t) = F_1^{-1}(t)\mathbf{f}(t)$:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t+1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sin t}{t}p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t}p \\ -\frac{(t+1)\sin t}{t}p \end{pmatrix}$$

В силу (40), решение задачи ищем в классе функций, с полюсом на бесконечности. Вычислим операторы

$$P\left[\frac{\sin t}{t}p\right] = a_1 t\sin t + a_2\sin t + \frac{\sin t}{t}a_3$$

$$P\left[-\frac{(t+1)\sin t}{t}p\right] = a_1 t^2\sin t + a_2 t\sin t + a_3\sin t + a_1 t\sin t + a_2\sin t + \frac{\sin t}{t}a_3$$

$$Q\left[\frac{\sin t}{t}p\right] = 0$$

$$Q\left[-\frac{(t+1)\sin t}{t}p\right] = 0$$

Тогда на Γ

$$W_1^{1+} = P\left[\frac{\sin t}{t}p\right] + c_1 t + c_2$$

$$W_1^{3+} = P\left[-\frac{(t+1)\sin t}{t}p\right] + d_1 t + d_2$$

$$W_1^{1-} = -Q\left[\frac{\sin t}{t}p\right] + c_1 t + c_2$$

$$W_1^{3-} = -Q\left[-\frac{(t+1)\sin t}{t}p\right] + d_1 t + d_2$$

Таким образом $\mathbf{\Omega}^+ = F_1(t)\mathbf{W}_1^+(t)$

$$\mathbf{W}^-(t) = V(t)\mathbf{W}_1^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ d_1 t + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 + d_1 + \frac{d_2}{t} \\ c_1 t + c_2 \end{pmatrix}$$

Тогда представление для компоненты $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ канонической системы решений задачи линейного сопряжения принимают на Γ следующий вид.

$$\begin{aligned} \omega_{1,\varkappa_1}^{1-} &= c_1 t + c_2 + d_1 + \frac{d_2}{t} \\ \omega_{1,\varkappa_1}^{3-} &= c_1 t + c_2 + c_1 t^2 + c_2 t + d_1 t + d_2 \\ \omega_{1,\varkappa_1}^{2-} &= -a_1 t - a_2 - \frac{c}{t} \end{aligned} \tag{41}$$

Потребуем, чтобы функции (41) имели самый низкий из возможных порядков на бесконечности. Придем к равенствам:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 + d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = -c_2 = d,$$

$$c_2 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -c_2 = d.$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

Так (41) примут вид:

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} = -d + d + \frac{d}{t} = \frac{d}{t}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} = -\frac{c}{t}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} = -d + d = 0$$

Для определения компоненты $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}^{+}(z)$ воспользуемся формулой $\mathbf{\Omega}^{+} = F_1(t)\mathbf{W}^{+}(t)$, применяя её:

$$\mathbf{\Omega}^{+} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t}p - d \\ -\frac{(t+1)\sin t}{t}p + dt + d \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} p\sin t - dt - \frac{(t+1)\sin t}{t}p + dt + d \\ \frac{(t+1)\sin t}{t}p - dt - d - \frac{(t+1)\sin t}{t}p + dt + d \end{pmatrix}$$

Тогда на Γ

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = -\frac{\sin t}{t}c + d$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = -\frac{c}{t} + \frac{d}{\sin t} - \frac{c}{t}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = 0$$

Проверка осуществляется подстановкой в краевые условия для $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{1+} = t\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} + \sin t\,\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \frac{t}{\sin t}\omega_{1,\varkappa_1}^{1-} + 2\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \omega_{1,\varkappa_1}^{3-}$$

$$-\frac{\sin t}{t}c + d = t\frac{d}{t} - \sin t\frac{c}{t}$$
$$-\frac{c}{t} + \frac{d}{\sin t} - \frac{c}{t} = \frac{t}{\sin t}\frac{d}{t} - 2\frac{c}{t}$$
$$0 = 0$$

Легко видеть, что компонента $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}^{2+}(z)$ в указанном представлении для первой вектор-функции канонической системы решений в точке $z = 0$ может иметь полюс, который следует исключить за счет набора постоянных c и d. Справедливы следующие разложения.

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + ...$$

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t(1-\frac{t^2}{3!}+...)} = \frac{1}{t}(b_0+b_1t+...)$$

$$1 = (1-\frac{t^2}{3!}+...)(b_0+b_1t+...)$$

$$b_0 = 1$$

$$\frac{c}{\sin t} = \frac{c}{t}+b_2c+...$$

$$d = 2c$$

Учитывая полученное равенство:

$$\mathbf{w}^{-}_{1,\varkappa_1}(z) = (\frac{2c}{z}, -\frac{c}{z}, 0), z \in D^-$$

$$\mathbf{w}^{+}_{1,\varkappa_1}(z) = (\frac{c(2z-\sin z)}{z}, \frac{2c(z-\sin z)}{z\sin z}, 0), z \in D^+$$

Т.к. суммарный индекс задачи с матрицей-функцией (39) равен $\varkappa = 1$, то вторую вектор-функцию $\mathbf{w}_{2,\varkappa_2}(z)$ ищем из (41) как имеющую нулевой порядок на бесконечности:

$$\omega^{1-}_{2,\varkappa_2} = c_1t+c_2+d_1+\frac{d_2}{t}$$

$$\omega^{3-}_{2,\varkappa_2} = c_1t+c_2+c_1t^2+c_2t+d_1t+d_2$$

$$\omega^{2-}_{2,\varkappa_2} = -a_1t-a_2-\frac{c}{t}$$

Получаем

$$c_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$c_2+d_1 = 0$$

Примимая во внимание вышеперечисленное:

$$\omega^{1-}_{2,\varkappa_2} = \frac{d_2}{t}$$

$$\omega^{3-}_{2,\varkappa_2} = c_2+d_2$$

$$\omega^{2-}_{2,\varkappa_2} = -a_2-\frac{c}{t}$$

Так как произвол в выборе вектор-функции канонической системы решений определяет формула (8) положим $c_2 = d_1 = 0$. Вектор-функцию $\mathbf{w}^{+}_{2,\varkappa_2}(z)$ задачи линейного сопряжения ищем как и первую вектор-функцию $\mathbf{w}^{+}_{1,\varkappa_1}(z)$:

$$\bar{\Omega}^+ = \begin{pmatrix} t & 1 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t}p+c_1t+c_2 \\ -\frac{(t+1)\sin t}{t}p+d_1t+d_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p\sin t + c_1t^2 + c_2 - \frac{(t+1)\sin t}{t}p + d_1t + d_2 \\ \frac{(t+1)\sin t}{t}p + c_1t^2 + c_2t + c_1t + c_2 - \frac{(t+1)\sin t}{t}p + d_1t + d_2 \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\omega^{1+}_{2,\varkappa_2} = -\frac{\sin t}{t}c + d_2 - a_2\sin t$$

$$\omega^{2+}_{2,\varkappa_2} = -2a_2 - \frac{2c}{t} + \frac{d_2}{\sin t}$$

$$\omega^{3+}_{2,\varkappa_2} = d_2$$

Так как компоненты $\mathbf{w}^{2+}_{2,\varkappa_2}(z)$ в точке $z = 0$ может иметь полюс который следует исключить.

$$\omega^{1-}_{2,\varkappa_2} = \frac{d_2}{t}$$

$$\omega^{3-}_{2,\varkappa_2} = d_2$$

$$\omega^{2-}_{2,\varkappa_2} = -a_2 - \frac{c}{t}$$

Рассмотрим разложения

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - ...)}$$

$$1 = (1 - \frac{t^2}{3!} + ...)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ...)$$

$$t^0 : 1 = a_0$$

$$t : 0 = a_1$$

$$t^2 : 0 = a_2 - \frac{a_0}{3!}$$

$$\frac{1}{t} : 0 = -2c + d_2$$

$$d_2 = 2c$$

Тогда:

$$\omega^{1-}_{2,\varkappa_2} = \frac{2c}{t}$$

$$\omega^{3-}_{2,\varkappa_2} = 2c$$

$$\omega^{2-}_{2,\varkappa_2} = -a_2 - \frac{c}{t}$$

$$\omega^{1+}_{2,\varkappa_2} = -\frac{\sin t}{t}c + 2c - a_2\sin t$$

$$\omega^{2+}_{2,\varkappa_2} = -2a_2 - \frac{2c}{t} + \frac{2}{\sin t}$$

$$\omega^{3+}_{2,\varkappa_2} = 2c$$

Таким образом, вторая вектор-функция имеет вид:

$$\mathbf{w}^-_{2,\varkappa_2}(z) = (\frac{2c}{z}, -a_2 - \frac{c}{z}, 2c), z \in D^-$$

$$\mathbf{w}^+_{2,\varkappa_2}(z) = (-\frac{\sin z}{z} + 2c - a_2 \sin z, -2a_2 - \frac{2c}{z} + \frac{2}{\sin z}, 2c), z \in D^+$$

Третья вектор-функция канонической системы решений (14) может быть найдена из того же представления, как имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2$ и не связанная с вектор-функциями $\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z)$ и $\mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z)$ никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами. В нашем случае получаем:

$$\mathbf{w}^-_{3,\varkappa_3}(z) = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{w}^+_{3,\varkappa_3}(z) = (0, 0, 1)$$

Сделаем проверку. Для этого подставим представления для функции канонической системы решений задачи линейного сопряжения в матрицу.

$$X^- = \begin{pmatrix} \frac{2c}{t} & \frac{2c}{t} \\ -\frac{c}{t} & -a_2 - \frac{c}{t} \end{pmatrix} = -\frac{2a_2}{t}c \neq 0$$

$$X^+ = \begin{pmatrix} \frac{c(2t-\sin t)}{t} & -\frac{c \sin t}{t} + 2c - a_2 \sin t \\ \frac{2c(t-\sin t)}{t \sin t} & -2a_2 - \frac{2c}{t} + \frac{2}{\sin t}c \end{pmatrix} = -2a_2 c \neq 0$$

2.2. Пример 2.

Возьмем на Γ $\mathbf{w}^-(t) = (0, 1)$, из краевых условий (3) находим

$$\mathbf{w}^+(t) = (\sin t, 2).$$

Перейдем к задаче линейного сопржения с матрицей-функцией

$$G(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t & 0 \\ \frac{t}{\sin t} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для неё решение двумерной задачи определяет следующее решение

$$\mathbf{w}^-_\mathbf{1}(t) = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{w}^+_\mathbf{1}(t) = (\sin t, 2, 0).$$

За второе решение возьмем такие решения, что и в случае 1:

$$\mathbf{w}^-_\mathbf{2}(t) = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{w}^+_\mathbf{2}(t) = (0, 0, 1).$$

Порядки компонент решения на бесконечности равны $k_1 = 1, k_2 = 0$ и реализуется случай:

$$\omega_{12}^{+}(z) \equiv 0, \omega_{23}^{+}(z) \neq 0, z \in D^{+} \cup \Gamma, \tag{42}$$
$$\omega_{12}^{-}(z) \equiv 0, \omega_{23}^{-}(z) \neq 0, z \in \Gamma \cup D^{-} \setminus \{\infty\}$$

Записывают второе и третье краевые условия (12) для $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ компоненту $\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}(z)$, учитывая условия (42) и (24). Получают:

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = g_{21}\frac{(\Delta^{-}p - \omega_{31}^{-}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-})}{\omega_{23}^{-}} + g_{22}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} + g_{23}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-},$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = g_{31}\frac{(\Delta^{-}p - \omega_{31}^{-}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-})}{\omega_{23}^{-}} + g_{32}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} + g_{33}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}.$$

Преобразуем эти краевые условия, используя формулы

$$g_{i2}\omega_{23}^{-} - g_{i1}\omega_{31}^{-} = \omega_1^{i+}\omega_2^{3-} - \omega_2^{i+}\omega_1^{3-}, i = 1, 2, 3,$$
$$g_{i3}\omega_{23}^{-} = \omega_2^{i+}\omega_1^{2-} - \omega_1^{i+}\omega_2^{2-}, i = 1, 2, 3,$$

При $i = 2, 3$, приходим к задаче линейного сопряжения

$$\omega_{1,\varkappa_1}^{2+} = \frac{\omega_1^{2+}\omega_2^{3-} - \omega_2^{2+}\omega_1^{3-}}{\omega_{23}^{-}}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} + \frac{\omega_2^{2+}\omega_1^{2-} - \omega_1^{2+}\omega_2^{2-}}{\omega_{23}^{-}}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} + \frac{g_{21}\Delta^{-}p}{\omega_{23}^{-}}$$
$$\omega_{1,\varkappa_1}^{3+} = \frac{\omega_1^{3+}\omega_2^{3-} - \omega_2^{3+}\omega_1^{3-}}{\omega_{23}^{-}}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} + \frac{\omega_2^{3+}\omega_1^{2-} - \omega_1^{3+}\omega_2^{2-}}{\omega_{23}^{-}}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-} + \frac{g_{31}\Delta^{-}p}{\omega_{23}^{-}}$$

Вводя вектор-функции

$$\mathbf{\Omega}^{+} = (\omega_{1,\varkappa_1}^{2+}, \omega_{1,\varkappa_1}^{3+})$$

и

$$W^{2-} = \frac{\omega_2^{3-}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} - \omega_2^{2-}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}}{\omega_{23}^{-}},$$
$$W^{3-} = -\frac{\omega_1^{3-}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-} - \omega_1^{2-}\omega_{1,\varkappa_1}^{3-}}{\omega_{23}^{-}},$$

В нашем случае

$$W^{2-} = \omega_{1,\varkappa_1}^{2-}, W^{3-} = \omega_{1,\varkappa_1}^{3-}$$

получают задачу (29) с матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} \omega_1^{2+}(t) & \omega_2^{2+}(t) \\ \omega_1^{3+}(t) & \omega_2^{3+}(t) \end{pmatrix}, \det F(t) = \omega_{23}^{+}(t) \neq 0, t \in \Gamma$$

и вектор-функцией

$$\mathbf{f}(t)=(\frac{g_{21}(t)\Delta^-(t)p(t)}{\omega_{23}^-(t)},\frac{g_{31}(t)\Delta^-(t)p(t)}{\omega_{23}^-(t)}).$$

Матрица-функция $F(t)$ и вектор-функция $\mathbf{f}(t)$ имеют вид:

$$F(t)=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\det F(t)=2\neq 0,t\in\Gamma,$$

$$\mathbf{f}(t)=\begin{pmatrix}\frac{p}{\sin t}\\0\end{pmatrix}.$$

Обратная к матрице-функцие $F(t)$ будет иметь вид:

$$F^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix},$$

а вектор-функция $\mathbf{g}(t)$

$$\mathbf{g}(t)=F^{-1}(t)\mathbf{f}(t)=(\frac{(g_{21}\omega_2^{3+}-g_{31}\omega_2^{2+})\Delta^-p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-},-\frac{(g_{21}\omega_1^{3+}-g_{31}\omega_1^{2+})\Delta^-p}{\omega_{23}^+\omega_{23}^-}).$$

Вычислим операторы

$$W^{2+}=P\left[\frac{p}{2\sin t}\right]+c_1t+c_2=\frac{p}{2\sin t}-\frac{p}{2t}+\frac{at}{2}+\frac{b}{2}+c_1t+c_2,$$
$$W^{3+}=P[0]+d_1t+d_2=d_1t+d_2,$$
$$W^{2-}=-Q\left[\frac{p}{2\sin t}\right]+c_1t+c_2=-\frac{d}{2t}+c_1t+c_2,$$
$$W^{3-}=-Q[0]+d_1t+d_2=d_1t+d_2.$$

В классе кусочно-аналитических функций, ограниченных на бесконечности, для определения первой функции канонической системы решений (14). Получают представление для первой вектор-функции, определенной в V во введении.

Используя эти представления для компонент $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$ канонической системы решений задачи линейного сопряжения на Γ получаем

$$\begin{aligned}\omega_{1,\varkappa_1}^{2-}&=-\frac{d}{2t}+c_1t+c_2,\\ \omega_{1,\varkappa_1}^{3-}&=d_1t+d_2,\\ \omega_{1,\varkappa_1}^{1-}&=\frac{p}{t}=at+b+\frac{d}{t}.\end{aligned}\tag{43}$$

Потребуем, чтобы функции (43) имели самый низкий из возможных порядков на бесконечности. Придем к равенствам:

$$c_1=0,$$
$$c_2=0,$$

$$d_1 = 0,$$
$$d_2 = 0,$$
$$a = 0,$$
$$b = 0.$$

(43) примут вид:

$$\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} = \frac{d}{t},$$
$$\omega^{2-}_{1,\varkappa_1} = -\frac{d}{2t},$$
$$\omega^{3-}_{1,\varkappa_1} = 0.$$

Для определения $\mathbf{w}^{+}_{1,\varkappa_1}(z)$ воспользуемся формулой $\mathbf{\Omega}^{+} = F(t)\mathbf{W}^{+}(t)$. Тогда на Γ найдем:

$$\mathbf{\Omega}^{+} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{2\sin t} - \frac{p}{2t} + \frac{at}{2} + \frac{b}{2} + c_1 t + c_2 \\ d_1 t + d_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{p}{\sin t} - \frac{p}{t} + at + b + 2c_1 t + 2c_2 \\ d_1 t + d_2 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\omega^{2+}_{1,\varkappa_1} = \frac{d(t - \sin t)}{t \sin t},$$
$$\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} = \frac{d(2t - \sin t)}{2t},$$
$$\omega^{3+}_{1,\varkappa_1} = 0.$$

Проверка осуществляется подстановкой в краевые условия для $\mathbf{w}_{1,\varkappa_1}(z)$

$$\omega^{1+}_{1,\varkappa_1} = t\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} + \sin t\,\omega^{2-}_{1,\varkappa_1}$$
$$\omega^{2+}_{1,\varkappa_1} = \frac{t}{\sin t}\omega^{1-}_{1,\varkappa_1} + 2\omega^{2-}_{1,\varkappa_1}$$
$$\omega^{3+}_{1,\varkappa_1} = \omega^{3-}_{1,\varkappa_1},$$

Это приводит к тождествам

$$\frac{d(2t - \sin t)}{2t} = \frac{d(2t - \sin t)}{2t}$$
$$\frac{d(t - \sin t)}{t \sin t} = \frac{d(t - \sin t)}{t \sin t}$$
$$0 = 0$$

Заменяя d на $2d$:

$$\mathbf{w}^-_{1,\varkappa_1}(z)=(\frac{2d}{z},-\frac{d}{z},0), z\in D^-,$$
$$\mathbf{w}^+_{1,\varkappa_1}(z)=(\frac{d(2z-\sin z)}{z},\frac{2d(z-\sin z)}{z\sin z},0), z\in D^+.$$

Так как суммарный индекс задачи с матрицей-функцией (39) равен $\varkappa-1$, то вторую вектор-функцию $\mathbf{w}_{2,\varkappa_2}(z)$ ищем из (43) как имеющую нулевой порядок на бесконечности

$$\omega^{2-}_{2,\varkappa_2}=-\frac{d}{t}+c_1t+c_2,$$
$$\omega^{3-}_{2,\varkappa_2}=d_1t+d_2,$$
$$\omega^{1-}_{2,\varkappa_2}=\frac{p}{t}=at+b+\frac{2d}{t}.$$

Тогда

$$c_1=0,$$
$$a=0,$$
$$d_1=0$$

и для компонент $\mathbf{w}^-_{2,\varkappa_2}(z)$ получем на Γ представление.

$$\omega^{1-}_{2,\varkappa_2}=b+\frac{2d}{t},$$
$$\omega^{3-}_{2,\varkappa_2}=d_2,$$
$$\omega^{2-}_{2,\varkappa_2}=-\frac{d}{t}+c_2.$$

Представление для вектор-функций $\mathbf{w}^+_{2,\varkappa_2}(z)$ задачи линейного сопряжения ищем как и выше:

$$\mathbf{\Omega}^+=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{p}{2\sin t}-\frac{p}{2t}+\frac{b}{2}+c_2\\ d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{p}{\sin t}-\frac{p}{t}+b+2c_2\\ d_2\end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\omega^{1+}_{2,\varkappa_2}=bt+\frac{3d}{2}+c_2\sin t-dt\sin t-\frac{d}{t},$$
$$\omega^{2+}_{2,\varkappa_2}=\frac{bt}{\sin t}+\frac{2d}{\sin t}+b+2c_2-2dt-b-\frac{2d}{t},$$
$$\omega^{3+}_{2,\varkappa_2}=d_2.$$

или в векторной форме

$$\mathbf{w}^-_{2,\varkappa_2}(z)=(\frac{2d}{z}+b,-\frac{d}{z}+c_2,d_2), z\in D^-,$$

$$\mathbf{w}^{+}_{2,\varkappa_2}(z) = (bz + \frac{3d}{2} + c_2 \sin z - dz \sin z - \frac{d}{z}, \frac{bz}{\sin z} + \frac{2d}{\sin z} + b + 2c_2 - 2dz - b - \frac{2d}{z}, d_2), z \in D^{+}.$$

Третья вектор-функция канонической системы решений (14) может быть найдена из того же представления, как имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2$ и не связанная с вектор-функциями $\mathbf{w}_{\mathbf{1},\varkappa_\mathbf{1}}(z)$ и $\mathbf{w}_{\mathbf{2},\varkappa_\mathbf{2}}(z)$ никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами. В нашем случае:

$$\omega^{-}_{3,\varkappa_3} = (0, 0, 1),$$
$$\omega^{+}_{3,\varkappa_3} = (0, 0, 1).$$

Проверка того, что построение вектор-функции образует каноническую систему решений, проводится как в случае 1.

3. Заключение.

В дипломной работе рассмотрен метод построения канонической системы решений для двумерного вектора при наличии одного частного решения задачи, основанном на придложенном в работе [2] методе построения канонической системы решений задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора при наличии двух решений задачи, для которых разности (21) удовлетворяют условиям перечисленным в случаях I - IX и были получены представления для функций канонической системы решений, основываясь на том, что определитель соответствующей, аналитической в области D^+ матрицы-функции вида (32) для случая I был отличен в D^+ от нуля. В случае наличия у этого определителя нулей схема решения усложняется и вид полученных представлений должен быть иным. Что и было показано на рассмотренных в дипломной работе примерах.

4. Список литературы.

[1] Н. П. Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Наука, М., 1970. 379 с.

[2] С. Н. Киясов. Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме. СМЖ, том 56, №2, 2015. 389–408 с.

[3] С. Н. Киясов. Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме. Изв. Вузов. Матем., №1, 2013. 3–20 с.