Научный дайджест: О сходящихся подпоследовательностях последовательности частичных сумм ряда Фурье.

Автор доклада: **академик С.В. Конягин** (Москва)

XIV Казанская конференция по теории функций. Сентябрь 2019 г. («VII-2019»)

В 1923 г. А.Н. Колмогоров доказал существование функции с почти всюду расходящимся рядом Фурье. Вскоре он показал, что ряд Фурье может расходиться всюду. Из результатов Колмогорова следует слабая L-сходимость частичных сумм Фурье $S_n(f)$ к f, что для любой $f \in L(\mathbb{T})$ дает существование возрастающей последовательности $\{n_j\}$ (зависящей от f) со сходимостью $S_{n_j}(f) \to f$ почти всюду. Р. Госселин (1958) доказал, что для любой $n_j \to \infty$ существует $f \in L(\mathbb{T})$, такая, что $\{S_{n_j}(f)\}$ неограниченно расходится почти всюду. В. Тотик (1982) доказал расходимость всюду для некоторой f.

В 1964 г. П.Л. Ульянов поставил следующий вопрос. Существует ли последовательность $\{N_j\}$, такая, что для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$ найдется почти всюду сходящаяся к f подпоследовательность $\{S_{n_j}(f)\}$ частичных сумм Фурье, такая, что $\{n_j\}$ возрастает и $n_j < N_j$ для любого j?

Теорема 1. *Для любой возрастающей последовательности $\{\tilde{n}_j\}$ положительных целых существует последовательность $\{N_j\}$, такая, что для каждой функции $f \in L(\mathbb{T})$ найдется подпоследовательность $\{n_j\}$ последовательности $\{\tilde{n}_j\}$, удовлетворяющая условиям: $n_j \leq N_j$ для бесконечного множества j и $S_{n_j}(f) \to f$ почти всюду.*

В теореме 1 автор доклада существенно использует тетрацию, или башню из экспонент; теорема 2 показывает, как построить такую башню.

Теорема 2. *Существует функция* $f \in L(\mathbb{T})$, *такая, что для любой лакунарной последовательности* $\{n_j\}$ *с частичными суммами* S_{n_j}, *сходящимися на множестве положительной меры, для достаточно больших* j *выполняется неравенство*

$$n_j > \exp^*[(\log\log j)^{1-o(1)}],$$

где $\exp^*$ *– функция тетрации.*

Следствие 1. *Существует функция* $f \in L(\mathbb{T})$, *такая, что для любой последовательности* $\{n_j\}$ *с* $n_{j+1} \le {n_j}^A$ *при некотором положительном* A *частичные суммы* S_{n_j} *расходятся почти всюду.*

Расходимость почти всюду в следствии 1 нельзя заменить сходимостью почти всюду. Легко показать, что для каждой $f \in L(\mathbb{T})$ существует возрастающая последовательность $\{n_j\}$, такая, что $n_j/j \to 1$ при $j \to \infty$ и $S_{n_j}(f) \to f$ на плотном подмножестве.

Можно доказать усиленную версию теоремы 2.

Теорема 2'. *Пусть* Φ *– функция* $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$, *такая, что для некоторого* u_0 *и некоторого положительного целого k функция* $\log\Phi(u)/\log u$ *возрастает на* $[u_0, +\infty)$ *и k-ая итерация* Φ *превышает* e^u *при* $u \in [u_0, +\infty)$. *Тогда существует функция* $f \in L(\mathbb{T})$, *такая, что для любой последовательности* $\{n_j\}$, *удовлетворяющей* $n_{j-1} \ge n_j + \log\Phi(n_j)$ *с частичными суммами* S_{n_j}, *сходящимися на множестве положительной меры, для достаточно больших* j *выполняется неравенство*

$$n_j > \exp^*[(\log\log j)^{1-o(1)}],$$

где $\exp^*$ *– функция тетрации.*

……………………

Текст восстановлен по фотографиям доклада.