Известия вузов. Математика
2008, № 9, с. 76–82

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Е.А. ОСИПОВ, Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ

СУММАТОРНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН НА ДЕФЕКТАХ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Аннотация. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе раздела сред в плоскослоистой среде, сведена к парному сумматорному функциональному уравнению относительно коэффициентов разложения искомой волны по квазипериодическим волнам (волнам Флоке). Методом интегральных тождеств парное уравнение сведено к регулярной бесконечной системе линейных уравнений, решение которой может быть получено методом усечения. Показано, что интегральное тождество представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости вспомогательной переопределенной задачи для системы уравнений теории упругости в полуплоскости. Получены интегральные уравнения второго рода, эквивалентные исходной задаче дифракции.

Ключевые слова: упругие волны, задача дифракции, слоистые среды, волны Флоке, переопределенные граничные задачи, интегральные уравнения.

УДК: 517.958 : 539.3

Abstract. In this paper we consider the diffraction problem for an elastic wave at a periodic set of defects located at the interface of stratified media. We reduce the mentioned problem to a paired summatory functional equation with respect to coefficients of the expansion of the desired wave by quasiperiodic waves (the Floquet waves). Using the method of integral identities, we reduce the paired equation to a regular infinite system of linear equations. One can solve this system by the truncation method. We prove that the integral identity is the necessary and sufficient condition for the solvability of the auxiliary overspecified problem for a system of equations in a half-plane in the elasticity theory. We obtain integral equations of the second kind which are equivalent to the initial diffraction problem.

Keywords: elastic waves, diffraction problem, stratified media, Floquet waves, overspecified boundary value problems, integral equations.

Задачи дифракции электромагнитных волн на периодических решетках из металлических лент исследованы достаточно полно (напр., [1]). Задачам дифракции упругих волн в слоистых средах на дефектах различной природы (отслоениях, трещинах, тонких включениях) посвящено существенно меньше публикаций. Общие положения теории дифракции

Поступила 20.08.2007

упругих волн изложены, например, в монографиях [2], [3]. В работе [4] было предложено использовать при решении задач дифракции электромагнитных волн на периодических решетках и на отдельных лентах метод интегральных тождеств. В периодическом случае этот метод позволяет достаточно просто перейти от парного функционального уравнения к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). Интегральные тождества представляют собой необходимые и достаточные условия разрешимости вспомогательных переопределенных задач для уравнения Гельмгольца. Обзор публикаций, посвященных методу переопределенной граничной задачи в теории распространения и дифракции волн, имеется в статье [5].

В работе [6] метод переопределенной граничной задачи был применен при решении задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах. В данной статье рассматривается случай, когда искомые функции являются квазипериодическими. Поэтому интегральные уравнения можно заменить на сумматорные, в которых искомыми величинами являются не граничные значения напряжений или перемещений, а коэффициенты разложения решения задачи сопряжения по гармоникам Флоке.

Рассмотрим двумерную задачу дифракции упругой волны в упругой полуплоскости, находящейся в контакте с жестким основанием. Пусть на прямой $y = 0$ расположена периодическая система дефектов (периодически расположенные отслоения). Из верхней полуплоскости на границу раздела сред падает упругая волна. Нужно найти волны, отраженные вверх (см. рис. 1).

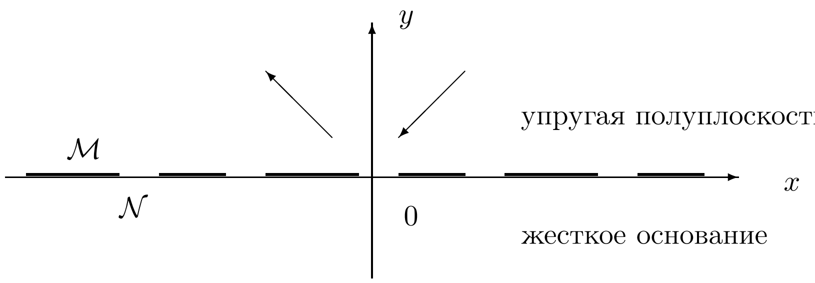

Рис. 1. Дефекты на границе упругой полуплоскости

1. Квазипериодические решения системы уравнений теории упругости. Пусть l — период системы дефектов и $L = 2\pi/l$. Рассмотрим систему уравнений плоской (двумерной) теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho\,\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \tau = \mu\frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu\frac{\partial u_y}{\partial x}. \tag{2}$$

При гармонической зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$ будем искать комплексные амплитуды напряжений и перемещений в виде

$$f(x, y) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(y) e^{iLnx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(y) e^{iL_n x}, \quad L_n = \alpha + nL.$$

Коэффициенты разложений искомых функций по гармоникам Флоке должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
iL_n\sigma_{xn}(y)+\tau_n'(y)+\rho\omega^2u_{xn}(y)=0,\quad iL_n\tau_n(y)+\sigma_{yn}'(y)+\rho\omega^2u_{yn}(y)=0,\\
\sigma_{xn}(y)=iL_n(\lambda+2\mu)u_{xn}(y)+\lambda u_{yn}'(y),\quad \sigma_{yn}(y)=iL_n\lambda u_{xn}(y)+(\lambda+2\mu)u_{yn}'(y),\\
\tau_n(y)=\mu u_{xn}'(y)+iL_n\mu u_{yn}(y).
\end{gathered}\tag{3}$$

Обозначим

$$k_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu},\quad k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

и пусть

$$\beta_{jn}=\sqrt{k_j^2-L_n^2}=\Big\{|L_n|\le k_j:-\sqrt{k_j^2-L_n^2};\ \ |L_n|\ge k_j:i\sqrt{L_n^2-k_j^2}\Big\}$$

(значения вычисляются в соответствии с тем, как в [6] выбраны однозначные ветви многозначных функций $\gamma_j(\xi)$). Общее решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{yn}(y)&=[i(\lambda+2\mu)\beta_{1n}^2+i\lambda L_n^2]\big(A_ne^{i\beta_{1n}y}-B_ne^{-i\beta_{1n}y}\big)-\\
&\quad-2i\mu\beta_{2n}L_n\big(C_ne^{i\beta_{2n}y}-D_ne^{-i\beta_{2n}y}\big),\\
\tau_n(y)&=2i\mu\beta_{1n}L_n\big(A_ne^{i\beta_{1n}y}+B_ne^{-i\beta_{1n}y}\big)+i\mu(\beta_{2n}^2-L_n^2)\big(C_ne^{i\beta_{2n}y}-D_ne^{-i\beta_{2n}y}\big),\\
u_{xn}(y)&=A_ne^{i\beta_{1n}y}L_n-B_ne^{-i\beta_{1n}y}L_n+C_ne^{i\beta_{2n}y}\beta_{2n}+D_ne^{-i\beta_{2n}y}\beta_{2n},\\
u_{yn}(y)&=A_ne^{i\beta_{1n}y}\beta_{1n}+B_ne^{-i\beta_{1n}y}\beta_{1n}-C_ne^{i\beta_{2n}y}L_n+D_ne^{-i\beta_{2n}y}L_n,\\
\sigma_{xn}(y)&=i(\lambda k_1^2+2\mu L_n^2)\big(A_ne^{i\beta_{1n}y}-B_ne^{-i\beta_{1n}y}\big)+2i\mu L_n\beta_{2n}\big(C_ne^{i\beta_{2n}y}+D_ne^{-i\beta_{2n}y}\big),
\end{aligned}\tag{4}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные.

2. Условия на бесконечности. Будем говорить, что упругая волна движется в заданном направлении, если она переносит энергию или (и) затухает в этом направлении.

Лемма 1. *При выбранной зависимости искомых функций от времени и при указанном выше способе вычисления значений β_{jn} в формулах* (4) *для волн, уходящих на бесконечность, $B_n=0$, $D_n=0$ и для волн, приходящих с бесконечности, $A_n=0$, $C_n=0$.*

Будем искать коэффициенты Флоке волны, отраженной вверх, в виде

$$\begin{gathered}
u_{xn}(y)=L_n\,A_ne^{i\beta_{1n}y}+\beta_{2n}C_ne^{i\beta_{2n}y},\quad u_{yn}(y)=\beta_{1n}A_ne^{i\beta_{1n}y}-L_n\,C_ne^{i\beta_{2n}y},\\
\tau_n(y)=i\mu\big[2\beta_{1n}L_n\,A_ne^{i\beta_{1n}y}+(\beta_{2n}^2-L_n^2)\,C_ne^{i\beta_{2n}y}\big]
\end{gathered}$$

(выражения функций $\sigma_x(y)$ и $\sigma_y(y)$ не приводим).

В напряжениях и перемещениях волны, падающей сверху на систему дефектов, оставим только одно слагаемое с номером n^0. Пусть

$$\begin{gathered}
u_x^0(x,y)=\big[-L_{n^0}\,B_{n^0}e^{-i\beta_{1n^0}y}+\beta_{2n^0}D_{n_0}e^{-i\beta_{2n^0}y}\big]\,e^{iL_{n^0}x},\\
u_y^0(x,y)=\big[\beta_{1n^0}B_{n^0}e^{-i\beta_{1n^0}y}+L_{n^0}\,D_{n_0}e^{-i\beta_{2n^0}y}\big]\,e^{iL_{n^0}x},\\
\tau^0(x,y)=i\mu\big[2\beta_{1n^0}L_{n^0}\,B_{n^0}e^{-i\beta_{1n^0}y}+(L_{n^0}^2-\beta_{2n^0}^2)D_{n_0}e^{-i\beta_{2n^0}y}\big]\,e^{iL_{n^0}x}.
\end{gathered}$$

3. Парное сумматорное функциональное уравнение. Пусть $\mathcal{M}$ — множество отрезков, образующих дефект, и $\mathcal{N}$ —дополнение его замыкания до интервала $(0,l)$. Пусть упругая полуплоскость на $\mathcal{N}$ находится в полном контакте с основанием, а на $\mathcal{M}$ скользит без трения. Для суммы падающей и дифрагированной упругих волн должны быть выполнены граничные условия

$$u_y^0(x,0)+u_y(x,0)=0,\quad \tau^0(x,0)+\tau(x,0)=0 \ \text{ на } \ \mathcal{M};$$
$$u_x^0(x,0)+u_x(x,0)=0,\quad u_y^0(x,0)+u_y(x,0)=0 \ \text{ на } \ \mathcal{N}.$$

Из условия $u_y^0+u_y=0$ на $\mathcal{M}$ и на $\mathcal{N}$ следует

$$A_{n^0}=\frac{L_{n^0}}{\beta_{1n^0}}(C_{n^0}-D_{n^0})-B_{n^0},\quad A_n=\frac{L_n}{\beta_{1n}}C_n \quad \text{при} \quad n\neq n^0.$$

Следовательно,

$$u_x(x,0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{L_n^2}{\beta_{1n}}+\beta_{2n}\Big]C_n e^{iL_n x}-L_{n^0}\Big[\frac{L_{n^0}}{\beta_{1n^0}}D_{n^0}+B_{n^0}\Big]e^{iL_{n^0}x},$$

$$\tau(x,0)=i\rho\omega^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{iL_n x}-2i\mu L_{n^0}\big[L_{n^0}D_{n^0}+\beta_{1n^0}B_{n^0}\big].$$

Поэтому условия $u_x^0+u_x=0$ на $\mathcal{N}$ и $\tau^0+\tau=0$ на $\mathcal{M}$ сводятся к

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n C_n e^{iLnx}=E_{n^0}e^{iLn^0x},\quad x\in\mathcal{N},\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{iLnx}=D_{n^0}e^{iLn^0x},\quad x\in\mathcal{M}; \tag{5}$$

здесь

$$\gamma_n=\frac{L_n^2}{\beta_{1n}}+\beta_{2n},\quad E_{n^0}=2L_{n^0}B_{n^0}+\big[\frac{L_{n^0}^2}{\beta_{1n^0}}-\beta_{2n^0}\big]D_{n^0}.$$

Лемма 2. *Задача дифракции на периодической системе дефектов эквивалентна парному функциональному сумматорному уравнению* (5).

Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, перейдем к новым неизвестным

$$\widetilde{C}_{n^0}=C_{n^0}-\frac{E_{n^0}}{\gamma_{n^0}},\quad \widetilde{C}_n=C_{n^0} \quad \text{при} \quad n\neq n^0.$$

Тогда парное сумматорное уравнение (5) примет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n\widetilde{C}_n e^{iLnx}=0,\quad x\in\mathcal{N},\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widetilde{C}_n e^{iLnx}=\widetilde{D}_{n^0}e^{iLn^0x},\quad x\in\mathcal{M}, \tag{6}$$

где

$$\widetilde{D}_{n^0}=D_{n^0}+\frac{E_{n^0}}{\gamma_{n^0}}=\frac{2L_{n^0}\,[\beta_{1n^0}B_{n^0}+D_{n^0}]}{L_{n^0}^2+\beta_{1n^0}\beta_{2n^0}}.$$

4. Переход к интегральным уравнениям и БСЛАУ. Введем новую искомую функцию

$$v(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n\widetilde{C}_n e^{iLnx},$$

по построению числа $\gamma_n\widetilde{C}_n$ — ее коэффициенты Фурье. Тогда из (6) следует

$$\frac{1}{l}\int_{\mathcal{M}}v(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_n}e^{iLn(x-t)}\,dt=\widetilde{D}_{n^0}e^{iLn^0x},\quad x\in\mathcal{M}. \tag{7}$$

Периодическое ядро интегрального уравнения (7) имеет при $t \to x$ логарифмическую особенность.

Обозначим

$$I_k = \int_{\mathcal{M}} e^{iLk\tau}\, d\tau, \quad J_k = \int_{\mathcal{N}} e^{iLk\tau}\, d\tau.$$

Если использовать функцию

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{C}_n e^{iLnx}, \quad \widetilde{C}_n = \frac{1}{l}\int_{\mathcal{N}} w(t)\, e^{-iLnt}\, dt + \frac{1}{l}\widetilde{D}_{n^0} I_{n^0-n},$$

то парное уравнение (6) сведется к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{l}\int_{\mathcal{N}} w(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{iLn(x-t)}\, dt = -\frac{1}{l}\widetilde{D}_{n^0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n I_{n^0-n} e^{iLnx}, \quad x \in \mathcal{N}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Задача дифракции на периодической системе дефектов сводится к интегральным уравнениям* (7) *и* (8).

В формулировке этой теоремы не случайно сказано “сводится”, а не “эквивалентна”. После того, как решения уравнений (7) и (8) найдены, они должны быть продолжены на весь интервал $(0, l)$: $v(x) = 0$ на $\mathcal{N}$ и $w(x) = \widetilde{D}_{n^0} e^{iLn^0 x}$ на $\mathcal{M}$. Поэтому фактически задача дифракции эквивалентна интегральным уравнениям 3-го рода.

Покажем, как перейти от парного сумматорного уравнения к регулярной БСЛАУ.

Лемма 3. *Для любого набора чисел* c_n, $n = 0, \pm 1, \dots$,

$$\int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n c_n e^{iLn\tau}\right)\left(\frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLm(x-\tau)}\right) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{iLnx}, \quad x \in (0, l). \tag{9}$$

Следовательно, с одной стороны, значения функции $w(x)$ заданы на $\mathcal{M}$ первым уравнением из (6). С другой стороны, из тождества (9) и второго условия из (6) значения этой функции на $\mathcal{N}$ равны

$$\int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \widetilde{C}_n e^{iLn\tau}\right)\left(\frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLm(x-\tau)}\right) d\tau = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \widetilde{C}_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} e^{iLmx}.$$

Перейдем к коэффициентам Фурье и получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Задача дифракции на периодической системе дефектов эквивалентна БСЛАУ*

$$l\widetilde{C}_k - \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \widetilde{C}_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = \widetilde{D}_{n^0}\, I_{n^0-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \tag{10}$$

Как показал вычислительный эксперимент, БСЛАУ (10) может быть решена численно методом усечения (редукции).

5. Условия разрешимости переопределенной граничной задачи. Уточним, какой смысл имеет интегрально-сумматорное тождество (9). Будем искать упругую волну, отраженную от границы полуплоскости с дефектами, в виде суммы двух волн — отраженной от жесткого основания без дефектов (верхний индекс (1)) и дополнительного слагаемого (верхний индекс (2)). Напряжения и перемещения падающей сверху волны пометим индексом (0).

Для первой волны должны быть выполнены граничные условия

$$u_x^{(0)} + u_x^{(1)} = 0, \quad u_y^{(0)} + u_y^{(1)} = 0 \ \text{ на } \ \mathcal{M} \cup \mathcal{N},$$

а для суммы всех трех волн — условия

$$u_x^{(0)} + u_x^{(1)} + u_x^{(2)} = 0, \quad u_y^{(0)} + u_y^{(1)} + u_y^{(2)} = 0 \ \text{ на } \ \mathcal{N},$$
$$\tau^{(0)} + \tau^{(1)} + \tau^{(2)} = 0, \quad u_y^{(0)} + u_y^{(1)} + u_y^{(2)} = 0 \ \text{ на } \ \mathcal{M}.$$

Следовательно, для второй волны остается

$$u_x^{(2)}(x,0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x,0) = 0, \quad x \in \mathcal{N},$$
$$\tau^{(2)}(x,0) = -\tau^{(0)}(x,0) - \tau^{(1)}(x,0), \quad u^{(2)}(x,0)_y = 0, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Поэтому переход от неизвестных C_n к $\widetilde{C}_n$ сводится к тому, что вместо суммы из двух волн рассматривается только второе слагаемое.

Рассмотрим следующую переопределенную задачу: найти гармонически зависящие от времени квазипериодические решения системы уравнений (1), (2) в верхней полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющие граничным условиям

$$u_x(x,0) = u_{x0}(x), \quad u_y(x,0) = 0, \quad \tau(x,0) = \tau_0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{11}$$

Второе граничное условие будет выполнено, если $\beta_{1n}A_n - L_nC_n = 0$. Тогда

$$u_x(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n C_n e^{iL_n x}, \quad \tau(x,0) = i\rho\omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{iL_n x}.$$

Поэтому равенство (9) устанавливает связь между следами функций $u_x(x,y)$ и $\tau(x,y)$ на границе полуплоскости.

Лемма 4. *Переопределенная граничная задача* (1), (2), (11) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\tau_0(x) = i\rho\omega^2 \int_0^l u_{x0}(\tau) \left(\frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{iLm(x-\tau)} \right) d\tau, \quad x \in (0,l).$$

Заметим, что в [6] связь между функциями $u_{x0}(x)$ и $\tau_0(x)$ в более общем, не обязательно периодическом случае, была получена на языке их образов Фурье.

Можно показать, что задача дифракции упругой волны в полуплоскости на периодической системе отслоений равносильна еще двум интегральным уравнениям 2-го рода.

Литература

[1] Шестопалов В.П. *Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн.* – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1971. – 400 с.

[2] Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. *Дифракция упругих волн.* – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.

[3] Исраилов М.Ш. *Динамическая теория упругости и дифракция волн.* – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 208 с.

[4] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций* // Препринт 2000-1. – Казанск. матем. об-во, Казань, 2000. – 50 с.

[5] Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. *Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн* // Ученые записки Казанского гос. ун-та. – 2005. – Т. 147. – Кн. 3. – С. 4–32.

[6] Плещинский Н.Б. *Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши* // Препринт ПМФ-04-01. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2004. – 34 с.

Е.А. Осипов

аспирант, кафедра прикладной математики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Н.Б. Плещинский

профессор, кафедра прикладной математики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` pnb@ksu.ru

E.A. Osipov

Postraduate, Chair of Applied Mathematics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia

N.B. Pleshchinskii

Professor, Chair of Applied Mathematics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` pnb@ksu.ru