

УДК 535.21:538.958:621.373.826

## ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВОДОВ ИЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИЗОЛЯТОРОВ

*А.И. Маймистов, Е.И. Ляшко*

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
г. Москва, 115409, Россия*

### Аннотация

Рассмотрены явления преломления и отражения, происходящие на границах диэлектрических волноводов из необычных материалов. В качестве таких материалов выступают топологические изоляторы и гиперболические метаматериалы, электромагнитные свойства которых отличаются от свойств обычных диэлектриков, например, может изменяться поляризация преломленной и отраженной волны, полное внутреннее отражение происходит при малых углах падения, меньших определенного критического угла. В результате волноводы приобретают новые характеристики, отличающие их от стандартных диэлектрических волноводов.

**Ключевые слова:** граница раздела сред, полное внутреннее отражение, магнито-электрический эффект, волновод, гиперболические метаматериалы

### Введение

В последнее время в оптике стали использовать новые материалы, некоторые из которых даже отсутствовали в природе и которые обладают необычными электромагнитными свойствами. Среди них можно выделить гиперболические метаматериалы – одноосные искусственно созданные среды, у которых главные диэлектрические проницаемости имеют разные знаки [1–3]. Из-за этого поверхность показателя преломления необыкновенной волны в пространстве волновых векторов имеет форму гиперboloида, а не эллипсоида, как в обычных одноосных кристаллах. Поверхностные плазмонные поляритоны и волноводные моды в гиперболических средах были исследованы в [4–7]. Другим примером необычных материалов являются диэлектрические среды, известных как топологические изоляторы (ТИ) [8], которые последнее время привлекают большое внимание исследователей в области физики конденсированных сред. Топологическим изолятором является диэлектрик (когда полностью заполнена валентная зона, а зона проводимости пустая), имеющий на поверхности проводящие ток состояния.

Известно, что удержание электромагнитной волны в волноводе обусловлено полным внутренним отражением на границах раздела волноводного слоя и окружающих его сред. Для гиперболического метаматериала и топологического изолятора, соприкасающихся с обычным диэлектриком, законы отражения имеют отличия от случая границы раздела двух диэлектрических сред. Эти отличия являются определяющими для характеристик волноводных мод планарных волноводов, в которых используются такие материалы. Например, дисперсионные зависимости приобретают дополнительные частоты отсечки, скорость распространения энергии вдоль волновода может обратиться в нуль [5, 6].

### 1. Отражение от границы гиперболического метаматериала

Уравнения Максвелла для зависящих от частоты полей (фурье-компонент полей) имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \mathbf{D}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (2)$$

Для одноосной анизотропной среды вектор электрической индукции представляется как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + (\varepsilon_e - \varepsilon_o)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})\mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси анизотропии. Главная диэлектрическая проницаемость для обыкновенной волны обозначена через  $\varepsilon_o$ , а для необыкновенной волны – через  $\varepsilon_e$ . В гиперболических средах  $\varepsilon_o > 0$  и  $\varepsilon_e < 0$  имеют разные знаки.

Пусть границей раздела двух сред является плоскость, нормаль к которой есть  $\mathbf{n}$ . Координатный репер, тройка единичных векторов  $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, \mathbf{t}_z$ , выбирается так, чтобы вектор  $\mathbf{t}_x$  совпал с  $\mathbf{n}$ , а волновой вектор плоской волны лежал бы в плоскости, нормаль к которой есть  $\mathbf{t}_y$ . В области  $x < 0$  располагается изотропный диэлектрик, а область  $x > 0$  заполнена гиперболическим материалом. Электромагнитная волна приходит из области  $x < 0$  и испытывает отражение и преломление на границе раздела при  $x = 0$ .

Пусть для простоты анализа оптическая ось направлена вдоль  $\mathbf{n}$ . В этом случае (из-за симметрии относительно сдвига системы координат вдоль вектора  $\mathbf{t}_y$ ) волны распадаются на две группы: поперечные электрические (ТЕ) и поперечные магнитные (ТМ) волны. Уравнения Максвелла (1), (2) в области, занятой гиперболической средой, можно представить двумя группами уравнений: для ТЕ-волн

$$ik_0 H_x = -\partial_z E_y, \quad ik_0 H_z = \partial_x E_y, \quad \partial_z H_x - \partial_x H_z = -ik_0 \varepsilon_o E_y, \quad (3)$$

и для ТМ-волн

$$ik_0 H_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z, \quad \partial_z H_y = ik_0 \varepsilon_e E_x, \quad \partial_x H_y = -ik_0 \varepsilon_o E_z. \quad (4)$$

В области, занятой изотропным диэлектриком, уравнения Максвелла имеют тот же вид, но с заменой  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$  на  $\varepsilon_1$  – диэлектрическую проницаемость изотропного диэлектрика.

Для случая ТЕ-волны напряженность электрического поля в области  $x > 0$  можно, решив систему уравнений (3), записать как

$$E_y(x, z) = E_{\text{tr}} \exp(iqx + i\beta z),$$

где  $E_{\text{tr}}$  – амплитуда преломленной волны, а параметры  $q, \beta$  можно выразить через угол падения  $\theta_{\text{in}}$  следующими соотношениями

$$\beta^2 = k_0^2 \varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}}, \quad q^2 = k_0^2 (\varepsilon_o - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}}).$$

Если гиперболическая среда характеризуется главными диэлектрическими проницаемостями, такими что  $\varepsilon_o > 0$ ,  $\varepsilon_e < 0$ , то полное внутреннее отражение происходит при углах падения, превышающих критическое значение  $\theta_c$ , определяемое как и в обычном диэлектрике:  $\sin^2 \theta_c = \varepsilon_o / \varepsilon_1$ . Но если гиперболическая среда характеризуется случаем  $\varepsilon_o < 0$ ,  $\varepsilon_e > 0$ , то отражение происходит при всех углах падения. Такая среда напоминает металл, но в роли скин-слоя выступает длина проникновения  $l_{\text{pen}}^{-2}$  такая, что  $l_{\text{pen}}^{-2} = k_0^2 (|\varepsilon_o| + \varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}})$ .

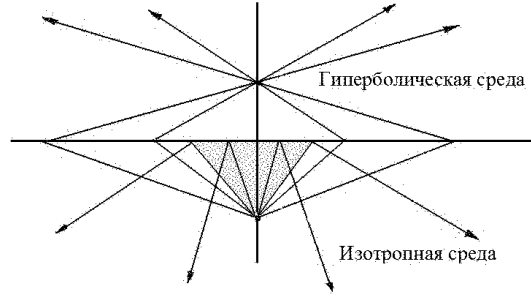


Рис. 1. Ход лучей, преломляющихся на границе раздела изотропной и гиперболической сред. Углы падения, лежащие в секторе, отмеченном серым цветом, отвечают лучам, испытывающим полное внутреннее отражение

Для случая ТМ-волны решение системы (4) позволяет записать напряженность магнитного поля в области  $x > 0$  в следующей форме

$$H_y(x, z) = H_{\text{tr}} \exp(iqx + i\beta z),$$

где  $H_{\text{tr}}$  – амплитуда преломленной волны. Параметры  $q$ ,  $\beta$  выражаются через угол падения  $\theta_{\text{in}}$  и диэлектрические проницаемости следующими соотношениями:

$$\beta^2 = k_0^2 \varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}}, \quad q^2 = \frac{k_0^2 \varepsilon_o}{\varepsilon_e} (\varepsilon_e - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}}).$$

Если же  $\varepsilon_o < 0$  и  $\varepsilon_e > 0$ , то для параметра  $q^2$  справедлива формула

$$q^2 = \frac{k_0^2 |\varepsilon_o|}{\varepsilon_e} (\varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}} - \varepsilon_e).$$

Если  $q^2 < 0$ , то происходит отражение волны на границе раздела сред для всех углов падения  $\theta_{\text{in}}$ , меньших критического значения  $\theta_c$ , определяемого формулой:  $\sin^2 \theta_c = \varepsilon_e / \varepsilon_1$ . Для углов падения, больших  $\theta_c$ , справедливо  $q^2 > 0$ , и, следовательно, волна преломляется, как показано на рис. 1.

Если  $\varepsilon_e < 0$  и  $\varepsilon_o > 0$ , то параметр  $q^2$ , имеет вид

$$q^2 = \frac{k_0^2 \varepsilon_o}{|\varepsilon_e|} (\varepsilon_1 \sin^2 \theta_{\text{in}} + |\varepsilon_e|).$$

Поскольку эта величина всегда положительная, ТМ-волны при любом угле падения преломляются на границе раздела диэлектрика и гиперболического материала при выбранной ориентации оптической оси и знаках главных диэлектрических проницаемостей. В этом случае получить планарный волновод невозможно.

Решение уравнений (3) и (4) позволяет найти электрические и магнитные поля ТЕ- и ТМ-волн и с их помощью вычислить усредненные по быстрым (оптическим) колебаниям компоненты вектора Пойнтинга. Для рассматриваемого здесь случая вектор Пойнтинга имеет две компоненты:  $\langle S_x \rangle$  и  $\langle S_z \rangle$ .

В случае ТМ-волны в области, где среда является гиперболической с  $\varepsilon_o > 0$  и  $\varepsilon_e < 0$ , вычисление компонент вектора Пойнтинга дает следующий результат:

$$\langle S_z \rangle = -\frac{ck_0 \beta \varepsilon_o}{8\pi q^2} \left( \frac{\varepsilon_o}{|\varepsilon_e|} \right) |E_{\text{tr}}|^2, \quad \langle S_x \rangle = \frac{ck_0 \varepsilon_o}{8\pi q} |E_{\text{tr}}|^2.$$

Входящие сюда параметры были определены выше. Из условия  $\langle S_x \rangle > 0$  следует, что  $q$  является положительной величиной. Но, проекция вектора Пойнтинга  $\langle S_z \rangle$  отрицательная. Это означает, что преломленная волна распространяется так же, как в отрицательно преломляющей среде (см. ход преломленных лучей на рис. 1).

## 2. Отражение от границы топологического изолятора

Электромагнитные поля в ТИ определяются системой обобщенных уравнений Максвелла [9], первоначально введенной при формулировке топологической теории поля:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - 4\pi\alpha \left( \nabla\theta \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{B} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\alpha \nabla\theta \cdot \mathbf{B},\end{aligned}\tag{5}$$

где  $\alpha = e^2/ch$  – константа взаимодействия с аксионным полем  $\theta(\mathbf{x}, t)$ . Входящие в эти уравнения векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  являются обычными векторами электрической и магнитной индукций, обусловленных связанными зарядами и их токами. Если ввести другие векторы  $\mathbf{D}_a$  и  $\mathbf{H}_a$ :

$$\mathbf{D}_a = \mathbf{D} - 4\pi\alpha\theta\mathbf{B}, \quad \mathbf{H}_a = \mathbf{H} + 4\pi\alpha\theta\mathbf{E},$$

то уравнения (5) можно переписать в форме обычных уравнений Максвелла с  $\theta = 0$ , но в которых  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  заменены на  $\mathbf{D}_a$  и  $\mathbf{H}_a$ .

Характер топологического материала определяется выбором поля  $\theta(\mathbf{x}, t)$ . При рассмотрении электромагнитного поля в топологическом изоляторе аксионное поле  $\theta(\mathbf{x}, t)$  принимается кусочно-непрерывной функцией пространственной переменной и постоянной функцией времени. В обычном диэлектрике  $\theta = 0$ , но для ТИ полагается, что  $\theta = 1/2 + n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  [8, 9].

Граница раздела аппроксимируется множеством касательных плоскостей, прикрепленных к каждой точке этой границы. На каждой касательной плоскости границы раздела выбраны координатные оси так, чтобы ось  $X$  была направлена вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к границе раздела, а касательные векторы  $\mathbf{t}_y$  и  $\mathbf{t}_z$  лежали в плоскости  $(Y, Z)$ . Условия непрерывности компонент электромагнитных полей и индукций выводятся из уравнений (5). Поля и индукции на границе раздела связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\left( \mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{n} &= 4\pi\alpha\Delta\theta\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n}, \quad \left( \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{t}_{y,z} = -4\pi\alpha\Delta\theta\mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t}_{y,z}, \\ \left( \mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \left( \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{t}_{y,z} = 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь  $\Delta\theta = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$ . Верхним индексом “1” помечены поля в диэлектрической среде, где  $\theta^{(1)} = 0$ , а индексом “2” – поля в ТИ с  $\theta^{(2)} \neq 0$ . Таким образом,  $\Delta\theta = -\theta^{(2)}$ .

Следует заметить, что условия (6) могут быть получены для случая раздела двух обычных диэлектриков, по границе раздела которых течет ток, и локализованы поверхностные заряды, плотность которых определяется выражениями

$$\mathbf{j}_s = c\alpha\Delta\theta\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}, \quad \varrho_s = \alpha\Delta\theta\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(1)}.$$

Ток направлен перпендикулярно направлению вектора электрического поля  $\mathbf{E}^{(1)}$ , поэтому не дает вклад в омические потери (джоулево тепло). Это аналог поперечного тока, возникающего в случае эффекта Холла с нулевой продольной проводимостью. Электрические заряды на границе раздела индуцированы магнитным полем электромагнитной волны  $\mathbf{B}^{(1)}$ . Поверхностные ток и заряды являются проявлением (топологического) магнитоэлектрического эффекта [9].

В случае планарных волноводов из обычных диэлектриков электромагнитные поля разделяются на две группы: ТЕ-волны, у которых вектор электрического поля лежит в плоскости раздела, и ТМ-волны, у которых в плоскости раздела лежит вектор магнитного поля, а электрическое поле имеет продольную и поперечную составляющие. Для планарных волноводов, в которых волноводный слой или подложка (или покровный слой) изготовлены из ТИ, разделение полей на ТЕ- и ТМ-волны не происходит [10, 11]. Из-за магнитоэлектрического эффекта поляризация поля меняется при переходе через границу волновода, что смешивает ТЕ- и ТМ-волны.

Если рассматривать планарный волновод в виде слоя ТИ, окруженного обычными диэлектриками, то можно получить, что заряды на противоположных границах волновода имеют противоположные знаки, а индуцированные токи текут в противоположных направлениях. Поправка к фазовому сдвигу (эффект Гуса – Хенхен), обусловленная магнитоэлектрическим эффектом, будет пропорциональна  $\alpha\Delta\theta$  на одной границе волноводного слоя и  $-\alpha\Delta\theta$  на другой границе. Топологические свойства волноводного слоя никак не проявятся. Если подложка (или покровный слой) изготовлены из ТИ, то дополнительный фазовый сдвиг на одной из границ окажется нескомпенсированным. Следовательно, в таком случае можно ожидать изменение значений частот отсечки.

### Заключение

Рассмотрены законы преломления и отражения на границе обычного диэлектрика и гиперболического метаматериала. Поскольку у такой анизотропной среды главные диэлектрические проницаемости имеют различные знаки, характер отражения электромагнитной волны сильно меняется по сравнению с обычной анизотропной средой. Возможен случай, когда все волны, падающие на границу раздела, отражаются как от металлической поверхности. Есть случай, когда волны, падающие под углами, меньшими критического значения, полностью отражаются, а волны, падающие под большими углами, преломляются. В обычном же случае все наоборот. Кроме того, бывают случаи, когда волны преломляются при любых углах падения и нет полного внутреннего отражения. Следствием этих особенностей являются дополнительные частоты отсечки мод планарного волновода, ограничение числа мод в волноводе с заданной толщиной, замедление распространения энергии электромагнитного поля по волноводу.

Использование в волноводе в качестве подложки или покровного слоя топологических изоляторов ведет к вращению поляризации на границе раздела сред. Это приводит к ограничению на материалы, поддерживающие поверхностные волны, но для планарных волноводов ограничений нет.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-02-02764а).

### Литература

1. *Elser J., Wangberg R., Podolskiy V.A., Narimanov E.E.* Nanowire metamaterials with extreme optical anisotropy // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – V. 89, No 26. – Art. 261102, P. 1–3. – doi: 10.1063/1.2422893.
2. *Noginov M.A., Barnakov Yu.A., Zhu G., Tumkur G., Li H., Narimanov E.E.* Bulk photonic metamaterial with hyperbolic dispersion // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – V. 94, No 15. – Art. 151105, P. 1–3. – doi: 10.1063/1.3115145.

3. *Drachev V.P., Podolskiy V.A., Kildishev A.V.* Hyperbolic metamaterials: New physics behind a classical problem // *Opt. Express.* – 2013. – V. 21, No 12. – P. 15048–15064. – doi: 10.1364/OE.21.015048.
4. *Babicheva V.E., Shalaginov M.Y., Ishii S., Boltasseva A., Kildishev Al.V.* Long-range plasmonic waveguides with hyperbolic cladding // *Opt. Express.* – 2015. – V. 23, No 24. – P. 31109–31119. – doi: 10.1364/OE.23.031109.
5. *Ляшко Е.И., Маймистов А.И.* Линейные направленные волны в гиперболическом планарном волноводе. Дисперсионные соотношения // *Квантовая электроника.* – 2015. – Т. 45, № 11. – С. 1050–1054.
6. *Lyashko E.I., Maimistov A.I.* Guided waves in asymmetric hyperbolic slab waveguides: The TM mode case // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2016. – V. 33, No 11. – P. 2320–2330. – doi: 10.1364/JOSAB.33.002320.
7. *Ляшко Е.И., Маймистов А.И.* Моды нелинейного планарного волновода с диэлектрическим слоем, погруженным в гиперболическую среду // *Квантовая электроника.* – 2017. – Т. 47, № 11. – С. 1053–1063.
8. *Hasan M.Z., Kane C.L.* Colloquium: Topological insulators // *Rev. Mod. Phys.* – 2010. – V. 82, No 4. – P. 3045–3067. – doi: 10.1103/RevModPhys.82.3045.
9. *Qi X.-L., Hughes T.L., Zhang Sh.-Ch.* Topological field theory of time-reversal invariant insulators // *Phys. Rev. B.* – 2008. – V. 78, No 19. – Art. 195424, P. 1–43. – doi: 10.1103/PhysRevB.78.195424.
10. *Karch A.* Surface plasmons and topological insulators // *Phys. Rev. B.* – 2011. – V. 83, No 24. – Art. 245432, P. 1–5. – doi: 10.1103/PhysRevB.83.245432.
11. *Ляшко Е.И., Маймистов А.И.* Поверхностные волны на границе раздела диэлектрика и топологического изолятора // *Оптика и спектроскопия.* – 2016. – Т. 121, № 4. – С. 671–679.

Поступила в редакцию  
09.11.17

---

**Маймистов Андрей Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
Каширское шоссе, д. 18, г. Москва, 115409, Россия  
E-mail: *aimaimistov@gmail.com*

**Ляшко Екатерина Ивановна**, аспирант

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
Каширское шоссе, д. 18, г. Москва, 115409, Россия  
E-mail: *ostroukhova.ei@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)  
2018, vol. 160, no. 1, pp. 17–24

## The Features of Waveguides from Hyperbolic Metamaterials and Topological Insulators

A.I. Maimistov\*, E.I. Lyashko\*\*

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia

E-mail: \*aimaimistov@gmail.com, \*\*ostroukhova.ei@gmail.com

Received November 9, 2017

### Abstract

The refraction and reflection phenomena occurring at the boundaries of dielectric waveguides manufactured from the unusual materials have been discussed. Such materials are topological insulators and hyperbolic metamaterials with the electromagnetic properties being different from those for the ordinary dielectrics. For example, the polarization of the refracted and reflected waves can be changed; the total internal reflection occurs at small angles of the incident wave that is less than a certain critical angle. As a result, the waveguides acquire new characteristics that distinguish them from the standard dielectric waveguides.

**Keywords:** interface, total internal reflection, magnetoelectric effect, waveguide, hyperbolic metamaterial

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-02-02764a).

### Figure Captions

Fig. 1. The path of rays bending at the boundary between the isotropic and hyperbolic media. The incidence angles in the sector highlighted in gray indicate the rays with total internal reflection.

### References

1. Elser J., Wangberg R., Podolskiy V.A., Narimanov E.E. Nanowire metamaterials with extreme optical anisotropy. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, vol. 89, no. 26, art. 261102, pp. 1–3. doi: 10.1063/1.2422893.
2. Noginov M.A., Barnakov Yu.A., Zhu G., Tumkur G., Li H., Narimanov E.E. Bulk photonic metamaterial with hyperbolic dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 2009, vol. 94, no. 15, art. 151105, pp. 1–3. doi: 10.1063/1.3115145.
3. Drachev V.P., Podolskiy V.A., Kildishev A.V. Hyperbolic metamaterials: New physics behind a classical problem. *Opt. Express*, 2013, vol. 21, no. 12, pp. 15048–15064. doi: 10.1364/OE.21.015048.
4. Babicheva V.E., Shalaginov M.Y., Ishii S., Boltasseva A., Kildishev A.V. Long-range plasmonic waveguides with hyperbolic cladding. *Opt. Express*, 2015, vol. 23, no. 24, pp. 31109–31119. doi: 10.1364/OE.23.031109.

5. Lyashko E.I., Maimistov A.I. Linear guided waves in a hyperbolic planar waveguide. Dispersion relations. *Quantum Electron.*, 2015, vol. 45, no. 11, pp. 1050–1054.
6. Lyashko E.I., Maimistov A.I. Guided waves in asymmetric hyperbolic slab waveguides: The TM mode case. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2016, vol. 33, no. 11, pp. 2320–2330. doi: 10.1364/JOSAB.33.002320.
7. Lyashko E.I., Maimistov A.I. Modes of a nonlinear planar waveguide with a dielectric layer immersed in a hyperbolic medium. *Quantum Electron.*, 2017, vol. 47, no. 11, pp. 1053–1063.
8. Hasan M.Z., Kane C.L. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, vol. 82, no. 4, pp. 3045–3067. doi: 10.1103/RevModPhys.82.3045.
9. Qi X.-L., Hughes T.L., Zhang Sh.-Ch. Topological field theory of time-reversal invariant insulators. *Phys. Rev. B.*, 2008, vol. 78, no. 19, art. 195424, pp. 1–43. doi: 10.1103/PhysRevB.78.195424.
10. Karch A. Surface plasmons and topological insulators. *Phys. Rev. B.*, 2011, vol. 83, no. 24, art. 245432, pp. 1–5. doi: 10.1103/PhysRevB.83.245432.
11. Lyashko E.I., Maimistov A.I. Surface waves at the interface between a dielectric and a topological insulator. *Opt. Spectrosc.*, 2016, vol. 121, no. 4, pp. 635–642. doi: 10.1134/S0030400X16100155.

---

⟨ **Для цитирования:** Маймистов А.И., Ляшко Е.И. Особенности волноводов из гиперболических метаматериалов и топологических изоляторов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 1. – С. 17–24. ⟩

⟨ **For citation:** Maimistov A.I., Lyashko E.I. The features of waveguides from hyperbolic metamaterials and topological insulators. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 1, pp. 17–24. (In Russian) ⟩