ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Дифференциальные уравнения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

"Оценка спектра интегральних средних"

Работа завершена:

«___»_____________2015 г. ______________ Шакиров Н. З.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент

«___»_____________2015 г. ______________ Каюмов И. Р

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«___»_____________2015 г. ______________ Елизаров А. М.

Казань — 2015

Содержание

Введение

Рассмотрим классическую проблему, как растет интегральное среднее конформного отображения

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}|^t d\theta$$

при $r \to 1-$. Также рассмотрим среднее значение производной, которое с практиечской точки зрения, является наиболее важным. Пусть $p \in \mathbb{R}$ и пусть $\beta_f(t)$ наименьшее число такое, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta}|^t d\theta = O((1-r)^{-\beta_f(p)-\epsilon}) \qquad \text{при } r \to 1-$$

для любого $\epsilon > 0$.

Величина $\beta_f(t)$ была введена Н. Г. Макаровым [3], которым была установлена большая разница между интергральным средним фунции и ее производной.Фактически она является порядком роста интергральнего среднего производной

$$\beta_f(t) = \limsup_{r \to 1} \frac{\log \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta}|^t d\theta}{\log\left[1/(1-r)\right]}.$$

Следует отметить, что для областей с хорошими границами этот спектр является кусочно линейной функцией от t, для областей же с фрактальными границами спектр является нелинейной функцией, оценка которой является задачей нетривиальной.

Вообще говоря, введение такой важной характеристики небезосновательно. Связано это с броуновским движением частиц на границе области, вероятность нахождения которых описывается гармонической мерой. Гаромническая мера - это понятие теории гаромнических функций, которое возникло вследствие проблем оцекни модуля аналитических функций внутри области, когда ивестны те или иные оценки модуля на границе области. С точки зрения приложения к тфкп особенное большое значение имеет зависимость гармонической меры от области, выражаемая гармоническим принципом, сущность которого состоит в том, что при отображениях области, осуществляемых однозначными аналитическими функциями $f = f(z)$ гармоническая мера не убывает. В частности, при взаимно однозначном конформном отображениие она не изменяется. Точное вычисление гармонической меры возможно лишь для сымых простых областей с хорошими границами (круга, полуплоскости, шара и т.д)и весьма сложно ддя областей с фрактальными границами . Поэтому большое значение имеют различные методы оценки.

Определим также универсальный спектр интрегральынх средних:

$$B(t) = \sup_f \beta_f(t),$$

где супремум ищется среди всех ограниченных конформных отображений круга D в C.

Существет гипотеза [3]:

$$B(t) = \begin{cases} -t-1, & t \in (-\infty, -2], \\ t^2/4, & t \in [-2, 6-4\sqrt{2}], \\ 3t-1, & t \in [6-4\sqrt{2}, +\infty). \end{cases}$$

Многие математики работали над этой гипотезой. Среди них можно выделить Н.Г.Макарова, Х. Поммеренке, С. Шиморина, Л. Карлесона, С. Смирнова, И. Каюмова и пр.

Х. Поммеренке [1] доказал, что для всех вещественных t имеет место оценка

$$B(t) \leq -\frac{1}{2} + t + \sqrt{1/4 - t + 4t^2}.$$

Х. Хедельман и С. Шиморин [8] улучшили эту оценку. В частности, они показали, что для малых значений параметра t имеет место неравенство

$$B(t) < 0.38t^2.$$

С другой стороны, Н.Г. Макаровым получена оценка снизу для универсального спектра: $B(t) > ct^2$ для малых t. Он использовал классический пример из теории лакунарных рядов:

$$\log f'(z) = \frac{i}{5} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Напомним, что лакунарным степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{c_n},$$

где c_n- лакунарная последовательность с показателем λ, а именно $\frac{c_{k+1}}{c_k} \geq \lambda > 1$. Если $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{c_n}$ лакурный ряд сходится в своем круге сходимости $|z| < R, \quad 0 < R < \infty$, то все точки окружности $z = R$ есть особые для f (Теорема Адамара).

Роде, используя похожий пример, показал, что $B(t) \geq 0.117t^2$ при малых t. Эта оценка была усилена И. Каюмовым. до $\frac{t^2}{5}$ [6].

Л. Карлесон и П. Джонс [2] высказали достаточно смелое предположение, что универсальный спектр $B(t)$ максимизируется на бассейнах притяжения для квадратичных полиномов. Эту гипотезу они подкрепили компьютерными вычислениями (с использоованием эвристических алгоритмов) показав, что $B(1) \geq 0.23$. Используя их идеи и методы, Ф. Крецер получил эксперементальные оценки

$$B(t) \geq \frac{t^2}{4}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Недвавно, Смирнов и Беляев более обоснованно показали, что $B(1) \geq 0.234$.

Вообще говоря такая задача как вычисление спектра интергарльних средних для конкрнетных областей с фрактальными границамии явлется очень нетривиальной задачей. В работе [10] установлен эффективный алгоритм, позволяющий вычислить этот спектр с очень большой точностью для лаккунарных рядов Адамара с показателем 2, в частности для примера типа Макарова. Как следствие, он получил $\beta_f(t) \leq \frac{t^2}{4}$ для конформных отображений, порожденных лаккунареыми рядами с показателем лаккунарности 2. Следует также отметить, что оценка спектра интегральных средних для лаккунарных рядов, полученная Роде являются эффективной лишь для малых значений t, в то время как его оценка эффективна для всех $t > 0$.

В нашей работе получена реккурентная формула для вычисления спектра лакунарных рядов с проирвольным поазателем $p \geq 2$.В частности, для $p = 2$ получаются результаты как и в [10].

Основные результаты

Итак, наша основная задача состоит в вычислении спектра интегральных средних для функции f, у которой

$$f'(z) = 2^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{p^n}} \tag{1}$$

Функция f, определенная в (1), не является однолистной, но зная ее спектр интегральных средних легко вычислить его и для функции вида

$$g'(z) = d^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{p^n}},$$

которые будут однолистными для некоторых значений параметра d, например $|\log d| \leq 1/3$.

Нетрудно показать, что

$$\beta_f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln I_n(t)}{(n+1)\ln 2},$$

где

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} q^{\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(p^k s)} ds, q = 2^t,$$

Интеграл I_n сравним с функциями

$$f_n(x,t) = \frac{1}{p^n}\sum_{j=1}^{p^n} q^{w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]}, q = 2^t,$$

где

$$w_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \cos(p^m x).$$

В самом деле, по теореме о среднем

$$I_n(t) = \frac{1}{p^n}\sum_{j=1}^{p^n} q^{w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]},$$

где $x_k \in [0,\pi]$. Ввиду того, что

$$\left| w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x_k}{p^n}\right] - w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right] \right| =$$

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left[\frac{2\pi(j-1)+x_k}{p^{n-m}}\right] - \cos\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^{n-m}}\right] \right| =$$

$$\left| 2\sum_{m=0}^{n-1} \sin\left[\frac{4\pi(j-1)+x_k+x}{p^{n-m+1}}\right] \sin\left[\frac{x_k-x}{p^{n-m}}\right] \right| \leq$$

$$2|x_k - x| \sum_{m=0}^{n-1} p^{m-n} \leq \frac{2}{p-1}|x_k - x| \leq 2\pi,$$

имеем

$$q^{-2\pi} f_n(x,t) \leq I_n(t) \leq q^{2\pi} f_n(x,t)$$

Отсюда следует, что

$$\beta_f(t) = \frac{\ln k(t)}{\ln 2}, \text{где } k(t) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x_n,t)} \tag{2}$$

причем последний предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \subset [0,\pi]$.

Отметим, что из равенства $k(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x,t)}$ вытеакет также равенство $k(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)}$ в предположении, что этот предел существует.

Можно показать, что если $x_n > 0$, то

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 * x_2 \ldots x_{n-1} * x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

причем пределы правой и левой частей сущесвтуют и равны $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Положим $x_n = \frac{f_n(x,t)}{f_{n-1}(x,t)}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x_n,t)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_1(x,t) * \frac{f_2(x,t)}{f_1(x,t)} \cdots \frac{f_{n-1}(x,t)}{f_{n-2}(x,t)} * \frac{f_n(x,t)}{f_{n-1}(x,t)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x,t)}{f_{n-1}(x,t)}$$

Для доказательсвтва основного результата на понадобится

Лемма. *Для любых $x, y \in [0,\pi]$ имеет место оценка*

$$\left|\frac{f_n(x,t)}{f_n(y,t)}\right| \leq q^{|x-y|}$$

Доказательство. Имеем

$$|\partial_x f_n(x,t)| = \left| \frac{\log q}{p^n} \sum_{j=1}^{p^n} p^{-n} w_n' \left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right] q^{w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]} \right| \leq$$

$$\frac{\log q}{p^n} \sum_{j=1}^{p^n} q^{w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]} = (\log q) f_n(x,t),$$

откуда сразу получаем, что

$$|\partial_x \log f_n(x,t)| \leq \log q$$

Интегрируя по x последнее неравенство, доказываем лемму

$\square$

Теорема 1.

$$f_n(x,t) = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}\right]} \right)$$

Доказательство.

$$f_n(x,t) = \frac{1}{p^n} \sum_{j=1}^{p^n} q^{w_{n-1}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]} =$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \sum_{j=1}^{pp^{n-1}} q^{w_{n-2}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]} q^{\cos\left[p^{n-1}\left(\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right)\right]} \right) =$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \sum_{j=1}^{pp^{n-1}} q^{w_{n-2}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]} q^{\cos\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p}\right]} \right)$$

Переменная j пробегает значения от 1 до pp^{n-1}. Разобъем последнюю сумма на p сумм, сделав замену:

$$\begin{aligned} j &= pj_1 - (p-1); \\ j &= pj_2 - (p-2); \\ &\vdots \qquad \vdots \\ j &= pj_k - (p-k); \\ &\vdots \qquad \vdots \\ j &\qquad = pj_p. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \sum_{j=1}^{pp^{n-1}} q^{w_{n-2}\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p^n}\right]} q^{\cos\left[\frac{2\pi(j-1)+x}{p}\right]} \right) =$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j_k=1}^{p^{n-1}} q^{w_{n-2}\left[\frac{2\pi(pj_k-(p-k+1))+x}{p^n}\right]} q^{\cos\left[\frac{2\pi(pj_k-(p-k+1))+x}{p}\right]} \right) =$$

$$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j_k=1}^{p^{n-1}} q^{w_{n-2}\left[\frac{\frac{2\pi}{p}(pj_k-(p-k+1))+\frac{x}{p}}{p^{n-1}}\right]} q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} \right) =$$

$$\frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{j_k=1}^{p^{n-1}} q^{w_{n-2}\left[\frac{2\pi(j_k-1)+\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}}{p^{n-1}}\right]} q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} \right) =$$

$$\frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t \right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} \right)$$

□

Теорема 2. $f_n(x,t) - 2\pi$*-периодическая, четная функция и*

$$f_n(x,t) = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=m}^{p+(m-1)} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t \right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} \right),$$

где m*—любое фиксированое целое число*

Доказательство.

Докажем по индукции. При $n = 0$ $f_0(x,t) = 1$. Предположим, что утвержление выполнено для $n-1$. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right)$$

так как $f_{n-1}(x,t)$ – 2π-периодическии функции, то

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \frac{1}{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(p-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(p-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1}{p})+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} +$$

$$+\frac{1}{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(p-1)}{p}-2\pi+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(p-1)}{p}-2\pi+\frac{x}{p}\right]} =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-1} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + f_{n-1}\left(\frac{-2\pi}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{-2\pi}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}-\frac{2\pi}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}-\frac{2\pi}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right)$$

Проводя такую процедуру m раз получаем:

$$f_n(x,t) = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}-\frac{2\pi m}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}-\frac{2\pi m}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) = f_n(x-2\pi m,t)$$

Четность также докажем по индукции.При $n = 0$, $f_0(x,t) = 1$. Предположим, что утвержление выполнено для $n-1$, тогда

$$f_n(-x,t) = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(-\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[-\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(-\frac{2\pi(k-1)}{p}+2\pi+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[-\frac{2\pi(k-1)}{p}+2\pi+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{2\pi}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{2\pi}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x+2\pi}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{2\pi}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) = f_n(x+2\pi,t) = f_n(x,t)$$

$$f_n(x,t) = f_n(x+2\pi(m-1),t) =$$
$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k+m-2)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k+m-2)}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right) =$$
$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=m}^{p+m-1} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]}\right), m \in Z$$

□

Если мы положим $m = \left[\frac{p}{2}\right] - 1$, где [ ]-целая часть,то используя свойства функции $f_n(x,t)$, получаем

$$f_n(x,t) =$$
$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)$$

при этом ,если $x \in [0,\pi]$,то значения аргументов функций не выходят за пределы этого отрезка, так как:

$$0 \le x \le \pi,$$
$$0 \le \frac{x}{p} \le \frac{\pi}{p},$$
$$0 \le \frac{2\pi(k-1)}{p} \le \frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p} \le \frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{\pi}{p} \le \pi,$$

при $k \in Z \cap \left[1, p - \left[\frac{p}{2}\right]\right]$

Итак сформулируем и докажем теперь наш основной результат.

Теорема 3. *Спектр интегральных средних функции (1)может быть вычислен по формуле*

$$\beta_f(t) = \frac{\log k(t)}{\log 2},$$

где

$$k(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)},$$

причем последний предел не зависит от x *и для любого натурального* n *имеют место оценки:*

$$\min_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)} \le k(t) \le \max_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)} \tag{3}$$

Доказательство. Полагая

$$C_n(t) = \max_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)},$$

оценим

$$\frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_n\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_n\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)}{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)} \leq$$

$$\frac{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} C_{n-1}(t) f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} C_{n-1}(t) f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)}{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)} =$$

$$= C_{n-1}(t)$$

$$C_n(t) = \max_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)} \leq C_{n-1}$$

Так как $C_n(t)$ ограничена снизу нулем и убывает, то отсюда сразу вытекает правая часть (3), а также сущестование предела

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} C_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)}.$$

Аналогично доказывается существоание предела

$$B(t) = \lim_{n\to\infty} \min_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)}.$$

оценим

$$\frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_n\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_n\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)}{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)} \geq$$

$$\frac{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} B_{n-1}(t) f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} B_{n-1}(t) f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)}{\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} f_{n-1}\left(\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p},t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)} =$$

$$= B_{n-1}(t)$$

$$B_n(t) = \min_{x\in[0,\pi]} \frac{f_{n+1}(x,t)}{f_n(x,t)} \geq B_{n-1}$$

Так как $B_n(t)$ ограничена сверху $A(t)$ и возрастает , то отсюда сразу вытекает левая часть (3), а также сущестование предела.

Из леммы следует, что функции $f_n(x,t)/f_n(0,t)$ имеют равномерно ограниченную вариацию. По теореме Хелли из них можно выделить сходящую подпоследовательность $f_{n_j}(x,t)/f_{n_j}(0,t)$.

Положим

$$g_n(x,t) = \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x,t)/f_{n_j}(0,t)$$

и заметим, что из леммы следует неравество

$$\left|\frac{g_n(x,t)}{g_n(y,t)}\right| \leq q^{|x-y|}. \tag{4}$$

По построению функции g имеют место равенства :

$$\max_x \frac{g_{n+1}(x,t)}{g_n(x,t)} = A(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Положим $n = 1$. Тогда

$$\frac{g_2(x,t)}{g_1(x,t)} =$$

$$\frac{\frac{1}{p}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} g_1\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} g_1\left(\frac{2\pi k}{p} - \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)}{\frac{1}{p}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} g_0\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} g_0\left(\frac{2\pi k}{p} - \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)} \leq$$

$$\frac{\frac{1}{p}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} A(t)g_0\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} A(t)g_0\left(\frac{2\pi k}{p} - \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)}{\frac{1}{p}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-\left[\frac{p}{2}\right]} g_0\left(\frac{2\pi(k-1)}{p} + \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{p}+\frac{x}{p}\right]} + \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} g_0\left(\frac{2\pi k}{p} - \frac{x}{p}, t\right) q^{\cos\left[\frac{2\pi k}{p}-\frac{x}{p}\right]}\right)} =$$

$$= A(t)$$

Причем равенство должно достигаться в некторой точке x, т.е., существует x_1, такое, что

$$\frac{g_1(\frac{x_1}{2},t)}{g_0(\frac{x_1}{2},t)} = A(t).$$

Аналогично, нетрудно показать, что найдется $x_2 \in [0,\pi]$, такое, что

$$\frac{g_1(\frac{x_2}{4},t)}{g_0(\frac{x_2}{4},t)} = A(t),$$

и вообше, продолжая наши рассуждения, заключаем, что дл ялюбого натурального m существует $x_m \in [0, \pi]$, такое, что

$$\frac{g_1(\frac{x_m}{2^m}, t)}{g_0(\frac{x_m}{2^m}, t)} = A(t).$$

Совершая предельный преход при $m \to \infty$ и принимая во внимание неравенство (4) отсюда получаем , что

$$\frac{g_1(0, t)}{g_0(0, t)} = A(t).$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{g_1(0, t)}{g_0(0, t)} = B(t).$$

Отсюда следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x, t)}{f_n(x, t)}$$

существует и равен $A(t) = B(t)$. Теперь из (2) следует, что

$$A(t) = B(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x, t)}{f_n(x, t)} = k(t).$$

Теорема 3 доказана. □

Следствие 1. *Пусть функция f конформно отображает круг D на односвязную область на плоскости. Предположим, что*

$$\log f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n},$$

причем существет предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Тогда

$$\beta_f(t) \le \frac{t^2}{4}, \quad |t| \le 1.$$

Доказательство. Из результатов работы 9 следует, что $|a| \le \log 2$. Без огрнаничения общности также можно предполагать, что $a, t \ge 0$.Ясно, что спектр будет максимальным для случая $a = \log 2$. Далее, без ограничения общности будем рассматривать

$$\log f'(z) = \log 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} z^{2^n},$$

поскольку спектр интегральных средних зависит только от a и не зависит от начальних коэффицентов.

Из наших рассуждений непосредственно следует оценка

$$k(t) \le \frac{f_{n+1}(0, t)}{f_n(0, t)}.$$

Полагая $n = 2$, получаем

$$k(t) \leq \frac{q}{2} + \frac{q^{1/\sqrt{2}} + q^{-1/\sqrt{2}}}{2 + q + q^2}, \quad t \geq 0,$$

и следовательно

$$\beta_f(t) \leq \log\left(\frac{q}{2} + \frac{q^{1/\sqrt{2}} + q^{-1/\sqrt{2}}}{2 + q + q^2}\right)/log2 \leq \frac{t^2}{4}, \quad t \in (0, 1),$$

что и завершает доказательство следствия □

Список литературы

[1] Ch. Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, *Springer-Verlag, Berlin*, 1992.

[2] L. Carleson, P.W.Jones, On coefficient problems for univalent funtions and conformal dimension,*Duke Math. J.* **66**, N 2(1992), 169-206.

[3] Makarov, Fine structure of Harmonic measure, *St. Petersg. Math. J.* 10, № (1992),217-268

[4] Ch. Pommerenke,On the Integral Means of the Derivative of a Univalent Function J. London Math. Soc. (1985) s2-32(2):254-258

[5] Makarov, A note on the integral means of the derivative is conformal mapping,*Proc. Amer. Math. Soc.* **96** (1986), 233-236.

[6] I.R. Kayumov, Lower estimates for integral means of univalent functions. Arkiv for Matematic 44 (1), 104-110.

[7] Beliaev, Dmitri; Smirnov, Random conformal snowflakes. Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 1, 597-615.

[8] H.Hedenmalm,S.Shimorin, On the universal integral means spectrum of conformal mappings near the origin, *Proc. American Math. Soc.* 135 (2007),2249-2255

[9] I.R. Kayumov. A.Distortion, Theorem for Univalent Gap Series. Siberian Mathematical Journal November 2003, Volume 44, Issue 6, pp 997-1002

[10] И.Р. Каюмов, Д.В. Маклаков, Ф.Д. Каюмов, Оценки спектра интегральных средних для лакунарных рядов. // Известия вузов. Математика 2014, No 10, c. 79-85