Кольца формальных матриц и их изоморфизмы

Тапкин Данил Тагирзянович
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Абызов Адель Наилевич
Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Казань - 2017

Введение

Теорема Нётер-Сколема (Сколем – 1927, Нётер – 1933)

Пусть A – простая k-алгебра, B – конечномерная простая центральная k-алгебра. Тогда если $f, g : A \to B$ – некоторые гомоморфизмы, то существует внутренний автоморфизм α алгебры B, такой что $\alpha \circ f = g$.

Следствие

Пусть F – поле, $n \in \mathbb{N}$. Тогда все автоморфизмы алгебры $M_n(F)$ внутренние.

Пусть R – коммутативное кольцо и $A = M_n(R)$ – матричная алгебра.

$$\mathrm{SN}_n(R) = \mathrm{Aut}_R(A)/\mathrm{Inn}_R(A)$$

Теорема (Isaacs, 1980)

Пусть кольцо R коммутативно и $n \geq 0$. Тогда

1. группа $\mathrm{SN}_n(R)$ абелева;
2. $x^n = 1$ для всех $x \in \mathrm{SN}_n(R)$.

Isaacs, 1980

Пусть кольцо R коммутативно и $n \geq 0$. Тогда

1. если R – UFD (факториальное кольцо), то $\mathrm{SN}_n(R) = 1$;
2. есть пример дедекиндова кольца R, что $\mathrm{SN}_n(R) \neq 1$;
3. если G – абелева группа, такая что $g^n = 1$ для всех $g \in G$, то найдется дедекиндово кольцо R, такое что $G \cong \mathrm{SN}_n(R)$

Теорема (Kezlan, 1990)

Пусть кольцо R коммутативно и $n \geq 0$. Тогда все автоморфизмы кольца $T_n(R)$ внутренние.

Пусть R, S – коммутативные кольца.

$$M_2(R) \cong M_2(S) \quad \Leftrightarrow \quad R \cong S$$

Swan 1962 – контрпример для некоммутативных колец.

Dascalescu, van Wyk, 1996

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong$$
$$\cong \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong R.$$

Rota, 1964 – алгебры инцидентности $I(X, R)$.

Теорема (Stanley, 1970)

Пусть F – поле, X, Y – два локально конечных частично-упорядоченных множества. Тогда если F-алгебры $I(X, F)$ и $I(Y, F)$ изоморфны, то изоморфны и порядки X и Y.

Belding, 1973 – предпорядки, один из них конечен, F – поле

Начев, 1977 – предпорядки, R – простое правое артиново

Voss, 1980

Haack 1984

Dascalescu, van Wyk, 1996

Abrams, Haefner, del Rio, 2002

Теорема (Parmenter, Schmerl, Spiegel, 1990)

Пусть X, Y – два локально конечных частично-упорядоченных множества. Тогда X и Y потенциально изоморфны тогда и только тогда, когда существует коммутативное кольцо R, что $I(X, R) \cong I(Y, R)$.

Пусть X и Y – два тривиально упорядоченных множества и S – множество всех частичных изоморфизмов с конечной областью определения. Тогда S – потенциальный изоморфизм X и Y.

Теорема (Parmenter, Schmerl, Spiegel, 1990)

Пусть X, Y – два не более чем счетных локально конечных частично-упорядоченных множества. Тогда X и Y потенциально изоморфны тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Теорема (Baclawski, 1972; Coelho, 1993; Spiegel, O'Donnell, 1997)

Пусть X – локально конечное частично упорядоченное множество, кольцо R коммутативно и неразложимо, ρ – автоморфизм алгебры $I(X,R)$. Тогда

$$\rho = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha},$$

для некоторого внутреннего автоморфизма ψ_f, мультипликативного автоморфизма M_σ и автоморфизма α частично упорядоченного множества X.

$$\mathrm{Out}(I(X,F)) = \mathrm{Aut}(I(X,F))/\mathrm{Inn}(I(X,F))$$

Теорема (Scharlau, 1975)

Пусть X – конечное частично упорядоченное множество, F – поле. Тогда если X содержит максимальный или минимальный элемент, то $\mathrm{Out}(I(X,R))$ канонически изоморфна образу при гомоморфизме $\mathrm{Aut}(I(X,K)) \to \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathrm{X}})$, где $\widetilde{X}$ – множество классов эквивалентности относительно $\sim$.

Теорема (Drozd, Kolesnik, 2007)

Пусть X – конечный предпорядок, F – поле. Тогда

$$\mathrm{Out}(I(X,R)) \cong \mathrm{Out}(X) \rtimes H^1(\widetilde{X}, F^*),$$

где $\mathrm{Out}(X) = \mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Inn}(X)$.

Введение

$$\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$$

$$\varphi : M \otimes_B N \to A, \quad \psi : N \otimes_A M \to B$$
$$m \circ n \overset{def}{=} \varphi(m,n), \quad n \circ m \overset{def}{=} \psi(n,m)$$

$$n \circ (m \circ n') = (n \circ m) \circ n'$$
$$m \circ (n \circ m') = (m \circ n) \circ m'$$

$I = MN \subseteq A$, $J = NM \subseteq B$ – идеалы следа

Кольцо R называется *полуцентральным приведенным*, если из того, что $e^2 = e \in R$ и $eR(1-e) = 0$, следует, что либо $e = 0$, либо $e = 1$.

Теорема (Khazal, Dascalescum van Wyk, 2003; Anh, van Wyk, 2011)

Пусть $A_i = \begin{pmatrix} R_i & M_i \\ 0 & S_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$ *– два контекста Мориты, и пусть дано некоторое отображение* $\varphi : A_1 \to A_2$. *Также предположим, что одна из пар* (R_i, S_i) *состоит из полуцентральных приведенных колец. Тогда*

1) Если φ *– изоморфизм, то* $M_1 = 0$ *если и только если* $M_2 = 0$, *причем в этом случае либо* $R_1 \cong R_2$ *и* $S_1 \cong S_2$, *либо* $R_1 \cong S_2$ *и* $R_2 \cong S_1$;

2) Если $M_1 \neq 0$ *и* $M_2 \neq 0$, *то отображение* φ *будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда найдется четверка* (ρ, ψ, m, χ), *где* $\rho : R_1 \to R_2$ *и* $\psi : S_1 \to S_2$ *– изоморфизмы колец,* $m \in M_2$, *а* $\chi : M_1 \to M_2$ *–* R-S*-бимодульный изоморфизм относительно* ρ *и* ψ, *такая что:*

$$\psi \begin{pmatrix} r & w \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(r) & \rho(r)m + \chi(w) - m\psi(s) \\ 0 & \psi(s) \end{pmatrix}, \text{ для всех } \begin{pmatrix} r & w \\ 0 & s \end{pmatrix} \in A_1.$$

Boboc, Dascalescu, van Wyk, 2012 – кольца контекста Мориты с нулевыми идеалами следа
Anh, van Wyk, 2013 – кольца верхнетреугольных формальных матриц порядка n (итеративный критерий: существует цепочка колец и изоморфизмов)

$$\psi \begin{pmatrix} r & w \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(r) & \chi(w) \\ 0 & \psi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Введение

Крылов, 2008

$$K_s(R) = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + s\,bg & af + bh \\ ce + dg & s\,gb + dh \end{pmatrix}, \quad s \in C(R).$$

Теорема (Крылов, 2008)

Пусть R - коммутативное локальное кольцо, $s, t \in R$.

$$K_s(R) \cong K_t(R) \quad \Leftrightarrow \quad t = v\alpha(s),\ v \in U(R), \alpha \in \mathrm{Aut}(R).$$

Tang, Li, Zhou обобщили этот результат на коммутативное кольцо R, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$, $s, t \in R$.

Пусть R – кольцо и $s \in C(R)$. Положим $\eta_{ijk} = s^{1+\delta_{ik}-\delta_{ij}-\delta_{jk}}$. Полученное кольцо формальных матриц обозначается $\mathbb{M}_n(R;s)$. В частности, $\mathbb{M}_2(R;s) = K_{s^2}(R)$.

Теорема (Tang, Zhou Y, 2013)

Пусть R – коммутативное кольцо, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$ и пусть $n \geq 3$.

$$\mathbb{M}_n(R;s) \cong \mathbb{M}_n(R;t) \quad \Leftrightarrow \quad t = v\alpha(s),\ v \in U(R), \alpha \in \mathrm{Aut}(R).$$

Основные задачи

Основные задачи

1. Исследование проблемы изоморфизма колец формальных матриц, в частности, выполняются ли условия аналогичные условию в теореме Крылова.
2. Нахождение явного вида изоморфизма колец формальных матриц.
3. Классификация колец формальных матриц с точностью до изоморфизма.
4. Исследование группы автоморфизов колец формальных матриц. Нахождение необходимых и достаточных условий для автоморфизмов являться внутренними. Нахождение группы внешних автоморфизмов.

Глава 1

$\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(R)$. Положим

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ \beta_j, & \text{если } i, j, k \text{ различны}, \\ \beta_i \beta_j, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Кольцо формальных матриц $\mathbb{M}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(R)$ со значением в кольце R.

В частности,

$$K_s(R) = \mathbb{M}_{1,s}(R),$$

$$\mathbb{M}_n(R; s) = \mathbb{M}_{\underbrace{s, s, \ldots, s}_{n}}(R).$$

Теорема

Пусть R – коммутативное кольцо, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$. Пусть $n \geq 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r}(R)$ если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta) v_i$ для всех $1 \leq i \leq n$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_i \in U(R)$.

Теорема

Пусть R – коммутативное кольцо, $n \geq 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, \ldots, 0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r}(R)$ если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta) v_i a_i$ для всех $1 \leq i \leq n$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_i \in U(R)$ и $1 = a_1 + \ldots + a_n$ – разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов.

Теорема

Пусть $\mathbb{Z} \ni s \neq 0, 1,\ A = K_s(\mathbb{Z})$. *Тогда если* $s = p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n}$, *для различных простых* p_i, *то* $\mathrm{Out}(A) \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times ... \times \mathbb{Z}_2}_{n}$.

Глава 2

$$T_n(\{R_i\},\{M_{ij}\}) = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ 0 & R_2 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_n \end{pmatrix}$$

$$D_n(\{R_i\},\{M_{ij}\}) = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & R_n \end{pmatrix}$$

$$M_{ij}M_{ji} = 0 = M_{ji}M_{ij}$$

Теорема

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A_1 = T_n(\{R_i\};\{M_{ij}\})$, $A_2 = T_n(\{R'_i\};\{M'_{ij}\})$ и кольца $R_1, ..., R_n$ являются полуцентральными приведенными. Пусть также $\Phi : A_1 \to A_2$ – изоморфизм. Тогда найдутся перестановка $\tau \in S_n$ и матрица $U \in U(A_2)$, такие что

$$\Phi\left([a_{ij}]\right) = U\left[\chi_{ij}(a_{\tau(i)\tau(j)})\right]U^{-1},$$

где

1. $\chi_{ii} : R_{\tau(i)} \to R'_i$ – изоморфизм колец, $1 \leq i \leq n$;
2. $\chi_{ij} : M_{\tau(i)\tau(j)} \to M'_{ij}$ – $R_{\tau(i)}$-$R_{\tau(j)}$-бимодульный изоморфизм относительно χ_{ii} и χ_{jj}, $1 \leq i < j \leq n$;
3. для всех $1 \leq i, k, j \leq n$, $a \in M_{\tau(i)\tau(k)}$, $b \in M_{\tau(k)\tau(j)}$,

$$\chi_{ij}\left(a \circ b\right) = \chi_{ik}(a) \circ \chi_{kj}(b).$$

Обратно, если выполняются условия 1–3, то отображение $\Phi\left([a_{ij}]\right) = U\left[\chi_{ij}(a_{\tau(i)\tau(j)})\right]U^{-1}$ будет изоморфизмом колец.

Следствие

Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R – полуцентральное приведенное, $A_1 = T_n(\{R\}; \{M_{ij}\})$, $A_2 = T_n(\{R\}; \{M'_{ij}\})$, причем каждый из бимодулей M_{ij}, M'_{ij} равен либо 0, либо ${}_RR_R$. Пусть также η и μ – наборы мультипликативных коэффициентов для колец A_1 и A_2, соответственно, множество $\{1, ..., n\}$ является односвязным относительно колец A_1 и A_2 и $\Phi : A_1 \to A_2$ – изоморфизм. Тогда найдется перестановка $\tau \in S_n$ и автоморфизм $\alpha \in U(R)$, такие что:

$$\mu_{ijk} = \alpha\big(\eta_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}\big)\, u_{ijk},$$

для всех троек $i < j < k$, $u_{ijk} \in U(R)$.

Теорема

Пусть $t \in \mathbb{N}$, $A_1 = D_t(\{R_i\};\{M_{ij}\}) = (X_{ij})$, $A_2 = D_t(\{R'_i\};\{M'_{ij}\}) = (Y_{ij})$ и кольца $R_1, \ldots, R_t$ не содержат нетривиальных идемпотентов. Пусть также $\varphi : A_1 \to A_2$ – изоморфизм. Тогда найдутся перестановка $\tau \in S_t$ и матрица $U \in U(A_2)$, такие что

$$\Phi\left([a_{ij}]\right) = U\left[\chi_{ij}(a_{\tau(i)\tau(j)})\right]U^{-1},$$

где

1. $\chi_{ii} : R_{\tau(i)} \to R'_i$ – изоморфизм колец, $1 \leq i \leq t$;
2. $\chi_{ij} : X_{\tau(i)\tau(j)} \to Y_{ij}$ – $R_{\tau(i)}$-$R_{\tau(j)}$-бимодульный изоморфизм относительно χ_{ii} и χ_{jj}, $1 \leq i,j \leq t$;
3. для всех $1 \leq i,k,j \leq n$, $a \in X_{\tau(i)\tau(k)}$, $b \in X_{\tau(k)\tau(j)}$,

$$\chi_{ij}\left(a \circ b\right) = \chi_{ik}(a) \circ \chi_{kj}(b).$$

Обратно, если выполняются условия 1–3, то отображение $\Phi\left([a_{ij}]\right) = U\left[\chi_{ij}(a_{\tau(i)\tau(j)})\right]U^{-1}$ будет изоморфизмом колец.

Следствие

Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R не содержит нетривиальных идемпотентов, $A_1 = D_n(\{R\};\{M_{ij}\})$, $A_2 = D_n(\{R\};\{M'_{ij}\})$, причем каждый из бимодулей M_{ij}, M'_{ij} равен либо 0, либо ${}_RR_R$. Пусть также η и μ – наборы мультипликативных коэффициентов для колец A_1 и A_2, соответственно, множество $\{1, ..., n\}$ является односвязным относительно колец A_1 и A_2 и $\Phi : A_1 \to A_2$ – изоморфизм. Тогда найдется перестановка $\tau \in S_n$ и автоморфизм $\alpha \in U(R)$, такие что:

$$\mu_{ijk} = \alpha(\eta_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)})\, u_{ijk},$$

для всех троек i, j, k, $u_{ijk} \in U(R)$.

$$A = T_n((R); \{I_{ij}\}) = \begin{pmatrix} R & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ 0 & R & \cdots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{pmatrix}$$

Теорема

Пусть R – коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов, $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ – набор идеалов кольца R, каждый из которых содержит хотя бы один элемент неделитель нуля. При этом потребуем, чтобы выполнялось $I_{ij}I_{jk} \subseteq I_{ik}$ для каждой тройки $i < j < k$. Тогда все R-автоморфизмы кольца A являются внутренними.

Следствие

Пусть $\{a_{ij} \in \mathbb{Z}\}_{1\leq i<j\leq n}$ – набор ненулевых элементов, таких что $a_{ik}|a_{ij}a_{jk}$, $i<j<k$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & a_{12}\mathbb{Z} & \cdots & a_{1n}\mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} & \cdots & a_{2n}\mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

Тогда все $\mathbb{Z}$-автоморфизмы кольца A являются внутренними.

Следствие (Barker, Kezlan, 1987; Isaac (review) 1988)

Пусть R – коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов, $n \in \mathbb{N}$. Тогда все R автоморфизмы кольца $T_n(R)$ внутренние.

Глава 3

$$A = \begin{pmatrix} R & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & R & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & R \end{pmatrix}$$

$M_{ij} = 0$ или $M_{ij} = {}_R R_R$

Пусть даны кольцо R, множество X с бинарным отношением $\leq$ и набор $\eta = \{\eta_{abc} \,|\, a, b, c \in X\}$ центральных элементов кольца R, такие что выполняются следующие свойства:

1. $a \leq a$ для всех $a \in X$ (рефлексивность);
2. $a \leq b$, $b \leq c$, $\eta_{abc} \neq 0$ влечет $a \leq c$ для всех $a, b, c \in X$ (η-транзитивность);
3. множество $\{c \in X \,|\, a \leq c \leq b,\ \eta_{acb} \neq 0\}$ конечно для всех $a, b \in X$ (обобщенная локальная конечность);
4. $\eta_{aab} = \eta_{abb} = 1$ для всех $a \leq b \in X$;
5. $\eta_{abc}\,\eta_{acd} = \eta_{abd}\,\eta_{bcd}$ для всех $a \leq b \leq c \leq d \in X$.

Такое множество η будем называть *мультипликативной системой*, а его элементы – *мультипликативными коэффициентами*.

Отношение $\leq$ будем называть *η-предпорядком*.

Пусть R – кольцо, и на множестве X задан η-предпорядок. Рассмотрим множество

$$K(X,R;\eta)=\{f:\,X\times X\to R\,|\,f(x,y)=0,\ \text{если}\ x\not\leq y\}\,.$$

Введем на $K(X,R;\eta)$ поэлементные операции сложения и умножения на скаляр. Операцию умножения опрежелим по правилу:

$$(f\cdot g)(x,y)=\sum_{x\leq z\leq y} f(x,z)g(z,y)\,\eta_{xzy}.$$

Непосредственная проверка показывает, что относительно введенных операций множество $K(X,R;\eta)$ становится кольцом, которое мы будем называть *кольцом инцидентности формальных матриц*

Если кольцо R коммутативно, то $K(X, R; \eta)$ становится R-алгеброй, которую мы будем называть *обобщенной алгеброй инцидентности* и обозначать $I(X, R; \eta)$.

Цепь $x_1 < x_2 < \ldots < x_{|C|}$ частичного η-порядка X называется *положительной относительно данного представления*, если

$$\prod_{i=1}^{|C|-2} \eta_{x_i x_{i+1} x_{i+2}} \neq 0$$

Теорема

Пусть R – коммутативное кольцо и X – частичный η-порядок. Тогда для $f \in I(X, R; \eta)$ следующие условия эквивалентны:

1. f имеет правый обратный;
2. f имеет левый обратный;
3. f обратим;
4. $f(x, x)$ обратим в R для каждого $x \in X$.

Теорема

Пусть кольцо R коммутативно, X – частичный η-порядок, $f \in I(X, R; \eta)$ и $f(x,x)$ обратим в R для каждого $x \in X$. Тогда обратный к f элемент g имеет вид:

$$g(x,x) = f(x,x)^{-1},$$

$$g(x,y) = f(y,y)^{-1} \sum_{\substack{x=x_1<x_2<\ldots<x_n=y \\ \text{цепь положительна}}} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=2}^{n} f(x_{i-1},x_{i-1})^{-1} f(x_{i-1},x_i) \eta_{x x_i, y} \right)$$

Теорема

Пусть R – коммутативное кольцо, X – частичный η-порядок. Тогда в алгебре $I(X,R;\eta)$ ζ-функция обратима.

Пусть F – поле и $s \in$, $s \neq 1$, и пусть $A = K_s(R)$. Если A рассматривать как обобщенную алгебру инцидентности $I(X,F;\eta)$ над множеством $X = \{1,2\}$, то алгебра A не является частично η-упорядоченной.

$$A \ni \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det_A(\zeta) = 1 - s \in U(F)$. А значит, дзета-функция обратима в $K_s(F)$.

Введем на множестве X отношение эквивалентности:
$x \sim y \Leftrightarrow (x \le y) \,\&\, (y \le x) \,\&\, (\eta_{xyx} \in U(R))$.

Теорема (об изоморфизме)

Пусть R - коммутативное локальное кольцо, X - конечный η-предпорядок, а Y - μ-предпорядок. Тогда если $I(X, R; \eta) \cong I(Y, R; \mu)$ как R-алгебры, то найдутся
1) биекция $\varphi : X \to Y$, в обе стороны сохраняющая отношения $' \le'$ и $' \sim'$,
2) функция $g : Y \times Y \to U(R)$, такие что

$$\eta_{xyz}\, g(\varphi(x), \varphi(z)) = \mu_{\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)}\, g(\varphi(x), \varphi(y))\, g(\varphi(y), \varphi(z)),$$

для любых $x \le y \le z \in X$. Верно и обратное.

Следствие (результат в форме Крылова)

Пусть R - коммутативное локальное кольцо, X - конечный η-предпорядок, а Y - конечный μ-предпорядок. Тогда если $I(X,R;\eta) \cong I(Y,R;\mu)$ как алгебры, то найдется биекция $\varphi : X \to Y$, сохраняющая отношения $'\leq'$ и $'\sim'$, такая что для любой тройки $x \leq y \leq z \in X$

$$\eta_{xyz} = v_{xyz}\ \mu_{\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)}, \quad v_{xyz} \in U(R).$$

Предложение

Пусть $K_n(R;\eta)$ – кольцо формальных матриц порядка n над коммутативным кольцом R. Тогда если $K_n(R;\eta) \cong M_n(R)$, то все $\eta_{ijk} \in U(R)$.

Теорема

Обращение результата в форме Крылова **не верно** ни для какого $n > 2$.

Обращение результата в форме Крылова для полей **не верно** ни для какого $n > 3$.

Как в случае колец так и в случае полей, для соответствующих n можно подобрать контрпримеры, которые являются алгебрами формальных матриц со значением в кольце, либо поле, соответственно.

F - поле

$I(X, F; \eta)$ - обобщенная алгебра инцидентности

$\eta = \{\eta_{ijk}\}$	$\bar{\eta} = \{\bar{\eta}_{ijk}\}$
$\eta_{ijk} = 0$	$\bar{\eta}_{ijk} = 0$
$\eta_{ijk} \neq 0$	$\bar{\eta}_{ijk} = 1$
$I(X, F; \eta)$	$I(X, F; \bar{\eta})$

Предложение

Пусть X, Y – конечные множества, R – коммутативное локальное кольцо, $I(X, R; \eta)$ – обобщенная алгебра инцидентности, $I(X, R; \bar{\eta})$, $I(Y, R; \bar{\mu})$ – обобщенные $\{0, 1\}$–алгебры инцидентности. Тогда:

1. $I(X, R; \bar{\eta}) \cong I(Y, R; \bar{\mu})$ тогда и только тогда, когда $|X| = |Y|$ и существует биекция $\pi : X \to Y$, в обе стороны сохраняющая отношение $\leq$, такая что $\bar{\eta}_{ijk} = \bar{\mu}_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)}$;
2. $I(X, R; \eta) \cong I(Y, R; \bar{\mu})$ влечет $I(X, R; \eta) \cong I(X, R; \bar{\eta})$.

$$A_4(s;F), \quad A_4^r(t;F), \quad s,t \in F$$

Теорема о классификации

Пусть F – поле, $X = \{1,2,3,4\}$. И пусть $A = I(X,F;\eta)$ – обобщенная алгебра инцидентности, а $A' = I(X,F;\bar{\eta})$ – соответствующая $\{0,1\}$-алгебра. Тогда возможен ровно один из трех случаев:

1. алгебры A и A' изоморфны;
2. алгебра A изоморфна алгебре $A_4(s;F)$ для некоторого $s \in F$ отличного от 0 и 1, причем элемент s определяется однозначно;
3. алгебра A изоморфна алгебре $A_4^r(t;F)$ для некоторого $t \in F$ отличного от 0 и 1, причем элемент t определяется однозначно.

В статье “Формальные матрицы и их определители” (П.А. Крылов, А.А. Туганбаев, 2014) были поставлены следующие вопросы:

1. Установить когда две мультипликативные системы η и μ определяют изоморфные кольца формальных матриц со значением в кольце.
2. В частности, рассмотреть случай колец формальных матриц со значением в поле, когда все элементы η_{ijk} и μ_{ijk} равны либо 0, либо 1.

Предложение

Пусть R *– коммутативное кольцо и* $A = K_n(R;\eta)$ *и* $B = K_n(R;\mu)$ *– два кольца формальных матриц. Тогда* A *и* B *изоморфны как кольца если и только если* A *и* $K_n(R;\alpha(\mu))$ *изоморфны как алгебры, для некоторого* $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$.

Теорема

Пусть R *– коммутативное локальное кольцо и* $A = K_n(R;\eta)$, $B = K_m(R;\mu)$ *– два кольца формальных матриц. Тогда если* A *и* B *изоморфны как кольца, то* $n = m$ *и найдутся* $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $\pi \in S_n$ *и функция* $g : \{1, .., n\} \times \{1, .., n\} \to U(R)$, *такие что*

$$\eta_{ijk}\, g(\pi(i), \pi(k)) = \alpha(\mu_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)})\, g(\pi(i), \pi(j))\, g(\pi(j), \pi(k)),$$

для всех $1 \leq i, j, k \leq n$. *Верно и обратное.*

Теорема

Пусть R *– коммутативное локальное кольцо и* $A = K_n(R;\eta)$, $B = K_m(R;\mu)$ *– два кольца формальных матриц, причем для всех* $1 \leq i,j,k \leq n$ *коэффициенты* η_{ijk} *и* μ_{ijk} *равны либо* 0, *либо* 1. *Тогда если* A *и* B *изоморфны как кольца, то* $n = m$ *и найдется* $\pi \in S_n$, *такая что*

$$\eta_{ijk} = \mu_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)},$$

для всех $1 \leq i,j,k \leq n$. *Верно и обратное.*

Теорема

Пусть кольцо R *– полуцентральное приведенное,* $n \in \mathbb{N}$, $K_1 = K_n(X, R; \eta)$ *и* $K_2 = K_n(Y, R; \mu)$ *– кольца формальных матриц. Пусть также* $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_s$, $Y = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_t$ *– разбиение множеств* X *и* Y *на компоненты связности. И пусть* $\Phi : K_1 \to K_2$ *– изоморфизм. Тогда* $s = t$ *и найдутся* $\pi \in S_t$, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ *и* $1 = f_1 + \ldots + f_s$, $e_i \in K_1$, $f_i \in K_2$, $1 \leq i \leq s$, *такие что*

1. $K_1 = e_1 K_1 e_1 \oplus \ldots \oplus e_s K_1 e_s$, $K_2 = f_1 K_2 f_1 \oplus \ldots \oplus f_t K_2 f_t$;
2. $\Phi(e_i K_1 e_i) = f_{\pi_i} K_2 f_{\pi_i}$, $1 \leq i \leq t$;
3. $\Phi(r e_i) = \alpha_i(r) f_{\pi_(i)}$, $r \in C(R)$, $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(C(R))$, $1 \leq i \leq t$.

Теорема

Пусть кольцо R *коммутативно и локально,* $n, m \in \mathbb{N}$, $K_1 = K_n(X, R; \eta)$ *и* $K_2 = K_m(Y, R; \mu)$ *– кольца формальных матриц. Пусть также* $Y = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_t$ *– разбиение множества* Y *на компоненты связности и* $\tau : Y \to \{1, \ldots, t\}$ *– отображение, ставящее в соответствие элементу* $y \in Y$ *индекс соответствующей компоненты связности. Тогда отображение* $\Phi : K_1 \to K_2$ *есть изоморфизм колец, если и только если* $n = m$ *и найдутся перестановка* $\pi \in S_n$*,*
$\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathrm{Aut}(R)$ *и матрица* $U \in U(K_2)$*, такие что*
$i \leq j \in X \leftrightarrow \pi(i) \leq \pi(j) \in Y$ *и*

$$\Phi([a_{ij}]) = U \left[\chi_{ij}(a_{\pi(i)} a_{\pi(j)})\right] U^{-1},$$

где

1. $\chi_{ii} = \alpha_{\tau(\pi(i))}$, $1 \leq i \leq n$;
2. $\chi_{ij}(r) = \alpha_{\tau(\pi(i))}(r) v_{\pi(i)\pi(j)j}$, $v_{\pi(i)\pi(j)} \in U(R)$*, если* $\pi(i) \leq \pi(j)$ *в* Y*, и* $\chi_{ij} = 0$*, иначе;*
3. $v_{\pi(i)\pi(j)}\, v_{\pi(j)\pi(k)}\, \mu_{ijk} = v_{\pi(i)\pi(k)}\, \alpha_{\tau(\pi(i))}(\eta_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)})$ *для каждой тройки* $\pi(i) \leq \pi(j) \leq \pi(k)$ *в* X.

Следствие

Пусть кольцо R коммутативно и локально, $n \in \mathbb{N}$, $K_1 = K_n(X, R; \eta)$ и $K_2 = K_n(Y, R; \mu)$ – кольца формальных матриц. Пусть также $Y = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_t$ – разбиение множества X на компоненты связности и $\tau : Y \to \{1, \ldots, t\}$ – отображение, ставящее в соответствие элементу $y \in Y$ индекс соответствующей компоненты связности. Тогда если кольца K_1 и K_2 изоморфны, то найдутся перестановка $\pi \in S_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathrm{Aut}(R)$ и $u_{ijk} \in U(R)$, $1 \le i, j, k \le n$, такие что для каждой тройки $i \le j \le k$ в X выполняется

$$\alpha_{\tau(\pi(i))}\left(\eta_{\pi(i)\pi(j)\pi(k)}\right) = \mu_{ijk} u_{ijk}, \quad u_{ijk} \in U(R).$$

Полученные результаты позволяют свести проблему изоморфизма колец $I(X, \mathbb{Z}; \eta)$ к проблеме изоморфизма колец $I(Y, \mathbb{Z}; \mu)$, где $\mu_{ijk} \neq 0$.

Выносимые на защиту положения

1. Решена проблема изоморфизма для колец формальных матриц вида $M_{\beta,0,\ldots,0}(R)$ и $M_{\beta,\beta,\ldots,\beta}(R)$ для некоторых классов колец.
2. Получен явный вид изоморфизма колец верхнетреугольных формальных матриц и формальных матриц с нулевыми идеалами следа. Найдена зависимость между мультипликативными коэффициентами.
3. Показано, что все автоморфизмы кольца верхнетреугольных матриц над кольцом и его идеалами являются внутренними.
4. Исследовано естественное обобщение алгебр инцидентности на кольца формальных матриц. Получен явный вид обратного элемента над частично η-упорядоченным множеством через сумму по положительным цепям.
5. Решена проблема изоморфизма для колец инцидентности формальных матриц над коммутативным локальным кольцом. Получено обобщение теоремы Крылова на этот случай. Обращение последнего результата неверно уже для матриц порядка 3 над коммутативным локальным кольцом и для матриц порядка 4 над полем.
6. Получена классификация с точностью до автоморфизма обобщенных алгебр инцидентности порядка не более 4.

Заключение: Нерешенные проблемы

1. Проблема изоморфизма для колец вида $M_{\beta,\ldots,\beta,0,\ldots,0}(R)$.
2. $\mathrm{Aut}_R(T_n(R;\eta)) = \mathrm{Inn}_R(T_n(R;\eta)) \Leftrightarrow \eta_{ijk}$ неделители нуля.
   $\mathrm{Aut}_F(T_n(F;\eta)) = \mathrm{Inn}_F(T_n(F;\eta)) \Leftrightarrow T_n(F;\eta) \cong T_n(F)$.
3. $\mathrm{Aut}_R(M_n(R;\eta)) = \mathrm{Inn}_R(M_n(R;\eta)) \Leftrightarrow \eta_{ijk} \in U(R) \Leftrightarrow M_n(R;\eta) \cong M_n(R)$.
4. Вложимы ли обобщенные алгебры инцидентности в алгебру формальных матриц со значением в кольце?
5. Пусть X предпорядок. Верно ли что $I(X,R;\eta) \cong I(X,R)$ для $\eta_{ijk} \in U(R)$?
6. Классификация, с точностью до изоморфизма, все алгебр формальных матриц с элементами из поля или 0.
7. Нахождение группы внешних автоморфизмов кольца $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z};s)$.
8. Доказательство, что группа внешних автоморфизмов кольца $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z};\eta)$, $\eta_{ijk} \neq 0$, $i < j < k$, конечна. Это позволит найти явный вид некоторой степени автоморфизма колец инцидентности формальных матриц.
9. $\{0,1\}$–алгебры ведут себя ''подозрительно похоже'' на алгебры инцидентности. Найти комбинаторные приложения для них.

Публикации автора по теме диссертации

- А.Н. Абызов, Д.Т. Тапкин, *Кольца формальных матриц и их изоморфизмы*, Сиб. мат. журнал **56** №6 (2015), 1199—1214
- А.Н. Абызов, Д.Т. Тапкин, *О некоторых классах колец формальных матриц*, Изв. вузов. Матем. **56** № 3 (2015), 3—14
- Д.Т. Тапкин, *Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности*, Чебышевский сб. **16** № 3 (2015), С. 422—449
- Д.Т. Тапкин, *Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц*, Изв. вузов. Матем. – Краткое сообщение. № 12 (2017)

Публикации автора по теме диссертации

- Д.Т. Тапкин, *Кольца формальных матриц и обобщения алгебр инцидентности*, Материалы XIII Международной конференции ''Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения'', г. Тула, 25 – 30 мая 2015 г. – Тула, 2015. – 132—135
- Д.Т. Тапкин, *Обобщенные алгебры инцидентности*, Материалы Четырнадцатой молодежной школы-конференции ''Лобачевские чтения-2015'', г. Казань, 22 – 27 октября 2015 г. – Казань, 2015. – 143—145
- Д.Т. Тапкин, *Обобщенные алгебры инцидентности*, Материалы Международной конференции по Алгебре, Анализу и Геометрии, г. Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г. – Казань, 2016. – 326—327
- Д.Т. Тапкин, *Кольца формальных матриц и обобщенные алгебры инцидентности*, Международная конференция ''Мальцевские чтения''. Тезисы докладов, г. Новосибирск, 21 – 25 ноября 2016 г. – Новосибирск, 2016. – 160—160

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ