КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Карчевский М.М.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Методическая разработка

КАЗАНЬ — 2007

Содержание

Введение

Функциональный анализ возник на рубеже XIX–XX вв. в трудах Гильберта, Фреше, Фредгольма, Винера, Банаха и др. в результате глубокого синтеза идей алгебры, геометрии, анализа, теории дифференциальных уравнений. Уже к середине двадцатого столетия он занял центральное место среди математических дисциплин. Идеи и методы функционального анализа оказались чрезвычайно плодотворными во многих областях математики, например, в теории уравнений с частными производными. Более того, язык функционального анализа оказался удобным и естественным для многих разделов прикладной математики. Сейчас уже трудно представить себе изложение теории уравнений математической физики, численных методов, а также многих областей механики и физики без использования идей и методов функционального анализа.

Это делает совершенно необходимым включение элементов функционального анализа в подготовку специалистов по прикладной математике. В предлагаемом пособии в краткой, иногда конспективной, форме излагаются основные понятия элементарного функционального анализа. Даются также необходимые сведения из теории меры и интеграла Лебега, без которых невозможно построение теории наиболее важных функциональных пространств. Большинство из рассматриваемых в пособии теоретических вопросов сопровождается упражнениями. Некоторые из них иллюстрируют применение методов функционального анализа к решению конкретных математических задач. Все упражнения снабжены решениями или подробными указаниями, что дает возможность использовать данное пособие и для самостоятельного изучения предмета.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1.1. Метрические пространства

В математическом анализе встречаются различные понятия сходимости. По большей части эти понятия имеют то общее, что сходимость последовательности элементов x_n к x означает неограниченное уменьшение расстояния между x_n и x. В зависимости от того, какой смысл вкладывается в понятие расстояния, приходят к тому или иному определению предела. Представляется целесообразным поэтому ввести общее определение расстояния, охватывающее все известные частные случаи. Так приходят к определению метрического пространства.

<u>Определение 1.</u> *Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре элементов $x,\ y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $\rho(x,y)$. При этом должны быть выполнены следующие условия, называемые аксиомами метрического пространства.*

1. $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества).

2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для любых $x,\ y \in X$ (аксиома симметрии).

3. $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$ для любых $x,\ y,\ z \in X$ (аксиома треугольника).

Аксиомы метрического пространства отражают наиболее общие свойства расстояния в обычном трехмерном евклидовом пространстве.

Элементы метрического пространства часто также называют точками.

Всякое подмножество метрического пространства само является метрическим пространством и называется подпространством пространства X.

Примеры метрических пространств

1. Числовая прямая. Множество R вещественных чисел, очевидно, превращается в метрическое пространство, если положить

$$\rho(y,x) = |x - y|.$$

2. Евклидово пространство R^n. Рассматривается множество всех упорядоченных систем из n вещественных чисел

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для любых двух точек $x,\ y$ этого множества положим

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \qquad (1)$$

Докажем аксиому треугольника (остальные аксиомы, очевидно, выполняются). Нам потребуется для этого предварительно установить неравенство Коши:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{2}$$

Имеем для любого вещественного числа t

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i + ty_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + t^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Выражение в правой части последнего неравенства — квадратный трехчлен относительно t, неотрицательный при всех t, значит, дискриминант трехчлена неположителен:

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Извлекая корень квадратный из обеих частей этого неравенства, получим неравенство (2). Пусть теперь $x,\ y,\ z \in R^n$. Используя неравенство Коши, получим

$$(\rho(x,y))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((x_i - z_i) + (z_i - y_i)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(y_i - z_i) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\rho(x,z) + \rho(y,z)\right)^2,$$

что и означает справедливость неравенства треугольника.

Отметим, что доказанное нами неравенство, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

называемому обычно неравенством Минковского.

3. Пространство непрерывных функций $C[a, b]$. Рассматривается множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на ограниченном отрезке $a \leq x \leq b$ вещественной оси. Расстояние между элементами f, g этого множества вводится по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|. \tag{3}$$

На множестве непрерывных функций можно определить метрику и другими способами. Например, можно положить

$$\rho(x, y) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \tag{4}$$

или

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}. \tag{5}$$

4. Пространство последовательностей l_2. Рассматривается множество всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ таких, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

сходится. Расстояние между элементами

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots),\ y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}. \tag{6}$$

Формула (6) корректна, так как ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2$$

также сходится, поскольку $|x_i - y_i|^2 \le |x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i y_i| \le 2(|x_i|^2 + |y_i|^2)$.

Справедливость аксиом метрического пространства доказывается вполне аналогично случаю пространства R^n. При этом устанавливаются неравенства Коши и Минковского для последовательностей:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}.$$

Предел последовательности. Последовательность элементов $x_n \in X$ сходится к $x \in X$, если $\rho(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае используются также обозначения: $\lim\limits_{x_n \to \infty} = x$ или $x_n \to x$.

Справедливы следующие общие теоремы.

Теорема 1. *Если $x_n \to x$, то и любая подпоследовательность x_{n_k} последовательности x_n также сходится к x.*

Теорема 2. *Последовательность точек метрического пространства не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(y, x_n)$ и может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа при достаточно большом n. Это значит, что $\rho(x, y) = 0$, и, следовательно, $x = y$.

Определение 2. *Окрестностью $S(x, r)$ точки x радиуса r называется множество всех точек y пространства X, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < r$.*

Понятие окрестности позволяет дать следующую классификацию точек для множеств $M \subset X$, аналогичную той, которая используется в теории точечных множеств на вещественной прямой.

Точка x называется *предельной точкой* множества M, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x. Заметим, что предельная точка может и не принадлежать множеству M.

Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* этого множества, если она принадлежит множеству M вместе с некоторой своей окрестностью.

Приведем теперь некоторую классификацию подмножеств метрического пространства.

Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в окрестности конечного радиуса некоторой точки $x_0 \in X$.

Множество $M \subset X$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними.

Множество, полученное из M присоединением к нему всех его предельных точек, называется *замыканием* множества M и обозначается $\overline{M}$.

Множество M называется *замкнутым*, если $\overline{M} = M$.

Множество M называется *плотным* в множестве N, если $N \subset \overline{M}$. В частности, множество M называется всюду плотным в пространстве X, если $\overline{M} = X$.

Сепарабельные пространства. Пространство X называется *сепарабельным*, если в этом пространстве существует счетное всюду плотное множество. Иными словами, существует последовательность x_n такая, что для любого $x \in X$ найдется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к x.

Примеры сепарабельных пространств

1. Вещественная ось R^1. Всюду плотным множеством является счетное множество всех рациональных чисел.

2. Евклидово пространство R^n. Всюду плотным множеством является счетное множество всех векторов с рациональными координатами.

3. Пространство последовательностей l_2. Счетным всюду плотным множеством является множество M всех векторов вида

$$(r_1,\ r_2,\ \ldots, r_n,\ 0, \ldots),$$

где r_i — рациональные числа, n — произвольное натуральное число. Прежде всего заметим, что указанное множество, очевидно, счетно. Пусть теперь $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots)$ — произвольная точка l_2 и пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Найдем такое натуральное число N, чтобы

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \le \varepsilon^2/2.$$

Возьмем теперь элемент $x_0 = (r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ 0,\ 0,\ \ldots) \in M$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - r_i)^2 \le \varepsilon^2/2.$$

Тогда получим

$$(\rho(x_0, x))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - r_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \le \varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2 = \varepsilon^2,$$

то есть $\rho(x_0, x) \le \varepsilon$, и требуемое доказано.

4. Пространство $C[0,1]$. Можно показать (это — знаменитая теорема Вейерштрасса), что для любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

такой, что

$$\rho(f, P_n) = \max_{0\le x\le 1} |f(x) - P_n(x)| \le \varepsilon. \tag{7}$$

Отсюда вытекает, что счетное множество всех полиномов с рациональными коэффициентами всюду плотно в пространстве $C[0,1]$.

Полные пространства. Последовательность x_n элементов метрического пространства X называется сходящейся в себе (последовательностью Коши, фундаментальной последовательностью), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ при } n,\ m \ge n_0(\varepsilon).$$

Если $x_n \to x_0$, то последовательность фундаментальна. Это непосредственно вытекает из неравенства треугольника:

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m).$$

Обратное, вообще говоря, не верно. Пусть, например, X — множество всех рациональных чисел с метрикой $\rho(x,y) = |x - y|$. Возьмем в этом множестве последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ .$$

Эта последовательность, очевидно, фундаментальна, но сходится к иррациональному числу $e \notin X$.

Примерами полных метрических пространств являются пространства R^n, $C[0,1]$, l_2. Пространство непрерывных функций с метрикой (5) не является полным.

Компактные множества. Множество M элементов метрического пространства называется *компактным*, если из любой последовательности элементов множества M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества M. Ясно, что всякое компактное множество замкнуто. Множество называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно. В предкомпактном множестве из всякой последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Пример. Пусть X — вещественная прямая. Множество $M = \{0 \le x \le 1\}$ компактно; множество $M = \{\, 0 < x \le 1 \,\}$ предкомпактно.

Функционалы и операторы в метрических пространствах. Будем говорить, что на метрическом пространстве задан *функционал* f, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие одно и только одно вещественное число $f(x)$. Функционал f называется непрерывным в точке x, если для любой последовательности x_n, сходящейся к x, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Функционал, непрерывный в каждой точке множества M, называется непрерывным на множестве M. Функционалы, непрерывные на компактных множествах, обладают свойствами, аналогичными свойствам непрерывных функций на ограниченных замкнутых множествах вещественной прямой. В частности, справедлива

Теорема 3. *Функционал, непрерывный на компактном множестве M метрического пространства X, достигает на M своего максимального и минимального значений.*

Оператор сжатия. Будем говорить, что на метрическом пространстве задан *оператор* A, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $Ax \in X$.

Оператор A называется непрерывным, если для любой последовательности x_n, сходящейся к x, последовательность Ax_n сходится к Ax.

Оператор A называется *оператором сжатия*, если существует число $q < 1$ такое, что

$$\rho(Ax, Ay) \le q\rho(x, y)$$

для всех $x,\ y \in X$.

Точка x называется *неподвижной точкой* оператора A, если $Ax = x$.

Теорема 4. *Пусть A — оператор сжатия в полном метрическом пространстве X. Тогда существует, и при том только одна, неподвижная точка x оператора A. Точка x может быть построена при помощи итерационного процесса*

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{8}$$

сходящегося при любом начальном приближении $x_0 \in X$.

Доказательство. Для любых двух членов $x_n,\ x_m,\ m > n$, последовательности, построенной согласно (8), применяя неравенство треугольника, получим

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_m) \le$$
$$\le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_m) \le$$
$$\le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m).$$

Заметим теперь, что

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_n) \le q\rho(x_{n-1}, x_n) =$$
$$= q\rho(Ax_{n-2}, Ax_{n-1}) \le q^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le q^n\rho(x_0, x_1).$$

Аналогично

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) \le q^{n+1}\rho(x_0, x_1),\ \rho(x_{n+2}, x_{n+3}) \le q^{n+2}\rho(x_0, x_1),\ \ldots,$$
$$\rho(x_{m-1}, x_m) \le q^{m-1}\rho(x_0, x_1),$$

следовательно,

$$\rho(x_n, x_m) \le (q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{m-1})\rho(x_0, x_1) = \frac{q^n - q^m}{1 - q}\rho(x_0, x_1) =$$
$$= \frac{q^n - q^m}{1 - q}\rho(x_0, Ax_0),$$

но $q < 1$, поэтому

$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{q^n}{1 - q}\rho(x_0, Ax_0) \to 0.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства X сходится. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Используя непрерывность оператора A, перейдем к пределу в (8). Получим $x = Ax$, то есть x — неподвижная точка. Покажем теперь, что неподвижная точка единственна. Предположим противное. Пусть $y \neq x$ неподвижная точка оператора A, то есть $Ay = y$. Но тогда $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y)$, откуда $1 \leq q < 1$, что нелепо. Полученное противоречие доказывает единственность неподвижной точки оператора A.

1.2. Топологические пространства

Ранее было введено понятие окрестности в метрических пространствах. На основании этого понятия было дано определение сходимости последовательности, определение предельной точки множества, понятие открытых и замкнутых множеств. В связи с этим возникает идея введения в рассмотрение таких пространств, в которых основную роль играет не понятие расстояния, а более общее понятие окрестности. Таким образом приходят к определению топологического пространства.

Определение 1. *Множество X называется топологическим пространством, если каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие непустое семейство непустых подмножеств множества X, называемых окрестностями точки x, причем выполняются следующие условия, называемые аксиомами Хаусдорфа топологического пространства.*

1. Каждая окрестность точки x содержит точку x.

2. Если u_x и v_x — две окрестности точки x, то существует третья окрестность w_x этой точки такая, что $w_x = u_x \cap v_x$.

3. Для любой точки $y \in u_x$ существует окрестность v_y такая, что $v_y \subset u_x$.

Понятно, что каждое метрическое пространство — топологическое пространство. В произвольном топологическом пространстве можно ввести классификацию подмножеств, аналогичную той, которая была дана выше для метрических пространств. Например, подмножество M топологического пространства X называется открытым, если для любой точки $x \in M$ существует окрестность u_x этой точки такая, что $u_x \subset M$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к $x \in X$, если для любой окрестности u_xточки x найдется номер n_0 такой, что $x_n \in u_x$ при $n \geq n_0$.

Топологическое пространство X называется метризуемым, если на множестве X можно ввести метрику так, что система окрестностей каждой точки, порождаемая этой метрикой, совпадает с исходной системой окрестностей топологического пространства.

Не всякое топологическое пространство метризуемо. Приведем соответствующий пример. Обозначим через $F[0,1]$ множество всех вещественных функций, определенных на отрезке $[0,1]$. Окрестности точки $f \in F$ определяются как множества

$$v(x; t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n;\ \varepsilon) = \{g(t) \in F[0,1] | |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Легко проверить, что аксиомы 1 — 3 топологического пространства при этом выполняются.

Пусть теперь M — множество тех функций из $F[0,1]$, каждая из которых тождественно равна единице, за исключением конечного числа точек отрезка $[0,1]$, где она обращается в нуль. Понятно, что функция $f(x) \equiv 0$ — предельная точка множества M, так как в любой окрестности этой точки лежит хотя бы одна функция (на самом деле, сколько угодно) из M. С другой стороны, нельзя указать никакой последовательности функций из M, сходящейся к $f(x) \equiv 0$. Действительно, какую бы последовательность $\{f_n\} \subset M$ мы ни взяли, множество тех точек, в которых хотя бы одна из функций этой последовательности обращается в нуль, счетно и, значит, не заполняет всего отрезка. Таким образом, существует точка $t_0 \in [0,1]$, в которой ни одна из функций последовательности $\{f_n\}$ не обращается в нуль. Но тогда в окрестность функции $f(x) \equiv 0$ вида $v(0; t_0; 1/2)$ не попадет ни одна функция последовательности $\{f_n\}$. Таким образом, предельная точка множества M не есть предел некоторой последовательности элементов этого множества, чего не могло бы быть, если сходимость в пространстве $F[0,1]$ была эквивалентной сходимости в некотором метрическом пространстве.

1.3. Линейные нормированные пространства

<u>Определение 1.</u> *Множество X называется линейным пространством, если для любых двух элементов $x,\ y \in X$ определен элемент $x + y \in X$,*

называемый суммой элементов x, y, причем операция сложения обладает следующими свойствами:

1) $x+y=y+x$ — коммутативность;

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ — ассоциативность;

3) существует однозначно определенный элемент $0\in X$ такой, что $x+0=x\ \forall x\in X$;

4) для каждого элемента $x\in X$ существует однозначно определенный элемент $-x\in X$ такой, что $x+(-x)=0$.

Вместо $x+(-y)$ обычно пишут $x-y$, элемент 0 называют нулем пространства, элемент $-x$ называют элементом противоположным x.

Кроме операции сложения определена операция умножения элементов множества X на числа (вещественные или комплексные), причем для любого $x\in X$ и числа λ элемент $\lambda x\in X$, а операция умножения должна обладать следующими свойствами:

1) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ — ассоциативность;

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ — дистрибутивность;

3) $1\cdot x=x$.

Если допускается умножение только на вещественные числа, пространство называется *вещественным*. Если разрешается умножение и на комплексные числа, пространство — *комплексное*.

Примеры линейных пространств

1. Множество всех векторов трехмерного евклидова пространства с обычным образом определенным умножением на вещественные числа и сложением векторов (по правилу параллелограмма) — вещественное линейное пространство.

2. Множество всех полиномов заданной степени n с комплексными коэффициентами — комплексное линейное пространство, поскольку сумма двух любых полиномов степени n — полином степени n, результат умножения полинома на любое комплексное число — полином той же степени.

3. Множество вещественных функций, определенных на некотором интервале вещественной оси, превращается в вещественное линейное пространство, если в нем ввести обычным образом операцию сложения двух функций и операцию умножения функции на вещественное число.

Определение 2. *Система элементов* $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots x_n \in X$ *называется линейно независимой, если линейная комбинация этих элементов*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$$

обращается в нуль тогда и только тогда, когда все коэффициенты $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, a_n$ *одновременно обращаются в нуль.*

Определение 3. *Линейное пространство* X *называется конечномерным, если существует линейно независимая система элементов* $e_1,\ e_2,\ e_3,\ \dots, e_n \in X$, *такая, что любой элемент* $x \in X$ *представим в виде*

$$x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 + \cdots \alpha_ne_n.$$

Число n *называется размерностью пространства* X. *Элементы* $e_1,\ e_2,\ e_3,\ \dots, e_n$ *— базисом.*

Пространство X называется *бесконечномерным*, если в нем не существует конечного базиса.

Пространства, фигурирующие в примерах 1 и 2, конечномерны: в трехмерном евклидовом пространстве любые три вектора, не лежащие в одной плоскости, образуют базис; в пространстве полиномов базис образуют, например, элементы $1,\ x,\ x^2, \dots x^n$, поэтому его размерность равна $n+1$.

Пространство, описанное в третьем примере, бесконечномерно. В нем нельзя указать никакого конечного базиса.

Определение 4. *Множество* X *называется линейным нормированным пространством, если выполнены следующие условия:*

1) X *— линейное пространство с умножением на вещественные (или комплексные) числа;*

2) каждому элементу x *линейного пространства* X *ставится в соответствие вещественное число, которое называется нормой этого элемента и обозначается* $\|x\|$; *предполагаются выполненными так называемые аксиомы нормы:*

1) $\|x\| \geq 0$, *причем* $\|x\| = 0$, *лишь если* $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *для любого числа* λ;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(неравенство треугольника).*

В нашем курсе мы ограничимся случаем вещественных нормированных пространств.

В любом линейном нормированном пространстве можно ввести метрику при помощи равенства $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Нетрудно проверить, что все аксиомы метрического пространства при этом выполняются. После введения метрики определяется понятие сходимости. Именно, говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к x, если

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Употребляются также обозначения:

$$x_n \to x \text{ или } x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Определенная таким образом сходимость элементов линейного нормированного пространства называется *сходимостью по норме*. Если пространство оказывается полным в смысле сходимости по норме, то оно называется *пространством Банаха* (или *банаховым* пространством).

<u>Примеры линейных нормированных пространств.</u> Описываемые ниже пространства состоят из тех же элементов, что и приведенные ранее в качестве примеров метрические пространства.

1. Евклидово пространство R^n. Линейное n-мерное пространство элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ превращается в нормированное пространство, если положить

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Это пространство — пространство Банаха.

2. Пространство $C[0,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, в котором обычным образом вводится понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число. Норма вводится при помощи равенства

$$\|f\| = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|.$$

Пространство $C[0,1]$ — пространство Банаха.

В пространстве непрерывных функций можно определить норму и другими способами, например:

$$\|f\|_{L_1} = \int_0^1 |f(x)|dx; \quad \|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

При таких способах нормировки линейное пространство непрерывных функций — неполное пространство.

Подпространства. Всякое линейное подмножество линейного нормированного пространства, замкнутое относительно сходимости по норме, называется его *подпространством.* Всякое конечномерное подпространство замкнуто. Для бесконечномерных подпространств это, вообще говоря не так. Например, в пространстве $C[0,1]$ множество всех полиномов степени не выше n образует конечномерное подпространство, так как сумма любых полиномов степени не выше n — полином степени не выше n, произведение полинома и любого числа есть снова полином той же степени. В качестве конечного базиса в этом множестве можно взять элементы $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n$. Если взять в качестве линейного множества в $C[0,1]$ множество всех полиномов (произвольной степени), то оно не будет конечномерным и не будет замкнутым, так как любую непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию можно сколь угодно точно приблизить в смысле сходимости по норме $C[0,1]$.

Компактность. Для линейного нормированного пространства, естественно, сохраняются все понятия, связанные со сходимостью элементов, введенные для метрических пространств. Остановимся несколько подробнее на понятии компактности.

Если множество M элементов линейного нормированного пространства X компактно, то оно замкнуто и ограничено. В самом деле, замкнутость множества непосредственно вытекает из определения компактности. Докажем его ограниченность, то есть установим существование постоянной $c > 0$ такой, что $\|x\| \le c$ для всех $x \in M$. Действительно, предположим противное и пусть x_1 — произвольная точка из M. Поскольку M не ограничено, то найдется точка $x_2 \in M$ такая, что $\|x_1 - x_2\| > 1$, иначе

$$\|x\| \le \|x_1\| + \|x - x_1\| \le c = \|x_1\| + 1\ \forall x \in M.$$

Продолжая этот процесс, построим множество элементов $x_1,\ x_2,\ \dots \in M$ таких, что $\|x_i - x_j\| > 1$ при $i \ne j$. Если это множество элементов бесконечно, то оно образует последовательность элементов, из которой нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность. Если же указанное множество содержит конечное число элементов, то множество M очевидно является ограниченным.

Обратное, вообще говоря, неверно. Не всякое ограниченное замкнутое множество компактно. Более того, справедлива

Теорема 1. *Если в пространстве X всякое ограниченное замкнутое множество компактно, то пространство X конечномерно.*

Таким образом, компактные множества в бесконечномерных пространствах должны кроме ограниченности удовлетворять некоторым дополнительным условиям.

Укажем критерий компактности в пространстве $C[0,1]$.

Теорема 2 (Арцела). *Для того, чтобы множество M функций из $C[0,1]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Пояснение. Множество функций M называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon, \text{ если } |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$$

одновременно для всех $f \in M$.

Следствие. *Пусть множество M функций из $C[0,1]$ удовлетворяет следующим условиям. Все функции из M дифференцируемы. Существуют постоянные c, c_1 такие, что $\|f\| \leq c$, $\|f'\| \leq c_1$. Тогда множество M компактно.*

Доказательство. Первое из указанных неравенств означает равномерную ограниченность множества M. Из второго неравенства вытекает равностепенная непрерывность. В самом деле, по формуле конечных приращений имеем

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leq c_1|x_1 - x_2| \quad \forall f \in M,$$

откуда и вытекает равностепенная непрерывность M.

1.4. Пространства Гильберта

В n-мерном пространстве векторов R^n помимо обычных операций сложения векторов и умножения вектора на число можно ввести понятие скалярного произведения векторов (x,y), полагая

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Введенное таким образом скалярное произведение обладает свойствами, аналогичными свойствам скалярного произведения векторов в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Сходным образом можно ввести скалярное произведение и в линейных пространствах функций. В связи с этим приходят к определению абстрактных линейных пространств со скалярным произведением, или *пространств Гильберта.*

<u>Определение 1.</u> *Бесконечномерное линейное пространство H называется вещественным пространством Гильберта, если каждой паре элементов x, $y \in H$ ставится в соответствие вещественное число (x, y), называемое скалярным произведением элементов x, y. При этом должны выполняться условия (аксиомы скалярного произведения):*

1. $(x, y) = (y, x)$ (аксиома симметрии);

2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых вещественных чисел α, β (аксиома линейности);

3. $(x, x) \geq 0$, если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ (аксиома положительной определенности).

В соответствии с аксиомой 3 каждому элементу x можно поставить в соответствие число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, называемое нормой x. Покажем, что при этом все аксиомы линейного нормированного пространства выполняются, то есть пространство Гильберта — линейное нормированное пространство. Рассуждая аналогично доказательству неравенства Коши для сумм, получим неравенство Коши–Буняковского (его часто называют также неравенством Шварца):

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Далее,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

следовательно, неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для нормы выполняется. Остальные аксиомы нормы также очевидно выполнены. Под сходимостью в пространстве Гильберта понимают сходимость по норме. Обычно в определение пространства Гильберта включают и требование его полноты.

Примеры пространств Гильберта

1. Пространство l_2. Если определить в пространстве последовательностей l_2 скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

то оно превращается в пространство Гильберта. Пространство l_2 полно.

2. Определим на линейном пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Все аксиомы скалярного произведения очевидным образом выполняются, но пространство непрерывных функций в смысле сходимости по соответствующей норме не является полным. Для того, чтобы расширить это пространство до полного, приходится присоединять к нему функции, существенно более сложные, чем непрерывные, и, более того, обобщать понятие интеграла.

Ортогональность. Элементы $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Пусть L — подпространство пространства Гильберта H. Говорят, что элемент x ортогонален L, если $(x, y) = 0$ для любого $y \in L$.

Теорема 1 (об ортогональном разложении). *Пусть L — подпространство пространства Гильберта H, и пусть x — произвольный элемент H. Тогда существуют элементы $y \in L$ и z, ортогональный L, такие, что $x = y + z$. Элементы y, z определяются по элементу x однозначно.*

Элемент y называется *проекцией* x на подпространство L. Можно показать, что y — ближайший к x элемент подпространства L:

$$\|x - y\| = \min_{u \in L} \|x - u\|.$$

Отметим также, что элемент y можно характеризовать соотношением

$$(y, h) = (x, h) \quad \forall h \in L. \tag{9}$$

Ортонормированные системы. Система элементов $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ из пространства Гильберта H называется *ортонормированной*, если

$$(e_k, e_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Мы будем рассматривать также бесконечные ортонормированные системы $e_1,\ e_2,\ \ldots$ Определим подпространство $L \subset H$ как множество элементов вида

$$\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \tag{10}$$

где $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ — произвольные вещественные числа. Покажем, как вычисляется проекция y произвольного элемента $x \in H$ на подпространство L. Для этого воспользуемся условием (9), полагая последовательно $h = e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$. В результате получим

$$c_i = (x, e_i),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i.$$

Элемент y называют отрезком *ряда Фурье* элемента x; c_k — *коэффициентами Фурье* элемента x по ортонормированной системе $e_1,\ e_2,\ \ldots$

Ясно, что $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, следовательно, $\|y\|^2 \leq \|x\|^2$, но

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2, \tag{11}$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \|x\|^2. \tag{12}$$

Если ортонормированная система бесконечна, то неравенство (12) выполнено при любом n, поэтому ряд из квадратов коэффициентов Фурье для любого элемента сходится; более того

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \|x\|^2. \tag{13}$$

Неравенство (13) называется *неравенством Бесселя.* Можно показать, что если (13) превращается в равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|x\|^2, \tag{14}$$

то

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = x$$

(ряд Фурье элемента x сходится к этому элементу). Условие (14) называется *уравнением замкнутости Парсеваля.* Если условие (14) выполнено для любого $x \in H$, то ортонормированная система называется *полной.* Любой элемент из H разлагается в ряд Фурье по такой системе. Можно показать, что для существования ортонормированной полной системы необходимо и достаточно, чтобы пространство H было сепарабельным.

1.5. Линейные операторы и функционалы

Будем говорить, что на линейном нормированном пространстве X задан *линейный функционал* , если каждому элементу $x \in X$ можно однозначно поставить в соответствие число $f(x)$. При этом должно быть выполнено условие

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для любых $x,\ y \in X$, и любых чисел $\alpha,\ \beta$.

Линейный функционал называется *ограниченным,* если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы линейный функционал был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен.*

Нетрудно показать, что для любого ограниченного линейного функционала f существует величина

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

называемая *нормой функционала* f.

Пример линейного ограниченного функционала. Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[0,1]$. Положим

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dt \quad \forall x \in C[0,1]. \tag{15}$$

Ясно, что это соотношение определяет линейный функционал. Покажем, что он ограничен. Действительно,

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \leq \int_0^1 |x(t)|\, dt \leq \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)| = \|x\|.$$

Для некоторых линейных нормированных пространств можно указать общий вид линейного функционала. Особенно просто это делается для пространства Гильберта.

Теорема 2. *Пусть f — линейный ограниченный функционал на пространстве Гильберта H. Тогда существует, и при том только один, элемент $g \in H$ такой, что $f(x) = (g, x)$ для любого $x \in H$.*

Таким образом, любой линейный ограниченный функционал в пространстве Гильберта представи́м в виде скалярного произведения.

Говорят, что из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y действует *линейный оператор* A, если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент Ax пространства Y, причем

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

для любых $x,\ y \in X$, и любых чисел $\alpha,\ \beta$.

Если $Y = X$, говорят, что оператор A действует в пространстве X. В дальнейшем будем рассматривать только этот случай. Линейный оператор будем называть *непрерывным*, если

$$Ax_n \to Ax \text{ при } x_n \to x.$$

Линейный оператор называется *ограниченным*, если существует постоянная $c \geq 0$ такая, что

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Для ограниченности линейного оператора необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен. Если оператор A ограничен, то, как нетрудно проверить, существует величина

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

называемая *нормой оператора* A.

Приведем пример линейного ограниченного оператора. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ и положим для любой функции $f \in C[0,1]$

$$Af(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \quad \forall x \in [0,1], \tag{16}$$

где $K(x,y)$ — заданная функция, непрерывная на единичном квадрате $0 \leq x,\ y \leq 1$. Функция $g(x) = Af(x)$ в силу непрерывности функции $K(x,y)$ непрерывна, то есть оператор A действительно отображает пространство $C[0,1]$ в себя. Линейность оператора A очевидна. Покажем, что он ограничен. Имеем

$$\|Af\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x,y)|\, |f(y)|\, dy \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x,y)|\, dy = c\|f\|,$$

где

$$c = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x,y)|\, dy.$$

Ограниченность оператора A доказана. Оператор A называется *интегральным* оператором, функция $K(x,y)$ — *ядром* оператора.

1.6. Дифференцирование в линейных пространствах

Пусть A — оператор, вообще говоря, нелинейный, действует в линейном нормированном пространстве X. Наиболее распространены следующие определения понятия производной оператора.

Линейный ограниченный оператор $A'(x)$ называется *производной Гато* оператора A в точке x, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(A\left(x + th\right) - A\left(x\right) \right) = A'(x)h \quad \forall h \in X.$$

Линейный ограниченный оператор $A'(x)$ называется *производной Фреше* оператора A в точке x, если

$$A(x+h) = A(x) + A'(x)h + \omega(x,h) \quad \forall h \in X, \tag{17}$$

причем

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Если оператор A имеет производную Фреше, то он имеет и производную Гато, совпадающую с производной Фреше.

Докажем это утверждение. Заменим с этой целью в равенстве (17) элемент h на th, где t — произвольное вещественное число. Получим

$$\left(A(x+th) - A(x)\right)/t = A'(x)h + \omega(x,th)/t,$$

причем в силу определения производной Фреше

$$\|\omega(x,th)\|/t = \|h\|\|\omega(x,th)\|/\|th\| \to 0$$

при $t \to 0$. Это значит, что $A'(x)$ — производная Гато оператора A.

Можно привести примеры, показывающие, что из существования производной Гато не следует существования производной Фреше.

Как следует из данных определений, производные Гато и Фреше обобщают понятие обычной производной вещественной функции вещественной переменной и обладают рядом свойств, аналогичных свойствам производных вещественных функций, в частности, для них справедлива формула дифференцирования сложной функции. Теорема Лагранжа о конечных приращениях принимает следующий вид.

Теорема 1. *Пусть оператор A имеет производную в каждой точке пространства X. Тогда для любых двух точек x, $y \in X$ выполнено неравенство*

$$\|A(x) - A(y)\| \le \sup_{0\le\theta\le 1} \|A'(y + \theta(x-y))\|\|x-y\|.$$

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Во многих вопросах математического анализа обычного понятия интеграла в смысле Римана оказывается недостаточно. Мы столкнулись с этим, изучая пространства непрерывных функций с интегральными нормами. Расширение понятия интеграла связано с обобщением понятия длины отрезка вещественной прямой на множества точек вещественной прямой существенно более общей природы.

<u>Мера Лебега.</u> Приведем соответствующие определения.

Мерой $m(a, b)$ интервала называется его длина $m(a, b) = b - a$.

Мерой ограниченного открытого множества называется сумма длин интервалов, составляющих это множество.

Мерой ограниченного замкнутого множества F называется величина

$$mF = b - a - mCF,$$

где $[a, b]$ — отрезок, содержащий множество F, а открытое множество CF — дополнение F до этого отрезка.

Пусть теперь E — произвольное точечное множество, лежащее внутри некоторого отрезка $[a, b]$. Открытое множество G такое, что

$$G \subset E \subset [a, b],$$

называется покрытием множества E. *Внешней мерой* m_eE множества E называется нижняя грань мер открытых множеств, покрывающих множество E. *Внутренней мерой* m_iE множества E называется точная верхняя грань мер замкнутых множеств, содержащихся в E. Множество E называется *измеримым в смысле Лебега*, если его внутренняя и внешняя меры совпадают:

$$mE = m_eE = m_iE.$$

Величину mE называют в этом случае *мерой множества* E.

Понятие меры естественно обобщает понятие длины отрезка и обладает следующими свойствами.

Ограниченные открытые и замкнутые множества измеримы в смысле введенного определения, и их мера Лебега имеет то же значение, которое было определено в начале данного пункта.

Ограниченное множество E, являющееся суммой конечного или счетного числа измеримых множеств E_k, измеримо. Если слагаемые попарно не пересекаются, то

$$mE = \sum_k mE_k.$$

Если множества $E_2,\ E_1$ измеримы, то и их разность E измерима, причем, если $E_1 \subset\ E_2$, то $mE = mE_2 - mE_1$.

Пересечение конечного или счетного множества измеримых множеств измеримо.

Ограниченное счетное множество измеримо, и его мера равна нулю. Например, множество всех рациональных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, измеримо и имеет меру, равную нулю.

<u>Измеримые функции.</u> Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E. Обозначим через $E(f\ >\ a)$ множество $x\ \in\ E$, для которых $f(x)\ >\ a$. Аналогично определяются символы $E(f\ <\ a)$, $E(f\ =\ a)$ и т. п.

Функция $f(x)$ называется *измеримой* на множестве E, если множество E измеримо, и для любого a множество $E(f > a)$ измеримо.

Для измеримой функции измеримы и множества вида

$$E(f \geq a),\ E(f < a),\ E(f = a),\ E(b < f < a)$$

и т. п.

Функция, определенная на множестве меры нуль, измерима, поскольку любая часть этого множества тоже имеет меру нуль. Функции f и g эквивалентны, если

$$mE(f \neq g) = 0.$$

Если f измерима, то и эквивалентная ей функция измерима.

Любая непрерывная на отрезке функция измерима.

Пример измеримой функции — функция Дирихле. Так называется функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0, 1]$ и равная нулю, если x иррационально, и единице, если x рационально. Функция Дирихле эквивалентна тождественно равной нулю функции.

<u>Интеграл Лебега.</u> Понятие интеграла Лебега — существенное обобщение понятия интеграла Римана. Напомним определение последнего.

Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок на части произвольным образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

выберем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ точку ξ_k и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Если сумма σ_n имеет предел при $n \to \infty$, $\max\limits_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1}) \to 0$, и он не зависит от способа дробления отрезка $[a, b]$ и выбора точек ξ_k, то этот предел называется *интегралом Римана* функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$.

Для того, чтобы интеграл Римана существовал, нужно, чтобы функция $f(x)$ была не слишком разрывной. Например, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл Римана существует. В качестве примера функции, не интегрируемой по Риману, можно указать функцию Дирихле. Действительно, на любом отрезке $[x_k,\ x_{k-1}]$ есть как рациональные, так и иррациональные точки, поэтому можно указать такую последовательность интегральных сумм σ_n, которая состоит из чередующихся нулей и единиц и, значит, не имеет предела.

Обобщая понятие интеграла, Лебег предложил следующую конструкцию.

Пусть функция f определена и измерима на измеримом множестве E. Рассмотрим числа A, B такие, что $A \le f(x) \le B$ для всех $x \in E$. Разобьем отрезок $[A, B]$ на произвольные части:

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = B.$$

Пусть $E_k = E(y_{k-1} \le f < y_k)$. Составим сумму

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) mE_k.$$

Предел этой суммы при $n \to \infty$ существует, не зависит от способа дробления отрезка $[A, B]$ и называется *интегралом Лебега* от функции f по множеству E. Обозначение для интеграла по множеству E:

$$\int\limits_E f(x)dx.$$

Интеграл Лебега существует для любой ограниченной измеримой функции. Если функция интегрируема по отрезку $[a, b]$ в смысле Римана, то она интегрируема и в смысле Лебега, и эти интегралы совпадают. В качестве примера функции, интегрируемой по Лебегу и не интегрируемой по Риману, приведем функцию Дирихле. Ясно, что для этой функции $mE_k = 0$ при любом способе разбиения $[A, B]$ и при любом k, следовательно, интеграл Лебега от нее существует и равен нулю.

Свойства интеграла Лебега аналогичны уже привычным нам свойствам интеграла Римана. Приведем некоторые из них:

1) если $c_0 \le f(x) \le c_1 \quad \forall x \in E$, то $c_0 mE \le \int\limits_E f(x)dx \le c_1 mE$;

2) $\int\limits_E (f(x) + g(x))\, dx = \int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx$;

3) $\int\limits_E cf(x)dx = c\int\limits_E f(x)dx$, если $c = const$;

4) если $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in E$, то $\int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx$;

5) $\int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E |f(x)|dx$;

6) если $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны, то $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx$.

Лебег, поясняя различие между его способом интегрирования и интегрированием по Риману, приводил следующий пример. Пусть требуется подсчитать сумму монет, лежащих кучей на столе. По Риману, мы берем подряд монету за монетой, складывая их стоимости. По Лебегу, сначала монеты сортируются по их достоинству. Подсчитывается количество монет каждого достоинства. Нужная сумма есть сумма произведений количества монет каждого достоинства на стоимость соответствующей монеты. Именно так и поступают, когда нужно найти сумму большого количества монет.

3. УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать обратное неравенство треугольника:

$$|\rho(x,z)-\rho(x,z)|\le\rho(x,y)\quad\forall x,\ y,\ z\in X.$$

Р е ш е н и е. Запишем неравенство треугольника

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

откуда

$$\rho(x,z)-\rho(y,z)\le\rho(x,y).$$

Меняя местами x и y, получим

$$-\left(\rho(x,z)-\rho(y,z)\right)\le\rho(y,x)=\rho(y,x).$$

Но два последних неравенства и означают, что

$$|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\le\rho(y,x)=\rho(y,x).$$

2. Показать, что если на множестве R^n ввести расстояние по одной из формул:

$$\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,\tag{18}$$

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\tag{19}$$

то все аксиомы метрики выполняются.

3. Показать, что соотношение (3) действительно определяет метрику на множестве непрерывных функций.

Р е ш е н и е. Проверим выполнение аксиомы треугольника. Справедливость остальных аксиом очевидна. Имеем для любого $x\in[a,b]$

$$|f(x)-g(x)|=|(f(x)-h(x))+(h(x)-g(x))|\le|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\le$$

$$\le\max_{a\le x\le b}|f(x)-h(x)|+\max_{a\le x\le b}|h(x)-g(x)|=\rho(f,h)+\rho(g,h),$$

откуда в силу произвольности x следует, что

$$\rho(f,g)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|\le\rho(f,h)+\rho(g,h),$$

то есть аксиома треугольника выполняется.

4. Показать, что соотношение (4) действительно определяет метрику на множестве непрерывных функций.

Р е ш е н и е. Проверим выполнение аксиомы треугольника. Проверка остальных аксиом очевидна. Для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$|f(x)-g(x)| = |(f(x)-h(x))+(h(x)-g(x))| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|.$$

Интегрируя последнее неравенство по отрезку $[a, b]$, получим (4).

5. Показать, что соотношение (5) определяет метрику на множестве непрерывных функций.

Указание. Рассуждая аналогично доказательству неравенства Коши, установить сначала справедливость неравенства Коши–Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \tag{20}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству неравенства треугольника для евклидова пространства R^n.

6. Доказать неравенство Минковского

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\, dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \tag{21}$$

Р е ш е н и е. Используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\, dx = \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx \leq$$

$$\leq \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} =$$

$$= \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\right)^2,$$

что эквивалентно неравенству Минковского.

7. Изобразить окрестность $S(0, 1)$ в пространстве R^2, когда метрика вводится по формуле: а) (1), б) (18), с) (19).

Ответ: а) внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат; б) внутренность прямоугольника, ограниченного следующими прямыми:

$x_1 = 1,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_2 = -1$; в) внутренность прямоугольника, ограниченного прямыми: $x + y = 1,\ x - y = 1, -x + y = 1, -x - y = 1$.

8. Какие множества пространства R^1 из перечисленных ниже являются ограниченными, открытыми, замкнутыми; указать в этих множествах внутренние точки и предельные точки, не являющиеся внутренними:

$$M_1 = \{0 < x < \infty\}, \quad M_2 = \{0 \le x < \infty\},$$

$$M_3 = \{0 < x < 1\},\ M_4 = \{0 \le x \le 1\},\ M_5 = \{0 < x \le 1\}.$$

9. Показать, что пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с метрикой, определенной соотношением (5), сепарабельно.

Р е ш е н и е. Покажем сначала, что для любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции f и для любого $\varepsilon > 0$ найдется полином

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$$

такой, что

$$\rho(f, P_n) = \sqrt{\int\limits_0^1 (f(x) - P_n(x))^2 dx} \le \varepsilon. \tag{22}$$

Ясно, что

$$\int\limits_0^1 (f(x) - P_n(x))^2 dx \le \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - P_n(x)|^2,$$

поэтому, если выбрать полином $P_n(x)$ так, чтобы выполнялось (7), то (22) выполняется. Таким образом, множество всех полиномов с рациональными коэффициентами всюду плотно в рассматриваемом метрическом пространстве.

10. Показать, что оператор сжатия непрерывен на всем пространстве X.

Р е ш е н и е. Пусть $x_n \to x$. Тогда $\rho(Ax_n, Ax) \le q\rho(x_n, x)$ и, следовательно, может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа, если n достаточно велико. Это и означает, что $Ax_n \to Ax$.

11. Пусть f — дифференцируемая функция вещественной переменной, уравнение $x = f(x)$ имеет решение α, и пусть существуют $r > 0,\ q < 1$ такие, что $|f'(x)| \le q$ при $|x - \alpha| \le r$. Применяя теорему о сжатых отображениях, доказать, что α может быть построено при помощи итерационного процесса

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 1,\ 2,\ \dots,$$

сходящегося при любом начальном приближении x_0 таком, что

$$|x_0 - \alpha| \leq r.$$

Р е ш е н и е. Нетрудно проверить, что отрезок $X = \{|x - \alpha| \leq r\}$ есть полное метрическое пространство с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$. Определим оператор A соотношением $Ax = f(x)$. Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$\rho(Ax, Ay) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq q|x - y|.$$

Кроме того,

$$\rho(\alpha, Ax) = |f(\alpha) - f(x)| = |f'(\xi)||\alpha - x| \leq q|\alpha - x| < |\alpha - x| \leq r.$$

Таким образом, оператор A отображает пространство X в себя и удовлетворяет условию сжатия.

12. Показать, что для расстояния $\rho(x, y) = \|x - y\|$ выполнены все аксиомы метрики.

Р е ш е н и е. Докажем неравенство треугольника. Справедливость остальных аксиом очевидна. Имеем:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + (z - y)\|,$$

откуда в силу неравенства треугольника для нормы получим

$$\rho(x, y) \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

что и требовалось доказать.

13. Показать, что $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$.

Р е ш е н и е. По неравенству треугольника

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

то есть

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Аналогично

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

и, следовательно:

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

Замечание. Установленное нами неравенство означает, что $\|x\|$ — непрерывный функционал на X.

14. Пусть M — множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций. Является ли M линейным множеством? Является ли M подпространством пространства $C[0,1]$?

Р е ш е н и е. Множество M линейно, так как сумма непрерывных дифференцируемых функций — непрерывная дифференцируемая функция, результат умножения дифференцируемой функции на любое число — дифференцируемая функция. Множество M не замкнуто, так как содержит в себе все полиномы, которые образуют всюду плотное множество в пространстве $C[0,1]$. Таким образом, M не подпространство $C[0,1]$.

15. Доказать единственность элементов y, z, фигурирующих в теореме об ортогональном разложении.

Р е ш е н и е. Предположим противное. Пусть $x = y' + z'$, $y' \in L$, z' ортогонален L. Тогда $0 = y - y' + z - z'$ или $y - y' = -(z - z')$, следовательно:

$$(y - y', y - y') = -(z - z', y - y') = 0,$$

так как

$$(z, y) = (z, y') = (z', y) = (z', y') = 0,$$

то есть $\|y - y'\| = 0, y = y'$, но тогда и $z = z'$.

16. Доказать равенство (11).

Р е ш е н и е. Применяя аксиомы линейности и симметрии скалярного произведения нетрудно подсчитать, что

$$(y, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j (e_i, e_j),$$

откуда, используя условие ортонормированности системы e_1, e_2, $\ldots$, e_n, непосредственно получаем (11).

17. Показать, что система функций $e_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x$, $k = 1,\ 2, \ldots,\ n$, ортонормирована в смысле скалярного произведения

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Р е ш е н и е. Пусть $k \neq l$. Тогда

$$(e_k, e_l) = 2 \int_0^1 \sin \pi k x \sin \pi l x dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\cos\pi\,(k-l)\,x - \cos\pi\,(k+l)\,x\right) dx = 0.$$

Если $k = l$, то

$$(e_k, e_k) = 2\int_0^1 \sin^2 \pi k x dx = \int_0^1 (1 - \cos 2\pi k x)\,dx = 1.$$

18. Вычислить норму функционала (15).

Р е ш е н и е. Как показано в пункте 1.5, для любого элемента $x \in C[0,1]$ выполнено неравенство $|f(x)| \le \|x\|$, то есть

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1 \quad \forall x \in C[0,1],\ x \ne 0.$$

Положим теперь $x(t) \equiv 1$. Тогда $1 f(x) = 1$, $\|x\| = 1$, $|f(x)|/\|x\| = 1$, следовательно:

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = 1.$$

19. Показать, что если $f(x) = (x, g) \quad \forall x \in H$, то $\|f\| = \|g\|$.

Р е ш е н и е. Имеем в силу неравенства Коши–Буняковского

$$|f(x)| \le \|g\| \|x\| \quad \forall x \in H.$$

Пусть теперь $x = g$. Тогда $f(x) = (g, g) = \|g\|^2$, $|f(x)|/\|x\| = \|g\|$, следовательно:

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|g\|.$$

20. Показать, что оператор, определяемый соотношением (16), ограничен как оператор, действующий в пространстве непрерывных функций с нормой

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x) dx\right)^{1/2}.$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y) f(y) dy\right)^2 dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\left(\int_0^1 K(x,y) f(y) dy\right)^2 \le \int_0^1 K^2(x,y) dy \int_0^1 f^2(y) dy,$$

следовательно:
$$\|Af\|^2 \leq c^2 \|f\|^2,$$
где
$$c^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,y)dxdy,$$
и ограниченность оператора доказана.

21. Вычислить производную Гато оператора
$$A(f) = \int_0^1 K(x,y)V(f(y))dy,$$
действующего в пространстве $C[0,1]$. Здесь $K(x,y)$ — функция, непрерывная на единичном квадрате $0 \leq x, y \leq 1$, функция $V(t)$ определена и дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Р е ш е н и е. Для любых функций $f,\ h \in C[0,1]$ имеем
$$A(f+th) - A(f) = \int_0^1 K(x,y)(V(f(y)+th(y)) - V(f(y)))dy =$$
$$= \int_0^1 K(x,y)(tV'(f(y)+\theta th(y))h(y)dy,\ \theta \in [0,1],$$
следовательно:
$$A'(f)h = \int_0^1 K(x,y)V'(f(y))h(y)dy.$$
22. Вычислить производную Фреше оператора A, действующего в пространстве R^n и определяемого соотношениями
$$(A(x))_i = f_i(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n),\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$
где f_i — дифференцируемые функции n переменных.

Р е ш е н и е. Для любых $x,\ h \in R_n$ по определению дифференцируемости функции n переменных можно написать:
$$(A(x+h) - A(x))_i = f_i(x_1+h_1,\ x_2+h_2, \ldots,\ x_n+h_n) - f_i(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j + \omega_i(x,h),$$

где $\omega_i(x,h)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$, следовательно, линейный оператор $A'(x)$, определяемый соотношением

$$((A'(x)h)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j,$$

есть производная Фреше оператора A в точке x. Матрица

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n},$$

соответствующая этому оператору, называется матрицей Якоби системы функций $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$.

Список литературы

1. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной М.: Наука, 1974.